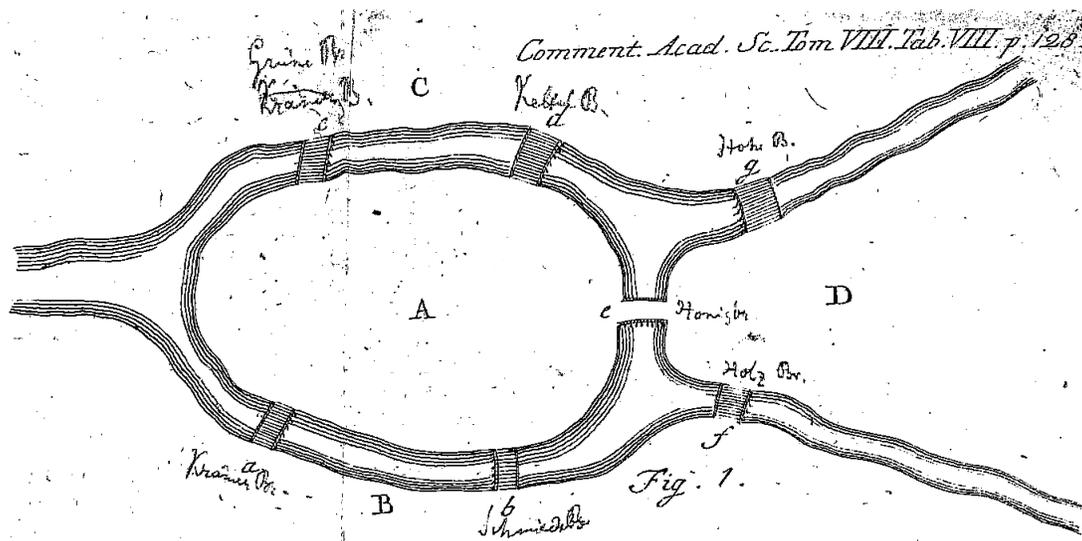


Forme, trasformazioni e topologia.

*Resoconto del Laboratorio svolto durante la Settimana Matematica 2008
presso il Dipartimento di Matematica dell' Università di Pisa*

E. Delucchi, G. Gaiffi, L. Pernazza

con Appendice a cura di Marco Golla



Il disegno in copertina riproduce l'illustrazione originale dei ponti di Königsberg che si trova nell'articolo "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis" [9], dove Eulero dimostra l'impossibilità di effettuare una passeggiata che attraversi ogni ponte esattamente una volta tornando al punto di partenza.

Indice

Capitolo 0. Premessa	5
Capitolo I. Primo giorno	7
1. Si comincia da una pizza...	7
2. Poliedri, poligoni e molti dubbi	9
3. La formula di Eulero e l'idea di trasformazione topologica	14
4. Le trasformazioni topologiche	19
5. Alcuni famosi problemi di natura topologica	22
Capitolo II. Secondo giorno	31
1. Il teorema della curva di Jordan	31
2. Il problema delle colorazioni delle cartine	33
3. Altri problemi per il laboratorio	38
Capitolo III. Terzo giorno	43
1. Cosa è una superficie	43
Capitolo IV. Approfondimento	57
1. Il Primo Teorema	57
2. Eulero e i suoi ponti	58
3. Alberi e foreste	60
4. Un'iniezione di topologia	63
5. Colorabilità	67
6. PoliCromaticità	70
Capitolo V. Appendice. Il laboratorio: problemi risolti e altri racconti.	75
Primo giorno: Poligoni, poliedri e trasformazioni	75
Secondo giorno: Curve, cartine e colori	81
Terzo giorno: Forme a pezzi	89

0. Premessa

Dal 4 all'8 febbraio 2008 si è svolta a Pisa la quarta *settimana matematica* per gli studenti delle scuole superiori organizzata dal Dipartimento di Matematica dell'Università. Fra le varie attività previste all'interno di questa manifestazione, ci sono dei "laboratori", pensati per mettere gli studenti a diretto contatto con l'attività matematica e proporre loro di cimentarsi nello studio di problemi e situazioni nuove.

Questo scritto contiene un resoconto del laboratorio *Forme, trasformazioni e topologia...*, curato dagli autori, al quale hanno contribuito, nel ruolo di tutori, anche Marco Golla e Giulio Tiozzo. Nasce dunque come una semplice testimonianza di una esperienza didattica che ci è sembrata molto interessante e non pretende di essere un testo completo sull'argomento. Rimandiamo per questo il lettore interessato al testo *Forme, simmetria e topologia* di M. Dedò [5].

Nelle nostre lezioni abbiamo fin dall'inizio cercato di mettere in luce che, nascosta nella geometria dei poliedri e dei poligoni, fra spigoli, segmenti, lati, misure, angoli e angoli diedri, c'è un'altra geometria, quella in cui le figure "si possono deformare", che permette di individuare alcune proprietà fondamentali e costitutive degli oggetti geometrici. Di questa "geometria profonda" si occupa la topologia.

Abbiamo proposto agli studenti molte classiche domande che chiamano in causa la topologia: in cosa differiscono una sfera e una ciambella col buco? O una sfera e un palloncino col filo? In che senso "si assomigliano" una sfera senza un punto e un piano? È possibile un cammino che percorre i sette ponti della città di Königsberg senza ripassare mai due volte dallo stesso ponte? Quanti colori sono necessari per colorare una buona cartina geografica?

Nel nostro "racconto" abbiamo sottolineato come molto spesso la topologia si occupi di percorsi e cammini che si possono immaginare su un oggetto geometrico. E se la topologia (a partire da Eulero) chiama in causa la teoria dei grafi, anche in questo caso i percorsi, i cammini lungo i lati di un grafo, sono protagonisti.

Questo ci ha dato lo spunto per trovare, insieme agli studenti, un suggestivo paragone: come per conoscere una città che vediamo per la prima volta la si deve percorrere a piedi, provando e riprovando, così sembra proprio che la topologia ci insegni che per "conoscere" un oggetto geometrico si può metterlo alla prova percorrendolo in molti modi, oppure schematizzarlo con un grafo significativo e percorrere quello.

Bisogna dire che nel parlare di topologia non abbiamo sempre usato lo stile più rigoroso; abbiamo preferito invece cercare di descrivere le idee di fondo e di far intuire il tipo di argomentazioni che si usano, facendo più esempi e aggiungendo figure e diagrammi per spiegare anche visivamente; seguiamo d'altra parte in questo una tradizione consolidata (vedi l'introduzione al quinto capitolo di [4]).

Il laboratorio era organizzato in tre giornate, per un totale di 9 ore. Ogni giornata è stata suddivisa in due "tempi": la lezione e la sessione di studio, durante la quale gli studenti hanno potuto dedicarsi, divisi in piccoli gruppi e assistiti dai tutori, allo studio dei

problemi proposti. L'ultima giornata ha avuto in realtà un carattere leggermente diverso: i problemi sollevati durante la lezione sono stati lasciati agli studenti come “sfide” su cui meditare con calma a casa, mentre la sessione di studio è stata trasformata in un vero laboratorio di costruzione di poliedri con cannuce e scotch e di superfici con carta e colla.

Nei primi tre capitoli di questo resoconto, che corrispondono alle tre giornate del laboratorio, abbiamo cercato di riproporre lo stile colloquiale usato in queste minilezioni. Il quarto capitolo contiene invece una presentazione più formale dei primi aspetti della teoria dei grafi. Ci è sembrato infatti opportuno proporre al lettore interessato un “assaggio” di qualche pagina di matematica scritta con stile diverso: la teoria dei grafi, d'altronde, si presta bene ad una prima descrizione elementare e al tempo stesso rigorosa.

L'appendice, a cura di Marco Golla, ci offre una lettura di questo laboratorio dal punto di vista delle “sessioni di studio”: contiene una breve descrizione dell'attività dei ragazzi e delle domande, risposte e spunti che sono scaturiti, con l'aiuto dei tutori, dal loro lavoro.

Il nostro primo ringraziamento va agli organizzatori della *settimana matematica*, Rosetta Zan e Pietro Di Martino. Vorremmo inoltre ringraziare Thomas Zaslavsky per interessanti suggerimenti a riguardo della presentazione della teoria dei grafi, e Alberto Abbondandolo per varie discussioni sulla presentazione del concetto di poliedro e poligono (segnaliamo, fra l'altro, il resoconto [1], disponibile online, di un seminario didattico da lui tenuto, nello spirito del testo di Lakatos [13]).

I. Primo giorno

Poligoni, poliedri e deformazioni.

1. Si comincia da una pizza...

Cominciamo con un gioco: al centro c'è una figura geometrica, che due giocatori, affamati e muniti di coltello e forchetta, dovranno mangiare a triangolini come si fa con una pizza. La “pizza” potrà essere di varie forme. Prendiamola per esempio a forma di pentagono, già un po' suddivisa:

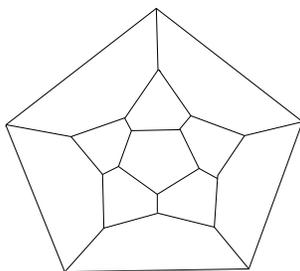


FIGURA I.1

1.1. Le regole del gioco. Come vedete, nessuna delle parti della pizza è a forma di triangolo... i giocatori dovranno suddividerla ancora per poterla mangiare. Al suo turno un giocatore può tracciare una diagonale in uno dei poligoni in cui è suddivisa la pizza oppure mangiare qualche triangolino, se ce n'è almeno uno “mangiabile” (vedi regole sotto). Vince chi mangia l'ultimo pezzo, ossia perde chi all'inizio del suo turno si ritrova davanti al tavolo vuoto e non ha più nulla da mangiare.

Un triangolino è *mangiabile* se (vedi anche Figure I.2, I.3, I.4):

1. ha un solo lato sul contorno e il vertice opposto a quel lato non sta sul contorno;
2. ha due lati sul contorno (e il vertice compreso fra di essi sempre sul contorno);
3. è l'ultimo triangolino rimasto.

Supponiamo che ci sia almeno un triangolino “mangiabile” e che il giocatore di turno abbia deciso, invece di tracciare una diagonale, di saziarsi. Sceglie un triangolino “mangiabile” e lo divora. Dopodiché, se c'è un triangolino adiacente (cioè con un lato in comune) a quello che ha già mangiato e che è ancora (o è diventato) “mangiabile” può decidere se mangiarlo o no. Se non lo mangia il turno passa subito all'altro giocatore; se lo mangia, dopo averlo divorato, guarda di nuovo se c'è un triangolino “mangiabile” adiacente a quello

appena “sparito” e decide se proseguire a mangiare o no... e così via; quando smette tocca all’altro giocatore.

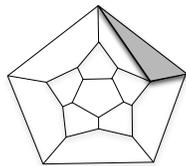


FIGURA I.2. Un triangolino mangiabile - regola (1).

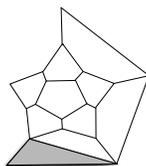


FIGURA I.3. Anche questo triangolino è mangiabile - regola (2).

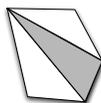


FIGURA I.4. Triangolino **non** mangiabile, perché?

1.2. L’inizio di una partita. Ecco, a titolo di esempio, le prime mosse di una partita:

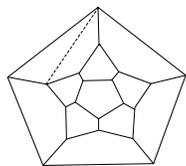


FIGURA I.5. Prima mossa: il primo giocatore traccia una diagonale.

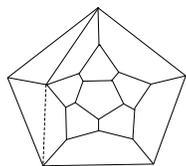


FIGURA I.6. Seconda mossa: anche il secondo giocatore traccia una diagonale.

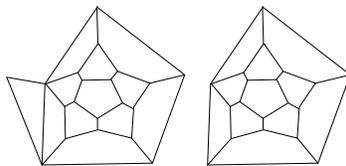


FIGURA I.7. Terza mossa: il primo giocatore mangia due triangolini.

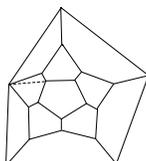


FIGURA I.8. Quarta mossa: il secondo giocatore traccia una diagonale.

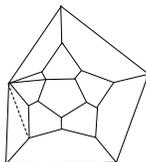


FIGURA I.9. Quinta mossa: il primo giocatore traccia una diagonale.

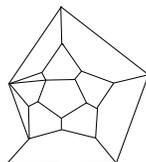


FIGURA I.10. Sesta mossa: il secondo giocatore mangia un solo triangolino (potrebbe mangiarne due).

.....e così via, divertitevi a proseguire (non fate indigestione!).

ESERCIZIO 1.1. Provate a giocare il gioco descritto sopra anche a partire dalla più semplice Figura I.11. In questo tipo di giochi, uno dei due giocatori ha una strategia vincente, ossia può vincere indipendentemente da quanto giochi bene l'altro (vedi il Quaderno [6]). Nel caso in questione: quale dei due?

2. Poliedri, poligoni e molti dubbi

Il gioco che abbiamo descritto nel paragrafo precedente, al di là della presentazione “gastronomica”, si basa su una figura geometrica.

Possiamo intuire come è stata costruita. Abbiamo preso un dodecaedro regolare (immaginiamo che sia cavo e con la superficie composta da uno strato sottile di gomma), gli

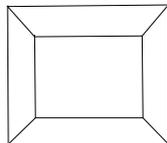


FIGURA I.11. Una versione semplificata del gioco della pizza.

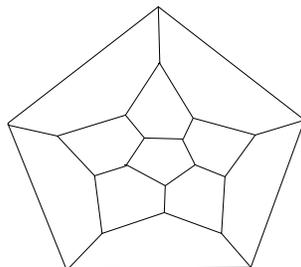


FIGURA I.12. Un dodecaedro “spalmato” sul piano.

abbiamo levato una faccia (tutte le facce sono pentagoni regolari, vedi anche Figura I.26) e lo abbiamo “spalmato sul piano”.

Anche la “pizza” di Figura I.11 si ottiene da un poliedro, levando una faccia e spalmandolo sul piano (da quale poliedro deriva?).

Il nostro discorso prende dunque le mosse da un mondo di oggetti a noi molto familiari, i poliedri e i poligoni. Ma, prima di cominciare... siamo sicuri di conoscere bene qual è la definizione di poligono o di poliedro? Vediamo qualche esempio che può suscitare dei dubbi.

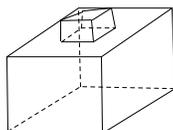


FIGURA I.13. Un poliedro piccolo appoggiato su una faccia di uno grande... il solido risultante è un poliedro?

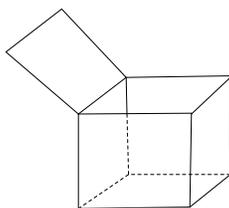


FIGURA I.14. Una scatola aperta... è un poliedro?

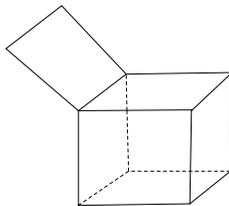


FIGURA I.15. E se la scatola fosse chiusa ma avesse una faccia in più?

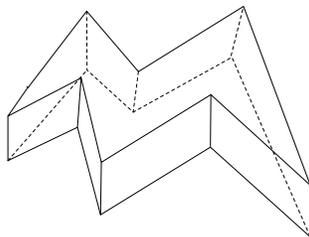


FIGURA I.16. Il segnale di Batman... è un poliedro?

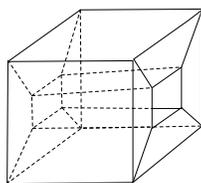


FIGURA I.17. Un cubo bucato... è un poliedro?

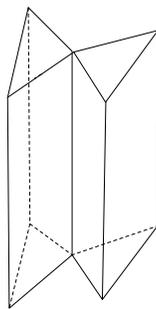


FIGURA I.18. Due prismi con uno spigolo in comune... è un poliedro?

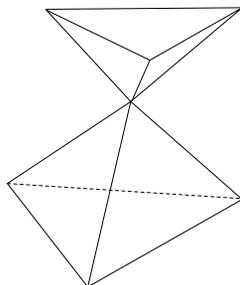


FIGURA I.19. Due tetraedri con un vertice in comune... è un poliedro?

Notiamo che tutte queste figure nello spazio corrispondono alla prima approssimativa definizione di poliedro data da “una figura dello spazio individuata da poligoni incollati lungo alcuni spigoli”.

Sorge allora il dubbio che questa definizione non sia pienamente soddisfacente... per esempio la scatola aperta di Figura I.14 suscita molte perplessità, perché la scatola non è “piena” e non sembra dunque una figura tridimensionale; per quel che riguarda la scatola chiusa di Figura I.15, pochissimi saranno disposti ad accettarla come poliedro per via di quella faccia bidimensionale aggiuntiva... Una domanda ulteriore si insinua a questo punto: se vogliamo dire “individuata” o anche “delimitata” da poligoni, sarà bene chiarire cosa è un poligono... forse anche questo concetto così familiare si rivelerà insidioso?

In prima battuta, il poligono potrebbe essere definito come “una figura geometrica nel piano delimitata da segmenti (lati) incollati a due a due nei vertici”.

Consideriamo alcuni esempi per mettere alla prova questa prima bozza di definizione:

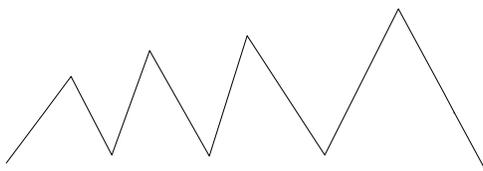


FIGURA I.20. Montagne...

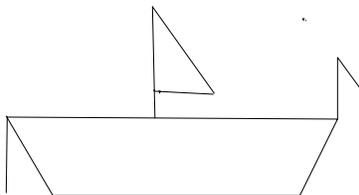


FIGURA I.21. ...o mare?

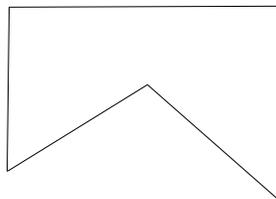


FIGURA I.22. Una figura non convessa.

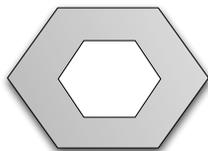


FIGURA I.23. La figura compresa fra i due esagoni è un poligono?

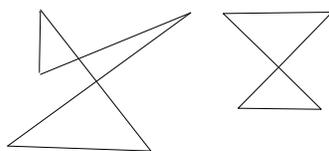


FIGURA I.24. Tre triangoli e una clessidra.

Di tutte queste proposte, solo quella di Figura I.22 riscuoterà pieno consenso, pur trattandosi di una figura non convessa (ossia possiamo trovare due punti interni tali che il segmento che li congiunge non sia tutto interno alla figura). La catena montuosa viene scartata subito: l'idea di poligono che abbiamo in mente è quella di una figura “delimitata” (vedremo comunque in seguito che anche questo concetto non è così banale come sembra). La barchetta, per quanto possa attirare le nostre simpatie, si presta a varie critiche: contiene delle spezzate non chiuse, e la parte “interna” è costituita da due aree (lo scafo e la vela) ben separate l'una dall'altra.

Ma perché le Figure I.23 e I.24 non ci convincono pienamente come poligoni? Volendo, le potremmo accettare, ma non possiamo non accorgerci che differiscono per un punto fondamentale dai poligoni a noi più noti (i triangoli, i quadrati, i rettangoli, i parallelogrammi, i trapezi, i poligoni regolari...). Questi ultimi, infatti, se potessimo deformarne il contorno (immaginiamo come al solito che siano composti da un sottile strato “elastico”), potrebbero essere trasformati in un cerchio. Ciò non sembra invece possibile per gli oggetti geometrici che stiamo considerando. Ad esempio, consideriamo la Figura I.24. Potremmo deformare la clessidra non in uno, ma in due cerchi che si toccano in un punto. La figura con tre triangoli potrebbe essere trasformata nello stesso modo in tre cerchi, con un punto di contatto fra il primo e il secondo e un punto di contatto fra il secondo ed il terzo. Potremmo poi facilmente

deformare la “corona” contenuta fra i due esagoni di Figura I.23 in una corona circolare, ma non sapremmo come deformare una corona circolare in un cerchio senza compiere operazioni troppo “traumatiche” (tipo creare o turare buchi, sovrapporre lembi diversi di figura... rimandiamo al Capitolo III per una precisazione di quest’idea).

Ci pare di intuire che questa condizione (ossia la possibilità di essere deformato ad un cerchio) sia fondamentale per un poligono: è così profonda da far passare in secondo piano, per esempio, la convessità. A dire il vero, la proprietà di essere convesso o no perde addirittura significato una volta che siamo entrati nell’idea di poter deformare le figure.

Siamo giunti ad un punto cruciale: nascosta nella geometria dei poliedri e dei poligoni, fra spigoli, segmenti, lati, misure, angoli e angoli diedri, c’è un’altra geometria, quella in cui le figure “si possono deformare”, che fa capolino già quando si considerano attentamente le definizioni di base, e dunque sembra che sia fondamento di tutti i discorsi e di tutte le costruzioni.

La topologia è proprio lo studio di questa geometria “profonda”.

ESERCIZIO 2.1. Fra le figure proposte in questo paragrafo, quali a vostro avviso rappresentano un poliedro? In termini di “deformazioni”, in quale oggetto geometrico vorreste che fosse deformabile un poliedro?

ESERCIZIO 2.2. Cercare (potete consultare per esempio [5], Capitolo 3, oppure [13], [1]), una definizione formalmente corretta di poliedro (e, prima ancora, di poligono...).

3. La formula di Eulero e l’idea di trasformazione topologica

Dopo aver mangiato la pizza e “divorato” quelle che credevamo definizioni “sicure”, è tempo di cominciare a “ricostruire”. Si sono spalancati di fronte a noi gli orizzonti della topologia. Ma da dove possiamo cominciare questo viaggio di esplorazione delle proprietà topologiche degli oggetti geometrici? Un buona idea è quella di ripartire proprio dagli oggetti a noi più familiari: i poliedri.

Qui, all’inizio del nostro cammino, incontriamo la formula di Eulero, che mette in luce una interessante relazione fra il numero V dei vertici, il numero E dei lati e il numero F delle facce di un poliedro:

$$V - E + F = 2$$

Controlliamola subito sul cubo: 6 facce, 12 lati, 8 vertici, quindi $8 - 12 + 6 = 2$. E sul tetraedro (Figura I.25)? Beh: qui abbiamo 4 facce, 6 lati, 4 vertici: $4 - 6 + 4 = 2$.

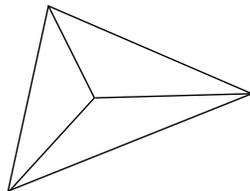


FIGURA I.25. Il tetraedro

Passiamo al dodecaedro regolare (vedi Figura I.26), che ha dodici facce pentagonali. I lati quanti sono? Ogni faccia ne ha cinque, ma dobbiamo tener conto che ogni lato appartiene

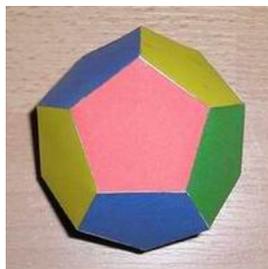


FIGURA I.26. Il dodecaedro regolare

a 2 facce - dunque in totale abbiamo $\frac{12 \cdot 5}{2} = 30$ lati. I vertici si contano in maniera simile: $\frac{12 \cdot 5}{3} = 20$ visto che ogni vertice appartiene a tre facce.

Dunque abbiamo trovato: $20 - 30 + 12 = 2$ e la formula di Eulero è verificata anche per il dodecaedro. Fiduciosi dopo queste verifiche, riscriviamo la formula presentandola come Teorema e diamo la traccia di una dimostrazione:

TEOREMA 3.1 (Formula di Eulero). *Dato un poliedro P , indichiamo rispettivamente con V, F, E il numero dei suoi vertici, delle sue facce e dei suoi spigoli. Vale allora la formula:*

$$V - E + F = 2$$

Traccia della dimostrazione, ovvero come ritrovare il gioco della pizza... Immaginiamo che il poliedro sia cavo e la sua superficie sia di gomma sottile. Possiamo levare una faccia e “spalmare sul piano” ciò che resta della superficie del poliedro. Il reticolato che otteniamo ha lo stesso numero di lati ($E(\text{reticolato}) = E$) e di vertici ($V(\text{reticolato}) = V$) del poliedro da cui siamo partiti. Quanto alle facce, avrà tante facce limitate quante erano le facce del poliedro, meno una ($F_{\text{lim}}(\text{reticolato}) = F - 1$); volendo, possiamo pensare che la faccia che abbiamo tolto sia diventata la regione illimitata che circonda il nostro reticolato.

Osserviamo che questa nostra prima mossa ha completamente ignorato i dati “metrici” di partenza. Le facce del reticolato non hanno la stessa area delle facce del poligono, e i lati non hanno la stessa lunghezza. Anzi, preannunciamo subito che tutto il ragionamento che stiamo per fare continuerebbe ad essere valido anche se i lati del reticolato fossero curvilinei e non segmenti di retta. Per studiare la natura topologica del poliedro di partenza abbiamo trasformato, o perso, moltissime informazioni, ma il nostro punto di forza è che

$$V - E + F = V(\text{reticolato}) - E(\text{reticolato}) + F_{\text{lim}}(\text{reticolato}) + 1$$

e il problema, che riguardava una figura tridimensionale, è diventato un problema planare: per concludere la dimostrazione ci basta infatti mostrare che

$$V(\text{reticolato}) - E(\text{reticolato}) + F_{\text{lim}}(\text{reticolato}) = 1.$$

A questo punto notiamo che, se tracciamo una diagonale in una delle facce limitate del reticolato, la somma in questione non cambia. Infatti aggiungiamo un lato (che conta per -1) ma dividiamo una faccia in due facce distinte (dunque sommiamo 1).

Possiamo allora tracciare tante diagonali, sempre mantenendo invariata la somma che ci interessa, fino ad avere un reticolato tutto suddiviso in regioni triangolari, come, per esempio, quello di Figura I.27.

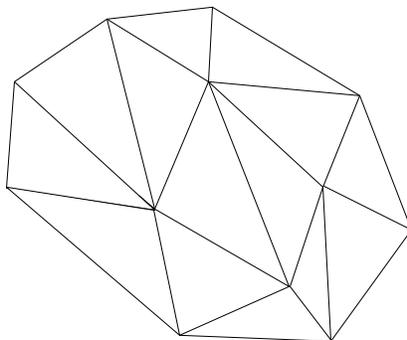


FIGURA I.27. Un reticolato di triangoli.

E ora? Ora possiamo cominciare a “mangiare” triangoli, a partire da quelli che hanno uno o più lati sul contorno della figura... Per esempio, consideriamo un triangolo che abbia un solo lato al contorno (Figura I.28); “mangiarlo” vuol dire levare un lato e una faccia limitata lasciando gli stessi vertici, dunque la somma di

$$V(\text{reticolato}) - E(\text{reticolato}) + F_{\text{lim}}(\text{reticolato})$$

rimane invariata.

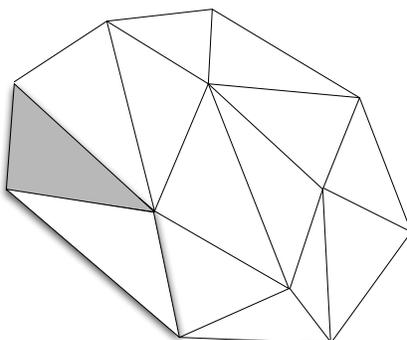


FIGURA I.28. Un triangolo con un solo lato sul contorno

E se mangiamo un triangolo con due lati (e il vertice comune ai due lati) sul contorno (Figura I.29), abbiamo levato una faccia, un vertice e due lati, mantenendo ancora la somma invariata. Ci accorgiamo che stiamo ritrovando le regole “mangerecce” del gioco della pizza e proprio come nel gioco della pizza, questa scorpacciata ha un termine: a forza di levare triangoli “mangiabili” secondo la definizione del gioco della pizza si arriva al reticolato costituito da un solo triangolo. Per questo reticolato particolare abbiamo $V(\text{reticolato}) = 3$, $E(\text{reticolato}) = 3$ e $F_{\text{lim}}(\text{reticolato}) = 1$, dunque

$$V(\text{reticolato}) - E(\text{reticolato}) + F_{\text{lim}}(\text{reticolato}) = 1$$

e quindi tale somma vale 1 anche per il reticolato iniziale. \square

La dimostrazione di cui abbiamo dato la traccia ha aspetti fantasiosi e sorprendenti (in sintesi, per contare lati, vertici e facce di un poliedro si finisce col giocare al gioco della pizza), ma l’entusiasmo iniziale lascia presto il posto, come è giusto, a qualche dubbio. Dove

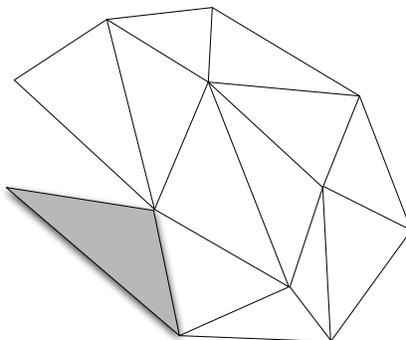


FIGURA I.29. Un triangolo con due lati (e il vertice compreso) sul contorno.

sono nascoste le insidie? Eccone una: cosa garantisce che ad un certo punto non si mangi un triangolo che “spezza” la figura in due parti sconnesse fra di loro? In tal caso alla fine troveremmo più di un triangolo isolato, e il ragionamento non tornerebbe più. Da questo dubbio ci salvano le regole del gioco della pizza, quelle per cui un triangolino è “mangiabile” se ha un solo lato sul contorno ma il vertice opposto a quel lato non sta sul contorno oppure se ha due lati sul contorno (e il vertice compreso fra di essi sempre sul contorno).

Se mangiamo triangoli di questo tipo infatti il contorno del reticolato residuo individuerà sempre un poligono (dunque alla fine della scorpacciata continuerà ad individuare un poligono, ossia un triangolo solo). Del resto osserviamo che, per come è stato costruito (ossia spiattellando la superficie di un poliedro privata di una faccia), il contorno del reticolato fin dall’inizio aveva la caratteristica di essere il contorno di un poligono. Se non avesse avuto questa caratteristica la formula

$$V(\text{reticolato}) - E(\text{reticolato}) + F_{\text{lim}}(\text{reticolato}) = 1$$

poteva non essere vera sin dal principio.

ESERCIZIO 3.2. Perché il contorno del reticolato fin dall’inizio aveva la caratteristica di essere il contorno di un poligono?

Il dubbio che ci è venuto è stato di aiuto, perché ci ha portati al cuore del problema: le cose funzionano se si parte da un poliedro “spiattellato”, altrimenti possono non funzionare (questo ci rassicura, perché del resto la formula di Eulero è vera per i poliedri e non per altri oggetti: per controllare, provatela sul “cubo bucato” di Figura I.17).

ESERCIZIO 3.3. Fare qualche esempio di reticolato il cui contorno non è il contorno di un poligono, per cui

$$V(\text{reticolato}) - E(\text{reticolato}) + F_{\text{lim}}(\text{reticolato}) \neq 1$$

ESERCIZIO 3.4. Pensare oggetti geometrici per cui non vale la formula di Eulero (per esempio falsi poliedri... cominciate con quelli disegnati nel paragrafo precedente)

Ma sorge ancora un dubbio sulla dimostrazione: siamo sicuri di poter trovare ad ogni passo un triangolo da mangiare che soddisfi le caratteristiche richieste dal gioco della pizza? Potremmo giungere ad una situazione in cui il reticolato non possiede nessun triangolo mangiabile? Lasciamo a voi il compito di scacciare, durante il tempo di laboratorio, questo sospetto:

ESERCIZIO 3.5. Verificare che, a dispetto delle insidie descritte, la dimostrazione funziona.

I prossimi esercizi riguardano alcune applicazioni della formula di Eulero.

ESERCIZIO 3.6. Dimostrare, usando la formula di Eulero, che esistono solo 5 poliedri regolari (vedi Figura I.30).



FIGURA I.30. I cinque poliedri regolari, detti anche *solidi platonici*.

ESERCIZIO 3.7 (La formula di Eulero e la chimica). Il carbonio si presenta in natura sotto varie forme (allotropi). I più conosciuti sono il diamante e la grafite. Nella grafite, il carbonio ha una struttura esagonale. Ma un altro (meno noto) allotropo del carbonio, è la fullerite. Ha una forma quasi sferica¹. Vi domandiamo: è possibile ottenere la fullerite a partire da strutture esagonali come quelle della grafite? In altri termini: è possibile pavimentare una sfera usando solo “mattonelle esagonali”? Se pensate di sì provate con un palloncino ed un pennarello a costruire una simile pavimentazione² Se pensate di no... dovete motivare la risposta con una dimostrazione!

ESERCIZIO 3.8 (La formula di Eulero e il gioco del calcio). Guardate un pallone da calcio (Figura I.31, se non ne avete uno ancora più a portata...): in quante parti è divisa la sua superficie? Di che forma sono? Dimostrare che, se si vuole pavimentare una sfera usando solo (“mattonelle a forma di”) esagoni e pentagoni, i pentagoni devono essere almeno 12.



FIGURA I.31. Quanti esagoni e quanti pentagoni sono cuciti sulla superficie?

I due esercizi precedenti sono in realtà molto legati fra loro: hanno infatti in comune essenzialmente lo stesso oggetto, tanto che inizialmente la fullerite veniva chiamata *soccerene*, dalla parola *soccer*, ovvero “pallone da calcio” nella lingua di Shakespeare...

¹Il nome di questo allotropo è stato dato in onore dell’architetto Richard Buckminster Fuller, le cui “cupole geodetiche” sono sostenute da un’intelaiatura con una forma speciale che conferisce loro stabilità e leggerezza. Questa forma speciale si è rivelata essere molto legata alla struttura di questo tipo di molecole.

²Sono stati messi a disposizione degli studenti molti palloncini e pennarelli, per fare prove... e riprove...

Hanno in comune anche la formula di Eulero, che entra in gioco nella loro risoluzione. Entra in gioco con naturalezza, anche se il contesto di applicazione è un po' cambiato. Le domande riguardano infatti, più che i poliedri, certe pavimentazioni della sfera fatte con "mattonelle" che sono poligoni deformati.

Già durante la dimostrazione della formula di Eulero avevamo notato che il ragionamento si poteva applicare anche a pavimentazioni della sfera. Il primo passaggio, quello che consiste nel levare una faccia e spalmare la superficie su un piano, funziona ugualmente bene, e da quel momento in poi, avendo effettuato una deformazione, non ha più importanza ricordare se all'origine eravamo partiti da un poliedro o da un reticolato curvilineo disegnato sulla sfera.

Questa osservazione ci chiama ad un approfondimento di natura topologica: la formula di Eulero non individua dunque solo una proprietà dei poliedri, ma anche della sfera. La formula mette in luce infatti che *se disegniamo sulla sfera un reticolato curvilineo, le cui regioni sono poligoni deformati, la somma $V - E + F$, riferita al reticolato, fa sempre 2*.

Se disegnassimo un reticolato su una ciambella con un buco, non otterremo 2 ma un altro numero (comunque costante per ogni reticolato "ciambelloso").

Abbiamo dunque individuato una proprietà profonda, una proprietà topologica della sfera. E rimarchiamo che questa proprietà della sfera vale anche per tutti gli oggetti (poliedri, ellissoidi come il pallone da rugby, etc.) che sono ottenuti partendo dalla sfera e deformandola in maniera continua (vedi Figura I.32):

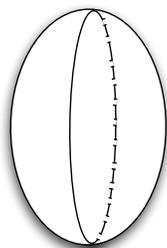


FIGURA I.32. Un pallone da rugby diviso in spicchi: due vertici, quattro lati, quattro facce...

Siamo arrivati ad intuire un'altra chiave di lettura della topologia: la topologia è la ricerca di proprietà profonde degli oggetti geometrici che non cambiano se facciamo deformazioni continue. La formula di Eulero è appunto una di queste proprietà. Si dice per questo che fornisce un *invariante topologico*.

ESERCIZIO 3.9. Secondo voi, quale numero si ottiene se consideriamo la somma $V - E + F$ riferita ad un reticolato su una ciambella?

4. Le trasformazioni topologiche

È tempo di dire due parole in più su cosa intendiamo con il termine "deformazione", finora usato in maniera del tutto intuitiva. Introduciamo il concetto di trasformazione topologica fra due figure. Anche la definizione che stiamo per dare non è rigorosa al cento per cento, ma può comunque aiutare a fare un passo in più in questa prima conoscenza della topologia.

Lasciemo per esempio a livello intuitivo il concetto - cruciale - di funzione continua, che probabilmente vi è familiare almeno per le funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} .

DEFINIZIONE 4.1. Una trasformazione topologica (o *omeomorfismo*) fra due figure A e B è data da una funzione biunivoca e continua $f : A \rightarrow B$ tale che la sua inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$ sia anch'essa continua.

Quando abbiamo parlato di superfici di poliedri fatte di gomma sottile, che (dopo aver levato una faccia) venivano spalmate sul piano, stavamo descrivendo una trasformazione topologica. La “deformazione senza strappi” di un foglio di gomma rende l'idea di una trasformazione continua reversibile, ossia di una funzione continua con inversa continua.

Nel Paragrafo 2 abbiamo detto che richiedevamo che un poligono si potesse deformare ad un cerchio; possiamo riformulare questa richiesta con un nuovo linguaggio richiedendo, nella definizione di poligono, che ogni poligono debba essere *omeomorfo* ad un cerchio.

Facciamo ancora altri esempi di figure omeomorfe. Una circonferenza è omeomorfa ad un'altra qualunque circonferenza, o ad una ellisse (intendiamo il contorno dell'ellisse) o, come sappiamo, al contorno di un qualunque poligono. Ma una circonferenza è omeomorfa ad un segmento? Per esempio, al segmento chiuso $[0, 1]$ della retta \mathbb{R} ?

La risposta è no, e lo si vede immaginando di levare un punto q interno al segmento. Il segmento rimane diviso in due parti sconnesse fra loro. Se esistesse una trasformazione topologica f fra la circonferenza e il segmento, esisterebbe uno ed un solo punto p sulla circonferenza tale che $f(p) = q$. Notiamo subito che, se leviamo il punto p dalla circonferenza, la figura che resta non è sconnessa... questa ci appare subito una differenza chiave, un fatto *topologico* che rivela la diversità fra il segmento e la circonferenza.

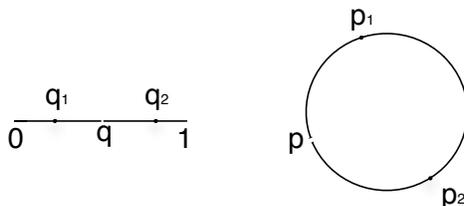


FIGURA I.33. Il segmento e la circonferenza non sono omeomorfi

Precisiamo questa intuizione continuando il ragionamento. Scegliamo il punto q_1 nella parte di sinistra del segmento e il punto q_2 nella parte di destra, come in Figura I.33. Se esistesse f , troveremmo sulla circonferenza i punti p_1 e p_2 tali che $f(p_1) = q_1$ e $f(p_2) = q_2$. La nostra trasformazione topologica deve allora portare il cammino continuo da p_1 a p_2 lungo la circonferenza in un cammino continuo fra q_1 e q_2 ...ma questo non è possibile! Intuiamo infatti che nel cammino fra q_1 e q_2 dovrà esserci un “salto” perché stanno nelle due parti sconnesse del segmento.

ESERCIZIO 4.2. (Dedicato a chi desidera provare a formalizzare questo ragionamento). Fate una ricerca e trovate una definizione precisa di continuità, poi riscrivete questo ragionamento nei dettagli.

ESERCIZIO 4.3. Un ragionamento simile al precedente ci permette di concludere che la circonferenza e un “otto”, ossia la figura formata da due circonferenze che si toccano in un

punto, non sono omeomorfi (vedi Figura I.34). Quanti punti bisogna togliere, e dove, per avere da una parte una figura connessa e dall'altra una figura sconnessa ?

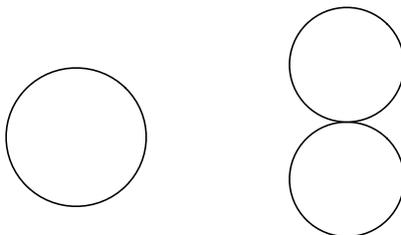


FIGURA I.34. La circonferenza e l'“otto” non sono omeomorfi

Continuando con gli esempi, una retta non è omeomorfa ad un segmento, un cerchio non è omeomorfo ad un segmento, una corona circolare non è omeomorfa ad un cerchio, una sfera non è omeomorfa ad una ciambella con un buco (chiamata dai matematici *toro*, vedi Figura I.35) ma una sfera senza un punto è omeomorfa ad un piano...

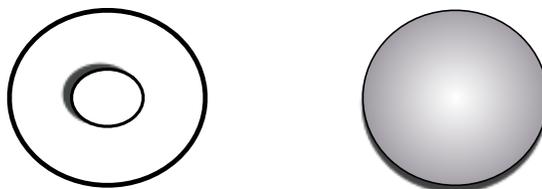


FIGURA I.35. La ciambella con un buco (toro) e la sfera non sono omeomorfe

ESERCIZIO 4.4. Pensare esempi di coppie di figure omeomorfe e di coppie non omeomorfe fra loro. Per esempio, il cubo “bucato” di Figura I.17 è omeomorfo secondo voi ad cubo, ad un toro, ad una sfera, ad una corona circolare?

Questi esempi ribadiscono il punto di vista secondo cui la topologia è lo studio degli oggetti geometrici a *meno di omeomorfismi*; ci chiedono infatti di cercare di scoprire se due oggetti geometrici possono o non possono essere trasformati l'uno nell'altro da un omeomorfismo. Se la risposta è sì, vuol dire che dal punto di vista della topologia questi due oggetti sono identici, se la risposta è no vuol dire che c'è una differenza profonda fra di loro, non riconducibile alle loro misure, non sanabile con deformazioni. Capire la natura di questa differenza, saperla esprimere attraverso un invariante topologico è, come abbiamo detto alla fine del paragrafo precedente, un compito fondamentale della topologia. Abbiamo forse già intuito alcuni risultati profondi in questa direzione:

- a) due figure di dimensione diversa non possono essere omeomorfe (detto in altri termini, la topologia “individua” il concetto di dimensione);
- b) il concetto di connessione è un invariante topologico;
- c) il numero minimo di punti che bisogna levare perché una curva risulti divisa in parti sconnesse, il numero minimo di tagli che possiamo fare ad una superficie per sconnetterla... sono concetti topologici; ne segue che una ciambella col buco non può essere

omeomorfa ad una sfera, una ciambella con due buchi non è omeomorfa né ad una ciambella con un buco né ad una sfera (la topologia individua il *genere* di un oggetto geometrico... su questo torneremo nel Capitolo III);

- d) il segmento e la retta non sono omeomorfi... la topologia “vede” la differenza fra un oggetto limitato dotato di contorno e un oggetto illimitato.

Molti altri ingegnosi e importanti invarianti topologici sono stati individuati... ma nelle nostre lezioni non avremo tempo per studiarli o per approfondire in maniera formale i punti, elencati sopra, che abbiamo intuito.

Scegliamo invece la via di mostrare la topologia direttamente “in azione”, ossia applicata ad alcuni famosi problemi, intorno ai quali avrete modo di cimentarvi anche voi. Il paragrafo seguente fornisce un “assaggio” di questi problemi, che saranno comunque discussi di nuovo nelle prossime lezioni.

5. Alcuni famosi problemi di natura topologica

5.1. Il problema dei ponti di Königsberg. L’antica città di Königsberg (oggi Kaliningrad), nella Prussia Orientale, è il teatro di un problema celebre, molto interessante dal punto di vista topologico. La città è attraversata dal fiume Pregel, che forma due isole. Anticamente, l’isola occidentale era collegata da due ponti alla parte nord della città e da due ponti alla parte sud. Inoltre era collegata da un quinto ponte all’altra isola. Dall’isola orientale partivano poi altri due ponti, uno verso la parte nord e uno verso la parte sud (vedi Figura I.36).

Il problema dei ponti di Königsberg si può enunciare così: *è possibile immaginare una passeggiata che, partendo da un punto della città passi una e una sola volta da ognuno dei sette ponti e ritorni al punto di partenza?*

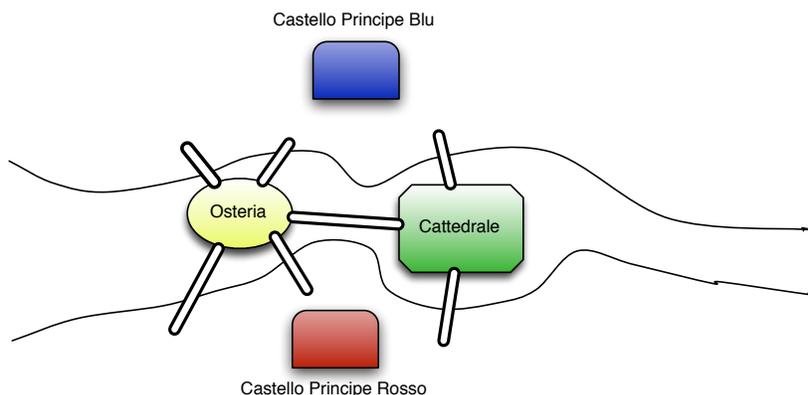


FIGURA I.36. La cartina schematica della città di Königsberg

Un modo tradizionale di raccontare questo problema e alcune sue varianti consiste nel mettere in scena vari personaggi: il principe blu, che ha un castello nella parte nord, il principe rosso, che ha un castello nella parte sud, e il Vescovo, che risiede presso la cattedrale nell’isola orientale. Si precisa poi che nell’isola occidentale c’era una famosa *Gasthaus* (osteria): molti cittadini, dopo aver tentato di fare la famosa passeggiata, concludevano la giornata davanti ad un buon bicchiere. Lì raccontavano, dopo abbondanti bevute, di essere riusciti nell’impresa, ma non capitava mai che fossero capaci di ripeterla di giorno...

Cosa c'è di geometrico in questo problema che parla di ponti e passeggiate? Certo non entra in gioco la geometria delle misure, degli angoli, delle forme rigide: ci si rende conto infatti che il problema non dipende da quanto sono grandi le isole, o da come sono fatti i ponti, o dall'estensione della parte nord o sud della città.

Il problema dipende da come sono disposti i ponti, da quali parti della città ciascuno di loro mette in collegamento. Scoprire se la figura geometrica individuata, nella cartina, dalla città (comprese le isole e i ponti, escluso il fiume) ha o non ha la caratteristica di permettere la passeggiata è scoprire una caratteristica topologica della figura, che non cambia se la deformiamo.

Partendo da queste considerazioni, Eulero nel 1736 risolse il problema. L'articolo che scrisse per comunicare la sua soluzione rappresentava Königsberg con il disegno che trovate in copertina e, in una "zampata" degna di uno dei più grandi matematici, oltre a dare uno dei primi contributi alla topologia³ aprì un nuovo orizzonte per la matematica, la *Teoria dei grafi*.

Nel Capitolo IV introdurremo in maniera elementare, con definizioni e teoremi, i primi aspetti di questa teoria. Per ora ci basta un approccio intuitivo; ci interessa osservare che affrontare il problema dei ponti di Königsberg equivale a considerare la figura seguente (che rappresenta un *grafo*) e chiedersi: *è possibile, partendo da un vertice, fare un percorso che tocchi tutti gli altri vertici passando per ogni lato una e una sola volta?*

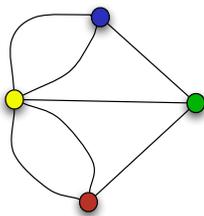


FIGURA I.37. Il grafo corrispondente al problema dei ponti di Königsberg

ESERCIZIO 5.1. Affrontare il problema dei ponti di Königsberg e scoprire, insieme ad Eulero, che non ha soluzione...

Proponiamo anche alcune varianti del problema, una "scusa" per giocare ancora un po' con i grafi.

ESERCIZIO 5.2. Il principe blu, vuole costruire un altro ponte in modo che sia possibile partire dal suo castello, passare tutti gli otto ponti una e una sola volta, e terminare all'osteria vantandosi dell'impresa. Può farcela? Dove deve costruire l'altro ponte?

ESERCIZIO 5.3. Il principe rosso, visto l'ottavo ponte costruito dal principe blu, vuole farlo indispettire. Vuole costruire un nono ponte, che gli consenta di partire dal suo castello, passare tutti i nove ponti una e una sola volta, e terminare all'osteria... vantandosi della sua

³... che non si chiamava ancora *topologia*. Eulero usa il nome che le aveva dato Leibniz, *Geometria Situs*, e infatti intitola il suo articolo *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* [9]. La riproduzione dell'articolo originale è disponibile liberamente in rete [10] per chi è curioso di leggere direttamente dalla penna di Eulero la storia dei ponti di Königsberg (ai suoi tempi: "Regiomons"), e le sue affascinanti spiegazioni su cosa sia questa nuova "geometria situs"!

impresa e del fatto che un'impresa simile non può adesso riuscire al principe blu. Dove deve costruire il nono ponte?

ESERCIZIO 5.4. Il Vescovo, preoccupato della contesa fra i due principi, pensa che sarebbe bello rappacificare la città costruendo un decimo ponte che permetta finalmente a tutti i cittadini, partendo da un punto qualsiasi della città, di ritornarvi dopo aver percorso tutti i ponti una e una sola volta. È possibile? In tal caso, dove deve essere costruito il decimo ponte?

5.2. Il problema della colorazione delle cartine geografiche. Supponiamo di avere di fronte un mappamondo in cui ogni regione (mare incluso) è colorata con un colore e, come si usa, due regioni confinanti (se hanno un tratto di confine in comune, non solo un punto) risultano sempre colorate con colori diversi.

Qual è il numero minimo di colori che dobbiamo avere a disposizione per colorare così un mappamondo? Con due colori non ci riusciamo, basta pensare a Svizzera, Francia e Italia, visto che ognuno di questi paesi confina con gli altri due. Ma ce la facciamo con tre colori? Il Lussemburgo, per esempio, è circondato dalla Francia, dal Belgio e dalla Germania, tre stati ciascuno dei quali confina con gli altri due. Per questa situazione, schematizzata nelle Figura I.38, occorrono almeno quattro colori.

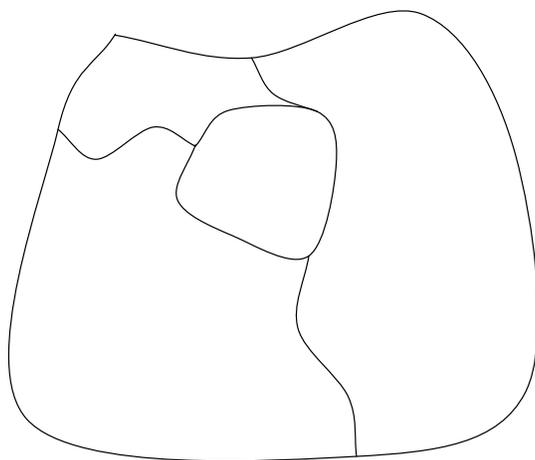


FIGURA I.38. Per colorare questi quattro stati occorrono quattro colori diversi

Questa breve discussione sul mappamondo è all'origine di un problema famoso, il problema appunto di determinare il numero minimo di colori necessari per colorare una cartina geografica. Diciamo subito che quattro colori sono sufficienti per colorare qualunque buona cartina disegnata su una sfera, e che la dimostrazione di questo fatto non è semplice, ha avuto una lunga storia e ha dato origine a interessanti discussioni (vedi la Sezione 5 nel Capitolo IV).

Quello che ci preme sottolineare fin da adesso è che questo problema è di natura topologica. Tanto per cominciare, si nota subito che per il problema non sono rilevanti la dimensione o la forma degli stati o la lunghezza dei loro contorni ma *il modo in cui sono disposti*, il gioco delle loro relazioni di... vicinato.

Ma la cosa ancora più interessante è che questo numero minimo di colori dipende dalla forma del "mondo" su cui stiamo disegnando la nostra cartina. Visto che il pianeta terra

è di forma sferica, la risposta è quattro, ma se fosse stato a forma di ciambella, la risposta sarebbe stata sette. La risposta al problema della colorazione delle cartine, di formulazione così elementare, ha dunque un risvolto sorprendente: al di là delle particolari cartine scelte, dei molti casi che vanno analizzati, ci fornisce direttamente indicazioni sulla natura topologica dell'oggetto su cui la cartina è disegnata.

Per presentare meglio il problema specifichiamo innanzitutto con maggior precisione cosa intendiamo per “buona carta geografica” sulla sfera.

Chiediamo che ogni regione sia omeomorfa ad un cerchio (nei nostri ragionamenti potremo assumere, per semplificare i confini senza intaccare la natura del problema, che ogni regione sia un poligono). Specificiamo che non devono esserci confini interni a uno stato, ossia istmi sottili (vedi Figura I.39)... Escludiamo anche quei casi in cui uno stato è formato da più regioni scollegate fra loro (ossia, se pensiamo per esempio alla Danimarca e alla Groenlandia, non ci preoccuperemo di colorarle con lo stesso colore).

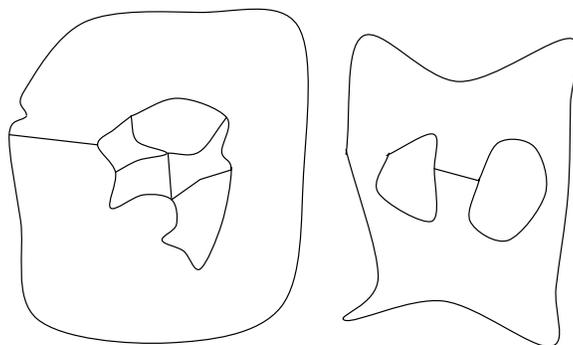


FIGURA I.39. Due situazioni non accettate, visto che in entrambe le cartine c'è un confine interno ad uno stato.

A questo punto interviene una osservazione cruciale: il problema di colorare cartine sulla sfera è equivalente a quello di colorare carte nel piano in cui tutte le regioni tranne una sono limitate.

Ora che cominciamo ad acquistare familiarità con le trasformazioni topologiche non è difficile immaginare il perché. Consideriamo una cartina su una sfera cava la cui superficie è fatta di gomma sottile, immaginiamo di fare un buco all'interno di una delle regioni, e spalmiamo la superficie rimanente nel piano coprendolo tutto in modo che la regione dove abbiamo fatto il buco diventi una regione illimitata, un “mare” che circonda tutte le altre (questa operazione si può descrivere in modo più preciso usando la nota costruzione della proiezione stereografica della sfera sul piano, a partire dal punto levato). La costruzione si può ripetere in direzione inversa: partendo da una cartina nel piano con una sola regione illimitata, possiamo spalmarla sulla sfera e aggiungere un punto.

Consideriamo dunque una buona carta geografica planare: ancora una volta, come nel caso dei ponti di Königsberg, l'uso dei grafi può essere una chiave per interpretare il nostro problema topologico. Possiamo infatti associare alla nostra cartina un grafo. Scegliamo un vertice all'interno di ogni regione, e colleghiamo due vertici con un lato se le regioni a cui appartengono sono confinanti. È possibile disegnare questo lato in modo che sia tutto

all'interno delle due regioni in questione (vedi Figura I.40) - torneremo su questo anche nel prossimo capitolo (vedi Figura II.8).

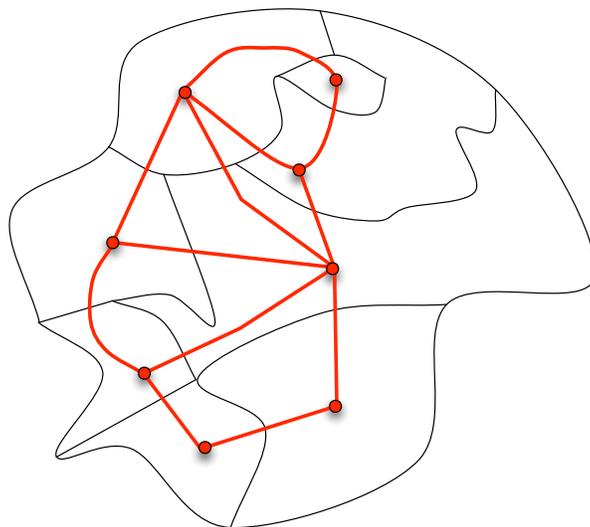


FIGURA I.40. Come associare un grafo ad una carta geografica

Dare una buona colorazione della cartina da cui siamo partiti significa saper colorare i vertici del grafo in modo che se due vertici sono congiunti da un lato abbiano colori diversi. Anche in questo caso sembra che il grafo entri in scena codificando tutte le informazioni essenziali del problema, permettendoci di dimenticare i dati metrici.

Nei prossimi capitoli mostreremo una bella dimostrazione del fatto che con cinque colori si riesce a colorare qualunque cartina (si tratta di un passo importante, anche storicamente, verso il teorema definitivo, quello dei 4 colori). Un passaggio obbligato sarà quello di definire un po' meglio cosa è un grafo e individuare le caratteristiche dei particolari grafi che si ottengono a partire dalle cartine geografiche.

Per fare pratica con i colori, cimentiamoci intanto con questi esercizi.

ESERCIZIO 5.5. Colorare la cartina di Figura I.41, proposta da Martin Gardner sullo *Scientific American* dell'1 aprile 1975 come prova che ci sono cartine non colorabili con 4 colori... (attenzione alla data di pubblicazione!).

ESERCIZIO 5.6. Provare a costruire qualche cartina sul toro (ciambella) e a colorarla. In particolare, trovare una cartina che non si può colorare con soli quattro colori. Può essere utile, per "vedere" la cartina in due dimensioni, rappresentare il toro nel seguente modo. Si consideri un rettangolo e si immagini di incollare due lati opposti. Abbiamo a questo punto ottenuto una superficie cilindrica. Per ottenere un toro possiamo incollare fra di loro le due circonferenze che sono ai contorni estremi di questa superficie. Questa costruzione si rappresenta disegnando il rettangolo e marcando con una freccia le coppie di lati da incollare (vedi Figure I.42 e I.43: la freccia fa capire in che verso percorriamo i due lati e dunque quali sono i punti che vengono incollati a due a due).

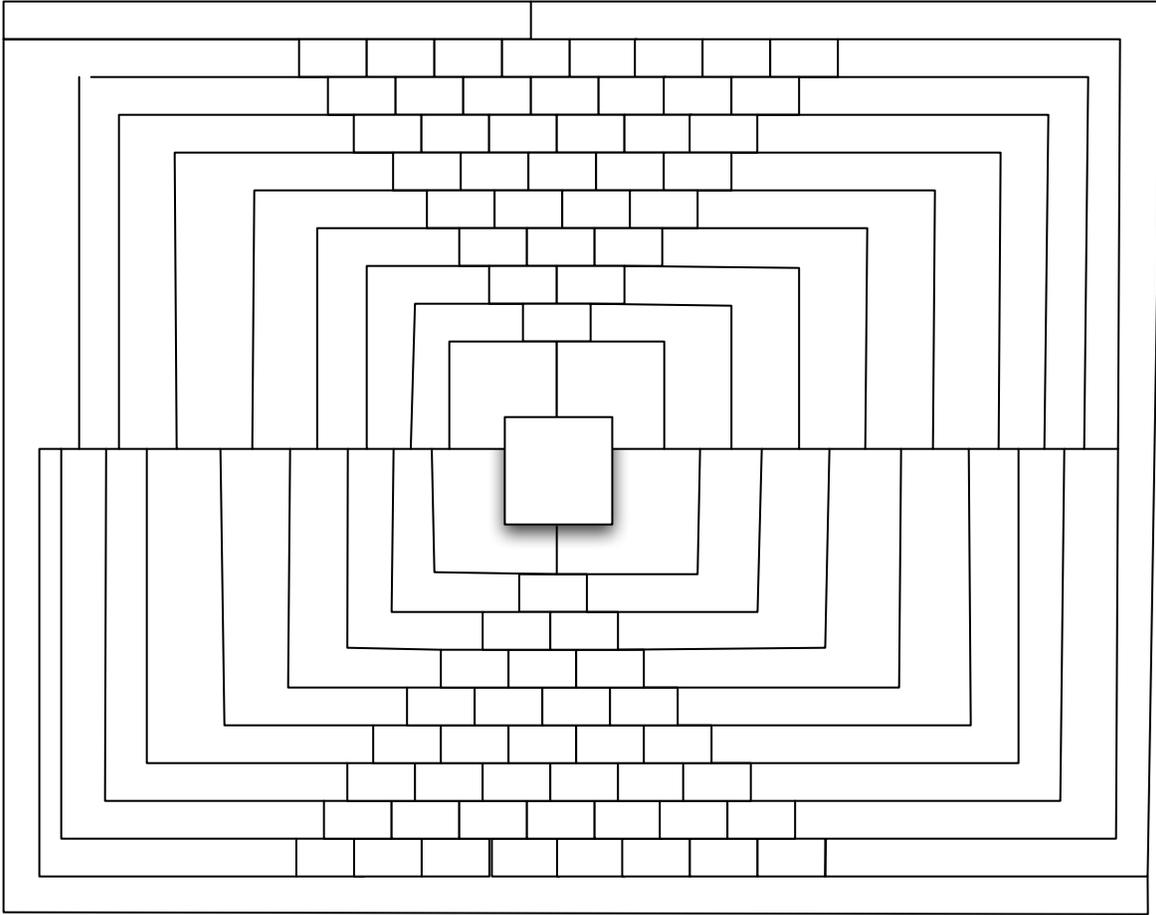


FIGURA I.41. Davvero non bastano quattro colori?

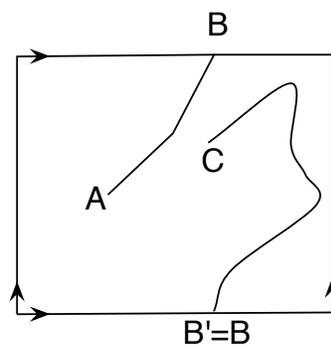


FIGURA I.42. Questo rettangolo con i lati identificati rappresenta un toro. Quando disegniamo sul toro, dobbiamo tener conto delle identificazioni: per esempio qui sopra abbiamo tracciato un cammino che parte da A e giunge in B e poi prosegue dal punto B' che è stato incollato a B , fino ad arrivare in C .

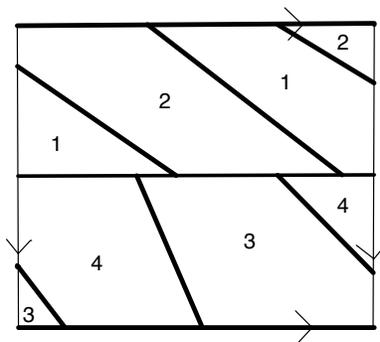


FIGURA I.43. Esempio di carta geografica sul toro. Il toro è rappresentato tramite un rettangolo con i lati identificati. Le linee di confine tra le regioni sono tracciate in grassetto, fra queste ce n'è una che coincide con il lato superiore (e quello inferiore, visto che sono identificati). Notare che, per via delle identificazioni, il toro risulta suddiviso in quattro sole regioni (le abbiamo contrassegnate con un numero).

5.3. Problema della curva di Jordan. Ricordiamo che una “curva” nel piano è un “tratto disegnato senza alzare la penna dal foglio”. Facendo riferimento al concetto di continuità (come abbiamo osservato nel paragrafo precedente, ci è già noto almeno in parte, e comunque lo abbiamo messo nel bagaglio delle “intuizioni di fondo”) possiamo esprimerci con maggiore precisione.

DEFINIZIONE 5.7. Una *curva* (o *cammino continuo*) è data da una funzione continua

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

dall'intervallo dei numeri reali tra 0 e 1 (estremi compresi) al piano \mathbb{R}^2 . Una curva è detta *semplice* se “la penna non ripassa su un punto dove è già passata” ovvero se $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ per ogni s, t , salvo eventualmente se $s = 0, t = 1$, nel qual caso la curva è detta *chiusa* - ovvero, “la penna termina il suo movimento nel punto dove l'aveva cominciato” (vedi Figura I.44).

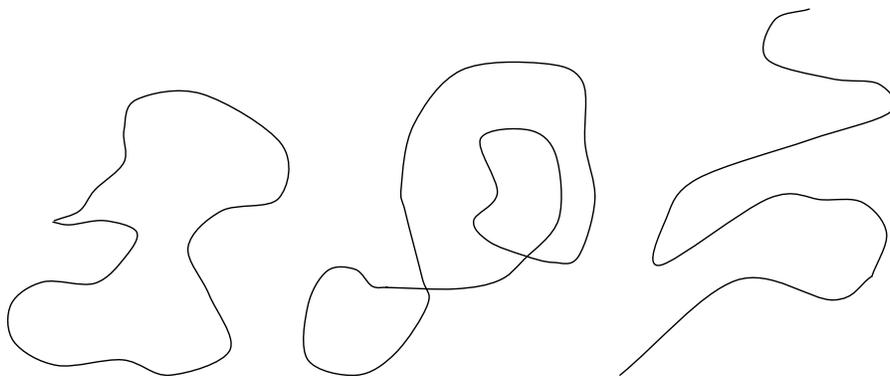


FIGURA I.44. Da sinistra a destra: una curva semplice chiusa, una curva chiusa ma non semplice, una curva semplice ma non chiusa.

Quali sono le proprietà topologiche di una curva semplice chiusa, ossia quelle che rimangono invariate nonostante le deformazioni? Non certo la lunghezza, la forma, la spigolosità o meno del contorno.

In realtà ogni curva semplice chiusa è omeomorfa ad una circonferenza. Non dimostremo questo fatto. Ma, pur lasciandolo a livello intuitivo, osserviamo che ci permette di pensare al problema anche da un altro punto di vista: quali proprietà della circonferenza si preservano se la deformiamo?

Una proprietà, semplice ma fondamentale, viene individuata dal Teorema di Jordan:

TEOREMA 5.8 (Teorema della curva di Jordan, enunciato intuitivo). *Una curva semplice chiusa nel piano divide il piano in due componenti: un “dentro”, limitato, e un “fuori”, illimitato. La curva è il contorno comune di queste due parti.*

OSSERVAZIONE 5.9. Come conseguenza immediata, ritroviamo subito il fatto, a noi già noto, che una retta non è omeomorfa ad una circonferenza, visto che la retta divide il piano in due regioni illimitate...

La dimostrazione di questo teorema, a dispetto della semplicità del suo enunciato, non è affatto banale. Fu intuito e formulato da Camille Jordan (nel 1887), ma la dimostrazione da lui proposta si rivelò incompleta. Seguirono anni di tentativi, mentre cresceva lo stupore nel constatare le difficoltà che si incontravano in una questione apparentemente banale. La prima dimostrazione corretta fu infine trovata da Oswald Veblen nel 1905. L'insidia sta proprio nel concetto di curva semplice chiusa, che comprende una vastissima quantità di oggetti geometrici, visto che include tutte le possibili immagini omeomorfe del cerchio (osserviamo che per curve elementari, come la circonferenza, o un poligono regolare, o un'ellisse, la dimostrazione è immediata).

In queste lezioni dimostreremo il teorema di Jordan per le *curve poligonali*. Sono quelle curve semplici chiuse γ che hanno questa ulteriore proprietà: si può dividere il segmento $[0, 1]$ in un certo numero di sottosegmenti $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n]$ (dove $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < 1 = a_n$), tali che $\gamma([a_i, a_{i+1}])$ sia un segmento nel piano. In altre parole, la curva semplice chiusa è anche una *spezzata*, formata da un numero finito di segmenti rettilinei.

Si tratta di un caso particolare del teorema, ma già molto interessante e niente affatto scontato, come ci mostra la Figura I.45.

Richiamiamo fra l'altro una sua notevole conseguenza: visto che il risultato di Jordan ci permette di parlare di “parte racchiusa” da una curva poligonale, abbiamo “trovato” una possibile buona definizione di poligono. Potremo infatti dire che un poligono è costituito “dalla parte di piano racchiusa da una curva poligonale (contorno incluso, cioè inclusa la curva stessa)” - in accordo con la nostra idea intuitiva che un poligono debba essere omeomorfo ad un cerchio (questa risulta davvero essere una conseguenza della definizione precedente, ma non lo dimostreremo nelle nostre lezioni).

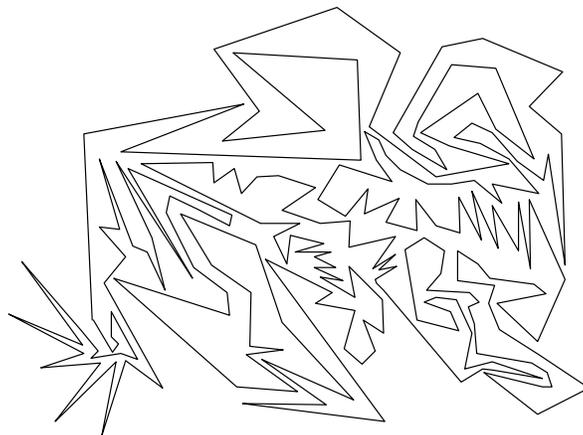


FIGURA I.45. Per questa curva poligonale, che in fondo non è complicata, visto che ha solo poche decine di lati, non è immediato capire quali sono i punti interni e quelli esterni...

II. Secondo giorno

Curve, cartine e colori, dimostrazioni e nuovi problemi.

1. Il teorema della curva di Jordan

In questa lezione proviamo a dare qualche dettaglio in più sulle risposte ai problemi della curva di Jordan e della colorazione delle cartine. Come sempre accade, fare qualche passo in avanti, conoscere le cose più approfonditamente significa anche lasciare spazio a nuove curiosità e porsi nuove domande. Concluderemo dunque il capitolo lasciando a voi vari spunti e problemi a cui pensare.

Abbiamo intuito che il Teorema della curva di Jordan è fondamento di gran parte della geometria che conosciamo, a partire dai poligoni. Cominciamo dunque da qui. Per prima cosa diamo un enunciato più preciso del teorema, già riferito alle curve poligonali.

TEOREMA 1.1 (Teorema di Jordan per le curve poligonali). *Una curva poligonale \mathcal{C} suddivide i punti del piano in tre sottoinsiemi: l'insieme \mathcal{C} costituito dalla curva stessa, l'insieme \mathbf{I} dei punti interni e l'insieme \mathbf{E} dei punti esterni. L'insieme \mathcal{C} è il contorno sia di \mathbf{I} sia di \mathbf{E} . Più precisamente, comunque si prendano due punti di \mathbf{I} , (oppure di \mathbf{E}), questi possono essere congiunti da una spezzata che non interseca \mathcal{C} . Invece, comunque si scelgano un punto di \mathbf{I} e un punto di \mathbf{E} e una spezzata che li congiunge, tale spezzata interseca \mathcal{C} . L'insieme \mathbf{I} è limitato mentre l'insieme \mathbf{E} è illimitato.*

OSSERVAZIONE 1.2. Se nell'enunciato precedente sostituiamo l'aggettivo “poligonale” con “semplice e chiusa”, abbiamo un enunciato preciso del Teorema di Jordan per curve semplici chiuse. Per quel che riguarda l'aggettivo “limitato”, visto che siamo in un contesto più formale specifichiamo meglio cosa significa: come possiamo intuire, significa che l'insieme \mathbf{I} può essere racchiuso dentro un quadrato (o un cerchio) opportunamente grande.

Traccia della dimostrazione del Teorema di Jordan per le curve poligonali (seguiamo il testo di Courant e Robbins [4]).

Sia dunque \mathcal{C} una curva poligonale. Cominciamo ad individuare gli insiemi \mathbf{I} ed \mathbf{E} .

A tal fine scegliamo una semiretta r nel piano che non sia parallela a nessuno dei segmenti che formano \mathcal{C} . Ciò è possibile perchè per ipotesi esistono solo un numero finito di tali segmenti, e dunque di direzioni “proibite”. Per ogni punto p del piano non contenuto in \mathcal{C} consideriamo la semiretta $r(p)$ originata applicando in p la semiretta scelta sopra, e contiamo le sue intersezioni con \mathcal{C} *tralasciando le intersezioni date da vertici di \mathcal{C} se questi vertici appartengono a due segmenti che stanno dalla stessa parte di $r(p)$* . Diciamo che il punto p appartiene all'insieme \mathbf{E} se la semiretta interseca \mathcal{C} un numero pari di volte; altrimenti p è un elemento di \mathbf{I} .

Abbiamo a questo punto suddiviso il piano in tre parti: \mathcal{C} , \mathbf{I} , \mathbf{E} . Dimostriamo che \mathbf{I} ed \mathbf{E} hanno le caratteristiche descritte nell'enunciato. Dati due punti p, q entrambi in \mathbf{E} (ci limitiamo a considerare questo caso, quello in cui entrambi i punti sono in \mathbf{I} è analogo), dobbiamo dimostrare che esiste una spezzata che li congiunge e che non interseca \mathcal{C} . Consideriamo dunque una spezzata s che li congiunge.

Se tale spezzata non interseca \mathcal{C} , allora abbiamo già quello che vogliamo. Anzi, possiamo fare una osservazione ulteriore: s è interamente contenuta in \mathbf{E} . Infatti, se immaginiamo di muovere la semiretta originata in p spostando la sua origine lungo il cammino in questione, la parità del numero delle sue intersezioni può cambiare solo incontrando un vertice di \mathcal{C} che congiunge due segmenti che stanno dalla stessa parte della semiretta - ma in tal caso abbiamo stabilito sopra che il conto delle intersezioni non cambia (vedi Figura II.1, dove la spezzata s è un semplice segmento). In particolare, questo argomento mostra che ogni cammino che collega un punto in \mathbf{E} con un punto in \mathbf{I} deve intersecare \mathcal{C} .

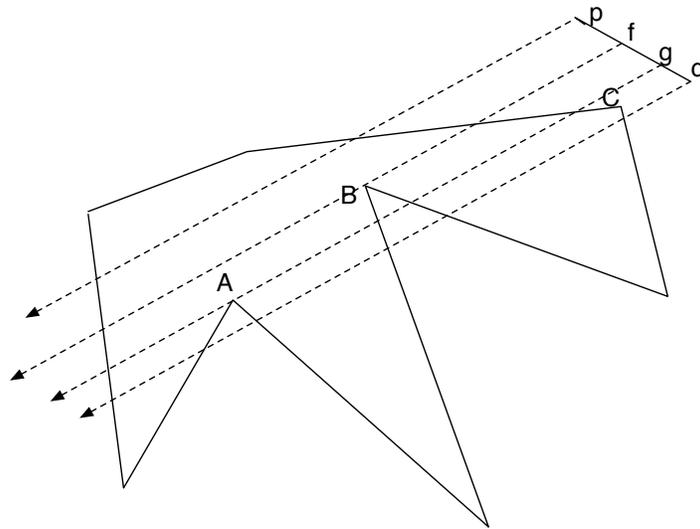


FIGURA II.1. La semiretta uscente da q interseca 6 volte il poligono, quella uscente da g interseca 4 volte (visto che A non conta), quella uscente da f interseca 2 volte (B non conta) come quella uscente da p .

Supponiamo ora che s intersechi \mathcal{C} . Bisogna mostrare che è possibile modificare questa spezzata e trovarne una che colleghi p e q senza incontrare \mathcal{C} . Percorrendo s da p a q , chiamiamo p' la prima e q' l'ultima delle intersezioni con \mathcal{C} . Possiamo concludere la dimostrazione mostrando che il cammino ottenuto (vedi Figura II.2) seguendo s fino a “poco prima di p' ” e poi “costeggiando” \mathcal{C} (a distanza abbastanza ridotta da non incontrare mai altri punti di \mathcal{C}) incontra il segmento $q'q$ (e quindi possiamo poi seguire di nuovo s per ottenere un cammino da p a q contenuto completamente in \mathbf{E} , come richiesto). L'unica cosa che può andare storta è che il cammino, quando arriva nei pressi di q' , non intersechi s tra q' e q ma solo tra p' e q' . Ciò però non può accadere perchè, costeggiando \mathcal{C} , la parità dei punti del nostro cammino non cambia - in particolare, siccome p è in \mathbf{E} , tutto il cammino è in \mathbf{E} e quando costeggia il punto q' deve avere la stessa parità di q , quindi possiamo farlo proseguire fino a intersecare s tra q' e q . \square

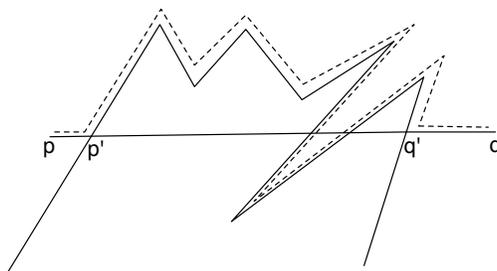


FIGURA II.2. La costruzione del cammino poligonale che congiunge p a q rimanendo all'interno di \mathbf{E} .

ESERCIZIO 1.3. Completare i dettagli della dimostrazione del Teorema di Jordan per i poligoni. In particolare, motivare con precisione l'ultima frase (“Ciò però non può accadere perchè, costeggiando $P...$ ”).

Il sottoinsieme \mathbf{I} sarà l'insieme dei punti interni al poligono, mentre \mathbf{E} sarà l'insieme dei punti esterni. Possiamo intuire il perché se pensiamo al caso di un poligono regolare: una semiretta uscente da un punto interno al poligono interseca il contorno in un punto (cioè un numero dispari di volte), mentre una semiretta uscente da un punto esterno al poligono interseca il contorno in due punti o in un vertice -che in questo caso conta zero- o in nessun punto, cioè sempre un numero pari di volte...

Per confermare questa intuizione, risolvete il seguente esercizio (in realtà è incluso nell'esercizio precedente, perché si tratta di provare l'ultima affermazione dell'enunciato del teorema, ma vista la sua importanza lo segnaliamo nuovamente alla vostra attenzione):

ESERCIZIO 1.4. Dimostrare che l'insieme \mathbf{I} occupa una regione limitata del piano, mentre l'insieme \mathbf{E} occupa una regione illimitata.

Un altro aspetto che vorremmo sottolineare è l'indipendenza della dimostrazione del teorema di Jordan per i poligoni dalla particolare scelta, operata all'inizio, di una semiretta r . Se cambiassimo tale semiretta, cambierebbero gli insiemi \mathbf{I} ed \mathbf{E} che individuiamo proprio grazie ad essa? No, non cambierebbero; possiamo rassicurarci in tal senso perché, nel corso della dimostrazione abbiamo ottenuto anche un'altra caratterizzazione di \mathbf{I} ed \mathbf{E} , in cui r non compare (“sono quelle due parti del piano tali che, se si prendono due punti in una di esse, esiste un cammino che li congiunge e che non incontra mai \mathcal{C} , mentre, se si prende un punto in una ed un punto nell'altra, ogni cammino che li congiunge interseca $\mathcal{C}...$ ”).

2. Il problema delle colorazioni delle cartine

Abbiamo visto che i grafi possono permetterci di codificare i dati essenziali del problema delle colorazioni di una cartina geografica. È dunque giunto il momento opportuno per imparare qualcosa di più sui grafi, a cominciare da una buona definizione. Il nostro discorso assumerà dunque, nella prima parte di questo paragrafo, un carattere più formale.

La definizione rigorosa di grafo non può basarsi sul suo “disegno” come diagramma di punti connessi da linee - non fosse altro che perchè sicuramente si concorderà che i tre diagrammi di Figura II.3 “rappresentano lo stesso grafo”. Ciò che sembra importare è “quali punti sono collegati e quali no”, in un senso astratto che vogliamo rendere preciso.

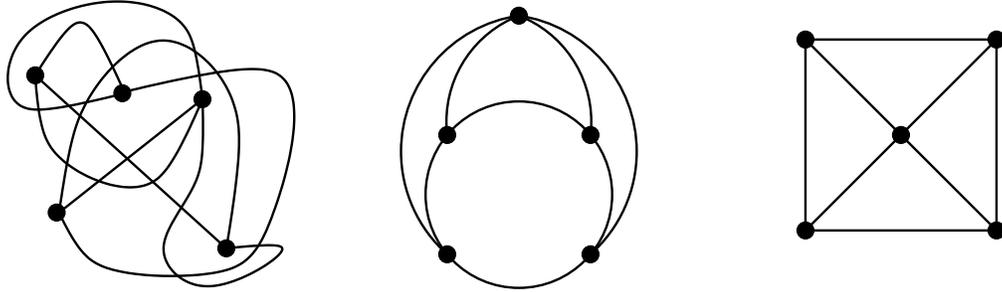


FIGURA II.3. Tre raffigurazioni diverse dello ‘stesso’ grafo.

Un grafo G è definito da un insieme \mathcal{V} di *vertici* (o *nodii*), e dall’insieme \mathcal{E} dei suoi *archi*. Ogni arco è, formalmente, una coppia $\{u, v\}$ di vertici. Un *cappio* è un arco i cui estremi coincidono - ovvero un $\{u, v\} \in \mathcal{E}$ per cui $u = v$. In queste lezioni ci occuperemo solo di grafi *semplici*, ovvero dove due vertici sono connessi da al più un arco, e senza cappi¹. È uso comune identificare il grafo con la coppia di insiemi $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$.

DEFINIZIONE 2.1. Chiameremo *grafo finito* una coppia ordinata $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ dove \mathcal{V} è un insieme finito (detto insieme dei *vertici* di \mathcal{V}) e $\mathcal{E} \subset \{\{u, v\} \mid u, v \in \mathcal{V}, u \neq v\}$ è l’insieme degli *archi* di G . Due vertici $u, v \in \mathcal{V}$ sono detti *adiacenti* (o *connessi da un arco*) se $\{u, v\} \in \mathcal{E}$. Un vertice v è *incidente* con un arco e se $v \in e$.

Quando sarà necessario specificarlo, chiameremo $\mathcal{V}(G)$ e $\mathcal{E}(G)$ l’insieme dei vertici o degli archi del grafo G . Un grafo H è un *sottografo* del grafo G se $\mathcal{V}(H) \subset \mathcal{V}(G)$ e $\mathcal{E}(H) \subset \mathcal{E}(G)$.

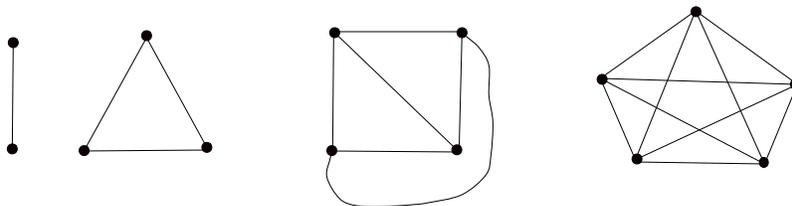
Nel seguito, tutte le volte che useremo il termine grafo intenderemo grafo finito.

Un *percorso* di lunghezza n in un grafo $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ è una sequenza di $n + 1$ vertici $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ tali che $\{v_i, v_{i+1}\} \in \mathcal{E}$ per ogni $i = 0, \dots, n - 1$. Se $v_0 = v_n$, la sequenza è detta *percorso chiuso* o *circuito*. Diremo che il percorso *attraversa* un arco $e \in \mathcal{E}$ se esiste un i per cui $e = \{v_i, v_{i+1}\}$. Chiameremo *cammino* un percorso nel quale tutti i vertici sono distinti tra loro. Un percorso nel quale tutti i vertici sono distinti tra loro con l’unica eccezione di $v_0 = v_n$ è detto *cammino chiuso* o *ciclo*.

Il grafo G è detto *connesso* se per ogni paio di vertici distinti $u, v \in \mathcal{V}$ esiste un percorso in G con u come primo vertice e v come ultimo vertice (ciò è equivalente a dire che esiste un cammino *da u a v*). Possiamo così partizionare i vertici di un grafo qualunque in più classi, mettendo due vertici u e v nella stessa classe se esiste un percorso da u a v . Ogni classe è detta *componente connessa* di G . Dire che un grafo è connesso equivale dunque a dire che ha al più una componente connessa (il grafo vuoto, senza vertici né archi, non ha nessuna componente connessa).

ESEMPIO 2.2. Dato un numero intero positivo n , sia $[n]$ l’insieme $\{1, 2, \dots, n\}$. Il grafo K_n con $\mathcal{V}(K_n) = [n]$ e $\mathcal{E}(K_n) = \{\{i, j\} \mid i \neq j, i, j \in [n]\}$, dove quindi ogni paio di vertici distinti è connesso da un arco, è detto *grafo completo* di ordine n (vedi Figura II.4). Il grafo K_n è chiaramente connesso per ogni n .

¹Il lettore più attento si ricorderà che il grafo di Königsberg, disegnato in Figura I.37, non è semplice. In effetti il ragionamento che esporremo si applica anche a tali grafi con “archi paralleli”: basta immaginare di suddividere gli archi “incriminati” con un vertice, e otteniamo un grafo semplice.

FIGURA II.4. I grafi completi K_2, K_3, K_4, K_5 .

Dire, come abbiamo fatto sopra, che ciò che determina un grafo è “come i vertici sono connessi tra loro” è essenzialmente stabilire la nozione di isomorfismo tra grafi. Due grafi si dicono isomorfi se c’è una corrispondenza biunivoca tra i loro vertici tale che due vertici sono connessi da un arco in un grafo se e solo se i loro corrispondenti lo sono nell’altro. Vogliamo rendere precisa questa definizione.

DEFINIZIONE 2.3. Due grafi $G_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$, $G_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2)$ sono *isomorfi* se esiste una bigezione $f : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ tra i loro vertici tale che per ogni coppia di vertici $u, v \in \mathcal{V}_1$ si ha $\{u, v\} \in \mathcal{E}_1$ se e solo se $\{f(u), f(v)\} \in \mathcal{E}_2$.

La nozione di isomorfismo definisce una relazione di equivalenza tra grafi. È uso comune identificare grafi isomorfi, e così quando parliamo di un grafo intendiamo in realtà parlare di ogni grafo isomorfo ad esso.

ESERCIZIO 2.4. Le coppie di grafi di Figura II.5 e II.6 sono composte da grafi isomorfi?

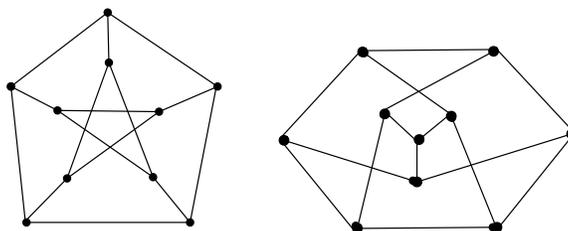


FIGURA II.5. ...isomorfi?

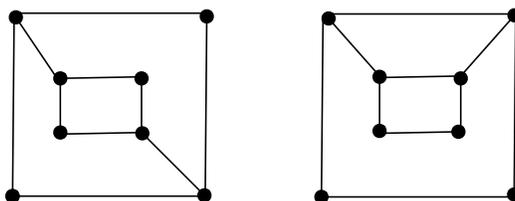


FIGURA II.6. ...isomorfi?

Rivolgiamo ora la nostra attenzione al problema dei modi possibili per disegnare un dato grafo sul nostro foglio di carta.

Un'occhiata alla Figura II.3 basta per convincersi che alcuni modi di disegnare un grafo aiutano meglio a comprenderne la struttura. In particolare, un buon criterio sembra essere quello di cercare di disegnare il grafo in modo che le linee che rappresentano gli archi si intersechino solo nel punto che rappresenta un vertice comune, se esso esiste, e che tali linee non si autointersechino.

Chiamiamo *planare* un grafo che può essere disegnato in questo modo.

Il grafo di Figura II.3 è chiaramente planare - il disegno stesso lo dimostra. In altri casi non è immediato capire se il grafo in questione veramente non può essere disegnato in modo che i suoi archi non si intersechino, o se invece semplicemente il disegno che ne dimostrerebbe la planarità è difficile da trovare. In ogni caso, decidere semplicemente “per ispezione” se un grafo è planare o no non è una questione banale.

ESERCIZIO 2.5. Usando Jordan, dire se il grafo pentagonale completo K_5 è planare (provate da soli; potete poi guardare il Capitolo IV, a cui rimandiamo per qualche osservazione e qualche notizia in più sul problema della planarità).

Siamo finalmente pronti per affrontare il problema delle colorazioni: consideriamo dunque una buona carta geografica sulla sfera. Nella lezione del primo giorno, abbiamo mostrato come si può ottenere una carta geografica planare (con una regione illimitata) equivalente alla carta sferica dal punto di vista del problema dei colori.

Dalla Sezione 5.2 del Capitolo I sappiamo inoltre associare a questa carta planare un grafo. Ora che abbiamo cominciato a conoscere meglio i grafi possiamo chiederci: che tipo di grafo otteniamo? Certamente finito e semplice (non ci sono cappi, visto che non ci sono confini interni ad uno stato, e per costruzione due vertici possono essere congiunti da un solo lato, dunque non ci sono lati multipli). Ma possiamo convincerci che il nostro grafo ottenuto da una buona cartina è anche planare (vedi Figura II.7).

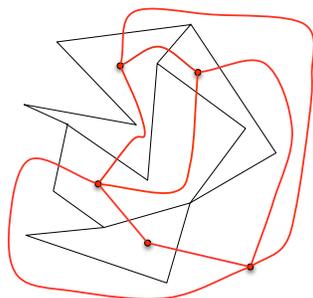


FIGURA II.7. Il grafo associato ad una buona cartina geografica è planare.

Intuitivamente questo risultato ci pare ragionevole. Per motivarlo in maniera più fondata, però, possiamo usare ancora una volta il Teorema di Jordan. Supponiamo, per semplicità, che le regioni della cartina siano poligoni (a parte quella illimitata). Scegliamo, per ogni lato della regione da cui deve passare un arco del grafo, un punto interno al lato (che sarà il punto dove l'arco del grafo intersecherà il lato della regione). A partire dal vertice relativo ad una regione (che è un punto P interno alla regione), dobbiamo tracciare delle curve che lo connettano ai punti scelti sui lati della regione, senza intersecarsi fra di loro. Possiamo farlo applicando ripetutamente il Teorema di Jordan. Jordan ci permette infatti di

tracciare la prima di queste curve in modo che sia una spezzata e che rimanga tutta interna al poligono. Adesso immaginiamo di “ingrassarla” chiudendola fra due spezzate molto vicine, e consideriamo il nuovo poligono ottenuto (vedi Figura II.8). All’interno di questo poligono potremo tracciare la seconda curva, e così via... Un ragionamento simile “sbrogia” anche il caso della regione illimitata.

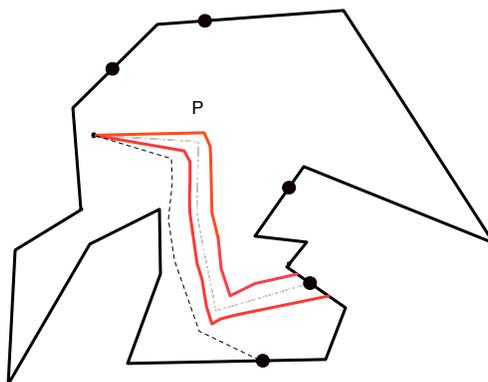


FIGURA II.8. Come usare il teorema di Jordan per convincersi che il grafo ottenuto da una buona cartina è planare: la prima curva (tratteggiata con puntini) viene “ingrassata”. Si crea un nuovo poligono, e Jordan garantisce che la seconda curva (a trattini) può essere tutta interna. Dopodiché si prosegue allo stesso modo e si riescono a tracciare tutte le curve verso i punti scelti sui lati (in figura ne rimangono ancora tre da tracciare) senza che si intersechino fra loro. Per figure semplici come quella sopra in realtà si potrebbero immediatamente tracciare le curve desiderate; l’algoritmo esposto funziona in generale.

Abbiamo adesso tutte le conoscenze per rischiare la “scalata”, appassionante, ad un bella dimostrazione, quella del teorema dei cinque colori.

TEOREMA 2.6 (Kempe 1879 / Heawood 1890). *Ogni grafo finito semplice e planare si può colorare usando 5 colori (dunque ogni buona cartina geografica sulla sfera si può colorare usando 5 colori).*

La lasciamo al vostro lavoro, sotto la forma di una catena di esercizi ².

ESERCIZIO 2.7. Osservare che il teorema di Jordan per i poligoni ci garantisce che un grafo planare divide il piano in regioni, dette “facce”. Dimostrare che anche in questo caso vale la formula di Eulero (si conta anche la “faccia infinita”).

ESERCIZIO 2.8. Usare la formula di Eulero per dimostrare che ogni grafo semplice finito planare connesso ha un vertice da cui escono meno di 6 lati.

ESERCIZIO 2.9. Sia v un vertice del grafo G che ha meno di sei lati uscenti, e sia G' il grafo ottenuto da G cancellando v e tutti i lati uscenti da v . Supponiamo di sapere che

²Questi esercizi sono stati affrontati dagli studenti, con l’aiuto dei tutors, nel corso del laboratorio. In questo “Quaderno” potete trovare le soluzioni all’interno della trattazione più sistematica contenuta nel Capitolo IV.

G' si può colorare con 5 colori. Dimostrare che allora anche G si può colorare con 5 colori (eventualmente “ricolorando” anche parte di G' ; la Figura II.9 illustra la situazione più difficile da affrontare, quella in cui i vertici adiacenti a v sono cinque e colorati con i cinque diversi colori).

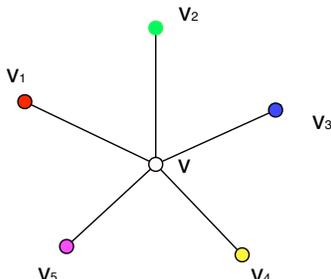


FIGURA II.9. Siano v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 colorati rispettivamente di rosso, verde, blu, giallo, rosa. Se non esiste nessun cammino in G' che connette v_1 con v_3 ed è colorato solo di rosso e blu, allora consideriamo il sottografo connesso G_1 che contiene v_1 e tutti i vertici rossi o blu che sono connessi a v_1 da un cammino colorato solo di rosso e blu, e definiamo una nuova colorazione di G' colorando di rosso tutti i vertici blu di G_1 , e di blu tutti i vertici rossi di G_1 . Questa è una buona 5-colorazione di G' che usa solo 4 colori per i vertici v_1, \dots, v_5 . Se invece esiste un cammino “rosso-blu” che connette v_1 a v_3 allora dimostrare che, per il teorema delle curve di Jordan, non può esistere un cammino “giallo-verde” che connette v_2 e v_4 ...

ESERCIZIO 2.10. Completare la dimostrazione del teorema dei 5 colori, impostandola per induzione sul numero dei vertici del grafo.

3. Altri problemi per il laboratorio

Concludiamo suggerendo, per il laboratorio (e per casa...), alcuni problemi aggiuntivi, che riguardano i grafi e le colorazioni.

La suddivisione del piano ottenuta tracciando delle rette non è una carta di tipo standard (ci sono infatti varie regioni illimitate), ma è interessante provare a colorarla.

ESERCIZIO 3.1. Tracciamo nel piano n di rette; il piano risulta suddiviso in regioni (vedi Figura II.10). Dimostrare che per colorare questa carta geografica bastano due soli colori.

Abbiamo scoperto che, nel caso delle rette, bastano due soli colori; questo è indipendente dal numero delle regioni, ma, visto che siamo in argomento, non ci lasciamo sfuggire di segnalarvi questo classico e interessante problema:

ESERCIZIO 3.2. Quante possono essere al massimo le regioni in cui il piano viene suddiviso da n rette?

Torniamo a cartine di tipo standard, ma ottenute con costruzioni particolari.

ESERCIZIO 3.3. Tracciamo nel piano un arbitrario numero di circonferenze ed ellissi. Dimostrare che la cartina così ottenuta si può colorare con due soli colori.

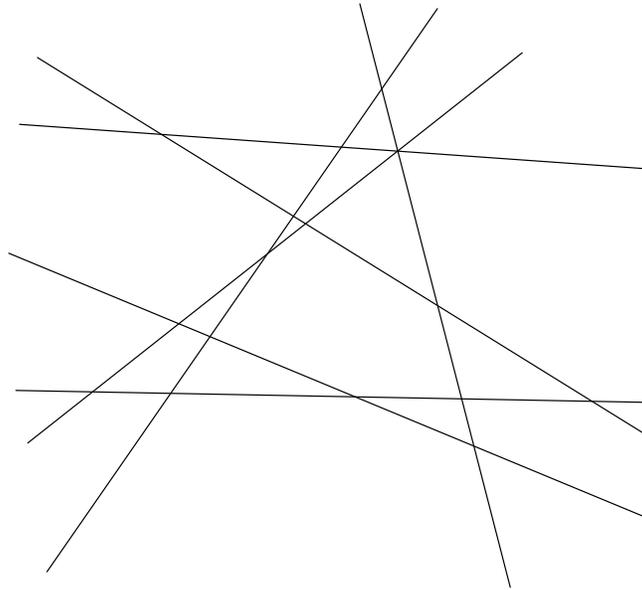


FIGURA II.10. Una suddivisione del piano ottenuta con sette rette.

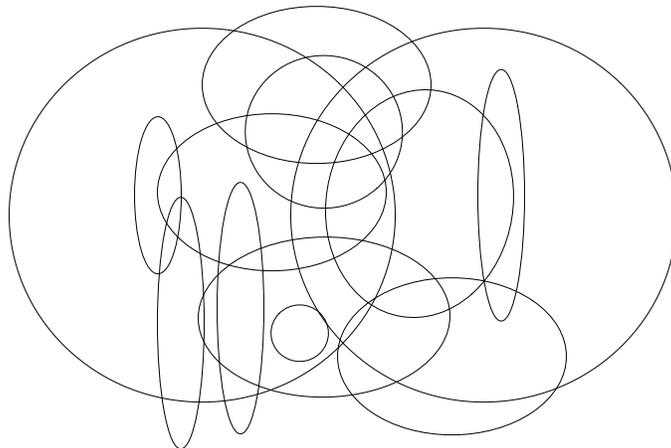


FIGURA II.11. Una cartina ottenuta con cerchi ed ellissi.

ESERCIZIO 3.4. Disegniamo nel piano una curva, che potrà non essere semplice, ossia potrà ripassare due volte dallo stesso punto: in tal caso si richiede che l'intersezione sia trasversa, non tangente (vedi Figura II.12). Dimostrare che anche in questo caso occorrono solo due colori per colorare la carta risultante.

Occupiamoci adesso di grafi, e ripartiamo ancora una volta da Königsberg. Per prima cosa ripensiamo al problema dei ponti e vediamo se, mentre lo risolvevamo, abbiamo anche intuito cosa accade in generale, se cerchiamo di fare passeggiate su un grafo qualunque...

ESERCIZIO 3.5. Dato un grafo G semplice e finito, sotto quali condizioni è possibile fare una passeggiata che parta da un vertice v , percorra tutti i lati una e una sola volta e torni in v ? Fare qualche esempio (la risoluzione completa di questo problema la potete trovare nel

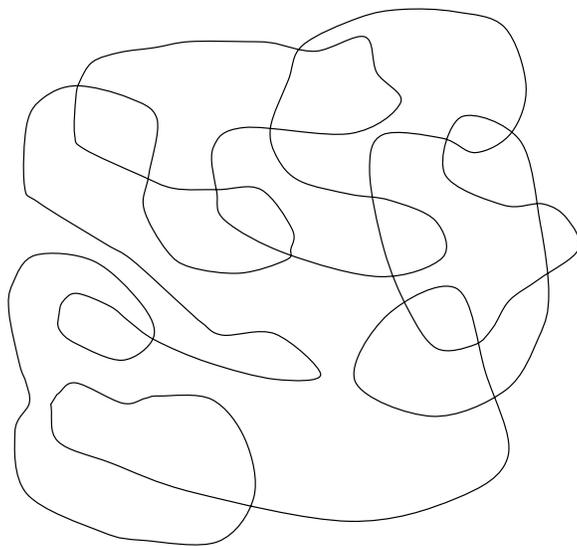


FIGURA II.12. Una suddivisione del piano ottenuta con una curva con intersezioni trasverse.

Capitolo IV).

Proponiamo ora un gioco “mangereccio”, nello stile di quello della pizza. Si chiama “Chomp sui grafi” (vedi [8]): dato un grafo semplice finito G , ogni giocatore al suo turno può mangiare un vertice o un lato. La regola è che se si mangia un lato, dal grafo si cancella il lato in questione ma *non* i suoi vertici. Se invece si mangia un vertice, bisogna cancellare anche tutti i lati che lo toccano (vedi Figure II.13, II.14). Perde il giocatore che non ha più nulla da mangiare e si ritrova davanti al foglio bianco.

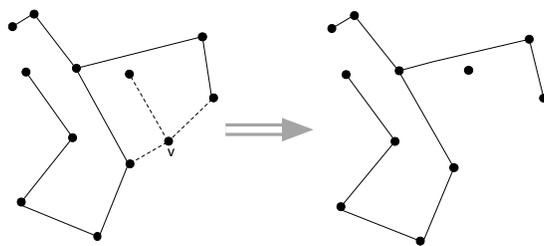


FIGURA II.13. Nel chomp sui grafi con una mossa si può mangiare un vertice e tutti i lati che lo toccano...

ESERCIZIO 3.6. Divertirsi a pensare tipi diversi di grafi (con pochi vertici, per iniziare) e trovare le corrispondenti strategie vincenti.

C'è un caso particolare, quello dei grafi-foresta, che merita di essere messo in rilievo. Per presentarlo, ripartiamo ancora una volta dalla nostra città-simbolo: la vecchia città di Königsberg, ora Kaliningrad. La città è stata più volte bombardata e danneggiata, e attualmente solo due dei sette ponti originali sopravvivono. Vi è inoltre un ponte ricostruito nel 1935 allo stesso posto del ponte originale, che porta il totale a 3. Non considereremo qui il viadotto autostradale costruito molto più tardi e che non si presta per una passeggiata come

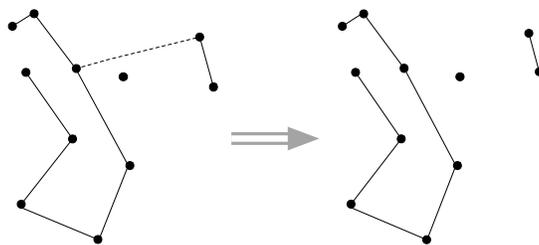


FIGURA II.14. ...oppure mangiare un lato.

quella del problema di Eulero. Tale passeggiata al giorno d'oggi dovrebbe quindi svolgersi sul grafo a destra di Figura II.15.

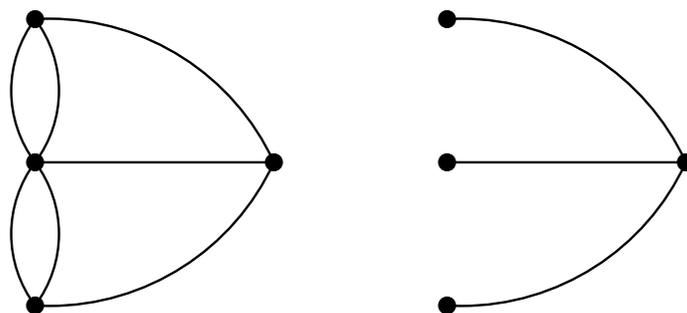


FIGURA II.15. Il grafo originale del problema di Eulero e, a destra, quel che resta oggi dei ponti “euleriani” di Königsberg.

Vediamo che questo grafo non solo non contiene circuiti euleriani, ma non contiene *nessun* circuito.

DEFINIZIONE 3.7. Chiamiamo *albero* un grafo connesso che non contiene nessun circuito. Un grafo le cui componenti connesse sono alberi è detto *foresta*.

In particolare, osserviamo che un grafo costituito da un solo punto (un solo vertice) è un albero visto che soddisfa le richieste della definizione.

ESERCIZIO 3.8. Cercare di capire se nel Chomp sulle foreste uno dei due giocatori ha a disposizione una strategia vincente (per la risoluzione vedere poi il Capitolo IV).

Per ribadire la centralità dei “cammini” nel nostro discorso, vi proponiamo un altro problema:

ESERCIZIO 3.9. Dato un grafo semplice finito G descrivere un algoritmo che permetta, partendo da un vertice, di percorrere ogni lato esattamente due volte (una volta in un senso e una volta nell'altro) e ritornare al vertice di partenza. Si può estendere il risultato anche al caso di un grafo finito ma non semplice?

L'esercizio precedente potrebbe rivelarsi molto utile nel caso che qualcuno di noi si trovi perso in un labirinto. Affidandoci all'algoritmo, saremmo infatti capaci di percorrere tutto il labirinto studiando ogni parete fino a trovare la porta di uscita. Oppure, e il contesto è assai più piacevole, potremmo percorrere tutti i corridoi di un museo in entrambe le direzioni, certi di vedere una e una sola volta ogni opera esposta sulle pareti.

III. Terzo giorno

Forme a pezzi.

1. Cosa è una superficie

Gli argomenti che abbiamo trattato nei nostri incontri precedenti hanno ruotato sempre più o meno attorno al concetto di forma. Ci siamo chiesti cioè quali sono le caratteristiche geometriche che non cambiano se “deformiamo gli oggetti in maniera continua”, o meglio, se applichiamo agli oggetti delle trasformazioni topologiche.

Per non dover entrare in dettagli tecnici, il concetto di trasformazione topologica, che si basa fortemente sul concetto di continuità, è stato illustrato a livello intuitivo e attraverso esempi. Ne facciamo ancora un paio, per riprendere il filo del discorso: non accettiamo fra le trasformazioni topologiche quella che schiaccia una sfera su un piano. In questo caso, anche se in un certo senso le cose possono avvenire molto gradualmente, c'è un momento, quello cioè in cui due punti provenienti da due diversi emisferi vengono portati a coincidere, che marca un cambiamento “troppo grande”. Analogamente, non accetteremo la possibilità che si faccia un buco alla nostra sfera: anche in questo caso, nel momento in cui il buco compare si avrebbe un cambiamento “troppo brusco” nelle proprietà del nostro oggetto. A chi volesse approfondire sarà sufficiente cercare un libro sulle *applicazioni continue* e sull'*omotopia*, come ad esempio [12].

La nostra intuizione, finché parliamo di superfici cui siamo abituati, è una buona guida: ad esempio un disco, una sfera ed un toro sono chiaramente diversi. D'altra parte, nessuno dubita che un palloncino rimanga sostanzialmente una sfera, anche quando rappresenta un cane o un coniglio. Per oggi quindi il nostro sforzo di generalizzazione si concentrerà su cosa sia distintivo di una certa forma e cosa non lo sia formulando queste idee in termini matematici.

Prima di tutto, osserviamo che per il momento abbiamo sempre trattato oggetti che ricadono più o meno tra le superfici o direttamente tra i sottoinsiemi del piano. Gli oggetti che abbiamo studiato, pur nella loro varietà, sono tra i più semplici, tra l'altro perché hanno “dimensione” 1 o 2 (questa scelta ci ha permesso ad esempio di disegnarli abbastanza fedelmente sulla lavagna: un vantaggio che si perde quando si considera una dimensione più alta). Ma cosa è dunque questo concetto di *dimensione*? Esso è di estrema importanza in matematica ed è un (altro) caso in cui formalizzare le proprie certezze intuitive si rivela particolarmente stimolante, anche se forse sorprendentemente difficile. Va detto che nel caso della dimensione la nostra intuizione non è più così efficiente e questa è una delle ragioni della difficoltà. Siamo abituati a vedere cose di dimensione 3, 2, 1 o anche 0 come astrazione degli oggetti del mondo reale, ma cosa li differenzia veramente, e cosa vuol dire avere “dimensione 4” o dimensione 10? Ma deve essere un numero intero? Forse avete sentito parlare dei

frattali e visto qualche bellissimo disegno che si può fare di essi: in questo caso la dimensione non è più nemmeno un numero intero! Ma allora... perché non provare a pensare a oggetti di dimensione negativa? E si può avere dimensione infinita? Non è facile fermarsi! Non possiamo seguire questa strada oggi: ci basterà la sola dimensione 2, quella cioè che riguarda le cose su cui ci si può muovere “in due direzioni”, ma che non hanno “spessore”.

Cosa dunque vogliamo definire “superficie”? Un primo passaggio è per esempio quello che porta un cubo in una sfera (parliamo sempre della superficie, naturalmente). Si tratta in sostanza di prendere il cubo e colpirlo sui vertici e sugli spigoli per arrotondarlo e deformare poi lentamente il risultato nella sfera. Non c'è dubbio che intuitivamente un angolo sia diverso da una superficie liscia; ma alla luce di quanto detto, la differenza non è poi così grande, visto che la possiamo superare con una deformazione molto piccola. Anzi, a questo punto possiamo dire che tutti quelli che abbiamo definito poliedri hanno in effetti la “forma” di una sfera.

Abbiamo detto che per poter parlare di superficie, vogliamo qualcosa su cui si possa scorrere, ci si possa muovere in due diverse direzioni in tutti i punti. Qualcosa cioè che assomigli ad un piano, per lo meno dal punto di vista delle possibilità di movimento (mentre naturalmente non metteremo restrizioni sul fatto che la superficie possa curvare in modi anche complicati, come ad esempio il palloncino a forma di cane). Questo viene comunemente espresso in termini di “carte”. Possiamo cioè chiedere che sia possibile disegnare un “atlante” della superficie, composto da una collezione di carte che rappresentano ciascuna un pezzetto della superficie come un pezzo di piano. In fondo, per la sfera è proprio quello che accade con l'atlante geografico; ma la stessa cosa è possibile anche per il cubo, anche se in qualche caso dobbiamo far avvolgere le carte attorno agli spigoli e ai vertici (vedi Figura III.1).

Cosa non accettiamo, quindi? Per esempio, non va bene un palloncino con il filo: in alcuni punti assomiglia ad un piano, ma in altri ad una retta. Né va bene un palloncino appoggiato al soffitto in un punto: sebbene il soffitto e il palloncino di per sé sarebbero superfici, attaccandole in questo modo si crea un punto che non è possibile “cartografare” su una parte di piano.

Ma a proposito di piano e sfera: ecco un'altra caratteristica del tutto intuitiva delle superfici. Esse possono infatti essere “illimitate”, “infinite”, come il piano, o “limitate”, “finite”, come la sfera. La definizione precisa ha a che vedere con il fatto che si possano sempre usare solo un numero finito di carte o meno: se è possibile, diremo che la superficie è *compatta*. Questo separa quindi le superfici in due classi diverse, con da una parte la sfera che è compatta, dall'altra parte il piano che non lo è. Ma ora che dire del cerchio senza bordo (cioè la parte dentro una circonferenza del piano)? Anch'esso è evidentemente una superficie, o meglio, vogliamo che lo sia: in quale categoria lo mettiamo?

ESERCIZIO 1.1. Formulare più precisamente la differenza tra sfera e piano e mostrare che il cerchio aperto non è compatto.

La nostra richiesta di somiglianza “locale” al piano non è però troppo restrittiva? Essa esclude dalle superfici, per esempio, il cerchio con il bordo: infatti i punti del bordo non possono vantare la libertà di movimento tipica del piano. Ci si può muovere in due direzioni diverse, ma una delle due ha un verso vincolato e questo è vietato. Se vogliamo dare un posto anche al cerchio con il bordo e a molte altre superfici simili dobbiamo allora fare una ulteriore distinzione. La soluzione comunemente adottata prevede di definire la classe delle “superfici con bordo”, che sono per l'appunto degli spazi (la parola spazio va intesa nel senso

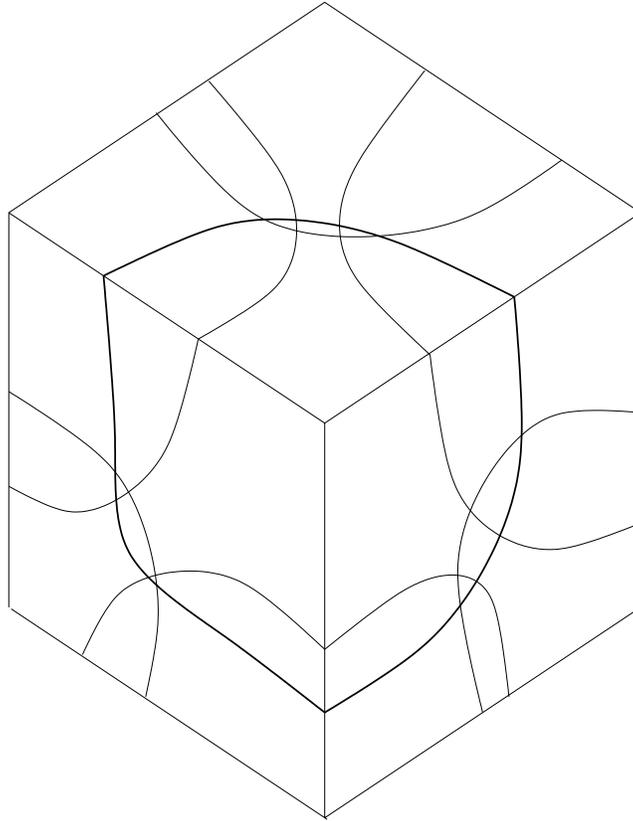


FIGURA III.1. Un cubo con un possibile atlante

di un insieme con qualche struttura, in questo caso una struttura geometrica riguardante la posizione reciproca degli elementi, e non indicativa della “dimensione 3”) che in alcuni punti assomigliano al piano, mentre in altri punti assomigliano ad un piano tagliato a metà. Un altro esempio è il caso di un nastro chiuso a forma di anello. Notate che questo ha un bordo fatto in realtà di due parti (due circonferenze), ma questo non è vietato dalla nostra definizione.

PROBLEMA 1.2. Il nastro con il bordo è compatto?

Nel nostro cammino di esplorazione all’interno delle varie possibili superfici siamo forse convinti di aver determinato le principali proprietà che hanno le superfici che vediamo intorno a noi tutti i giorni: gli oggetti che conosciamo possono essere ricondotti a questo schema. In qualche caso, dovremo scegliere: vogliamo considerare una bottiglia come un oggetto di spessore nullo (nel qual caso ha l’aspetto di una sfera bucata, o, se preferite, di un cerchio con il bordo) o come una superficie esterna che prosegue poi all’interno (ma in questo secondo caso essa sarà una semplice sfera deformata)? E che dire della tazzina da caffè? Se la consideriamo senza spessore essa non è una superficie, visto che ha un pezzo che assomiglia ad un segmento (il manico) ed un altro pezzo che assomiglia ad un piano; ma se lo spessore conta, deformandola si può portarla ad avere la forma di un semplice anello rotondo, un toro, e che è effettivamente una superficie (compatta).

Eppure ecco una sorpresa: consideriamo l’oggetto della figura III.2, chiamato *Nastro di Möbius* (lo stesso matematico tedesco che formulò il problema dei quattro colori e risolse

quello dei cinque colori).

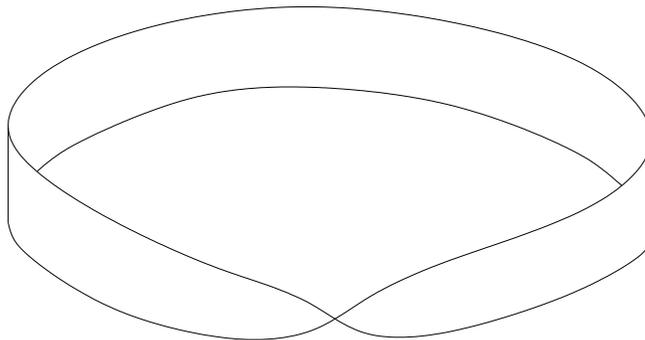


FIGURA III.2. Un nastro di Möbius

Dobbiamo ammettere anche questo tra le superfici? Si presenta qui una ulteriore caratteristica che non avevamo ancora considerato. Potete vedere che il nastro fa “mezzo giro” mentre si avvolge, il che non era certo vietato, e questo fa sì che non ci siano più due parti di bordo come nel nastro normale, ma una sola fatta a forma di circonferenza, il che è un po’ strano; e peggio ancora, non c’è modo di distinguere quale sia la faccia esterna e quale quella interna, perché muovendosi lungo la superficie si può passare senza accorgersene da una parte all’altra. Se immaginate di essere dei piccoli abitanti di questa superficie, che non possono vedere la terza dimensione, come nel racconto Flatlandia (vedi [2]), vi accorgete che non c’è modo di sapere su che “faccia” siete e che dal vostro punto di vista potreste benissimo essere sul piano. Abbiamo cioè incontrato un’altra caratteristica che differenzia le superfici a livello “globale”, ma non a livello “locale”. Il problema non è veramente che il bordo sia fatto di una parte sola: il cerchio con bordo ha come bordo una circonferenza del tutto simile alla circonferenza che costituisce il bordo del nastro di Möbius, ma per lui possiamo distinguere due facce.

Questa nuova proprietà viene chiamata *orientabilità*. Un nastro normale è orientabile, proprio perché esiste una faccia “interna” ed una “esterna”, o meglio, perché possiamo decidere nei vari punti quale sia quella interna e quale sia quella esterna in modo coerente. Quindi qui abbiamo una proprietà locale che non si trasferisce a livello globale. Ora, che questo trasferimento sia possibile oppure no dipende dalla proprietà, naturalmente. Però questo passaggio dal locale al globale è un procedimento tra i più versatili e permette di definire moltissime proprietà che conosciamo bene sul piano anche per le superfici, purché siano proprietà che non vengono turbate dalla deformazione che la carta opera. Una definizione precisa e generale di questo modo di trasportare le cose dal piano alla superficie porterebbe a farsi ulteriori domande e ad iniziare un altro discorso che porterebbe molto lontano, in domini che occupano una parte fondamentale della ricerca contemporanea in geometria, come le cosiddette *topologia algebrica* e *geometria differenziale*. Per gli interessati, oltre a [12], si può anche consultare [16].

Vogliamo ammettere anche la possibilità che una superficie sia non orientabile. Questo non accade spesso con gli oggetti attorno a noi, perché la loro superficie è per “natura” distinta in un “interno” ed un “esterno” dell’oggetto stesso; nonostante ciò, può capitare di incontrare problemi legati all’orientabilità ad esempio studiando i nodi, le trecce, i festoni

colorati e l'arricciamento del filo del telefono. In questi casi il fatto che certe configurazioni si possano o non si possano realizzare può dipendere da questioni di orientazione.

Il nostro studio del nastro di Möbius però non è ancora finito. Il nastro non è orientabile, ma se lo tagliamo lungo la sua circonferenza centrale (vedi la figura III.3) che accade? Per un nastro normale questo comporta la divisione in due nastri più stretti, ma ora abbiamo una sorpresa: esso non si separa in due (infatti, già da prima camminando lungo il bordo si poteva percorrerlo tutto senza mai attraversare la linea centrale) però diventa ora un nastro

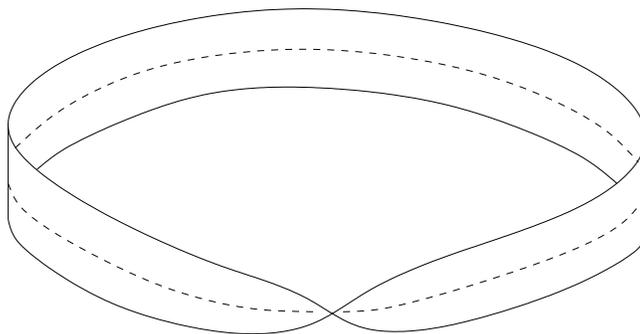


FIGURA III.3. Tagliare lungo la linea tratteggiata...

che fa due mezzi giri.

PROBLEMA 1.3. Questa nuova superficie è orientabile? Quali superfici sono orientabili tra quelle ottenute da un nastro che fa un diverso numero di mezzi giri? E esse sono veramente tutte diverse?

PROBLEMA 1.4. E che succede se tagliamo il nastro a un terzo della distanza dal bordo invece che al centro?

Quest'idea dei tagli è più profonda di quanto possa forse a prima vista sembrare, ed è possibile studiare quanti tagli al massimo siano necessari per dividere una superficie in due pezzi e scoprire così un modo molto intuitivo per distinguere due superfici magari complicate.

PROBLEMA 1.5. Riprendiamo in esame il toro: quanti tagli a forma di circonferenza posso fare senza separarlo in due parti?

PROBLEMA 1.6. Consideriamo ora il cerchio con il bordo: esso è una superficie compatta? Come possiamo distinguerlo dal toro? E dal nastro con il bordo?

Notiamo anche che in questo momento ci stiamo accontentando di un concetto vago di "taglio" su una superficie. Per essere coerenti, dovremmo per lo meno dire cosa intendiamo con un taglio: si tratta semplicemente di togliere dalla superficie un sottoinsieme derivante dall'includere una copia della circonferenza (eventualmente deformata). È molto interessante notare che mentre nei giorni scorsi ci siamo dati molto da fare per dimostrare il Teorema della curva di Jordan, almeno nel caso delle curve poligonali, in questo nostro contesto più generale delle superfici ora il teorema non vale già più: tagliando il nastro di Möbius lungo la circonferenza centrale non lo abbiamo affatto separato in una parte "interna" ed una "esterna"! Sorge dunque subito spontanea la domanda: quali caratteristiche di una superficie ci garantirebbero la validità del Teorema della curva di Jordan?

PROBLEMA 1.7. Formulare una congettura circa la risposta a questa domanda e verificarla su qualche esempio significativo.

Avevamo anche accennato al fatto che il problema della colorazione delle carte geografiche su un toro ha una soluzione diversa da quella sulla sfera; e così naturalmente molti problemi di cui ci siamo occupati per la sfera avranno il loro equivalente per superfici qualunque.

PROBLEMA 1.8. Quale potrebbe essere una formula di Eulero per il toro?

Visto che abbiamo citato la nozione intuitiva di “interno” ed “esterno”, facciamo un altro esempio di superficie che non rispetta queste distinzioni, detto *bottiglia di Klein* in onore del matematico Felix Klein. Per darne un’immagine, prendiamo un tubo lungo e flessibile e pieghiamolo fino a fargli fare quasi una ciambella. Ora, invece di attaccare i bordi in modo semplice ed ottenere un toro, immaginiamo di avere a disposizione una quarta dimensione per fare entrare il tubo dentro se stesso senza toccare le pareti (possiamo pensare più facilmente tutto questo in “sezione”, cioè in tre dimensioni, come nella figura 1) e riattacciamo i due bordi allargando la parte interna fino a raggiungere quella esterna. In tre dimensioni si può costruire la cosa con la carta, a patto però di accettare l’intersezione al momento in cui il tubo rientra attraversando la propria parete.

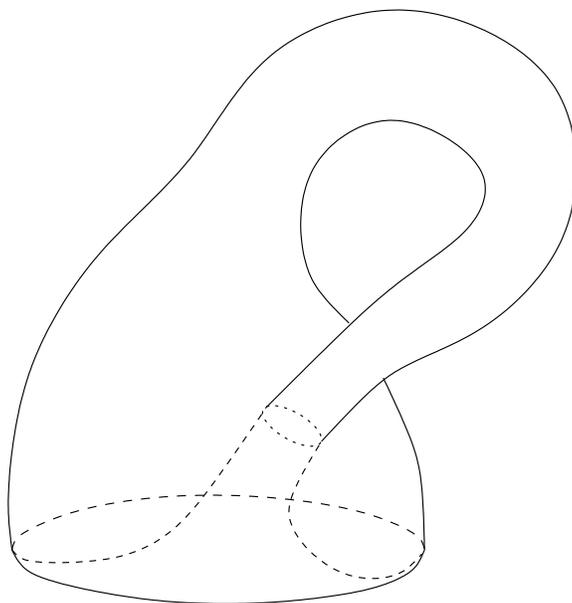


FIGURA III.4. Una bottiglia di Klein da 0 litri

Se guardiamo con attenzione questa superficie, ci accorgiamo che non possiamo definirne un “interno” ed un “esterno”: partendo da un punto che potremmo definire interno e senza mai attraversare la parete, ma al contrario seguendola come avevamo fatto per il nastro di Möbius, si giunge a punti che sono senza dubbio esterni alla superficie. Si ripropone il problema del nastro di Möbius, ma in questo caso non è il mancare di una faccia “davanti” e di una faccia “dietro” a creare il paradosso, quanto il mancare di uno spazio “dentro” e di uno “fuori”. Del resto, però, questo spazio non ha niente che violi il concetto di superficie che abbiamo dato fino ad ora: esso è un altro esempio di superficie compatta non orientabile,

che mostra dinuovo, se vogliamo, che il guaio del nastro di Möbius non è stato la presenza di quello strano bordo fatto di una sola componente, ma è di altra origine.

Avendo fatto un elenco, anche se relativamente corto, di superfici e di loro proprietà, ci chiediamo se sia ormai possibile descrivere in qualche modo tutti gli oggetti che ricadono sotto la nostra definizione; proveremo a farlo, naturalmente, a meno di omeomorfismi, cioè considerando uguali oggetti che come abbiamo visto è sostanzialmente impossibile distinguere per noi perché deformabili l'uno nell'altro. Abbiamo per fortuna per guidarci anche una piccola serie di *controesempi*, cioè dei casi che non ricadono nella nostra definizione forse per un solo particolare; questi sono strumenti preziosi nel lavoro del matematico, tanto che talvolta dal loro studio accurato viene l'idea che soggiace alla dimostrazione di qualche teorema positivo sugli oggetti che invece non hanno quel particolare “sbagliato”. Per una trattazione dettagliata si può consultare (in inglese) [14].

Consideriamo quindi una superficie compatta senza bordo, che chiameremo S .

Cominceremo con l'esaminare una sola carta: descrivere una parte così piccola della superficie è un compito facile che potrebbe essere fatto in molti modi, ma noi dovremo preoccuparci delle intersezioni con tutte le altre carte che, anche se in un numero finito per la compattezza di S , potrebbero essere complicate. Perciò suddividiamo (quasi tutta) la carta in triangoli che possiamo volendo prendere molto piccoli, eventualmente suddividendoli ulteriormente ad esempio scegliendo un punto interno e collegandolo con degli archi ai vertici. La parte di carta che ci serve sicuramente di ricoprire è quella che non è coperta da nessun'altra carta (se l'intera zona della carta è coperta da altre carte, questa carta è inutile e possiamo scartarla direttamente). All'interno di una carta, d'altronde, siamo in una parte di piano e quindi qui il teorema della curva di Jordan vale, il che ci assicura che l'interno e l'esterno di ciascun triangolo sono ben definiti.

In questo modo si può dimostrare che si può ricoprire l'intera superficie di triangoli in modo compatibile, cioè in modo da utilizzare gli stessi triangoli nelle intersezioni delle carte e che due triangoli siano disgiunti, o si intersechino in un solo vertice, o in un solo lato (tutto intero). Questo ricoprimento viene detto *triangolazione* della superficie. Il fatto che una triangolazione esista sempre per le superfici compatte non va considerato scontato: fu dimostrato per la prima volta nel 1925 da Radó e la dimostrazione si basa proprio su un ripetuto uso del Teorema della curva di Jordan e sulla possibilità di risuddividere alcuni triangoli già scelti. Ma c'è di più: dalla dimensione 4 in poi esistono spazi che non ammettono triangolazioni!

Ora la nostra superficie assomiglia molto ad un tentativo di poliedro, magari uno di quelli che avevamo rigettato. Partiamo da un triangolo qualunque e consideriamo un suo triangolo vicino. È sicuramente possibile considerare il quadrilatero che i due triangoli compongono sulla superficie facendo “sparire” il lato che li divide. A questo punto, come nei giochi dei giorni scorsi, si può scegliere un altro triangolo che confini con il quadrilatero e cancellare uno dei lati in comune con il quadrilatero. Proseguendo in questo modo, si arriverà ad un punto in cui non si possono più aggiungere al poligono altri triangoli, poiché essi erano in un numero finito.

PROBLEMA 1.9. Quanti lati avrà tale poligono, se abbiamo aggiunto n triangoli?

A questo punto ci possiamo chiedere: abbiamo raggiunto tutti i triangoli della triangolazione, cioè tutti i punti della superficie? Questo in realtà dipende da una nuova proprietà delle superfici, finora trascurata. Possiamo infatti immaginare che esistano magari due o

più “clan” di triangoli, del tutto estranei gli uni agli altri, ma uniti tra di loro: per fare un esempio molto semplice, questo accadrebbe se la superficie fosse composta da due sfere. Ci accorgiamo allora che non abbiamo mai richiesto che il nostro spazio fosse in effetti “una” superficie, ma ci siamo solo garantiti che sia composto da superfici. Uno spazio con più parti scollegate si dice *sconnesso*, e la sua analisi procede normalmente con la semplice giustapposizione delle analisi sulle singole superfici che lo compongono. Perciò, per noi non è una grave restrizione supporre che fin dall’inizio S fosse *connessa* e che quindi partendo da un triangolo si raggiungano tutti gli altri con il nostro procedimento.

PROBLEMA 1.10. È vero che si raggiungono tutti i triangoli se e solo se S è connessa?

Abbiamo allora ora un poligono i cui lati, però, andrebbero ancora identificati a due a due, solo che non possiamo farlo perché altrimenti non avremmo più un poligono: infatti, ciascun lato apparteneva in realtà a esattamente due triangoli, quindi, se non è stato cancellato, ora compare due volte sul bordo del poligono. È consuetudine allora percorrere il perimetro in senso antiorario chiamando i lati con lettere minuscole $a, b, c \dots$ quando si incontrano lati nuovi, e ripetere la lettera quando si incontra la seconda copia del lato, con l’esponente $+1$ o -1 a seconda che il verso di percorrenza del lato sia lo stesso di quello dell’identificazione, oppure sia opposto (in effetti, come ce sono due soli versi di percorrenza, ci sono solo due modi, a meno di deformazioni, di identificare due segmenti in modo che gli estremi finiscano negli estremi: o gli estremi vengono conservati, o vengono scambiati). Il perimetro viene così descritto con una “parola” del tipo $aba^{-1}cbc$ e questa è sufficiente per ricostruire da quale superficie siamo partiti, anche se la rappresentazione non è perfetta perché è possibile trovare parole diverse partendo dalla stessa superficie.

Questo passaggio è molto interessante: inizialmente avevamo una superficie qualunque, immensamente varia, e piano piano abbiamo ridotto le sue possibilità prima con la triangolazione, poi con la riduzione al poligono e più precisamente al suo bordo. L’idea di trasformare lo studio della geometria in uno studio combinatorio è molto potente e nella sua formulazione attuale si può far risalire a Poincaré.

Ora diamo un paio di definizioni che ci serviranno: se una coppia di lati compare con una successione del tipo $\dots a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1} \dots$, essi vengono detti *coppia di prima specie*; invece un lato che non compare che con esponente 1, invece, cioè in una successione del tipo $\dots a \dots a \dots$, viene chiamato *lato di seconda specie*.

Occupiamoci per un momento del caso più elementare: come possiamo ottenere la sfera in questo modo? Ci sono molti poligoni diversi che danno luogo alla sfera, ma il più semplice è forse quello con perimetro aa^{-1} . Questo corrisponde a fare un taglio per esempio lungo un meridiano e aprire la sfera fino a trasformarla in un disco, un po’ quello che accade con un planisfero: un facile controllo mostra che percorrendo il perimetro i due lati vengono effettivamente affrontati in senso inverso rispetto all’identificazione, perché il primo vertice che si incontra del secondo lato viene identificato (anzi, in questo caso coincide) con il secondo vertice del primo, e viceversa.

E come sarà il toro? Una possibilità è data dalla parola $aba^{-1}b^{-1}$ (una sola coppia di prima specie). Avevamo del resto già visto il toro in questa rappresentazione come quadrato con i lati identificati.

E la bottiglia di Klein? Anch’essa deriva come il toro da un tubo, ma l’identificazione della seconda coppia di lati è fatta nel verso opposto e la parola corrispondente può essere $abab^{-1}$.

Infine, esiste una superficie la cui parola sia aa (un solo lato di seconda specie)? Non si vede perché non debba esistere, anche se finora non l'avevamo mai incontrata. Si chiama *piano proiettivo reale* ed è possibile pensarla come il piano usuale con in più una circonferenza di bordo "all'infinito" i cui punti però siano identificati a due a due quando sono agli antipodi. Anche questa non è una superficie orientabile e non è facile da immaginare, oltre a non essere visibile nello spazio senza che si autointersechi come la bottiglia di Klein. Per la nostra classificazione (e non solo per quella) è però fondamentale. Le varie superfici sono rappresentate nella Figura III.5.

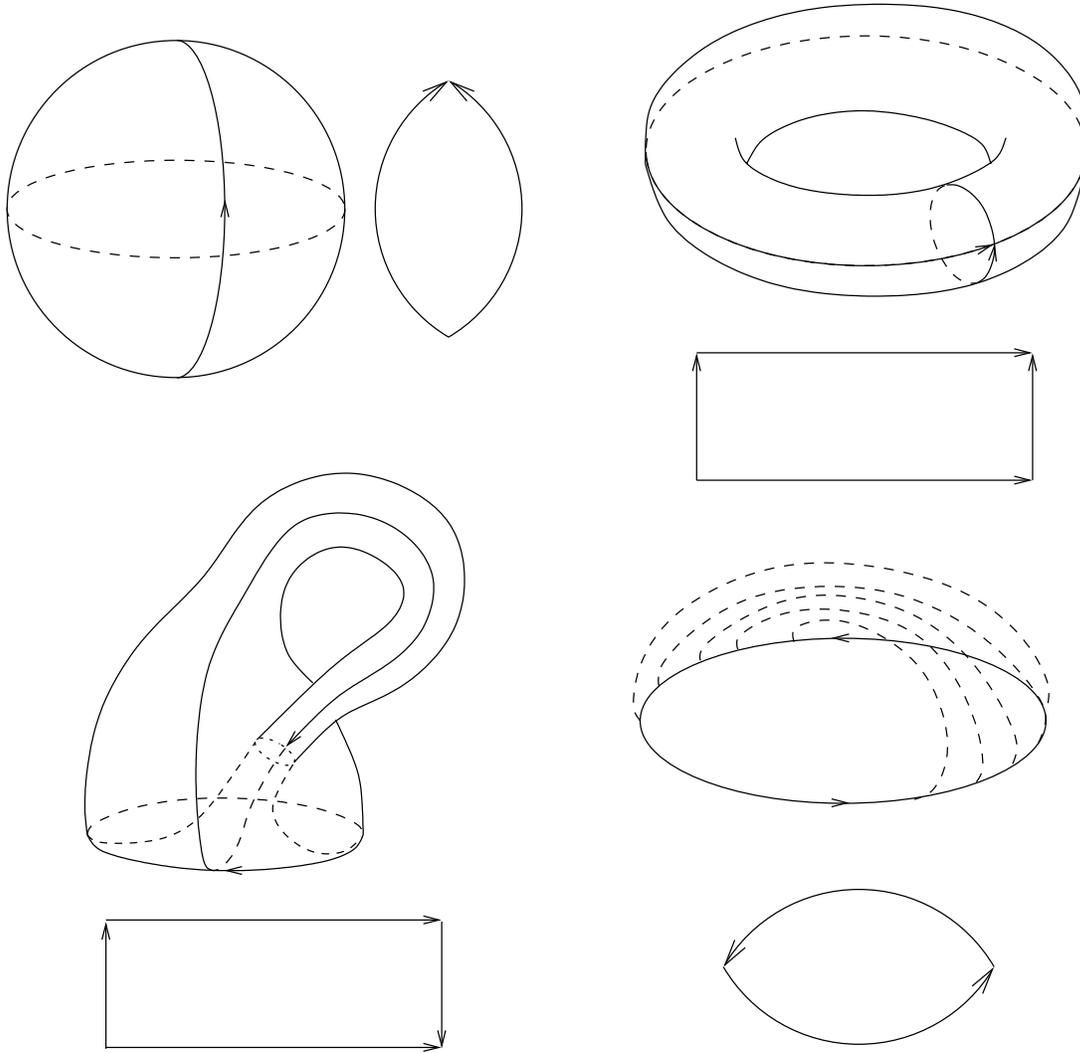


FIGURA III.5. Sfera, toro, bottiglia di Klein e piano proiettivo reale

In tutti questi casi abbiamo detto che una superficie non ha una sola parola corrispondente: ad esempio, se ad un certo punto lungo un perimetro di almeno 4 lati si incontra la successione aa^{-1} , una trasformazione facile mostra che è possibile fare l'identificazione lasciando ancora un poligono con le stesse caratteristiche, ma due lati in meno (vedi figura III.6).

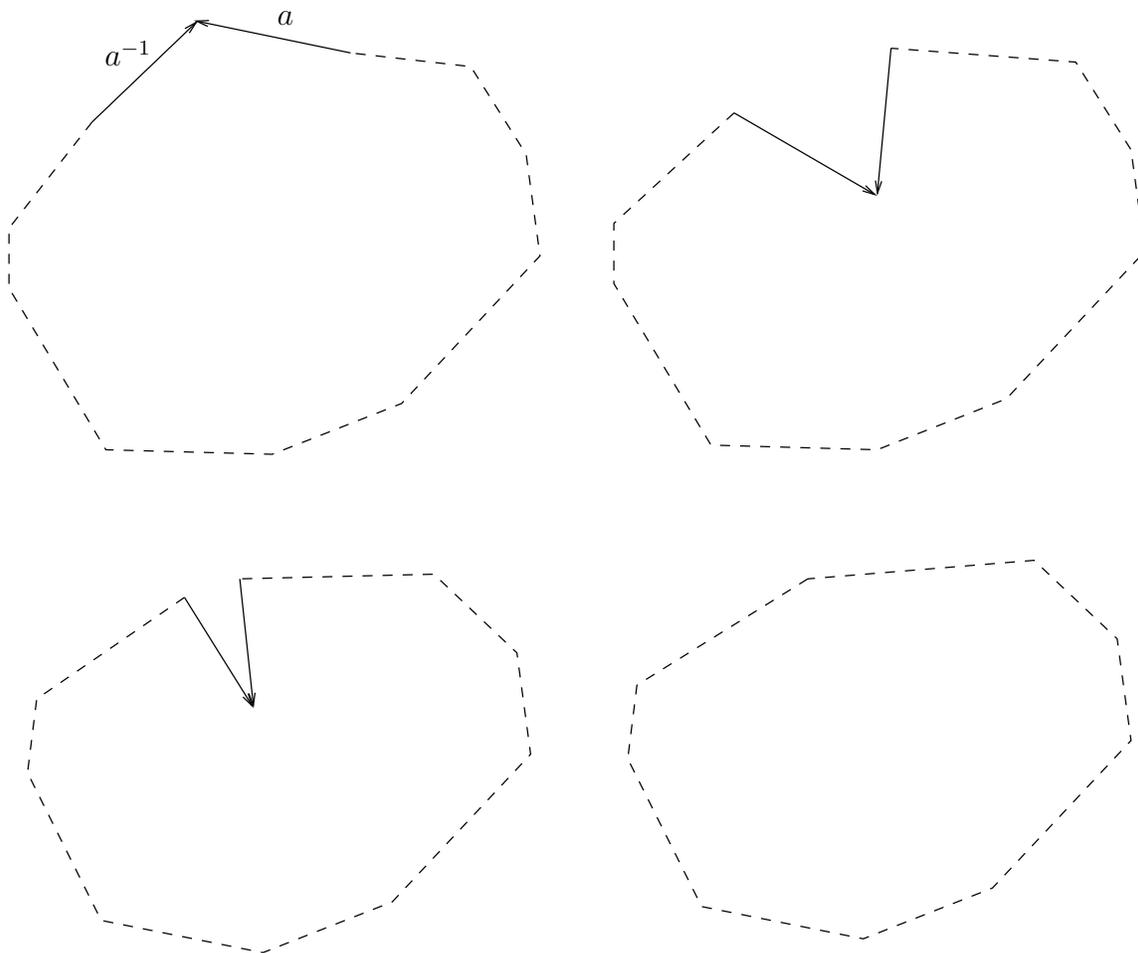


FIGURA III.6. Identificazione di due lati consecutivi orientati in maniera opposta

Attenzione però: la parola non va intesa come un prodotto tra numeri reali, in cui è possibile scambiare i fattori impunemente! In questo caso qualche manipolazione è ancora possibile, ma le regole sono molto più rigide. Dobbiamo infatti ricordare come il poligono è stato costruito: risulteranno possibili quelle “mosse” che portano la nostra parola in un’altra che si sarebbe potuta ottenere dalla stessa superficie usando una diversa triangolazione o un diverso ordine nella scelta dei triangoli di una stessa triangolazione. Potremmo ad esempio tracciare una diagonale del poligono, dividerlo in due poligoni (dopo aver designato con una nuova lettera il lato così aggiunto) e poi riattaccarli identificando due lati che andavano identificati, eliminando la lettera corrispondente (vedi figura III.7). Ad esempio, la bottiglia di Klein $abab^{-1}$ può anche essere rappresentata come $ccbb$.

Si può dimostrare che in questo modo con una procedura progressiva non banale, ma ben definita, la nostra parola può essere portata in una della seguenti forme:

1. aa^{-1} ;
2. $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} \dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$;
3. $a_1a_1a_2a_2 \dots a_ga_g$.

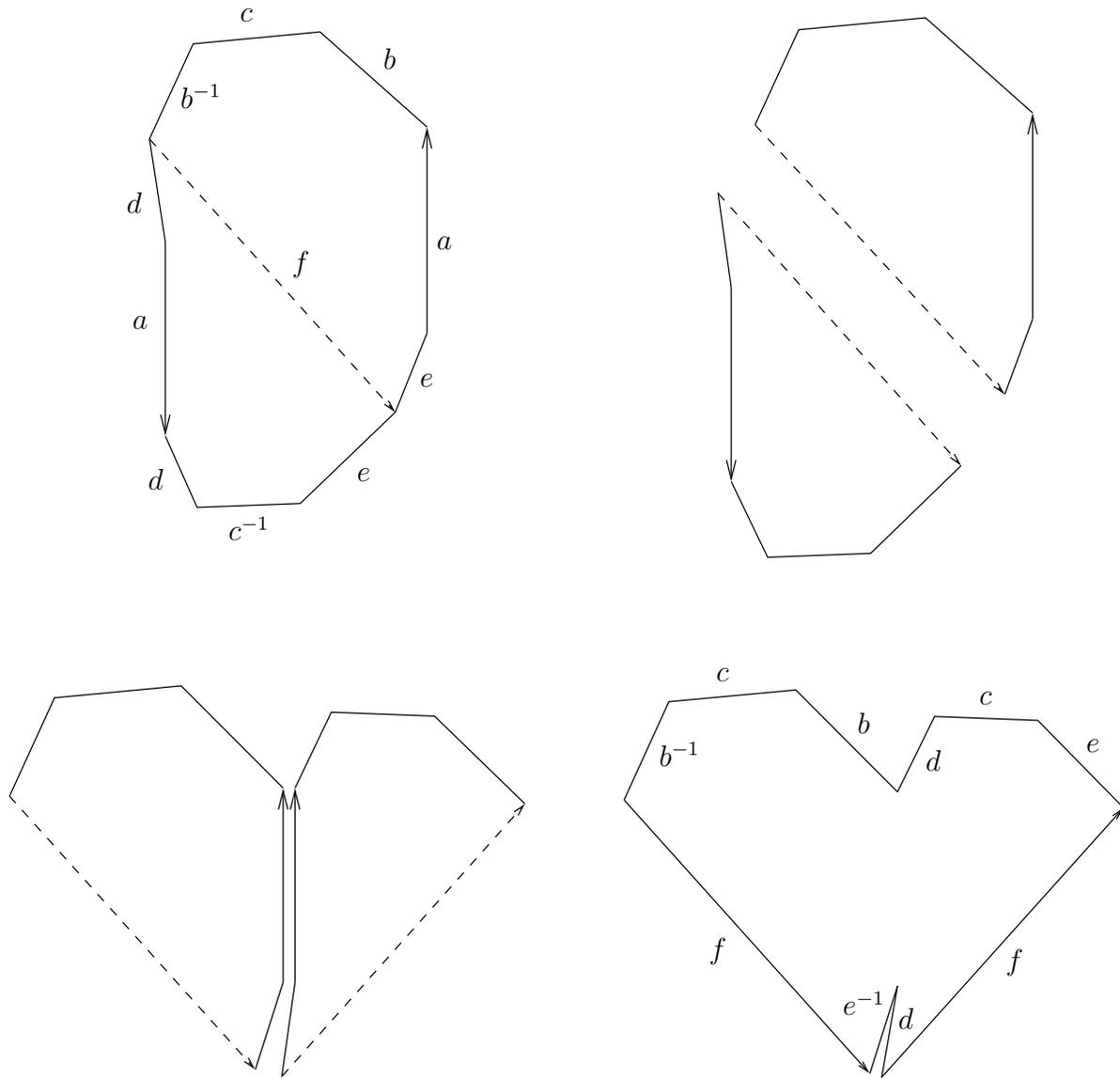


FIGURA III.7. Un'operazione possibile sul poligono.

In altri termini, a parte la sfera, si possono avere solo g coppie di prima specie o g lati di seconda specie. Il numero g è chiamato *genere* della superficie ed è quindi l'invariante fondamentale delle superfici (che viene posto a 0 per la sfera).

Possiamo notare come il toro e il piano proiettivo facciano un po' la parte di "generatori" per tutte le superfici a parte la sfera: le loro parole vengono ripetute g volte per ottenere tutte le altre superfici. In effetti, il fatto ad esempio che compaiano g coppie di prima specie significa che la superficie si può ottenere come *somma connessa* di g tori. Avevamo visto che normalmente attaccando due superfici S_1 e S_2 per un punto non si ottiene più una superficie: la somma connessa $S_1 \# S_2$ realizza una versione migliorata dell'attaccamento, fatta togliendo un intero disco aperto ad entrambe le superfici ed attaccando i due bordi ottenuti (omeomorfi a due circonferenze) il che produce nuovamente una superficie. In questo caso si ottiene quindi

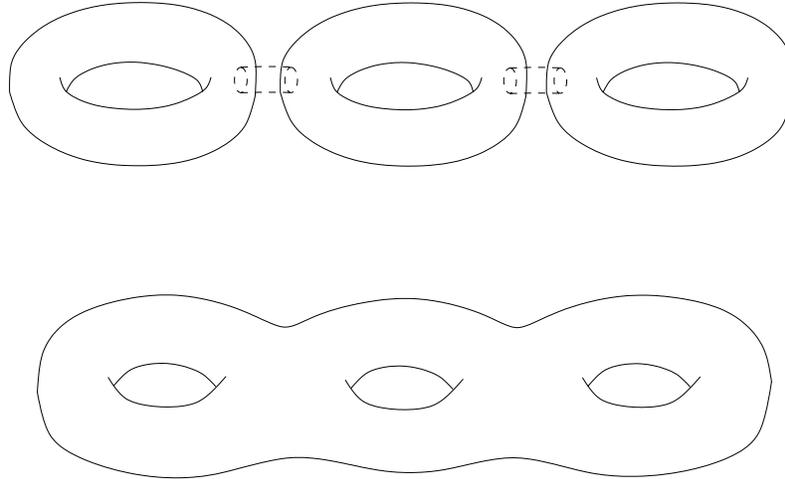


FIGURA III.8. Una superficie compatta connessa orientabile di genere 3 come somma connessa di 3 tori

una specie di “toro con g buchi” (vedi Figura III.8).

PROBLEMA 1.11. La somma connessa di superfici connesse dipende dal punto in cui si toglie il disco? E dipende dal modo di incollare le due circonferenze?

Un’ultima osservazione sui lati di seconda specie: non è difficile mostrare che se nella parola di una superficie compare un lato di seconda specie, essa non può essere orientabile (come in effetti accade per il piano proiettivo e per la bottiglia di Klein).

Possiamo finalmente formulare il nostro teorema:

TEOREMA 1.12. *Ogni superficie compatta connessa è omeomorfa alla sfera, ad una somma connessa di g tori o ad una somma connessa di g piani proiettivi reali. Tutte queste superfici sono distinte, in quanto hanno diverso il genere e/o l’orientabilità.*

PROBLEMA 1.13. Quali parti di questo teorema dobbiamo ancora dimostrare?

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo detto che tutte le superfici si riconducono a poligoni con parole corrispondenti ai tre tipi dell’enunciato e abbiamo spiegato che l’orientabilità (che certamente è un invariante topologico) distingue le ultime due classi. Quello che manca di dimostrare è che tutte queste superfici sono diverse tra loro.

Ma d’altra parte, abbiamo un modo di calcolare il genere di una superficie senza usare questo teorema? Se essa è la somma connessa di due superfici note, osserviamo che una sua triangolazione si ottiene dalle due triangolazioni date togliendo ad entrambe un triangolo aperto (il disco). Perciò possiamo calcolare la “formula di Eulero” che per $S = S_1 \# S_2$ diventa

$$V(S) - E(S) + F(S) = V(S_1) + V(S_2) - E(S_1) - E(S_2) + F(S_1) + F(S_2) - 2$$

Dalla rappresentazione del toro e del piano proiettivo come quadrato con i lati identificati possiamo dedurre che

1. il toro T ha un vertice, tre lati e due facce per cui

$$V(T) - E(T) + F(T) = 0;$$

2. il piano proiettivo reale P ha due vertici, tre lati e due facce per cui

$$V(P) - E(P) + F(P) = 1.$$

Ma allora le superfici orientabili di genere g hanno questo invariante pari a $2 - 2g$ (accidentalmente, questa formula vale anche per la sfera quando $g = 0$), mentre quelle non orientabili di genere g ce l'hanno pari a $2 - g$. Visto quindi che si può calcolare il genere a partire da questo invariante, il genere è anch'esso un invariante topologico, e (separatamente per le due classi di orientabilità) assume valori sempre diversi: di conseguenza due superfici della stessa classe con genere diverso non potranno mai essere omeomorfe. \square

Abbiamo così una classificazione completa delle superfici compatte connesse senza bordo. Abbiamo anche già detto che da questa sarebbe facile farne una per quelle non connesse; ma che dire di quelle con bordo? E di quelle non compatte?

Per quanto riguarda la prima domanda, in realtà non serve altro che una piccola modifica del nostro argomento.

PROBLEMA 1.14. Dimostrare che tutte le superfici compatte con bordo sono classificate dalle superfici compatte senza bordo che si ottengono “chiudendole” con dei dischi attaccati lungo le componenti di bordo e dal numero delle componenti di bordo stesse.

La seconda questione invece è ben più difficile. È ancora possibile classificarle, e la classificazione segue lo stesso spirito della precedente (due superfici sono omeomorfe se hanno lo stesso genere, la stessa classe di orientabilità e “bordi” omeomorfi), ma il genere può ora essere infinito, le classi di orientabilità sono 4 e il bordo non ha necessariamente un numero finito di componenti e può presentare una struttura non banale (questi teoremi sono dovuti a Kerékjártó).

La questione per le superfici è quindi sostanzialmente risolta completamente. Però...

Questa è una situazione che in matematica accade continuamente: ottenuto un risultato soddisfacente e completo, immediatamente si è portati a tentare di ottenere di più “riciclando” magari gli strumenti escogitati per risolvere il problema precedente per risparmiare fatica. Insomma, si cerca di ottenere di più con minore sforzo. Ma in quale direzione?

Una prima domanda potrebbe essere questa: perché dobbiamo sempre preoccuparci delle diverse triangolazioni? Cioè, non è che per caso alla fin fine sono tutte più o meno la stessa triangolazione?

Questa domanda ha una storia nobile e va sotto il nome di *Hauptvermutung* (“congettura principale” in tedesco). In effetti, nel caso delle superfici è vera; purtroppo però anche in questo caso per dimensione maggiore o uguale a 4 non è più vera (per risultati di Milnor, Casson e Sullivan).

Cosa altro si potrebbe sperare di avere in dimensione superiore? Per esempio, sarebbe possibile fare una classificazione analoga a quella della dimensione 2?

Anche questo problema ha una storia nobile: la sua soluzione (ancora una volta negativa per dimensione maggiore o uguale a 4!) da parte di Markov è legata alla soluzione del “problema della parola” di grande interesse in teoria dei gruppi e in informatica teorica (altri che hanno studiato l'argomento sono stati Dehn, Post, Gödel, Turing, Church, Boone e Novikov).

Infine possiamo chiederci: ma se due spazi hanno tutti gli invarianti “a posto” sono omeomorfi? Questo dipende da quali invarianti si considerano. Purtroppo, per i più comuni (i cosiddetti *gruppi di omotopia* e di *omologia*) non è vero già in dimensione 3 (Alexander).

In generale, questo problema è aperto e si presta ad essere affrontato sotto diversi punti di vista (vedi per esempio la congettura di Borel). Per pensarci potremmo sempre cominciare... mangiandoci una pizza!

IV. Approfondimento

Un po' di teoria dei grafi.

Nel corso della “settimana matematica”, e quindi anche nella parte principale del nostro libriccino, abbiamo usato ampiamente i *grafi* per descrivere diverse situazioni o strutture. Il nostro ragionare si è basato su alcune loro proprietà che non abbiamo avuto il tempo di dimostrare rigorosamente, ma solo di rendere plausibili attraverso degli esempi. A volte, completare la dimostrazione era uno dei compiti assegnati per il laboratorio.

Alla fine del percorso vogliamo però dare le basi su cui si può sviluppare rigorosamente la teoria dei grafi. Dopo aver introdotto il linguaggio adatto e aver accennato ad alcune proprietà generali, saremo in grado di fornire una dimostrazione completa dei teoremi sui grafi che abbiamo incontrato durante le giornate. A chi volesse poi andare oltre e approfondire questa materia possiamo segnalare, tra i tanti buoni, il manuale di Diestel [7] o quello, disponibile anche in italiano, di Wilson [17].

Questa fase di “rigore” e “formalizzazione”, dopo una fase in cui si sviluppa l’intuizione e ci si rende familiari con la materia, è tipica dell’attività matematica. Ci sembra quindi doveroso renderne conto in un ultimo capitolo.

Ci rifacciamo al Capitolo II per le definizioni principali e la terminologia adottata. Ripetiamo qui solo la definizione principale degli oggetti che trattiamo.

DEFINIZIONE II.2.1. Un *grafo finito* è una coppia ordinata $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ dove \mathcal{V} è un insieme finito (detto insieme dei *vertici* di \mathcal{V}) e $\mathcal{E} \subset \{\{u, v\} \mid u, v \in \mathcal{V}, u \neq v\}$ è l’insieme degli *archi* di G . Due vertici $u, v \in \mathcal{V}$ sono detti *adiacenti* (o *connessi da un arco*) se $\{u, v\} \in \mathcal{E}$. Un vertice v è *incidente* con un arco e se $v \in e$.

Quando sarà necessario specificarlo, chiameremo $\mathcal{V}(G)$ e $\mathcal{E}(G)$ l’insieme dei vertici o degli archi del grafo G . Un grafo H è un *sottografo* del grafo G se $\mathcal{V}(H) \subset \mathcal{V}(G)$ e $\mathcal{E}(H) \subset \mathcal{E}(G)$.

Ricordiamo anche che le nostre considerazioni si restringono ai grafi finiti e *semplici* (ovvero senza cappi e doppi archi).

1. Il Primo Teorema

Procediamo subito ad una nuova definizione, che ci permetterà di enunciare il nostro primo teorema.

DEFINIZIONE 1.1. Dato un grafo G e un vertice $v \in \mathcal{V}(G)$, chiameremo *valenza* di v in G il numero $d(v)$ di archi che contengono v . Formalmente,

$$d(v) := |\{e \in \mathcal{E} \mid v \in e\}|.$$

Usiamo qui, come nel seguito, il simbolo $|X|$ per esprimere il numero di elementi di X , quando X è un insieme dato.

Quello che segue è chiamato spesso “il primo teorema della teoria dei grafi”, sia perchè è forse uno dei teoremi più semplici da enunciare e dimostrare, sia perchè sta alla base di gran parte di quel che segue.

TEOREMA 1.2. *Sia $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un grafo. Allora*

$$2|\mathcal{E}| = \sum_{v \in \mathcal{V}} d(v).$$

DIMOSTRAZIONE. I due lati dell’equazione contano in due modi diversi il numero di elementi dell’insieme M di tutte le coppie (v, e) con $e \in \mathcal{E}$, $v \in \mathcal{V}$, $v \in e$. Se da un lato per ogni arco e ci sono due tali coppie (e quindi l’insieme M contiene $2|\mathcal{E}|$ elementi), d’altro canto, dato un vertice v , il numero di archi incidenti con v è esattamente la valenza di v - dunque la parte destra dell’equazione da dimostrare conta anch’essa gli elementi dell’insieme M , e quindi è uguale a $2|\mathcal{E}|$. \square

2. Eulero e i suoi ponti

Come scrisse Oystein Ore, “la teoria dei grafi è una delle poche branche della matematica di cui si conosce la data di nascita”. E la nascita della teoria dei grafi (come abbiamo accennato nella lezione della prima giornata, vedi Capitolo I) è comunemente fatta coincidere con la soluzione di Eulero del problema dei ponti di Königsberg.

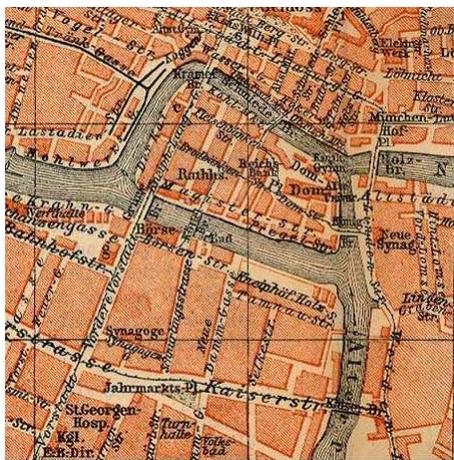


FIGURA IV.1. Una cartina ‘d’epoca’ di Königsberg. Notiamo i sette ponti che collegano i diversi quartieri della città e suggeriscono il quesito studiato da Eulero: è possibile fare una passeggiata in città in modo da tornare al punto di partenza dopo essere passati esattamente una volta su ogni ponte?

Non ricostruiremo qui tutta la storia, ma daremo subito la formulazione del problema, esposto brevemente nella didascalia di Figura IV.1 in termini di grafi.

PROBLEMA 2.1. Dato un grafo G trovare, se possibile, un circuito nel quale ogni arco di G compaia esattamente una volta.

La prossima definizione descrive gli oggetti che stiamo cercando e prende il nome da Eulero, in onore della prima apparizione di questo concetto in [9].

DEFINIZIONE 2.2. Sia dato un grafo G . Un *percorso euleriano* in G è un percorso che attraversa esattamente una volta ogni $e \in \mathcal{E}$. Un *circuito euleriano* è, analogamente, un circuito che traversa esattamente una volta ogni arco. Il grafo G è detto *grafo euleriano* se in G esiste un circuito euleriano.

È abbastanza chiaro che se un grafo euleriano è disconnesso, una sola delle sue componenti connesse avrà degli archi, mentre le altre componenti saranno vertici isolati. Converrà quindi limitare le nostre investigazioni ai grafi connessi.

Inoltre, ogni circuito deve poter “uscire” da ogni vertice nel quale “entra” - e quindi, dato un vertice v in un circuito qualsiasi, tale circuito conterrà un numero pari di archi adiacenti a v . Siccome un circuito euleriano contiene per definizione tutti gli archi del grafo, vediamo che la valenza di ogni vertice di un grafo euleriano deve essere un numero pari. Questa è in realtà una caratterizzazione completa dei grafi euleriani, come vediamo nel prossimo teorema.

TEOREMA 2.3. *Un grafo connesso è euleriano se e solo se ogni suo vertice ha valenza pari.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo visto nella discussione precedente che in un grafo euleriano connesso la valenza di ogni vertice è un numero pari. Resta da mostrare che in ogni grafo che soddisfa tale condizione esiste effettivamente un circuito euleriano.

Sia dunque $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un grafo connesso dove ogni vertice ha valenza pari. Il fatto che G è connesso implica $d(v) > 0$, e quindi $d(v) \geq 2$, per ogni vertice v . Partendo da un vertice qualsiasi $v_0 \in \mathcal{V}$, costruiamo ricorsivamente un percorso in G : per ogni $i \geq 0$ scegliamo come v_{i+1} uno a piacere tra i vertici adiacenti a v_i tale che l'arco $\{v_i, v_{i+1}\}$ non sia ancora mai stato attraversato dal percorso stesso. Sia P il percorso che si ottiene protraendo la costruzione fino alla prima volta che si ri-incontra v_0 . La costruzione è ben definita perchè, per ogni vertice v_i diverso da v_0 in cui giungiamo mentre costruiamo P , se v_i è già apparso (diciamo k volte) in P , allora il percorso P ha già attraversato $2k + 1$ archi adiacenti a v_i . Ma se $d(v_i)$ deve essere pari, ne segue che esistono almeno $2(k + 1)$ archi adiacenti a v_i , e quindi almeno uno di essi non è ancora stato attraversato dal percorso in via di costruzione, che può quindi continuare. D'altro canto la costruzione dovrà terminare, poichè il grafo ha un numero finito di vertici; per quanto detto sopra dovrà terminare in v_0 .

Abbiamo così mostrato che G contiene un circuito che non attraversa mai due volte lo stesso arco, e possiamo quindi chiamare C un circuito di lunghezza massima tra quelli che hanno tale proprietà. Vogliamo mostrare che C è un circuito euleriano in G .

L'unica cosa che resta da verificare è che C percorra veramente tutti gli archi di G . Ragioneremo per contraddizione, supponendo che esista un arco $e = \{u, v\}$ che non è contenuto in C . In tal caso il grafo G' ottenuto da G rimuovendo tutti gli archi che sono attraversati da C ha almeno l'arco e , dunque almeno due vertici di valenza non nulla. Il punto è che, siccome C contiene un numero pari di archi adiacenti ad ognuno dei suoi vertici, anche nel grafo G' la valenza di ogni vertice è pari e, come detto, G' contiene dei vertici di valenza non nulla (ad esempio u e v). Quindi, se applichiamo la costruzione descritta sopra partendo questa volta da v , otteniamo un circuito C' in G' che contiene v e non attraversa mai due volte lo stesso arco. Questo nuovo circuito è ovviamente anche un circuito di G , e non percorre

nessun arco percorso da P . Ora costruiamo un circuito C'' come segue. Seguiamo C fino alla prima volta che il vertice v compare, poi procediamo lungo P' , e dopo aver percorso completamente P' riprendiamo lungo C fino a completarlo.

Formalmente, la sequenza di vertici che definisce C'' è ottenuta dalla sequenza di vertici che definisce C inserendo la sequenza di C' (cominciando con v) appena prima della prima apparizione di v .

È ora chiaro che C'' è un circuito che non attraversa mai due volte lo stesso arco e che ha lunghezza strettamente maggiore di C , contraddicendo la definizione stessa di C . Quindi C contiene già tutti gli archi di G , e la dimostrazione è conclusa. \square

La dimostrazione del teorema precedente non solo ci assicura dell'esistenza di un circuito euleriano in G , ma spiega anche come ottenerne uno. A questo punto, ricordando il grafo “di Königsberg” possiamo vedere il perchè non è possibile effettuare una passeggiata che passi una volta sola su ogni ponte: tutti i vertici del grafo hanno grado dispari!

OSSERVAZIONE 2.4. In effetti, come già notato prima, il grafo di Königsberg che abbiamo disegnato in Figura I.37 non è semplice. Invitiamo il lettore a convincersi che la dimostrazione che abbiamo dato del Teorema 2.3 vale anche per grafi non semplici.

Un altro modo per applicare direttamente il nostro teorema al problema di Königsberg consiste nel suddividere gli archi del grafo dato (inserendo un nuovo vertice su ogni “ponte”, per esempio), in modo da avere un grafo semplice in cui i “nuovi” vertici hanno tutti valenza 2 - e quindi non causano problemi di “eulerianità”. Il Teorema 2.3 si applica quindi al grafo suddiviso, e siccome ad ogni circuito euleriano del nuovo grafo ne corrisponde esattamente uno nel grafo originale si conclude che il problema dei ponti di Königsberg è in effetti insolubile.

3. Alberi e foreste

Nel capitolo II abbiamo già incontrato la definizione di *albero* - (ovvero un grafo connesso senza cicli) e di una *foresta* (un grafo in cui ogni componente connessa è un albero). La terminologia ‘arborea’ si estende anche oltre: diciamo che una *foglia* è un vertice che è incidente ad un solo arco. La prima cosa di cui bisogna assicurarsi è che i grafi senza cicli siano alberi a tutti gli effetti.

LEMMA 3.1. *Ogni albero ha una foglia.*

DIMOSTRAZIONE. Scegliamo un vertice a caso del nostro albero e chiamiamolo v_1 . Se ha valenza $d(v_1) = 1$ abbiamo già trovato la nostra foglia. Altrimenti scegliamo un arco incidente a v_1 e chiamiamo v_2 l'altro vertice incidente a tale arco. Se $d(v_2) = 1$ abbiamo finito - altrimenti ripetiamo l'operazione e otteniamo così un cammino v_1, v_2, v_3, \dots . Ora, siccome i nostri grafi hanno tutti un numero finito di vertici, tale cammino non può continuare all'infinito, e presto o tardi (diciamo, a v_k) si verificherà uno dei seguenti due casi:

- (1) Tutti i vertici adiacenti a v_k sono stati usati. Ma questo è palesemente impossibile. In realtà è impossibile perfino che *uno* dei vertici adiacenti a v_k (diciamo v_j) sia già usato - in tal caso infatti v_j, v_{j+1}, \dots, v_k sarebbe un ciclo, e per definizione un albero non contiene cicli.
- (2) Non c'è un vertice adiacente a v_k oltre a v_{k-1} . Questo significa esattamente che $d(v_k) = 1$, e quindi v_k è la foglia che cerchiamo.

□

COROLLARIO 3.2. *Ogni albero con più di un vertice ha almeno due foglie.*

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo già che esiste almeno una foglia v , e quindi possiamo partire da essa per costruire il cammino dei v_i come nella dimostrazione del lemma precedente. Come sopra, tale cammino deve terminare senza chiudersi - in particolare, siccome c'è per ipotesi un altro vertice oltre a v e quindi $v_1 \neq v$, il cammino non termina nella foglia di partenza e quindi l'ultimo suo vertice sarà una foglia diversa dalla prima. □

Questo semplice lemma è molto utile per trattare gli alberi - e lo vedremo già nel prossimo teorema.

Il problema che vogliamo affrontare è questo: chiamiamo *albero etichettato* un albero i cui vertici siano, appunto, 'etichettati' con dei numeri, e chiediamoci *quanti alberi etichettati diversi con n vertici esistono* - e come spesso accade, più della risposta è interessante il metodo che si usa per giungervi.

TEOREMA 3.3. *Esistono n^{n-2} diversi alberi etichettati con n vertici.*

L'idea fondamentale è la seguente.

LEMMA 3.4. *Ad ogni albero etichettato con n vertici G corrisponde una parola $p(G)$ di $n - 2$ lettere scelte nell'alfabeto $\{1, 2, \dots, n\}$. Inversamente, ad ogni tale parola corrisponde un albero etichettato G con n vertici tale che $p(G)$ è la parola data.*

DIMOSTRAZIONE. Sia dunque dato un albero etichettato con n vertici. Dal Lemma 3.1 sappiamo che ha almeno una foglia; possiamo quindi scegliere tra tutte le foglie quella con l'etichetta minima. La prima lettera della parola sarà l'etichetta dell'unico vertice dell'albero che è adiacente alla foglia prescelta. Trovata la prima lettera della parola si cancella la foglia presa in esame e l'arco che la connetteva all'albero, e per la seconda lettera si ripete la procedura con l'albero 'rimpicciolito'. Chiaramente il processo termina dopo $n - 2$ passi, quando il nostro grafo sarà ridotto ad un solo vertice, che sarà etichettato con n , l'etichetta maggiore (perché?).

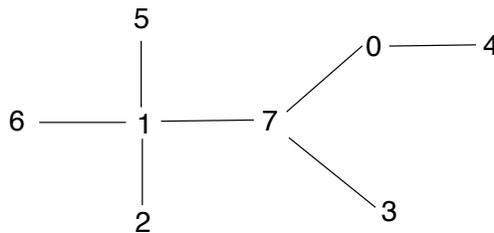


FIGURA IV.2. La formazione della parola 170711, ovvero 6 caratteri dell'alfabeto di 8 lettere $\{0, 1, 2, \dots, 7\}$.

Dopo aver associato ad un albero una parola dobbiamo mostrare come ricostruire l'albero univocamente da una parola qualsiasi data, che per comodità e chiarezza scriveremo numerandone le "lettere" come

$$p_{n-2}p_{n-1} \cdots p_2p_1.$$

Per cominciare, prendiamo nota del fatto che le foglie dell'albero originale non compaiono nella parola. D'altronde, ogni vertice di valenza $k > 1$ compare $k - 1$ volte nella parola. Sappiamo quindi che le etichette che non compaiono nella parola sono esattamente le etichette delle foglie. Chiamiamole

$$a_1, a_2, \dots, a_k.$$

Ora procediamo alla costruzione dell'albero. Cominciamo con un grafo G_0 che consiste in un solo vertice isolato, etichettato con l'etichetta maggiore, n . Poi ad ogni passo ricaviamo il grafo G_i da G_{i-1} leggendo la parola data e seguendo queste regole:

- (1) se p_i è l'etichetta di un nodo già presente in G_{i-1} , allora G_i sarà ottenuto da G_{i-1} aggiungendo un arco che collega il vertice etichettato p_i con un nuovo vertice che etichetteremo con il maggiore tra gli a_i non ancora usati;
- (2) altrimenti etichettiamo con p_i un nuovo vertice che conetteremo con un arco al vertice etichettato con p_{i-1} .

Lasciamo al lettore di verificare che la parola associata all'albero così costruito corrisponde alla parola data inizialmente, magari provando a ricostruire l'albero di Figura IV.2 dalla sua "parola". \square

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.3. Visto che ad ogni albero etichettato con n vertici corrisponde biunivocamente una parola di $n - 2$ lettere in un alfabeto di n segni, contare gli alberi è contare le parole.

Per formare una parola del genere abbiamo n possibilità di scelta per assegnare la prima lettera, e per ognuna di queste altre n per assegnare la seconda lettera e così via... per un totale di n^{n-2} parole diverse. \square

Prima di finire la nostra sezione sugli alberi, vorremmo risolvere il Problema 3.8 che avevamo posto nel Capitolo II - ovvero, determinare chi vince il *Chomp su una foresta!*

TEOREMA 3.5. *Sia $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ una foresta. Il gioco del chomp su G può essere vinto dal secondo giocatore esattamente quando G ha un numero pari di vertici e un numero pari di componenti connesse.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è per induzione sul numero di archi della foresta G ; sia m tale numero.

Passo base. Se $m = 0$, la foresta non ha archi e consiste di un certo numero, diciamo n , di vertici isolati. L'unica cosa che i giocatori possono fare è mangiarsi un vertice a turno. È chiaro che in questo caso il secondo giocatore vince esattamente quando n è pari, poiché avrà lui "l'ultima parola".

Passo induttivo. Consideriamo ora il caso $m > 0$. Dobbiamo capire quando il secondo giocatore può vincere il chomp sulla foresta G con $m > 0$ archi e, diciamo, n vertici, supponendo che il teorema valga per ogni foresta con un numero di archi strettamente minore di m . Ricordiamo che il primo giocatore ha due tipi di mossa:

- (1) mangiare un vertice v e tutti gli archi incidenti con esso, oppure
- (2) mangiare un arco.

Siccome G è una foresta, non contiene cicli; quindi è comunque inevitabile aumentare il numero di componenti connesse: nel secondo caso si crea una nuova componente connessa, mentre nel primo se ne creano $d(v) - 1$. Chiamiamo c il numero di componenti connesse di G . Dopo la prima mossa il secondo giocatore si trova davanti una nuova foresta G' con, diciamo, n' vertici, m' archi e c' componenti connesse. Secondo il caso, avremo

- (1) $n' = n - 1$, $m' = m - d(v)$, $c' = c + d(v) - 1$
 (2) $n'' = n$, $m'' = m - 1$, $c'' = c + 1$.

Il secondo giocatore vince il chomp su G se e solo se, per ogni G' e G'' , il primo giocatore del chomp su G' o G'' lo vince. Siccome il gioco non finisce mai pari, ciò equivale a dire che *il secondo giocatore non vince* il gioco su G' o G'' . Siccome per ipotesi induttiva il teorema si applica a questi grafi più piccoli, allora sappiamo che il secondo giocatore del chomp su G lo può vincere se e solo se le seguenti condizioni sono entrambe soddisfatte:

- (1) $n' = n - 1$ è dispari, oppure $c' = c + d(v) - 1$ è dispari,
 (2) $n'' = n$ è dispari, oppure $c'' = c + 1$ è dispari.

Ora è importante notare che è sempre possibile fare ognuna di queste due mosse, perchè la nostra foresta ha almeno un arco. Quindi ambedue i casi accadono. La dimostrazione si conclude esaminando le diverse possibilità, e vedendo che le condizioni su n' , n'' , c' e c'' implicano che n e c sono pari.

Se n è pari, n'' non è dispari, costringendo c'' ad essere dispari ovvero c ad essere pari, e abbiamo finito.

Se invece n fosse dispari, ricordiamo che una foresta con almeno un arco contiene un albero con almeno un arco, e quindi almeno un vertice v di valenza 1. Scegliamo questo per fare la mossa (1): allora n' è pari e quindi $c' = c + 1 - 1$ deve essere dispari. Quindi siamo davanti alla situazione in cui G ha un numero dispari di vertici. Siccome la somma $\sum_{v \in \mathcal{V}} d(v)$ deve essere un numero pari pur consistendo di un numero dispari di termini tutti positivi, deve esserci un vertice w con valenza pari. Se il primo giocatore comincia con una mossa (1) su w , visto che n' è pari dovremo quindi avere c' dispari - ma $c' = c - d(w) + 1$ ha parità diversa da c , ed è quindi pari. Questa situazione non può presentarsi. \square

4. Un'iniezione di topologia

Abbiamo visto durante le nostre giornate che studiare come si può disegnare un grafo può fornire indicazioni sulla topologia della superficie sulla quale si disegna. Ma prima di approfondire il discorso dobbiamo rendere rigorosa l'espressione 'disegnare un grafo'.

4.1. Disegnare un grafo.

DEFINIZIONE 4.1. Dato un grafo $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, un *disegno di G su una superficie S* consiste di una corrispondenza φ che associa ad ogni vertice $v \in \mathcal{V}$ un punto $\varphi(v)$ su S , e che associa ad ogni arco $e \in \mathcal{E}$ un cammino continuo (vedi la Definizione 5.7) $\varphi(e)$ in S , tale che $\varphi(v)$ è un punto di $\varphi(e)$ se e solo se $v \in e$. Inoltre, se $e = \{u, v\}$ allora $\varphi(u)$ e $\varphi(v)$ sono gli estremi del cammino $\varphi(e)$ e non coincidono con nessun altro dei suoi punti.

Ora consideriamo il caso particolare in cui la superficie S su cui si disegna il grafo è il piano cartesiano (ovvero \mathbb{R}^2). Possiamo adesso rendere precisa la definizione di grafo planare.

DEFINIZIONE 4.2. Un grafo G è detto *planare* se esiste un disegno di G tale che per ogni arco $e \in \mathcal{E}(G)$ la linea $\varphi(e)$ non si autointersechi, e che per ogni coppia di archi $e, f \in \mathcal{E}(G)$ si abbia $\varphi(e) \cap \varphi(f) = \emptyset$ a meno che esista un vertice comune $v \in e \cap f$, e in tal caso si richiede che tale vertice sia il loro unico punto di intersezione; ovvero, $\varphi(e) \cap \varphi(f) = \varphi(v)$. Un tale disegno è detto, per analogia, planare.

OSSERVAZIONE 4.3. Potremmo dare nello stesso modo una definizione precisa di grafo "planare" su qualunque superficie (diciamo orientabile). È possibile convincersi piuttosto

in fretta del fatto che se un grafo si può disegnare in modo “planare” su una superficie di genere g , allora si potrà disegnarlo in questo modo anche su ogni superficie di genere maggiore di g . Nasce quindi una domanda che lasciamo per ora irrisolta: dato un grafo qualsiasi, determinare il g minimo tale che il grafo dato si può disegnare in modo “planare” su una superficie di genere g .

La questione è in realtà legata al problema della colorabilità del grafo dato - infatti, come vedremo con il Teorema 5.6, sapere con quanti colori al minimo si può colorare un dato grafo ci informa anche sul genere minimo di una superficie che possa recare un disegno “planare” di G (si veda l’osservazione 5.7)

Per evitare confusioni, in quanto segue useremo la parola “planare” nel senso stretto della Definizione 4.2.

4.2. La formula di Eulero. Dalle definizioni che abbiamo dato si vede che, in ogni disegno di un grafo, un ciclo è rappresentato da una curva chiusa. Se il disegno è planare, tale curva è anche semplice, e quindi ad essa si applica il teorema di Jordan.

In particolare, dato un grafo G e un suo disegno planare φ , il teorema di Jordan ci assicura che $\varphi(G)$ suddivide il piano in una regione illimitata “fuori da ogni ciclo” e, se del caso, un certo numero di regioni delimitate dal disegno di alcuni cicli di G .

D’ora in avanti, una volta fissato il grafo G e un suo disegno planare, per semplicità di linguaggio non distingueremo più tra cammini, circuiti, cicli e il loro disegno sul piano. Diciamo quindi che il piano è suddiviso dal grafo planare G in un certo numero di regioni; una di esse è la regione illimitata, mentre le altre sono limitate da cicli di G . Ad esempio, se G è un albero non esistono cicli e quindi abbiamo solo la regione illimitata.

Il numero totale di regioni (compresa quella illimitata) è solitamente chiamato F poichè, se il grafo è ottenuto da un poliedro P come abbiamo visto in 2, F è il numero di *facce* di P . Il numero F è legato al numero di archi e al numero di vertici dalla formula di Eulero.

TEOREMA 4.4. *Dato un disegno planare di un grafo connesso $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, sia F il numero delle regioni in cui esso suddivide il piano, $V := |\mathcal{V}|$ il numero di vertici, $E := |\mathcal{E}|$ il numero di archi di G . Allora*

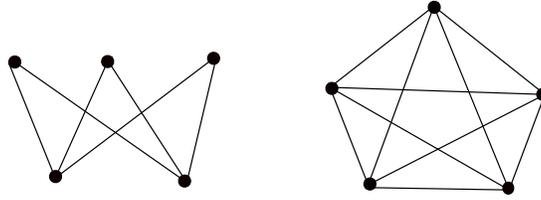
$$V - E + F = 2.$$

OSSERVAZIONE 4.5. Usiamo qui lettere minuscole invece delle maiuscole dell’enunciato del Teorema 3.1 per evitare confusione con gli *insiemi* dei vertici e dei lati \mathcal{V}, \mathcal{E} .

DIMOSTRAZIONE. La strategia della dimostrazione, com’è stato detto, è molto simile al “gioco della pizza” che abbiamo presentato all’inizio del primo giorno: l’idea è che “mangiando” lati e vertici di un grafo planare secondo mosse “consentite”, la formula di Eulero mantiene la sua validità. Formalmente, faremo una dimostrazione per induzione sul numero di archi.

Passo base: il grafo non ha archi. Ogni grafo connesso e senza archi consiste di un vertice isolato. Quindi, ogni suo disegno ha $V = 1$, $E = 0$ e $F = 1$ (la regione illimitata). L’identità da dimostrare è in questo caso velocemente verificata.

Passo induttivo. Supponiamo che il teorema valga per tutti i grafi connessi con meno di m archi, e consideriamo un grafo $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ connesso con $E = m$. Se G contiene un ciclo, scegliamo a piacere un arco a di quel ciclo. Il grafo $G' := (\mathcal{V}, \mathcal{E} \setminus \{a\})$ è ancora connesso (perchè?), e un suo disegno planare si può ottenere da un disegno planare di G “cancellando” l’arco a . Siano quindi V, E, F le quantità di vertici, archi e facce di G , e $V',$

FIGURA IV.3. Il grafo completo bipartito $K_{2,3}$ e il grafo completo K_5

E' , F' le corrispondenti quantità per G' : vale $E' = E - 1$, e $V = V'$. Cancellando un arco di un ciclo abbiamo “fuso” due regioni che prima erano divise da a : quindi $F' = F - 1$. Per ipotesi induttiva il grafo G' soddisfa il teorema, e quindi

$$2 = V' - E' + F' = V - (E - 1) + (F - 1) = V - E + F.$$

Se invece il grafo G non contiene nessun ciclo (è un albero), allora semplicemente rimuovendo un arco otterremmo un grafo disconnesso, cui il teorema di Eulero non si applica. Ma il Corollario 3.2 ci assicura che in ogni albero con più di un vertice ci sono almeno due vertici di valenza 1; quindi definiamo in questo caso $G' := (\mathcal{V} \setminus \{w\}, \mathcal{E} \setminus \{a\})$, dove w è uno dei vertici di valenza 1 e a è l'unico arco incidente a w . Allora $V' = V - 1$, $E' = E - 1$ e $F' = F$ (perchè a non fa parte di nessun ciclo), e dunque per l'ipotesi induttiva

$$2 = V' - E' + F' = (V - 1) - (E - 1) + F$$

come richiesto. □

OSSERVAZIONE 4.6 (Colpo di scena). Il teorema dice in particolare che il numero f di facce di un disegno planare di un grafo *non dipende dal disegno!*

4.3. Criteri di planarità. Il grafo di Figura II.3 è chiaramente planare - il disegno stesso lo dimostra. Che dire dei grafi di Figura IV.3? Cercare di esibire esplicitamente un disegno che ne mostri la planarità si rivela presto un compito arduo... Vogliamo quindi dare dei criteri che permettano di affermare se un grafo è planare o meno senza dover esibire un disegno planare.

DEFINIZIONE-ESEMPIO 4.7. Si consideri un grafo $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ il cui insieme di vertici sia partizionato in due sottoinsiemi distinti A e B tali che non esista nessun arco tra vertici in A o tra vertici in B . Un tale grafo è detto *bipartito*. Sia ora n il numero di elementi di A , m il numero di elementi di B e supponiamo che ogni vertice in A sia connesso con un arco con ogni vertice di B . Abbiamo quindi $\mathcal{V} = A \cup B$ e $\mathcal{E} = \{\{v, u\} \mid u \in A, v \in B\}$. È chiaro che, fissati n e m , tutti i grafi che soddisfano questa descrizione sono tra loro isomorfi. Infatti per la corrispondenza f si potrà scegliere qualsiasi applicazione bigettiva che mandi A in A e B in B . Chiamiamo *grafo completo bipartito* $K_{n,m}$ “il” grafo individuato da questa classe di isomorfismo.

Cominciamo con il vedere come ci può aiutare il teorema di Jordan.

ESEMPIO 4.8. Consideriamo il grafo $K_{3,3}$ definito sopra, scrivendo $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ per i suoi vertici in modo che esista un arco $\{a_i, b_j\}$ per ogni i, j , ma che non vi sia nessun arco tra gli a_i o i b_j , come in Figura IV.4. Ora in un ipotetico disegno planare di $K_{3,3}$ consideriamo il ciclo $a_1, b_3, a_2, b_1, a_3, b_2, a_1$ che, come detto, determina una curva chiusa (Figura IV.4). Una

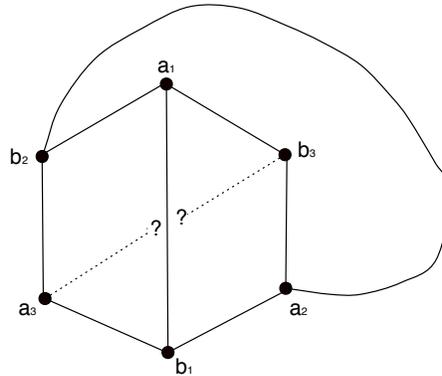


FIGURA IV.4

volta disegnato questo ciclo, mancano ancora tre archi per completare il disegno di $K_{3,3}$: gli archi $\{a_1, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$, $\{a_3, b_3\}$. Consideriamo prima $\{a_1, b_1\}$: secondo il teorema di Jordan, esso può passare o all'esterno o all'interno del ciclo già disegnato. E se, poniamo, esso passa all'interno, allora l'arco $\{a_2, b_2\}$ dovrà passare all'esterno per evitare di intersecare $\{a_1, b_1\}$. A questo punto si vede che i due punti tra i quali dovremmo tracciare l'ultimo arco, a_3 e b_3 , sono in due componenti connesse diverse della suddivisione del piano determinata dal ciclo a_2, b_1, a_1, b_2, a_2 , e quindi per il teorema di Jordan è impossibile connetterli senza intersecare tale ciclo in qualche punto, facendo venir meno la planarità del disegno.

Abbiamo appena mostrato che $K_{3,3}$ non è planare.

Si potrebbe dire che $K_{3,3}$ nell'esempio precedente sembra avere “un arco di troppo” per essere planare. Questa idea che un grafo planare non possa avere “troppi” archi rispetto al suo numero di vertici in effetti è valida. Il prossimo teorema dice proprio che, dato il numero di vertici di un grafo, c'è un numero massimo di archi che tale grafo non può superare senza essere certamente non-planare.

TEOREMA 4.9. *Sia G un grafo planare con n vertici e m archi. Se $n \geq 3$, allora vale*

$$m \leq 3n - 6.$$

DIMOSTRAZIONE. Ogni disegno planare di G divide il piano in f regioni R_1, \dots, R_f . Sia m_i il numero di archi che delimitano R_i . Nella somma $M := \sum_{i=1, \dots, f} m_i$ un arco contribuisce 1 se non divide due regioni diverse, altrimenti contribuisce 2. In ogni caso, $M \leq 2m$. Il numero di archi che delimitano una regione è anche il numero dei suoi vertici, e poichè $n \geq 3$ ogni regione è incidente con almeno tre vertici. Quindi la stessa somma M è sicuramente maggiore di $3f$. Otteniamo $2m \leq 3f$, e con il teorema di Eulero:

$$6 = 3n - 3m + 3f \leq 3n - 3m + 2m$$

da cui otteniamo la disequaglianza che era da dimostrare. \square

Notiamo che, sebbene abbiamo tratto ispirazione dalla considerazione del caso di $K_{2,3}$, questo teorema non ci dice nulla su $K_{2,3}$ stesso, che ha 6 vertici e 9 archi e soddisfa quindi $9 < 3 \cdot 6 - 6$. Il punto è che la disequazione del teorema deve essere soddisfatta da ogni grafo planare, ma non è detto che ogni grafo che soddisfa la disequazione debba essere planare!

Quello che si può concludere con il teorema è che se un grafo *non* soddisfa la disequazione, allora *non* può essere planare. Nel prossimo esempio trattiamo un caso del genere.

ESEMPIO 4.10. Il grafo completo con 5 vertici, K_5 , non può essere planare. Infatti esso ha 10 archi, mentre un grafo planare con 5 vertici secondo il teorema precedente non può avere più di $15 - 6 = 9$ archi. Lo stesso argomento si applica per mostrare che K_n non è planare per nessun $n \geq 5$. Per contro, è facile esibire disegni che mostrano la planarità dei grafi K_n con $n \leq 4$.

Naturalmente gli esempi fatti non sono stati scelti a caso: in effetti K_5 e $K_{2,3}$ sono “all’origine di ogni non-planarità”! Per poter esprimere esattamente questo concetto, dobbiamo introdurre una nuova nozione.

Guardiamo i due grafi di Figura IV.5. Sono chiaramente non isomorfi - però la relazione tra i due è innegabile, ed è sicuro che una modifica come quella che li differenzia non influenza la loro planarità. Diremo che il grafo a destra è ottenuto da quello a sinistra per *suddivisione* degli archi marcati in grassetto.

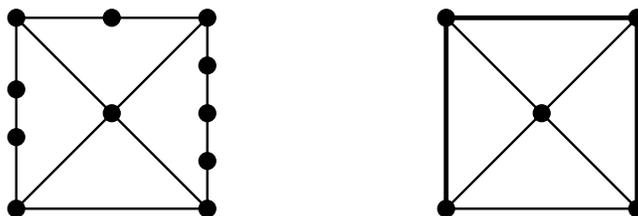


FIGURA IV.5

DEFINIZIONE 4.11. Consideriamo un grafo $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ con due vertici distinti $v, w \in \mathcal{V}$ tali che $\{v, w\} \in \mathcal{E}$. Una *suddivisione elementare* di G consiste nel “togliere” l’arco $\{v, w\}$ e sostituirlo con un cammino $v, v_1, v_2, \dots, v_n, w$, dove i v_i sono naturalmente “nuovi” vertici, distinti da ogni elemento di \mathcal{V} . Formalmente, è l’operazione che trasforma G nel grafo $G' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$, dove

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ e } \mathcal{E}' = (\mathcal{E} \setminus \{v, w\}) \cup \{\{v, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_n, w\}\}.$$

Dati due grafi G, H , diremo che H è una *suddivisione* di G se H è ottenuto da G tramite una sequenza di suddivisioni elementari.

TEOREMA 4.12 (Kuratowski). *Un grafo G è planare se e solo se non contiene sottografi isomorfi ad una suddivisione di K_5 o $K_{3,3}$.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione di questo teorema è complessa e non si presta ad essere sintetizzata in questa sede. Il lettore interessato la potrà trovare spiegata in modo chiaro e completo nel manuale di Diestel [7]. Una dimostrazione alternativa, che evita molti passaggi tecnici introducendo l’idea di “ponte su un sottografo” è descritta nel testo di Bondy e Murty [3]. \square

5. Colorabilità

Colorare le cartine, come abbiamo fatto nel Capitolo II, può essere interpretato come colorare le regioni delimitate da un grafo planare, ovvero il grafo determinato dai confini tra le “regioni” e dai punti dove tre o più regioni si incontrano (i vertici). Invece, come

abbiamo visto, il problema si traduce solitamente nel compito di colorare i *vertici* del grafo ottenuto disegnando un vertice in ogni regione e connettendo due vertici se le due regioni condividono una porzione di frontiera di lunghezza non nulla (ovvero se non si toccano solo “in un angolo”). Tale grafo è detto *duale* al grafo originale (quello dato dai confini delle regioni).

Questa nozione di “colorazione dei vertici” è più generale perchè vale anche per grafi non planari, quando non è chiaro come definire delle regioni da colorare. Ecco quindi la definizione.

DEFINIZIONE 5.1. Una *colorazione* del grafo $G := (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ con l'insieme di “colori” $C := \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ è una funzione g che associa ad ogni vertice v il colore $g(v) \in C$, con la regola che due vertici adiacenti non possono avere lo stesso colore - ovvero: se $\{v, w\} \in \mathcal{E}$, allora $g(v) \neq g(w)$. Tale grafo è quindi detto *k-colorabile*, poichè ammette una colorazione con k colori.

Ovviamente un grafo *k-colorabile* è anche colorabile con un numero di colori maggiore di k . Ciò che è interessante sapere è il numero *minimo* di colori necessario per colorare un certo grafo. Ad esempio, se sappiamo che un grafo è 1-colorabile sappiamo che G non ha nessun arco. Un tale grafo, fatto di “vertici isolati”, è detto *totalmente disconnesso*.

Per quanto riguarda i grafi 2-colorabili abbiamo il seguente teorema.

TEOREMA 5.2. *Un grafo è 2-colorabile se e solo se è bipartito.*

DIMOSTRAZIONE. Dire che un grafo G ha una colorazione con due colori c_1, c_2 equivale a dire che esiste un modo di associare ad ogni vertice uno dei due colori in modo che due vertici con lo stesso colore non siano mai connessi da un arco. Ma questa è proprio ciò che la definizione richiede per poter affermare che la partizione dei vertici di G in base al loro “colore” rende G un grafo bipartito (si veda l'Esempio 4.7). \square

Il risultato più famoso riguardo alla colorazione di grafi è il cosiddetto *Teorema dei Quattro Colori*

TEOREMA 5.3 (Appel e Haken, 1976). *Ogni grafo planare è 4-colorabile.*

La fama di questo teorema non è dovuta solo ai molti anni di tentativi che sono trascorsi dalla prima formulazione del problema (attribuita a Möbius, nel 1840) a quando è stato possibile ottenerne una dimostrazione. È il metodo stesso della dimostrazione finalmente trovata da Appel e Haken che è interessante. Infatti, questa è la prima dimostrazione ritenuta valida che fa uso pesante del computer. Non è possibile qui naturalmente entrare nei dettagli, ma diremo che la dimostrazione usa il metodo della riduzione ad assurdo. Dapprima si mostra che ogni potenziale controesempio deve contenere un sottografo appartenente ad una certa lista di “sottografi inevitabili”. Il problema è che la lista di Appel e Haken ne contiene circa 1500. La dimostrazione procede poi con il verificare che in ognuna di queste 1500 situazioni una colorazione con 4 colori effettivamente esiste: questa parte è quella affidata al computer, e dal '76 in poi è stata più volte riverificata con diversi programmi.

Una versione “in miniatura” della strategia di Appel e Haken si trova nella seguente dimostrazione del cosiddetto *teorema dei 5 colori*. Anche qui si parte dall'osservazione che un grafo planare e non 5-colorabile deve contenere un certo sottografo... che alla fine si rivela non essere un problema. La chiave della dimostrazione è il lemma seguente:

LEMMA 5.4. *Ogni grafo planare contiene almeno un vertice di valenza minore di 6.*

DIMOSTRAZIONE. Applicando il Teorema 4.9 ad un grafo dove ogni vertice ha valenza maggiore o uguale a 6 otteniamo $2m \geq 6n$, e quindi $m \geq 3n$. Tale grafo quindi non può essere planare a causa del risultato del Teorema 4.9 \square

Possiamo ora dedicarci al teorema “dei 5 colori”.

TEOREMA 5.5 (Kempe 1879 / Heawood 1890¹). *Ogni grafo planare è 5-colorabile.*

DIMOSTRAZIONE. Sia dunque G un grafo planare con n vertici. Ragioneremo per induzione su n .

Passo base. Se $n = 1$, un grafo costituito da un solo vertice è chiaramente 5-colorabile.

Passo induttivo. Sia dunque $n > 1$, e supponiamo il teorema dimostrato per ogni grafo con meno di n vertici. Per il lemma precedente, G ha un vertice v con valenza $d(v) \leq 5$. Per ipotesi induttiva, il grafo (planare) G' ottenuto da G rimuovendo v e tutti gli archi ad esso incidenti è 5-colorabile. Ora, nel caso $d(v) \leq 4$ ci sarà sicuramente uno dei 5 colori che non appare tra quelli usati per colorare, in G' , i vertici adiacenti a v : ripetendo in G la colorazione di G' e usando per v il colore ‘libero’ otteniamo quindi una 5-colorazione di G . Il caso da trattare è quindi quello $d(v) = 5$. Mostriamo che anche in questo caso esiste una 5-colorazione di G' che usa solo 4 colori per i vertici adiacenti a v : offriremo un modo per ottenere una colorazione adeguata partendo da una qualsiasi 5-colorazione di G' .

Sia dunque data una qualsiasi 5-colorazione di G' , e supponiamo che tutti i 5 colori appaiano come colori dei vertici adiacenti a v . Possiamo raffigurarci, senza restrizione di generalità, la situazione come in Figura IV.6, con i vertici v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 colorati rispettivamente di rosso, verde, blu, giallo, viola.

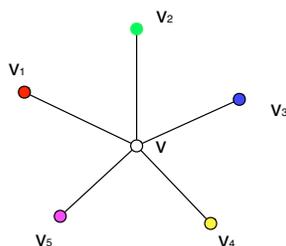


FIGURA IV.6. Il link di v

Se, diciamo, non esiste nessun cammino in G' che connette v_1 con v_3 ed è colorato solo di rosso e blu, allora consideriamo il sottografo connesso G_1 che contiene v_1 e tutti i vertici rossi o blu che sono connessi a v_1 da un cammino colorato solo di rosso e blu, e definiamo una nuova colorazione di G' colorando di rosso tutti i vertici blu di G_1 , e di blu tutti i vertici rossi di G_1 . Questa è senz'altro una buona 5-colorazione di G' che usa solo 4 colori per i vertici v_1, \dots, v_5 .

Se invece esiste un cammino “rosso-blu” che connette v_1 a v_3 allora, per il teorema delle curve di Jordan, non può esistere un cammino “giallo-verde” che connette v_2 e v_4 .

¹Il metodo di dimostrazione risale a Kempe, che però lo usava in quella che lui riteneva una dimostrazione del teorema dei 4 colori. Heawood trovò l'errore nell'argomento di Kempe, ma capì che il metodo poteva essere applicato ugualmente per dimostrare il teorema dei 5 colori.

Allora definiamo un sottografo giallo-verde G_2 come sopra, e invertendo la colorazione di G_2 otteniamo anche in questo caso una 5-colorazione di G' che usa solo 4 colori per i vertici adiacenti a v . \square

È uso comune definire il *numero cromatico* $\chi(G)$ di un grafo G come il numero minimo di colori necessari per colorare G . Il Teorema dei 4 colori dice allora che $\chi(G) \leq 4$ se G è planare - ovvero, se esiste un disegno di G nel piano dove gli archi non si “incrociano” mai (si veda la Definizione 4.2).

Ora possiamo chiederci cosa succede se consideriamo grafi che si possono disegnare su una delle superfici presentate nel Capitolo III, invece che solo sul piano. Ad esempio si vede che il grafo $K_{3,3}$ pur non essendo planare si può disegnare su una “ciambella” (un *toro*). Ricordiamo dal Capitolo III che il *genere* di una superficie (orientabile) chiusa è il numero di “buchi” (una sfera ha genere 0, un toro ha genere 1). Chiudiamo con il cosiddetto “Teorema della colorazione delle mappe di Heawood” dal nome del matematico che lo propose e cominciò a risolverlo nel 1890 [11]. La dimostrazione fu completata con l'ultimo caso ancora aperto, ovvero $g = 0$. In generale il teorema è il risultato del contributo di moltissime persone; per la storia e il contenuto della dimostrazione rimandiamo al libro di testo di White [18]

TEOREMA 5.6. *Se il grafo G può essere disegnato “senza intersezioni di archi” su una superficie orientabile di genere g ma non su una di genere $g - 1$, allora*

$$\chi(G) = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rfloor$$

dove il segno $\lfloor r \rfloor$ indica la parte intera del numero reale r , ovvero il più grande numero intero n con $n \leq r$.

OSSERVAZIONE 5.7. Questa è una delle connessioni tra il problema della colorabilità e la topologia delle superfici che abbiamo già accennato nella sezione 4.3. Risolvendo l'equazione del Teorema 5.6 per g vediamo infatti che il numero cromatico di G determina il genere minimo di una superficie che possa supportare un disegno “planare” di G .

6. PoliCromaticità

Dopo esserci chiesti se un dato grafo G può essere colorato con un certo numero t di colori o no, è naturale cercare di capire se si può dire qualcosa su *quante* colorazioni di G con t colori esistono.

Prima di tutto definiamo la funzione che vogliamo capire.

DEFINIZIONE 6.1. Dato un grafo G e un numero naturale t , sia $P(G, t)$ il numero di colorazioni diverse possibili del grafo G con t colori.

Cominciamo con il considerare alcuni esempi semplici. Se $G = (\{v\}, \emptyset)$ è composto da un unico vertice, senza archi, allora $P(G, t) = t$. Infatti, ognuno dei t colori è una scelta valida per colorare l'unico vertice. In generale, dato un grafo senza archi $G = (\{v_1, \dots, v_n\}, \emptyset)$, assegnando arbitrariamente un colore ad ogni vertice otterremo una colorazione valida - siccome possiamo scegliere ognuno dei t colori per ognuno degli n vertici, abbiamo che in questo caso $P(G, t) = t^n$.

Il prossimo caso interessante è quello dove G è composto da due vertici connessi da un arco. Qui vediamo che per colorare il primo vertice possiamo usare uno qualunque dei t colori dati, ma per colorare il secondo non possiamo più usare lo stesso - quindi avremo solo

$(t - 1)$ possibilità di scelta. In totale abbiamo quindi $P(G, t) = t(t - 1)$.

Nei piccoli esempi che abbiamo dato è già contenuta l'idea generale che useremo per dimostrare il primo teorema riguardo alla funzione che vogliamo studiare.

TEOREMA 6.2. *La funzione $P(G, t)$ è sempre un polinomio in t , di grado uguale al numero di vertici di G .*

Per questo $P(G, t)$ è detto **polinomio cromatico di G** .

Per dimostrare questo teorema studieremo come cambia $P(G, t)$ togliendo un arco al grafo G .

DEFINIZIONE 6.3. Dato un grafo $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ e un arco $e \in \mathcal{E}$, sia $G \setminus e = (\mathcal{V}, \mathcal{E} \setminus \{e\})$ il grafo ottenuto rimuovendo l'arco e da G (come nel Chomp...). Analogamente, dato un insieme $S \subseteq \mathcal{E}$, sia $G \setminus S$ il grafo ottenuto “mangiando” tutti gli archi di S , ma lasciando tutti i vertici.

Inoltre, chiamiamo G/e il grafo ottenuto “contraendo” il lato e - ovvero rimuovendo e con i suoi due vertici v e w e introducendo un nuovo vertice adiacente a tutti gli archi adiacenti a v o w .

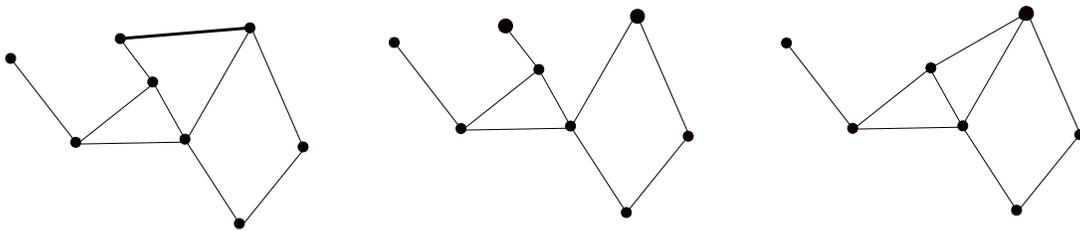


FIGURA IV.7. Un esempio di un grafo G con l'arco e evidenziato(a sinistra), e dei corrispondenti grafi $G \setminus e$ (centro) e G/e (destra).

OSSERVAZIONE 6.4. Bisogna prestare attenzione al fatto che un grafo del tipo G/e potrebbe non più essere “semplice”: potrebbe contenere degli archi “doppi” o, come si dice, *paralleli* (per convincervene, provate a disegnare il grafo ottenuto contraendo un lato di K_3 , il grafo completo su 3 vertici). La soluzione che si adotta di solito per restare nell'ambito dei grafi semplici è quella di rendere implicita nell'operazione di contrazione una specie di “fase di riordino” finale nella quale si cancellano tutti i doppi archi che si siano venuti a creare. In tal modo non si potranno nemmeno creare cappi che, partendo da un grafo semplice, si possono formare solo dopo almeno due contrazioni “non corrette”. Non insistiamo oltre su questo punto, anche perchè il permettere archi paralleli non influisce sulla colorabilità di un grafo, mentre un vertice con un cappio “non potrebbe essere colorato” - in entrambi i casi l'effetto è banale, e quindi tanto vale trascurare questi casi patologici.

Una proprietà fondamentale di $P(G, t)$ rispetto a queste operazioni è la seguente.

LEMMA 6.5. *Sia G un grafo e e uno dei suoi archi. Allora*

$$P(G, t) = P(G \setminus e, t) - P(G/e, t).$$

DIMOSTRAZIONE. Basta notare che ogni colorazione di G corrisponde esattamente ad una colorazione di $G \setminus e$ dove v e w , i due ex-vertici di e , non abbiano lo stesso colore. Ma ogni colorazione di $G \setminus e$ nella quale v e w hanno lo stesso colore corrisponde esattamente ad una colorazione del grafo ottenuto “fondendo” v e w .

Quindi il numero di colorazioni di G con t colori si ottiene dal numero totale di colorazioni di $G \setminus e$ con t colori sottraendo le colorazioni “sbagliate”, ovvero il numero di colorazioni di G/e con t colori. Questo è l’enunciato che bisognava dimostrare. \square

A questo punto possiamo ottenere la dimostrazione del teorema per induzione nel numero degli archi.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 6.2. Il passo base della nostra induzione consiste nel mostrare che il teorema vale per ogni grafo senza archi. In tal caso, come abbiamo visto sopra, $P(G, t) = t^n$, dove n è il numero di vertici di G - e la tesi è senz’altro valida.

Per il passo induttivo poniamo $m \geq 0$ e supponiamo che il teorema valga per ogni grafo con al più m archi. Consideriamo poi un grafo G con $m + 1$ archi. In particolare, esiste almeno un arco e . Dal Lemma 6.5 sappiamo che $P(G, t) = P(G \setminus e) - P(G/e)$. Chiamando n il numero di vertici di G , per l’ipotesi induttiva sappiamo che $P(G \setminus e, t)$ è un polinomio di grado n , e $P(G/e, t)$ è un polinomio di grado $n - 1$. La tesi segue immediatamente. \square

In linea di principio, il Lemma 6.5 ci consente di calcolare il polinomio cromatico di ogni grafo - ma non senza un certo sforzo. È immediato vedere che il coefficiente del termine di grado più alto è sempre 1. È già meno chiaro, a prima vista, capire il coefficiente del termine successivo in ordine di grado discendente. La chiave di volta è notare che il grafo che genera il termine di grado maggiore è il grafo senza archi, ovvero $G \setminus \mathcal{E}(G)$.

TEOREMA 6.6. *Sia G un grafo, \mathcal{E} l’insieme dei suoi archi. Allora*

$$P(G, t) = \sum_{S \subseteq \mathcal{E}} (-1)^{|\mathcal{E} \setminus S|} t^{c(G \setminus S)}$$

dove, dato un grafo H , $c(H)$ è il numero di componenti connesse di H .

Prima di dare la dimostrazione di questo teorema, notiamo che ne segue subito una delle tante inaspettate proprietà del polinomio cromatico.

COROLLARIO 6.7.² *Chiamando n il numero dei vertici di un grafo semplice G dato, il coefficiente di t^{n-1} in $P(G, t)$ è l’opposto del numero di archi di G ; ovvero, il polinomio cromatico comincia con*

$$t^n - |\mathcal{E}|t^{n-1} + \dots$$

DIMOSTRAZIONE. Rileggendo il teorema precedente, vediamo che nella somma che calcola $P(G, t)$ gli unici termini che contribuiscono al coefficiente di t^{n-1} corrispondono ai sottoinsiemi $S \subseteq \mathcal{E}$ tali che $c(G \setminus S) = n - 1$. Ovvero, rimuovendo tutti gli archi in S resta un grafo con $n - 1$ componenti connesse. Ma sappiamo che il grafo ha n vertici - e siccome i nostri grafi non hanno cappi, concludiamo che gli unici insiemi S che contribuiscono al

²Ringraziamo il prof. Thomas Zaslavsky per averci fatto notare questa graziosa proprietà del polinomio cromatico!

coefficiente cercato sono quelli che contengono tutti gli archi meno uno. Possiamo quindi riscrivere il coefficiente di t^{n-1} come

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} (-1)^{|\mathcal{E} \setminus (\mathcal{E} \setminus \{e\})|} = \sum_{e \in \mathcal{E}} (-1) = -|\mathcal{E}|.$$

□

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 6.6. (un po' tecnica, in effetti, ma se siete arrivati fin qui non vorrete abbandonarci all'ultima pagina, vero?) L'unica cosa che possiamo usare per dimostrare il teorema è l'unica cosa che sappiamo su $P(G, t)$. Argomentiamo quindi per induzione, notando che nel caso in cui $|\mathcal{E}| = 0$ la somma ha un solo termine, corrispondente a $S = \emptyset$, ovvero $(-1)^{|\mathcal{E}|} t^{c(G)} = (-1)^0 t^n = t^n$.

Per il passo induttivo sia $m > 0$ e supponiamo che il teorema valga quando $|\mathcal{E}| < m$. Scegliamo poi un $e \in \mathcal{E}$ e separiamo la somma della parte destra dell'equazione da mostrare secondo che S contenga l'arco e o meno:

$$\sum_{S \subseteq \mathcal{E}} (-1)^{|\mathcal{E} \setminus S|} t^{c(G \setminus S)} = \sum_{\substack{S \subseteq \mathcal{E} \\ e \notin S}} (-1)^{|\mathcal{E} \setminus S|} t^{c(G \setminus S)} + \sum_{\substack{S \subseteq \mathcal{E} \\ e \in S}} (-1)^{|\mathcal{E} \setminus S|} t^{c(G \setminus S)}.$$

Ora, vediamo che la somma sui sottoinsiemi S che contengono e è esattamente la somma che avremmo considerando i sottoinsiemi T di $\mathcal{E}(G \setminus e)$: infatti $G \setminus S = G \setminus T$ per $T = S \setminus e$ - e pertanto, per ipotesi induttiva, tale somma è $P(G \setminus e, t)$.

Inoltre, per ogni sottoinsieme $S \subseteq \mathcal{E}(G)$ che contiene e , abbiamo che

$$c(G \setminus S) = c((G/e) \setminus S),$$

poichè la componente connessa che contiene e corrisponde alla componente connessa del vertice "doppio". D'altra parte, $\mathcal{E}(G/e) \setminus S$ in questo caso ha un elemento in meno rispetto a $\mathcal{E}(G) \setminus S$, e quindi

$$(-1)^{\mathcal{E}(G) \setminus S} t^{c(\mathcal{E}(G) \setminus S)} = (-1)(-1)^{|\mathcal{E}(G/e) \setminus S|} t^{c(\mathcal{E}(G/e) \setminus S)}.$$

Riassumendo, e applicando l'ipotesi induttiva, possiamo continuare l'uguaglianza precedente scrivendo

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{S \subseteq \mathcal{E} \\ e \notin S}} (-1)^{|\mathcal{E} \setminus S|} t^{c(G \setminus S)} + \sum_{\substack{S \subseteq \mathcal{E} \\ e \in S}} (-1)^{|\mathcal{E} \setminus S|} t^{c(G \setminus S)} \\ = & \sum_{S \subseteq \mathcal{E}(G \setminus e)} (-1)^{|\mathcal{E}(G \setminus e) \setminus S|} t^{c((G \setminus e) \setminus S)} - \sum_{T \subseteq \mathcal{E}(G/e)} (-1)^{|\mathcal{E}(G/e) \setminus S|} t^{c((G/e) \setminus S)} = \\ & = P(G \setminus e, t) - P(G/e, t) \end{aligned}$$

da cui, usando il Lemma 6.5, segue che la somma da cui siamo partiti corrisponde realmente a $P(G, t)$.

□

V. Appendice. Il laboratorio: problemi risolti e altri racconti.

A cura di Marco Golla.

Primo giorno: Poligoni, poliedri e trasformazioni

V.1. Pizze. Spunti interessanti si trovano nel gioco della pizza, soprattutto per le sottigliezze nascoste nella dimostrazione della validità della formula di Eulero: cominciamo allora a giustificare perché, in qualche modo, il gioco della pizza funziona.

Prima di tutto, mostriamo che il gioco può cominciare. Partiamo da una faccia del poliedro (che è un poligono), e lo “spiattelliamo”. Chiaramente il bordo di un poligono “spiattellato” è pur sempre il bordo di un poligono, quindi la partenza è buona.

A questo punto, dobbiamo dimostrare che non ci possiamo incastrare mangiando i triangoli secondo le regole: ci basta sapere che ad ogni passo il bordo è un poligono, e che se il bordo è un poligono possiamo in effetti procedere. Cominciamo da quest’ultimo fatto.

Pizze poligonali possono essere mangiate. Prendiamo allora un reticolato di triangoli il cui bordo sia un poligono con vertici $A_1A_2 \dots A_n$ e procediamo per induzione su n . Se $n = 3$ non c’è molto da dimostrare, perché l’ultimo poligono rimasto è il triangolo con vertici $A_1A_2A_3$. Quindi supponiamo $n \geq 4$.

Consideriamo in questo caso il lato A_1A_2 . Siccome fa parte del bordo di un poligono, questo sarà il lato di un unico triangolo A_1A_2B ; se B non è uno degli A_k abbiamo vinto - perché possiamo mangiare il triangolo A_1A_2B . Se B è A_3 oppure A_n , ovvero il vertice ‘appena prima’ o ‘appena dopo’ il segmento A_1A_2 sul bordo del poligono iniziale, abbiamo comunque vinto. Possiamo infatti mangiare il triangolo A_1A_2B perché ha almeno due lati sul bordo, e non può averne 3 perché abbiamo supposto $n \geq 4$ e $A_1 \dots A_n$ poligono. Se B invece è uno degli altri vertici del poligono iniziale, ovvero un A_k con $3 < k < n$, il triangolo A_1A_2B spezza il poligono in $A_2A_3 \dots A_k$ e $A_k \dots A_nA_1$, e dobbiamo considerare la situazione più da vicino. Consideriamo il poligono $A_2 \dots A_k$ e distinguiamo due casi:

- (1) Se per tutti gli $h = 2 \dots k - 2$ il triangolo $A_hA_{h+1}A_k$ è un triangolo del reticolato, in particolare lo è per $h = k - 2$, quindi $A_{k-2}A_{k-1}A_k$ è un triangolo, ed è commestibile. Di più, è commestibile anche nel poligono di partenza, perché ha esattamente due lati sul bordo del poligono.
- (2) Altrimenti prendiamo il minimo h per cui $A_hA_{h+1}A_k$ non è un triangolo del reticolato, e scegliamo C tale che $A_hA_{h+1}C$ sia un triangolo del reticolato. Ora, se C non sta sul bordo, allora $A_hA_{h+1}C$ è “mangiabile”, altrimenti C sta sul bordo e quindi esiste h' tale che $C = A_{h'}$. Come sopra, il poligono $A_h \dots A_{h'}$ ha meno lati di $A_2 \dots A_k$, tutti tranne uno sul bordo di $A_1 \dots A_n$. Possiamo iterare il procedimento diminuendo il numero di lati finché troveremo un triangolo “mangiabile”. Nel caso più laborioso

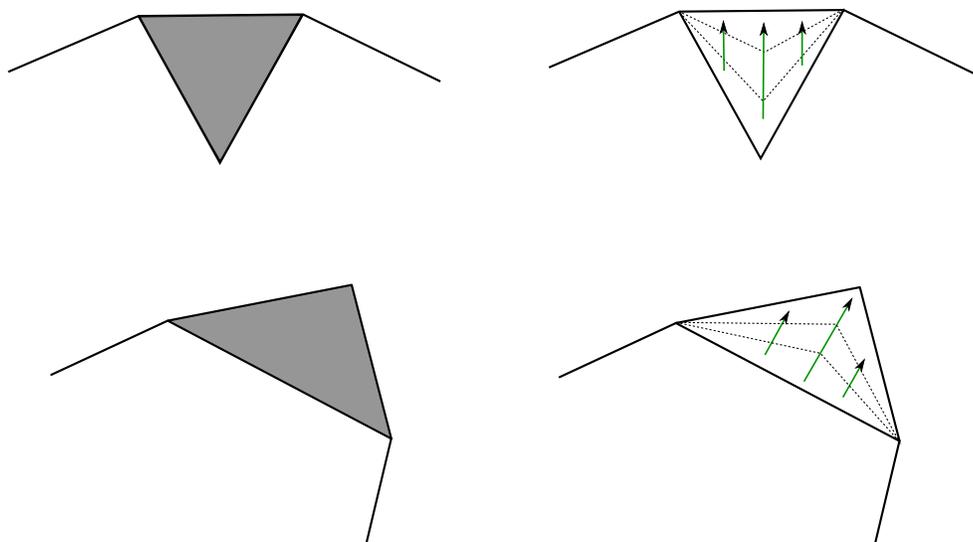


FIGURA V.1. Le due regole e le deformazioni di nuovi poligoni di bordo sul vecchio poligono di bordo

saremo ridotti infine ad un triangolo, che sarà “mangiabile” (perché il poligono che scegliamo non ha mai più di un lato interno al poligono iniziale).

La pizza resta poligonale. Verifichiamo ora la parte più facile, cioè che se facciamo una mossa lecita, il bordo resta un poligono. Esaminiamo le regole di pagina 7 separatamente:

- (1) Deformiamo il bordo del nuovo poligono su quello del poligono originale “spingendo” i due nuovi lati verso il lato vecchio, proiettando perpendicolarmente i vari punti (vedi Figura V.1): questa è una deformazione continua (perché il punto “interno” non sta sul bordo) ed invertibile;
- (2) Anche qui, “spingiamo” il nuovo lato verso l’esterno, proiettandolo perpendicolarmente verso i due lati eliminati (vedi Figura V.1): qui la deformazione è continua e invertibile.

V.2. I ponti di Königsberg. Dei problemi proposti durante la lezione, quelli più gettonati sono stati sicuramente il problema dei ponti di Königsberg e le sue varianti: tutti hanno trovato autonomamente le strategie del principe rosso, del principe blu e del vescovo (dando quindi una risposta affermativa ai problemi 5.2, 5.3, 5.4), mentre la soluzione (sottile, e negativa) del problema iniziale (Problema 5.1) ha richiesto qualche suggerimento da parte nostra.

V.3. Solidi platonici. Sebbene di questi oggetti si sia parlato poco durante il laboratorio, offriamo qui due dimostrazioni del fatto che ogni poliedro tridimensionale le cui facce siano tutte dei poligoni con ugual numero di lati debba essere uno dei 5 solidi platonici. La prima dimostrazione è basata sulle proprietà “rigide” dei poliedri; l’altra è più nello stile “liscio” della settimana matematica.

DIMOSTRAZIONE “RIGIDA”. In ogni vertice di un solido regolare devono concorrere almeno tre facce, e la somma degli angoli interni dei vertici deve fare al più un angolo giro (2π radianti o 360 gradi). Di conseguenza, non possono esistere solidi regolari con facce esagonali, né con facce ettagonali, né n -agonali, con $n \geq 6$: l’angolo interno in ogni vertice

sarebbe $(n-2)\pi/n$, che moltiplicato per 3 dà $3\pi - \frac{6\pi}{n}$, e per $n \geq 6$ questa quantità è almeno un angolo giro.

Con lo stesso ragionamento, otteniamo che se le facce sono quadrate o pentagonali, ci possono essere esattamente 3 facce che concorrono in ogni vertice, e così costruiamo il cubo e il dodecaedro.

Con i triangoli, invece, abbiamo più possibilità: possiamo far concorrere 3, 4 o 5 facce in ogni vertice, ottenendo il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro rispettivamente. \square

DIMOSTRAZIONE “LISCIA”. Veniamo ora invece alla soluzione più “topologica”: chiamiamo F il numero di facce del nostro ipotetico poliedro regolare, e supponiamo che ogni faccia abbia l lati. In tal caso, il numero di spigoli del poliedro è $E = \frac{F \cdot l}{2}$. Supponiamo ora che in ogni vertice concorrano $d \geq 3$ facce (e d non dipende dal vertice scelto, perché il poliedro è regolare!): il numero di vertici del poliedro è $V = \frac{F \cdot l}{d}$.

Siccome la formula di Eulero deve valere, abbiamo

$$2 = F - E + V = F - F\frac{l}{2} + F\frac{l}{d} = F(1 - l/2 + l/d).$$

Maneggiando un po' l'equazione, otteniamo la seguente disuguaglianza:

$$F(l-2)(d-2) = 4(F-d) < 4F,$$

quindi $(l-2)(d-2) < 4$, da cui otteniamo che le uniche scelte possibili per l ed f sono quelle dei 5 solidi platonici! \square

V.4. Tassellazione della sfera. Anche il problema della tassellazione della sfera con soli esagoni o con esagoni e altri poligoni è stato molto in voga, soprattutto perchè l'invito a disegnare una tassellazione ad esagoni con il pennarello sui palloncini messi a disposizione ha sollecitato la vena artistica in molti ragazzi! Qualcuno si è anche ricordato di aver giocato a calcio, e ha riscoperto la tassellazione-fullerene della sfera.

Verso la fine del laboratorio, i tutori si sono concessi una piccola divagazione sul problema. Si è mostrato ai ragazzi che non esiste una tassellazione della sfera di soli esagoni e che, se si vuole fare una tassellazione mista a pentagoni ed esagoni, servono almeno 12 pentagoni. Infine abbiamo costruito “esplicitamente” il fullerene.

Il pallone da calcio. Cominciamo dal mostrare il fatto che, se vogliamo tassellare la sfera usando solo pentagoni ed esagoni, servono almeno 12 pentagoni (e quindi, a maggior ragione, non si potrà tassellare la superficie della sfera usando solo gli esagoni): supponiamo di avere un poliedro con f_5 facce pentagonali e f_6 facce esagonali.

Il numero di facce è $F = f_5 + f_6$; ogni spigolo del poliedro è condiviso da due facce, quindi se contiamo il numero di spigoli di ogni faccia, e facciamo la somma, otteniamo il *doppio* del numero di spigoli, cioè $2E = 5f_5 + 6f_6$; infine, in ogni vertice concorreranno *almeno* tre facce, quindi se contiamo il numero di vertici per ogni faccia e sommiamo, otteniamo *almeno* tre volte il numero dei vertici totali, ovvero $3V \leq 5f_5 + 6f_6$.

Ma il nostro poliedro deve soddisfare la formula di Eulero, ovvero $F - E + V = 2$. Cosa possiamo dire su $F - E + V$? Sicuramente

$$2 = F - E + V \leq (f_5 + f_6) - \frac{5f_5 + 6f_6}{2} + \frac{5f_5 + 6f_6}{3} = \frac{f_5}{6},$$

da cui $f_5 \geq 12$.

Inoltre possiamo osservare che, se imponiamo la condizione più restrittiva che in ogni vertice concorrano *esattamente* 3 facce, come succede nel pallone da calcio, la disuguaglianza $3V \leq 5f_5 + 6f_6$ diventa un'uguaglianza, e diventa un'uguaglianza anche $f_5 = 12$: in questo caso servono *esattamente* 12 pentagoni. Questa è, tra l'altro, la struttura delle cuciture in un pallone da calcio tradizionale - ma anche la struttura dei legami chimici nella molecola del fullerene con 60 atomi di carbonio! (...perchè 60?).

Costruzioni. Parlando proprio del pallone da calcio, c'è un modo particolarmente facile di costruirlo: consideriamo un icosaedro I , e tagliamo una fetta piramidale da ogni vertice. Siccome i triangoli sono equilateri, tagliando ogni lato in due terzi, e tenendo solo il pezzo centrale, tagliamo degli esagoni regolari e dei pentagoni equilateri: per ragioni di simmetria, sono anche regolari!

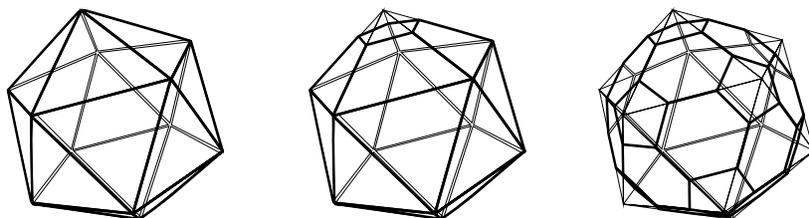


FIGURA V.2. Dall'icosaedro al fullerene: “limando” un vertice e poi tutti quelli visibili

In questo modo otteniamo un poliedro che ha tante facce esagonali quante erano le facce triangolari dell'icosaedro (quindi 20) e tante facce pentagonali quante erano i vertici dell'icosaedro (cioè 12).

V.5. “Controesempi”. Possiamo fare vari tipi di esempi diversi in cui la formula di Eulero non funziona.

Gli esempi più “patologici” e “ovvi”, consistono nel considerare come oggetto *due* poliedri: in questo caso, $F - E + V$ fa palesemente 4.

Qualcosa di più subdolo potrebbe essere considerare due poliedri incollati ad un vertice, o lungo uno spigolo, o lungo una faccia (senza però togliere la faccia “in mezzo”). Vediamo questi casi separatamente:

- (i) Se la figura è composta da due poliedri incollati in un vertice comune, sarà $F - E + V = 4 - 1 = 3$. Infatti abbiamo due volte $2 = F - E + V$ (una per ciascuno dei due poliedri), e dobbiamo sottrarre 1 perché il vertice in comune viene contato due volte.
- (ii) Se invece i due poliedri sono incollati lungo un lato comune la figura risultante avrà $F - E + V = 4 + 1 = 5$; abbiamo aggiunto +1 altrimenti lo spigolo in comune viene contato due volte (e ha un segno negativo).
- (iii) Se infine il nostro solido è formato incollando due poliedri lungo una faccia comune, un ragionamento simile al caso (i) mostra che la somma “euleriana” fa ancora 3.

Esempi meno degeneri in cui la formula di Eulero non vale sono ottenuti bucando in vari modi un poliedro. Ad esempio possiamo scavare un buco poliedrale, come un tetraedro $A'B'C'D'$ “tolto” ad un tetraedro $ABCD$ (vedi Figura V.3). Il valore di $F - E + V$, in questo caso, può essere calcolato semplicemente: il numero di facce, spigoli e vertici è il doppio di quello di un tetraedro, per cui $F - E + V = 4$.

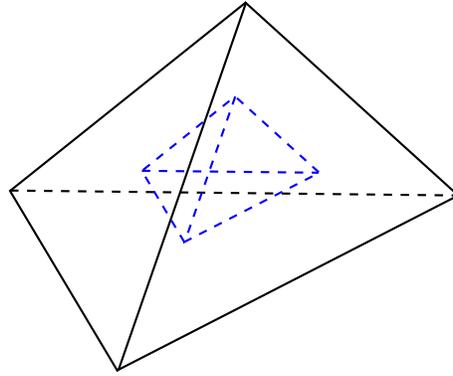
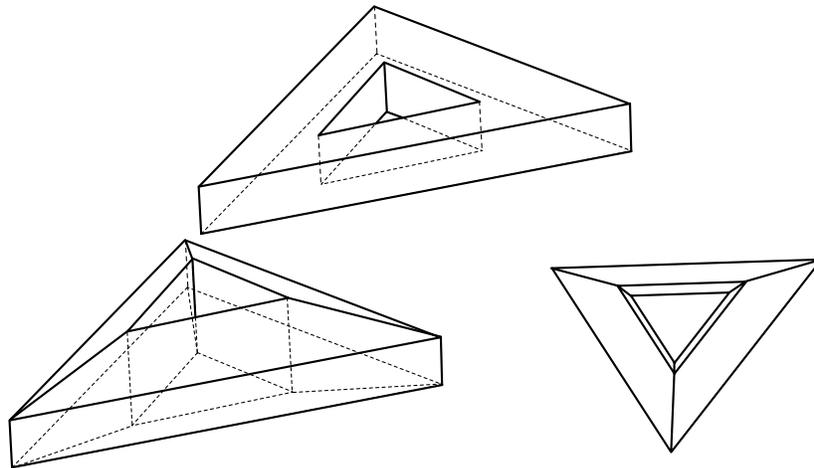


FIGURA V.3. Il buco (tratteggiato) scavato in un tetraedro.

Da questo esempio possiamo costruire oggetti per cui $F - E + V$ sia un numero pari e positivo arbitrariamente grande, ad esempio scavando altri buchi poliedrali in un tetraedro: ad ogni buco scavato aggiungiamo 2 alla formula di Eulero, visto che aggiungiamo una quantità che è del tipo “ $F' - E' + V'$ ” per ogni poliedro che abbiamo “tolto” creando un buco! In tutti questi casi però i nostri oggetti non sono delimitati da una sola superficie, ma hanno due o più bordi separati.

Se vogliamo trovare un pseudo-poliedro delimitato da una sola superficie, per cui la formula di Eulero non valga, possiamo provare a “tassellare” una ciambella, ad esempio scavando un buco a forma di prisma in un prisma a base triangolare.

FIGURA V.4. Una possibile tassellazione (*non* poliedrale) della ciambella, e la sua correzione (poliedrale)

Sia dunque dato il prisma $ABCDEF$ disegnato in Figura V.4, con ABC ed DEF facce triangolari parallele, e AD , BE , CF lati paralleli. “Scaviamo” quindi un prisma $A'B'C'D'E'F'$ con $A'B'C'$, $D'E'F'$ facce contenute risettivamente in ABC ed DEF . In questo modo, però, otteniamo due facce non convesse (ovvero, con un buco in mezzo): se vogliamo evitare questo problema, spezziamo ognuna delle facce non convesse in tre facce a forma di trapezio. Contiamo a questo punto quante sono le facce: alle facce originali del prisma (che erano 5), dobbiamo aggiungere 3 facce “interne” e 2 facce “aggiuntive” per

ognuna delle due basi, in totale 12 facce. Gli spigoli sono invece 9 per ognuna delle due basi, e 6 verticali, per un totale di 24. I vertici, infine, sono 6 per ogni base, quindi 12. In totale, abbiamo $F - E + V = 12 - 24 + 12 = 0$.

In realtà, ogni volta che facciamo altri buchi di questo secondo tipo, “scavando” una specie di cilindro, la somma $F - E + V$ decresce di 2: il conto si può rendere abbastanza semplice incollando vari dei prismi costruiti per una faccia rettangolare, diminuendo di 2 il numero di facce, di 4 il numero degli spigoli, e di 4 anche il numero dei vertici, per un totale di $-2 + 4 - 4 = -2$.

In generale, data una superficie divisa da una triangolazione, la somma $F - E + V$ si chiama *caratteristica di Eulero* di una superficie.

Tale numero è un invariante per il tipo di deformazioni di cui si è sempre parlato nelle lezioni, e anche per qualche loro “cugina”, ed è uno strumento abbastanza potente già studiato, oltre che da Eulero, anche da Gauss e Bonnet.

Inoltre, anche nel caso di superfici più complicate, la caratteristica di Eulero non dipende dalla particolare triangolazione - per cui, ad esempio, se intagliamo la superficie di una ciambella e facciamo la somma $F - E + V$ otterremo sempre 0!

Ricordando il Capitolo III, otteniamo che la caratteristica di Eulero di una superficie orientabile con g buchi è $2 - 2g$, quindi, nel caso delle superfici, la caratteristica di Eulero ed il genere sono strettamente correlati tra loro.

V.6. Connessione. Molto interessante è il concetto di connessione, apparentemente innocuo ma utilissimo nella vita del topologo, che permette in modo molto veloce di distinguere oggetti. Appliciamolo all’esercizio 4.3, che chiede di dimostrare che una figura ad “otto” non è omeomorfa ad un cerchio.

Ci sono almeno due strade diverse. Quella forse più immediata suggerisce di notare che togliendo il “punto d’incrocio” dell’otto otteniamo due circonferenze senza un punto (ovvero sono due segmenti di curva disconnessi), mentre togliendo un qualsiasi punto dalla circonferenza otteniamo una curva unica. Una strategia alternativa propone di investigare cosa succede se togliamo due punti qualunque da una circonferenza. Beh, restano due segmenti di curva. Se invece togliamo due punti dai due cerchi diversi dell’otto, resta un unico pezzo! In ogni caso quindi la circonferenza e l’otto non possono essere omeomorfe!

Con metodi del tutto analoghi, si distingue tra un quadrifoglio ed una “margherita” con più petali...

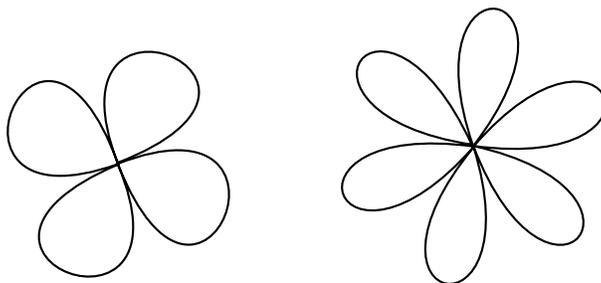


FIGURA V.5. Un quadrifoglio ed una margherita a 6 petali

Secondo giorno: Curve, cartine e colori

A differenza del giorno precedente, i problemi di stampo più “teorico” hanno attirato l’attenzione di vari gruppi di lavoro.

I problemi più gettonati sono stati comunque quelli sui grafi e sugli isomorfismi, anche grazie al materiale ludico a disposizione: molti si sono divertiti a spostare vertici e archi e dimostrare/confutare l’esistenza di isomorfismi tra le coppie di grafi disegnate alla lavagna, arrivando, da soli o con qualche aiuto, ad individuare aspetti salienti della questione (valenze, connessione tra vertici di valenza massima o minima, ecc..).

Isomorfismi. L’esercizio 2.4 è stimolante: la prima coppia è fatta di due grafi isomorfi, mentre la seconda no.

C’è un modo relativamente semplice di vedere che i due grafi di Figura II.5 sono isomorfi, ovvero provare a vedere il “pentagono inferiore” della seconda figura come il “pentagono esterno” della prima, e seguendo poi la stella interna. Dunque siamo di fronte a due disegni “dello stesso grafo” - ed è un grafo famoso e interessante, conosciuto come il *grafo di Pedersen*.

Per dimostrare che i grafi di Figura II.6 non sono isomorfi, basta contare i “quadrilateri” (ovvero cicli di lunghezza 4): nella prima ce ne sono 2, nella seconda 3. Oppure si può osservare che in entrambi i grafi ci sono 4 vertici di valenza 3, ma nel primo sono collegati a coppie, mentre nel secondo formano un ciclo.

V.7. Il teorema della curva di Jordan. Forse il problema tecnico più quotato è stato il teorema di Jordan per curve poligonali, che ha messo a dura prova anche noi tutori. Sono emersi degli spunti interessanti perchè la dimostrazione si poteva sviluppare in modi diversi, sostanzialmente dimostrando che la parità del numero di incroci è invariante per cambio d’inclinazione della retta di partenza (estendendo opportunamente la definizione), oppure che è invariante sull’insieme delle semirette parallele a quella data, pur di stare abbastanza vicino ad una semiretta fissata.

Partiamo allora dalla traccia data nel capitolo II.

Per orima cosa rivediamo più in dettaglio la dimostrazione del fatto che, se un segmento pc non interseca la spezzata, le parità degli estremi sono uguali: se pc è lungo la direzione iniziale fissata, la tesi è ovviamente vera.

Supponiamo quindi che pc non sia parallelo alla direzione l fissata, e muoviamoci da p verso c : otteniamo un *fascio* di semirette tutte parallele, con le relative intersezioni con la spezzata. La parità di queste intersezioni sicuramente non varia finché una di queste semirette non interseca vertici; quando invece attraversiamo un vertice, possono succedere due cose:

- o il vertice è di quelli “ignorabili”, cioè tutti e due i segmenti che escono da lui stanno dalla stessa parte della retta, nel qual caso spostando di poco la retta, il numero di lati intersecati passa da 0 a 2 o viceversa;
- oppure è un vertice di quelli “veri”, cioè i due segmenti “attraversano” la retta, e il numero di intersezioni resta 1.

In entrambi i casi, la parità delle intersezioni non varia.

Consideriamo adesso un segmento pq che interseca la curva, e ricontrolliamo quella parte della dimostrazione in cui si ottiene una spezzata che congiunge p e q senza intersecare la curva. Partendo da p , avevamo costruito una spezzata che costeggiava la curva: consideriamo il punto dove la spezzata incontra per l’ultima volta pq . Tale punto sarà q' o q'' (ci riferiamo alla Figura V.6: la notazione è cambiata rispetto a quella usata a lezione). Dobbiamo

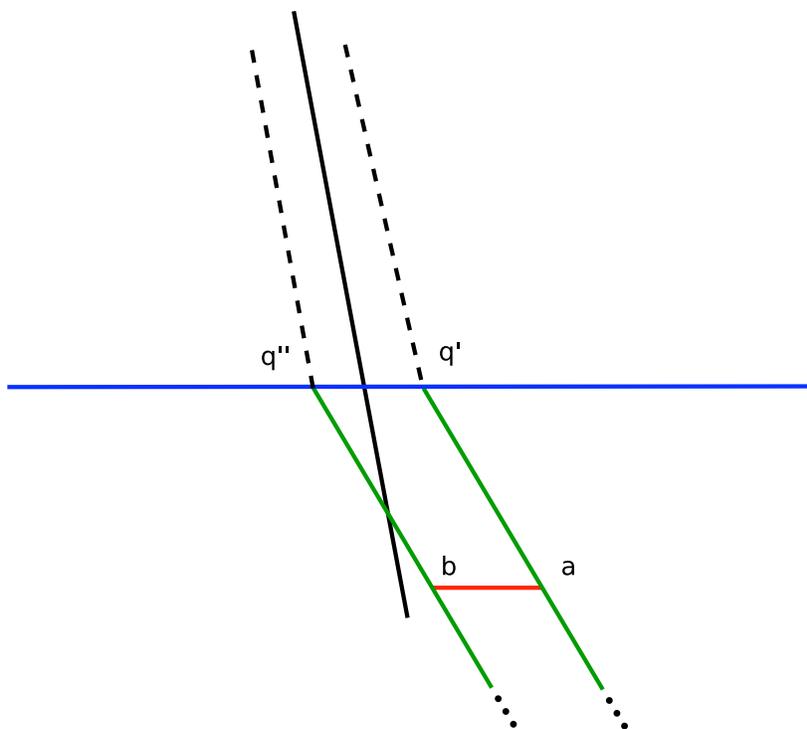


FIGURA V.6. I punti q', q'', a e b : la retta orizzontale (blu) è la congiungente pq , il segmento diagonale (in nero) fa parte della spezzata, i due segmenti $q''b$ e $q'a$ (in verde) sono paralleli alla semiretta iniziale l ; i due percorsi tratteggiati che terminano in q'' e q' “costeggiano” la spezzata.

dimostrare che q' e q'' hanno parità diversa: la spezzata a trattini, allora, incontrerà quello dei due che ha la stessa parità di p e di q , e non l'altro.

Come in figura, q'' e q' sono da parti opposte della curva; tracciamo le semirette uscenti dai due punti, nella direzione l (le due semirette in figura V.6): siccome la direzione non è parallela a nessun lato, una delle due semirette intersecherà la curva nel lato che interseca $q''q'$ (la retta orizzontale nella figura). Supponiamo che, come in figura, sia la semiretta uscente da q'' che interseca la spezzata, e fissiamo due punti a, b sulle semirette uscenti da q' e q'' rispettivamente, di modo che $baq'q''$ sia un parallelogramma.

Per costruzione, q' ed a hanno la stessa parità, e siccome ba non interseca la spezzata, anche q' e b hanno la stessa parità. Ma anche q'' e p hanno la stessa parità, mentre q'' e b hanno parità opposta, quindi p e q hanno parità opposta.

Per concludere l'ultimo dettaglio della dimostrazione rimasto in sospeso, resta da vedere che l'insieme \mathcal{E} dei punti esterni, quindi di tipo “pari”, è illimitato, mentre \mathcal{I} è limitato.

Fissando un'inclinazione della retta (che supponiamo orizzontale, per chiarire la terminologia), ci saranno due altre rette parallele ad essa, una “alta” e una “bassa”, che delimitano una striscia entro cui si trova tutta la nostra curva: tutte le rette al di fuori di questa striscia non intersecano mai la spezzata, quindi tutti i punti di quelle rette intersecano un numero pari (zero) di volte la spezzata. Con un ragionamento simile troviamo due rette verticali, una “sinistra” e una “destra” che delimitano un'altra striscia entro cui si trova la spezzata. Come prima, tutte le rette fuori da questa striscia non incontrano la spezzata, quindi tutti

i punti fuori da questa regione sono di tipo *pari*, però rispetto ad un'altra direzione.

Abbiamo comunque individuato un rettangolo all'interno del quale si trova la nostra curva. Si individua immediatamente un punto esterno al rettangolo tale che, se gli applichiamo la semiretta, ci allontaniamo verso l'infinito, e non intersechiamo mai il rettangolo. Dunque tale punto è di tipo pari, ed appartiene ad \mathcal{E} . Ma ogni altro punto esterno al rettangolo è di tipo pari, perché può venire collegato al punto appena descritto tramite una spezzata che stia tutta esterna al rettangolo (e che, in particolare, non interseca la curva). Dunque tutti i punti esterni al rettangolo sono in \mathcal{E} , e abbiamo provato che \mathcal{E} è illimitato. Quanto ad \mathcal{I} , a questo punto è imprigionato dentro il rettangolo, dunque è limitato.

Proviamo ora a seguire un'altra strada possibile per dimostrare il Teorema di Jordan, come anticipato. Ripartiamo proprio dalla questione della illimitatezza dell'insieme dei punti esterni.

Se dimostriamo che la parità del numero di incroci non dipende dall'inclinazione della retta scelta (con opportune convenzioni sulle direzioni parallele ai lati della spezzata) abbiamo finito, perché avremo un rettangolo (l'intersezione delle due strisce) al di fuori del quale si trovano solo punti di tipo che sappiamo subito riconoscere come punti pari.

Resta da giustificare il fatto che possiamo cambiare arbitrariamente la direzione della retta iniziale.

Cominciamo con il trattare i casi "degeneri", ovvero quando la retta contiene uno dei segmenti della spezzata, e consideriamo un esempio semplice. Supponiamo che la spezzata data sia un triangolo ABC , prendiamo un punto P sulla retta AB (ma esterno al segmento), e scegliamo come direzione proprio quella parallela ad AB . Ora P è un punto esterno, cioè P sta in \mathbf{E} , quindi vogliamo che il numero di intersezioni di P con la spezzata sia *pari*.

Potremmo adottare la convenzione che, se una retta contiene tutto un segmento, contiamo 0 intersezioni. Però questo crea dei problemi nel caso di figure più complicate (non *convesse*). Consideriamo la figura seguente:

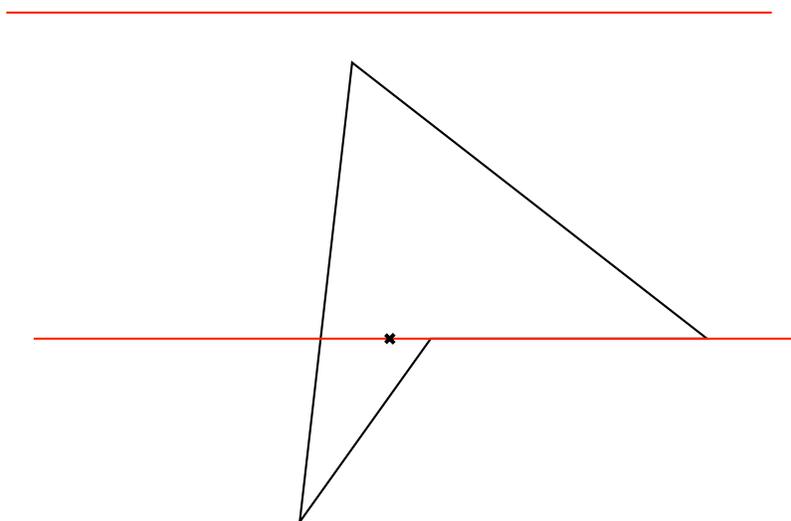


FIGURA V.7. Un caso "patologico" di spezzata per cui la prima convenzione contrasta le nostre necessità

Il punto segnato con la \mathbf{x} , intuitivamente, sta all'*interno* della spezzata, ma, secondo la convenzione appena abbozzata, dovrebbe intersecarla 0 volte, quindi appartenere ad **E**. Cosa cambia dalla situazione del triangolo alla situazione della seconda spezzata?

La differenza è che nel caso del triangolo la spezzata prosegue “dalla stessa parte” della retta da dove proveniva, mentre nel secondo caso prosegue da parti opposte. Modifichiamo allora la convenzione in questo senso: se abbiamo una spezzata $A_1A_2 \dots A_n$ ed una retta r che contiene A_kA_{k+1} , allora contiamo:

- 0 intersezioni tra A_{k-1} e A_{k+2} se questi due punti stanno dalla stessa parte di r ;
- 1 intersezione altrimenti.

In questo modo abbiamo esteso il calcolo della parità di un punto ad ogni direzione: vorremmo verificare che quest'estensione è coerente, nel senso che la parità di un punto non dipende dalla direzione scelta.

Fissiamo allora un punto p ed una semiretta iniziale l uscente da p . Facciamo ruotare l in senso antiorario: finché l non incontra vertici, il conteggio rimane invariato. Quando incontra un vertice, possono succedere tre cose:

- (1) i due segmenti uscenti da quel vertice stanno dalla stessa parte rispetto ad l : in questo caso, passiamo da 0 a 2 intersezioni, o viceversa;
- (2) i due segmenti uscenti da quel vertice stanno da parti opposte rispetto ad l : in questo caso, il numero di intersezioni resta 1;
- (3) uno dei due segmenti sta su l : ci riduciamo al caso (1) o (2). Infatti, o il lato precedente e quello successivo stanno dalla stessa parte (e conteremo 0 intersezioni, mentre prima ce n'erano 0 o 2) rispetto ad l , oppure stanno da parti opposte (e conteremo 1 intersezione - prima ce n'era una).

Quindi la parità del punto è un concetto ben definito, e non dipende dalla particolare retta; questo in realtà sistema anche il resto della dimostrazione, con qualche piccolo accorgimento.

Il punto chiave è però il fatto che un segmento divide “la parte di piano che gli sta vicino” in due parti: immaginiamo di percorrere la spezzata, tracciando un segmento rosso alla nostra sinistra ed un segmento blu alla nostra destra, evitando di staccare le penne dal foglio ed evitando le intersezioni con la spezzata, come in Figura V.8.

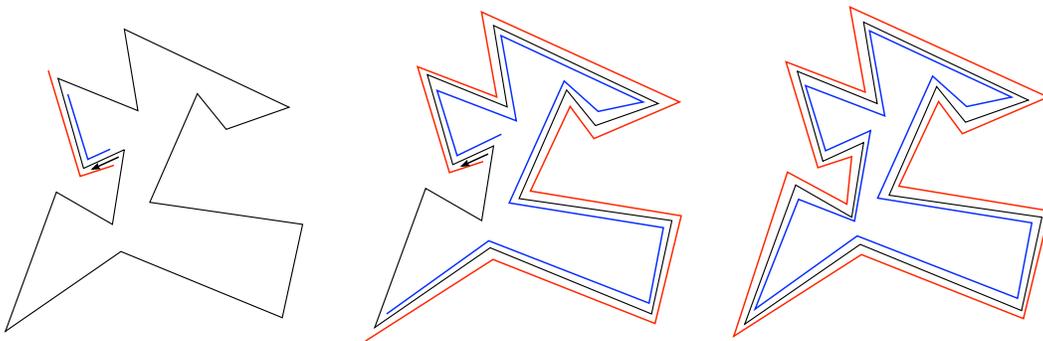


FIGURA V.8. Una spezzata (in nero), il segno alla sua sinistra (all'esterno, in rosso) e il segno alla sua destra (all'interno, in blu)

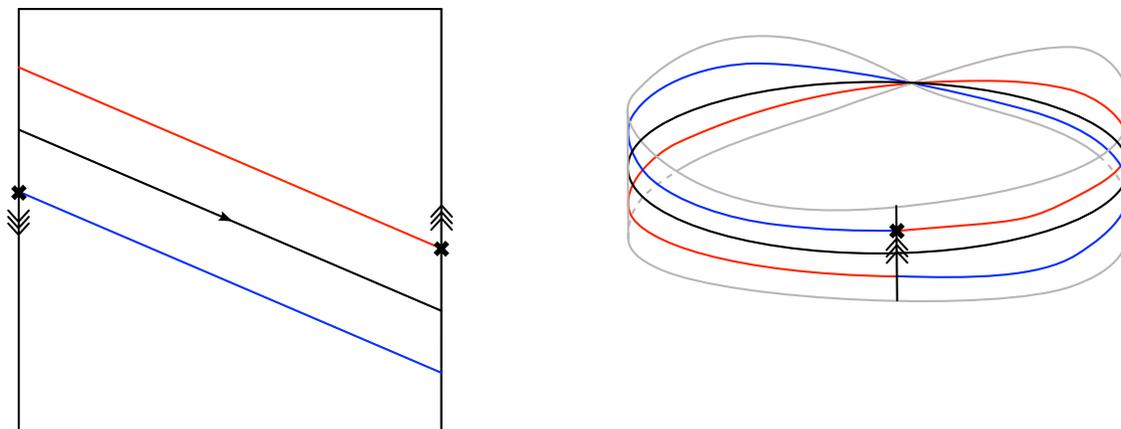


FIGURA V.9. Una curva semplice chiusa (il segmento centrale, in nero) sul nastro di Moebius, rappresentato a sinistra come striscia con i due lati identificati e a destra “chiuso” nello spazio: osserviamo che per queste curve chiuse i due segni che costeggiano la curva si intersecano nel punto segnato con la \mathbf{x}

Alla fine del giro (cioè quando ritorniamo al punto di partenza), *possiamo allacciare i due segni con gli stessi colori*: infatti se prendiamo i due punti di partenza e la retta che li collega, osserviamo che uno è di tipo pari e l’altro è di tipo dispari, quindi stanno uno in \mathbf{E} e l’altro in \mathbf{I} , e due punti dei due insiemi sono sempre separati dalla spezzata! Inoltre, due punti del segno rosso sono sempre della stessa parità, perché c’è una spezzata che li congiunge e che non interseca mai la spezzata di partenza.

Prendiamo ora un punto q con la stessa parità di p : il ragionamento appena espresso ci garantisce che il punto q' costruito nella traccia della dimostrazione del teorema (vedi Figura II.2) sta dalla stessa parte del punto d’intersezione costruito costeggiando la spezzata. Infatti, se stessero da parti opposte della spezzata, uno avrebbe intersezione pari e l’altro dispari, perché il segmento che li congiunge incontra una volta la spezzata, mentre spostandosi da p la parità rimane invariata.

Osserviamo ora una cosa: per dire che il segno rosso non interseca mai il segno blu, siamo ricorsi alle parità di intersezione con semirette: in sostanza, ad una proprietà molto rigida del piano. In realtà, il concetto che ci sta sotto è quello di *orientabilità*, e non è quindi una caratteristica peculiare del piano, ma è comune alla sfera, al toro, alle ciambelle con g buchi..

Il segno rosso può però incontrare il segno blu se ci troviamo, ad esempio, sul nastro di Möbius (vedi figura V.9): infatti, il mezzo giro che diamo al nastro di carta fa proprio sì che il segno rosso vada ad incrociare il segno blu, e viceversa. Questa situazione è comune a tutte le superfici che contengono un nastro di Möbius, quindi la bottiglia di Klein, il piano proiettivo, ed in generale tutte le superfici non orientabili. Esistono comunque curve sul nastro per cui il segno rosso non incontra il segno blu (trovane una!).

I teoremi sui colori. La dimostrazione del teorema dei cinque colori dev’essere sembrata a tutti già piuttosto soddisfacente, e neppure il “teorema dei due colori” (in una delle tre versioni, sostanzialmente molto simili) è stato troppo gettonato.

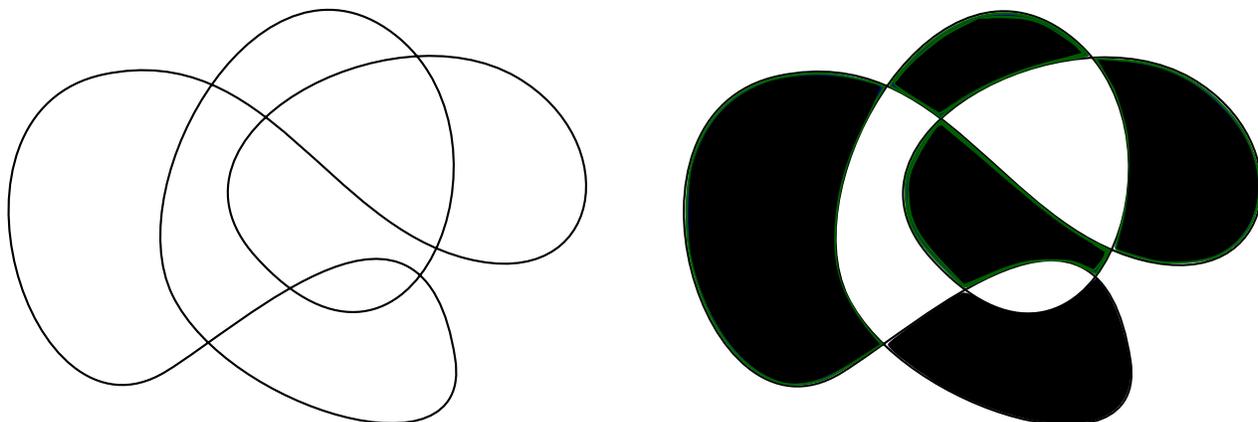


FIGURA V.10. Una curva chiusa e una colorazione bicolore della cartina corrispondente

Quest'ultimo, però, dà degli spunti molto interessanti: mettiamoci nelle ipotesi del Problema 3.4, e supponiamo che le intersezioni siano di due archi e non di più, cioè che non si ripassi più di due volte per uno stesso punto. Un tentativo interessante di semplificazione del problema consiste nell'“eliminare incroci”, sostituendo ad ogni incrocio ad x una coppia di parentesi $)$ (, come in Figura V.11

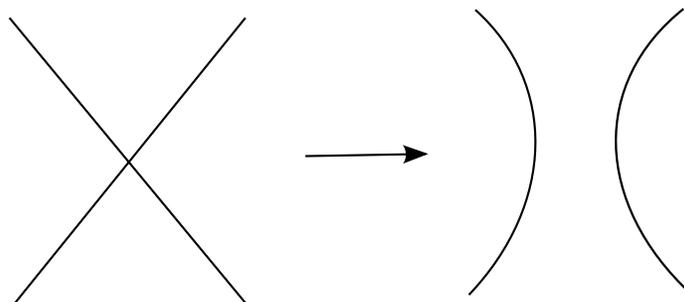


FIGURA V.11. Una semplificazione di un incrocio

In questo modo, partendo da una linea continua, o da più circonferenze, passiamo ad un insieme di isole disgiunte.

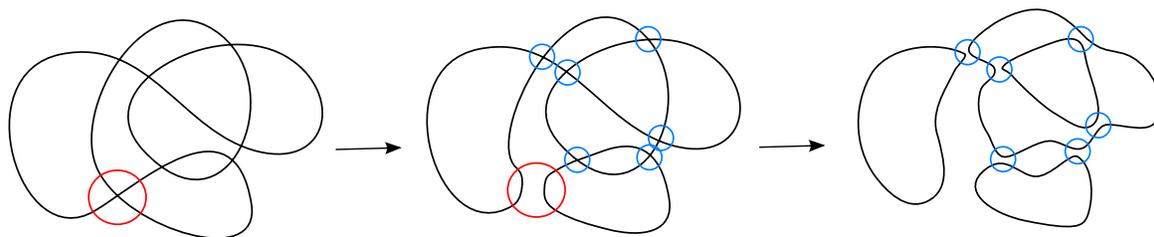


FIGURA V.12. La curva chiusa di partenza e l'insieme di curve di arrivo: il cerchio grande evidenzia il primo incrocio eliminato, i cerchi più piccoli tutti gli altri incroci.

Per il teorema della curva di Jordan, ciascuna di queste individua un “dentro” e un “fuori”. Ora è sufficiente alternare i due colori bianco e nero per ottenere una cartina ben costruita.

Quello che vogliamo fare ora è tornare indietro, cioè da questa cartina fatta di tante isole ricostruire la cartina originale: mettiamoci vicino ad un incrocio, e rimettiamo la x al posto delle parentesi: se coloriamo gli angoli opposti di uno stesso colore, abbiamo guadagnato un incrocio con la colorazione corretta, come in Figura V.13.

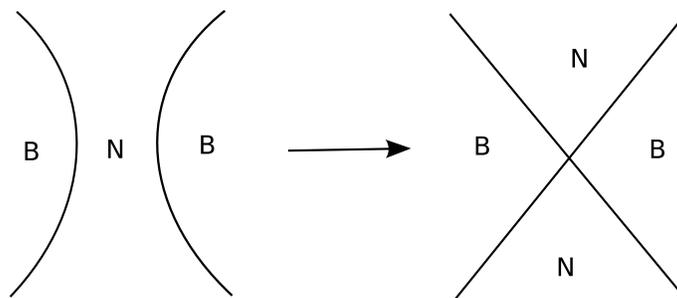


FIGURA V.13. Dalla colorazione delle isole alla colorazione degli incroci

Ripetendo la costruzione per ogni incrocio “scrociato”, otteniamo la cartina originale, colorata con due soli colori.

Nel caso dei Problemi 3.1 o 3.3, c’è una soluzione leggermente più “tecnica”, che però è anche più semplice: una retta nel piano cartesiano è l’insieme dei punti (x, y) che soddisfano

$$ax + by + c = 0$$

per qualche scelta di a, b, c , con a e b non entrambi nulli. Una tale retta individua due semipiani, che sono rispettivamente l’insieme dei punti (x, y) per cui

$$ax + by + c > 0$$

e quello per cui

$$ax + by + c < 0.$$

Adesso prendiamo un insieme di n rette r_1, \dots, r_n , e scegliamo un’equazione

$$r_i : a_i x + b_i y + c_i = 0$$

per ciascuna retta. Coloriamo ogni punto (x, y) del piano nel modo seguente: nero se

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2) \cdots (a_n x + b_n y + c_n) > 0,$$

bianco altrimenti.

Si verifica (con qualche precauzione) che se due punti sono separati da una sola retta (nel senso che il segmento che li congiunge attraversa una sola retta tra r_1, \dots, r_n), allora sono colorati di due colori distinti, e che se non sono separati (nel senso che il segmento che li congiunge non attraversa nessuna delle rette) allora sono dello stesso colore: in questo modo otteniamo una cartina ben colorata.

Analogamente, nel caso delle circonferenze/ellissi del Problema 3.3, basta prendere le equazioni che definiscono le varie curve, e moltiplicarle: il fatto chiave è che l’equazione “standard”

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

che definisce un'ellisse distingue l'interno dall'esterno dell'ellisse in base al segno di $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1$, e l'equazione generica dell'ellisse si ottiene per rotazioni del piano a partire da queste.

Suddivisione del piano. Nel Problema 3.1 si chiede di calcolare il numero massimo di regioni in cui n rette possono dividere il piano. Cominciamo a ragionare euristicamente: se $n = 1$ abbiamo una sola retta, che chiaramente divide il piano in 2 parti distinte. Con due rette possiamo ottenere una striscia e due regioni complementari (scegliendo la seconda retta parallela alla prima), o quattro “quadranti” (scegliendole non parallele).

Questo già ci suggerisce che, se vogliamo massimizzare il numero di fette in cui dividiamo il piano, dobbiamo scegliere le rette a due a due non parallele. Aggiungendo ancora una retta, ci accorgiamo che non vogliamo neppure che più di due rette passino per lo stesso punto (nel caso di 3 rette, avremmo 6 regioni contro 7).

Supponiamo quindi di aver disegnato $n - 1$ rette e di voler aggiungere l' n -esima. A cause delle condizioni imposte sopra, quest'ultima intersecherà tutte le $n - 1$ rette precedenti in $n - 1$ punti distinti, restandone suddivisa in n parti, di cui 2 semirette. Ciascuna di queste parti appartiene ad una “fetta” (di quelle che avevamo già tagliato) diversa, e *divide* ciascuna di queste fette in 2 parti, a seconda del semipiano in cui si trovano. Quindi l' n -esima retta aggiunge n regioni!

Il numero di regioni totali è quindi al più

$$2 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n,$$

che sappiamo essere

$$1 + n(n + 1)/2.$$

Cammini euleriani. Il Problema 3.5 è stato affrontato da qualcuno. Si è però dimostrato un osso duro, che ha sconfitto anche i tutors, che sono ricorsi per la seconda volta all'aiuto dei professori.

La soluzione è, anche in questo caso, algoritmica. Si costruisce (quasi) esplicitamente un percorso “vincente”, nel senso che dà una strategia per costruirne uno.

In realtà, questa strategia non è così distante da quello che farebbe una persona che si trovasse davvero in un museo: partiamo da una stanza P , e cominciamo da un corridoio qualsiasi, segnando però il corridoio che abbiamo scelto, per esempio tracciando una piccola freccia sia all'inizio sia alla fine del corridoio. Quando arriviamo ad una stanza nuova, se è possibile, imbocchiamo un corridoio che non abbiamo già percorso in nessuno dei due sensi (segnando, come prima, il corridoio scelto), altrimenti ne scegliamo (sempre segnandolo) uno che abbiamo già percorso *nel verso contrario*.

Vogliamo però evitare di inflarci in vicolo cieco, come nella Figura V.14.

Per premunirci, coloriamo di un altro colore (rosso) il corridoio da cui siamo entrati *per la prima volta* in una certa stanza, e decidiamo di imboccare nuovamente quel corridoio solo quando non abbiamo alternative.

Che succede quando non possiamo più fare nessuna delle due cose? A quel momento vorremo trovarci nella stanza P di partenza avendo percorso tutti i corridoi in entrambi i sensi.

Se a fine percorso ci troviamo nella stanza Q (diversa dalla stanza P), siamo passati un numero *dispari* di volte (contando il momento in cui ci fermiamo) in Q - quindi ci siamo

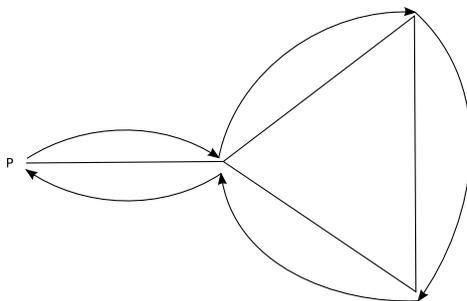


FIGURA V.14. Un caso in cui il primo algoritmo può non funzionare

entrati una volta in più di quante volte ci siamo usciti, e c'è un corridoio che non abbiamo percorso “in uscita” da Q : abbiamo allora (almeno) una scelta possibile.

Ne concludiamo che, a fine percorso, siamo necessariamente nel punto di partenza.

Dimostriamo infine che, arrivati alla fine del percorso, abbiamo percorso tutti i corridoi. Cominciamo considerando i corridoi che escono da P . Siccome ci siamo dovuti fermare in P , non avevamo altre vie d'uscita. Quindi abbiamo percorso tutti i corridoi uscenti da P , e siccome siamo entrati in P tante volte quante ne siamo usciti li abbiamo percorsi tutti in entrambi i sensi. In particolare, sia S la seconda stanza che abbiamo visitato: da S siamo usciti percorrendo il corridoio che collega P ed S , in direzione di P , e questo corridoio aveva il segno rosso. Quindi abbiamo percorso anche tutti i corridoi che uscivano da S . Per *induzione* concludiamo che abbiamo percorso tutti i corridoi che escono ed entrano in ogni stanza visitata. Perciò abbiamo veramente percorso tutto il grafo!

Terzo giorno: Forme a pezzi

Il (poco) tempo rimasto dopo la lezione “avanzata” sul genere topologica è stato dedicato alla costruzione “pratica” di poliedri regolari con cannucce e scotch: l'idea ha coinvolto davvero tutti - e grande stupore hanno poi suscitato le creazioni di Giulio ed Emanuele, che hanno permesso di ottenere modelli di tutti i solidi platonici e anche del fullerene!

Bibliografia

- [1] A. Abbondandolo, *Dimostrazioni e confutazioni*,
<http://www.dm.unipi.it/~abbondandolo/divulgazione/dimostrazioni.pdf>
- [2] E. A. Abbot; *Flatland*, Seely and Co., 1884. Edizione italiana: *Flatlandia*, Adelphi, 2000, 166 pp.
- [3] J. A. Bondy, U. S. R. Murty; *Graph Theory with Applications*. North Holland, New York, 1976.
- [4] R. Courant, H. Robbins; *Che cos'è la matematica?*, a cura di I. Steward, Bollati Boringhieri, 2000, 671 pp. Traduzione di *What is Mathematics?* Oxford University Press, 1996, 566 pp.
- [5] M. Dedò; *Forme, simmetria e topologia*. Zanichelli, 2000, 416 pp.
- [6] E. Delucchi, G. Gaiffi, L. Pernazza; *Passatempi e giochi: alla ricerca di problemi e soluzioni*. Quaderni della Settimana Matematica **1**, Università di Pisa, 2007, 59 pp.
- [7] R. Diestel; *Graph theory*. Graduate Texts in Mathematics **173**, Springer-Verlag, Berlin 2005.
- [8] J. Draisma, S. van Rijnswou; *How to chomp forests, and some other graphs*.
<http://www.math.unibas.ch/~draisma/recreational/graphchomp.pdf>
- [9] L. Euler; *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **8**, 1741, pp. 128-140.
- [10] L. Euler, a cura dell'università di Dartmouth; *The Euler Archive*. Riproduzione delle opere e del carteggio di Eulero disponibile liberamente in rete. <http://www.math.dartmouth.edu/~euler/>
- [11] P. J. Heawood, *Map colour theorem*. Quart. J. Math. **24** (1890), pp. 332-338.
- [12] C. Kosniowski; *Introduzione alla topologia algebrica*. Zanichelli, 1988, 320 pp.
- [13] I. Lakatos, *Dimostrazioni e confutazioni. La logica della scoperta matematica*. Feltrinelli, 1979, 232 pp. Traduzione di *Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press, 1976.
- [14] W. S. Massey; *A Basic Course in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [15] O. Ore; *I grafi e le loro applicazioni*, Zanichelli, 1965. Traduzione di *Graphs and Their Uses*. The Mathematical Association of America, 1963, 131 pp.
- [16] E. Sernesi; *Geometria II*. Bollati Boringhieri, 1994, 396 pp.
- [17] R. J. Wilson; *Introduzione alla teoria dei grafi*. Edizioni Cremonese, 1978, 236 pp. Segnaliamo anche la seconda edizione, in inglese, *Introduction to graph theory*. Academic Press, 1979, 163 pp.
- [18] N. White, *Graphs, Groups and Surfaces*. North Holland Mathematics Studies **8**. North Holland Publ. Co., 1973.