

Analisi Matematica 2 - Corso di Laurea in INGEGNERIA
DELL'ENERGIA e INGEGNERIA CHIMICA

(A.A. 2019/2020)

Assignment I e II, Scritto 5.11.2020

Problema. Vedere se il problema di Cauchy

$$y'(t) = e^t y - \frac{y^3}{2}, \quad y(0) = 1,$$

ha soluzione in intervallo $t \in (0, \infty)$.

Breve soluzione . Se la soluzione $y(t)$ esiste nel intervallo $(0, T)$ si vede che la soluzione rimane sempre positiva in $(0, T)$. Segue del teorema di Cauchy di esistenza di unica soluzione. In fatti, se t_0 é il primo valore in $(0, T)$ tale che $y(t_0) = 0$, il teorema di Cauchy implica che $y(t) \equiv 0$ e abbiamo contraddizione.

Se non esiste soluzione in $(0, \infty)$ il principio di prolungamento implica che esiste $T > 0$ e soluzione POSITIVA $y(t) \in C(0, T)$, tale che

$$\lim_{t \nearrow T} y(t) = \infty.$$

Utilizziamo il principio di confronto con

$$Y'(t) = e^t Y(t), \quad Y(0) = 1$$

e troviamo

$$0 < y(t) < Y(t) = e^{e^t - 1}.$$

Questo é in contraddizione con

$$\lim_{t \nearrow T} y(t) = \infty.$$

In conclusione esiste soluzione POSITIVA definita in $(0, \infty)$.

□

Problema. a) studiare l'esistenza del integrale improprio

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(xy) dy, \quad x = \frac{\pi}{2};$$

b) Studiare l'esistenza del integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin x \cos(xy) dx dy$$

e nel caso di esistenza del integrale improprio calcolarlo.

Breve soluzione a) . Usando integrazione per parti troviamo

$$\int_{-R}^R \cos(xy) dy = \frac{\sin(xR)}{x}$$

se $x = \pi/2$ e $R = 2k$ abbiamo

$$\frac{\sin(xR)}{x} = 0$$

mentre per $R = 4k + 1$

$$\frac{\sin(xR)}{x} = \frac{2}{\pi}$$

e quindi l'integrale non esiste. □

Breve soluzione b) . Usando integrazione per parti troviamo

$$\int_{-R}^R e^{-x^2} \sin x \int_{-R}^R \cos(xy) dy dx = \int_{-R}^R e^{-x^2} \sin x \sin(xR) \frac{dx}{x}$$

e usando la sostituzione $xR = r$ possiamo scrivere

$$\int_{-R}^R e^{-x^2} \sin x \sin(xR) \frac{dx}{x} = \int_{-R^2}^{R^2} e^{-r^2/R^2} \sin\left(\frac{r}{R}\right) \frac{\sin r}{r} dr = 0$$

perche la funzione sotto l'integrale e dispari. □

Remark 1. Regole durante lo scritto:

1. La videocamera deve essere sempre accesa
2. Tenere lo smartphone sempre visibile sul tavolo, il cellulare si usa per vedere il testo del compitino i primi 5-10 minuti e poi deve essere SPENTO e CAPOVOLTO
3. Durante lo svolgimento della prova é vietato l'utilizzo di appunti, libri, della tastiera del PC/Mac/tablet o del mouse a meno che non sia richiesto dal docente;
4. Il docente sorveglia gli studenti durante la prova e risponde in chat ad eventuali domande.
5. Dopo svolgimento del esercizio (quando scade il tempo di 1 ora per lo svolgimento di esercizio) lo studente utilizza SOLO CELLULARE per fare la foto e preparare UNICO pdf,jpg file . Lo studente dopo aver preparato file deve restare seduto con web accesa e senza scrivere sul foglio. Lo studente NON DEVE INSERIRE FILE IN TEAM prima che il docente glielo comunichi.
6. La prova dura 1 ora. SOLO dopo 1 ora lo studente puo scattare foto del suo elaborato.
7. Prima di inviare la soluzione TRAMITE CELLULARE lo studente contatta il docente, il docente controlla il foglio della soluzione, se necessario farà una foto. Solo dopo lo studente può inviare la soluzione.