

Analisi Matematica 2 - Corso di Laurea in INGEGNERIA  
DELL'ENERGIA e INGEGNERIA CHIMICA

(A.A. 2019/2020)

Assignment II, Scritto 15.2.2021

Problema 2. Sia  $a > 0$  e  $R > 1$ . Vedere se l'integrale

$$I(a, R) = \int_{\Omega_R} \frac{R^{3/2} \sin(9\pi/2 - xa) dx dy}{R^2 x^2 + R^2 y^2 + 1},$$

dove

$$\Omega_R = \left\{ (x, y); \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \leq R^2 \right\}$$

ha limite quando  $R \rightarrow \infty$  e se esiste il limite calcolarlo.

Breve soluzione . Usando la stima

$$\frac{R^{3/2} \sin(9\pi/2 - xa)}{R^2 x^2 + R^2 y^2 + 1} \leq R^{-1/2} \frac{1}{x^2 + y^2}$$

ed il fatto che

$$\{(x, y); x^2 + y^2 \leq R^2\} = B_R \subset \Omega_R \subset B_{2R} = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 4R^2\}$$

abbiamo

$$\left| I(a, R) - \int_{\Omega_R} \frac{R^{3/2} \sin(9\pi/2 - xa) dx dy}{R^2 x^2 + R^2 y^2 + 1} \right| \leq \int_{B_{2R} \setminus B_R} \frac{R^{-1/2} dx dy}{x^2 + y^2}$$

Per l'integrale

$$\int_{B_{2R} \setminus B_R} \frac{R^{-1/2} dx dy}{x^2 + y^2}$$

e l'altro integrale

$$\int_{B_R} \frac{R^{3/2} \sin(9\pi/2 - xa) dx dy}{R^2 x^2 + R^2 y^2 + 1}$$

2

usiamo coordinate polari e troviamo

$$\left| \int_{B_{2R} \setminus B_R} \frac{R^{-1/2} dx dy}{x^2 + y^2} \right| \leq R^{-1/2} (2\pi) \int_R^{2R} \frac{dr}{r} \rightarrow 0.$$

Abbiamo inoltre

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \frac{R^{3/2} \sin(9\pi/2 - xa) dx dy}{R^2 x^2 + R^2 y^2 + 1} &= R^{-1/2} \int_{B_R} \frac{\cos(xa) dx dy}{x^2 + y^2 + 1/R^2} \\ R^{-1/2} \int_{B_1} \frac{\cos(xa) dx dy}{x^2 + y^2 + 1/R^2} &+ R^{-1/2} a^{-1} \int_{B_R \setminus B_1} \frac{\partial_x(\sin(xa)) dx dy}{x^2 + y^2 + 1/R^2}. \end{aligned}$$

Per la quantità

$$R^{-1/2} \left| \int_{B_1} \frac{\cos(xa) dx dy}{x^2 + y^2 + 1/R^2} \right| \leq R^{-1/2} \left| \int_{B_1} \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1/R^2} \right|$$

dopo coordinate polari ci da

$$R^{-1/2} \int_0^1 \frac{r dr}{r^2 + 1/R^2} \rightarrow 0.$$

Rimane a studiare

$$R^{-1/2} a^{-1} \int_{B_R \setminus B_1} \frac{\partial_x(\sin(xa)) dx dy}{x^2 + y^2 + 1/R^2}.$$

Usiamo integrazione per parti ed arriviamo a

$$\int_{B_R \setminus B_1} \cos(xa) \partial_x \left( \frac{1}{x^2 + y^2 + 1/R^2} \right) dx dy \leq C$$

perché

$$\left| \partial_x \left( \frac{1}{x^2 + y^2 + 1/R^2} \right) \right| \leq \frac{C}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

□

Remark 1. Regole durante lo scritto:

1. La videocamera deve essere sempre accesa

2. Tenere lo smartphone sempre visibile sul tavolo, il cellulare si usa per vedere il testo del compito i primi 5-10 minuti e poi deve essere SPENTO e CAPOVOLTO

3. Durante lo svolgimento della prova é vietato l'utilizzo di appunti, libri, della tastiera del PC/Mac/tablet o del mouse a meno che non sia richiesto dal docente;

4. Il docente sorveglia gli studenti durante la prova e risponde in chat ad eventuali domande.

5. Dopo svolgimento del esercizio (quando scade il tempo di 1 ora per lo svolgimento di esercizio) lo studente utilizza SOLO CELLULARE per fare la foto e preparare UNICO pdf,jpg file . Lo studente dopo aver preparato file deve restare seduto con web accesa e senza scrivere sul foglio. Lo studente NON DEVE INSERIRE FILE IN TEAM prima che il docente glielo comunichi.

6. La prova dura 1 ora. SOLO dopo 1 ora lo studente puo scattare foto del suo elaborato.

7. Prima di inviare la soluzione TRAMITE CELLULARE lo studente contatta il docente, il docente controlla il foglio della soluzione, se necessario farà una foto. Solo dopo lo studente può inviare la soluzione.