

Analisi Matematica 2 - Corso di Laurea in INGEGNERIA
DELL'ENERGIA e INGEGNERIA CHIMICA

(A.A. 2019/2020)

Assignment I, Scritto 15.2.2021

Problema 1. Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{aligned}\dot{M}(t) &= -M(t)^2 - N^2(t) \\ \dot{N}(t) &= -M(t)N(t) - N(t)^2\end{aligned}\quad (1)$$

con dati iniziali

$$M(0) = \mu_0 > 0, N(0) = \nu_0 > \mu_0.$$

Vedere se esiste soluzione globale per $t > 0$, tale che $M(t) > 0, N(t) > 0$.

Breve soluzione . Supponiamo la soluzione globale $(M(t), N(t))$ con $M(t) > 0, N(t) > 0$ esiste per ogni $t > 0$ e quindi la curva $(M(t), N(t)), t > 0$, avvicina origine per $t \rightarrow \infty$. Sia $m(t)$ soluzione del problema

$$\begin{aligned}\dot{m}(t) &= -2m(t)^2 \\ m(0) &= \mu_0 > 0.\end{aligned}\quad (2)$$

Si vede che $m(t) = \frac{\mu_0}{1+2t\mu_0}$ e

$$\tilde{M}(t) = m(t), \tilde{N}(t) = m(t)$$

e una soluzione tale che la curva $(M(t), N(t)), t > 0$, non puo intersecare il segmento che collega (μ_0, μ_0) e l'origine grazie al teorema di unicità di Cauchy.

Nostro ipotesi di esistenza globale implica che la curva $(M(t), N(t)), t > 0$, avvicina origine per $t \rightarrow \infty$ con $N(t) > M(t)$.

Dalla equazione $\dot{N}(t) = -M(t)N(t) - N(t)^2$ e la disequazione $M(t) > 0, N(t) > 0$ troviamo

$$\dot{N}(t) \leq -N(t)^2$$

2

e quindi

$$N(t) \leq \frac{v_0}{1 + tv_0} = v(t). \quad (3)$$

Abbiamo anche $(N - M)'(t) = -M(N - M) \leq (N - M)^2 - N(N - M) \geq (N - M)^2 - v(N - M)$ e quindi il principio di confronto ci da $N(t) - M(t) \geq y(t)$ dove $y(t)$ soddisfa

$$y' = y^2 - vy, \quad y(0) = v_0 - \mu_0.$$

Computing

$$\int_0^t v(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{v_0}{1 + \tau v_0} d\tau = \ln(1 + tv_0),$$

we find

$$\left(e^{\int_0^t v(\tau) d\tau} y(t) \right)' = e^{\int_0^t v(\tau) d\tau} (y' + vy)$$

so setting

$$z(t) = e^{\int_0^t v(\tau) d\tau} y(t)$$

we find

$$z'(t) = e^{-\int_0^t v(\tau) d\tau} z^2(t) = \frac{z^2}{(1 + tv_0)}$$

with initial data $z(0) = v_0 - \mu_0 > 0$. L'equazione e con variabili separati e la soluzione esplicita mostra che $z(t)$ esplose, quindi lo fa anche $N(t) - M(t)$. \square

Remark 1. Regole durante lo scritto:

1. La videocamera deve essere sempre accesa
2. Tenere lo smartphone sempre visibile sul tavolo, il cellulare si usa per vedere il testo del compito in i primi 5-10 minuti e poi deve essere SPENTO e CAPOVOLTO
3. Durante lo svolgimento della prova é vietato l'utilizzo di appunti, libri, della tastiera del PC/Mac/tablet o del mouse a meno che non sia richiesto dal docente;
4. Il docente sorveglia gli studenti durante la prova e risponde in chat ad eventuali domande.
5. Dopo svolgimento del esercizio (quando scade il tempo di 1 ora per lo svolgimento di esercizio) lo studente utilizza SOLO CELLULARE per fare la foto e preparare UNICO pdf,jpg file . Lo studente dopo aver

preparato file deve restare seduto con web accesa e senza scrivere sul foglio. Lo studente NON DEVE INSERIRE FILE IN TEAM prima che il docente glielo comunichi.

6. La prova dura 1 ora. SOLO dopo 1 ora lo studente puo scattare foto del suo elaborato.

7. Prima di inviare la soluzione TRAMITE CELLULARE lo studente contatta il docente, il docente controlla il foglio della soluzione, se necessario farà una foto. Solo dopo lo studente puó inviare la soluzione.