Passatempi e giochi: alla ricerca di problemi e soluzioni.

Resoconto del laboratorio svolto durante la Settimana Matematica 2007 al Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa.

E. Delucchi, G. Gaiffi, L. Pernazza

con Appendice a cura di Giulio Tiozzo

Prefazione

Dal 5 all'8 febbraio 2007 si è svolta a Pisa la terza *settimana matematica* per gli studenti delle scuole superiori organizzata dal Dipartimento di Matematica dell'Università. Parte integrante di questa manifestazione sono i laboratori, pensati per mettere gli studenti a diretto contatto con l'attività matematica accompagnandoli nello studio di problemi e situazioni nuove.

Questo scritto è un resoconto del lavoro svolto nell'ambito del laboratorio *Giochi e passatempi - alla ricerca di problemi e soluzioni*, curato da Giovanni Gaiffi e Ludovico Pernazza con l'aiuto di Emanuele Delucchi e Giulio Tiozzo che hanno svolto il ruolo di tutori.

Durante il laboratorio sono stati presentati alcuni giochi (il Chomp, il Nim, il Chomp sui grafi, il gioco del 15, il Sudoku), con l'intento di spostare l'attenzione dei ragazzi dal piano più immediato della partita e della sfida a quello delle domande sulle regole, i meccanismi, le strategie.

Infatti alle prime domande, che sono state poste dagli insegnanti durante le lezioni, se ne sono aggiunte molte altre, suggerite dai ragazzi via via che trovavano soluzioni o entravano nel vivo di un problema. Così, di passo in passo, parlando di passatempi e giochi, siamo arrivati a poter scorgere alcuni aspetti del percorso quotidiano di un matematico: qualche volta abbiamo saputo dare risposte alle nostre domande, altre volte ci siamo imbattuti in problemi molto complicati. In alcuni casi siamo stati contenti delle soluzioni trovate, in altri ci è sembrato di aver affrontato (o fatto affrontare al computer) una lista di conti ripetitivi. E, fra i vari giochi presentati, si è fatto spazio un altro gioco: quello di cercare, tra una risposta e l'altra, sempre nuove domande...

Il laboratorio era organizzato in tre pomeriggi, per un totale di 10 ore. Ogni pomeriggio cominciava con una lezione di presentazione di un tipo di gioco. Successivamente gli studenti avevano tempo per dedicarsi, divisi in piccoli gruppi e assistiti dai tutori, allo studio dei problemi posti.

Nel presente resoconto abbiamo cercato di riproporre lo stile colloquiale e informale usato in queste "minilezioni", e, al termine di ogni capitolo, abbiamo affidato alla sezione "Laboratorio" una breve descrizione dell'attività dei ragazzi e delle domande, risposte e spunti che sono scaturiti dal loro lavoro.

L'appendice, a cura di Giulio Tiozzo, è una "bonus track": contiene alcuni esercizi legati ai giochi che offrono al lettore spazio per ulteriori "sfide" e approfondimenti.

Il nostro primo ringraziamento va agli organizzatori della *settimana matematica*, Rosetta Zan e Pietro Di Martino, e a Fabrizio Broglia che ha dato l'idea di questo laboratorio proponendoci di partecipare affrontando il tema del Sudoku. Ringraziamo anche, per i suggerimenti sulla presentazione e le conversazioni sui giochi, Alberto Abbondandolo, Francesca Acquistapace e Pietro Majer. Ringraziamo infine Maria Grazia Marzario, Catia Mogetta e Daniela Poletti che hanno preso parte alle lezioni nell'ambito di un Corso di Perfezionamento.

Indice

CAPITOLO 1

Primo giorno

Cioccolata avvelenata: il gioco del Chomp

Presentazione del gioco e prime domande

Tutto comincia da una tavoletta di cioccolata con 4×5 quadratini, di cui l'ultimo in basso a sinistra è contrassegnato: si tratta del quadratino avvelenato.

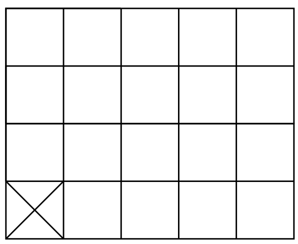
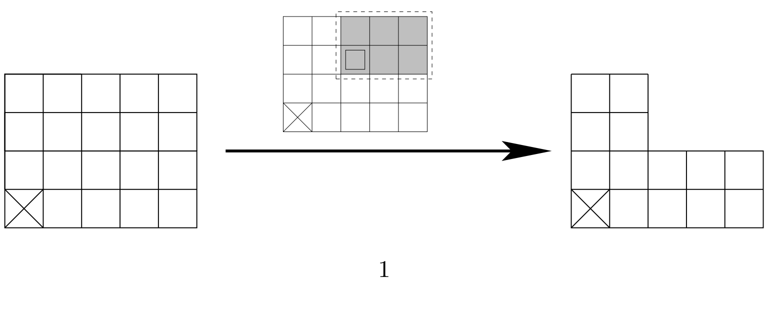


Figura 1.1. Un Chomp 4×5 "intonso".

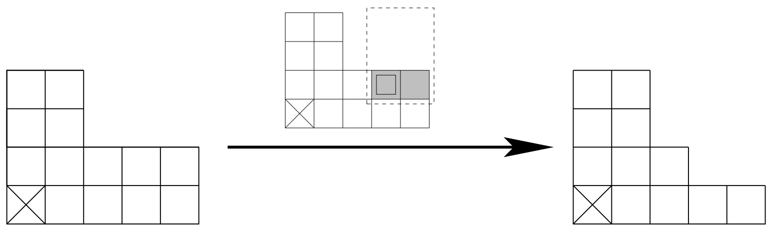
Il gioco chiamato Chomp (il nome è stato inventato da Martin Gardner in [**6**]) è la sfida tra due contendenti che devono, ad ogni mossa, mangiare almeno un quadratino di cioccolato. Chi mangia il quadratino avvelenato naturalmente perde; vince quindi chi obbliga l'avversario a mangiare il veleno. La regola è che i giocatori hanno una bocca rettangolare, e un "morso" valido stacca un rettangolo il cui vertice "in alto a destra" coincide con l'angolo in alto a destra della tavoletta. Quindi la mossa è completamente determinata dalla scelta del quadratino "in basso a sinistra"

Per chiarire bene come funziona, proviamo a seguire una partita di Chomp.



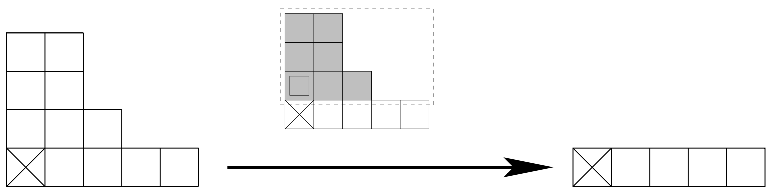
Il primo giocatore decide di mangiare 6 quadratini. Il rettangolo del suo morso ha, secondo regola, il vertice superiore destro in corrispondenza dell'angolo superiore destro della tavoletta ed è quindi determinato dalla scelta del quadratino nella terza colonna da destra e nella seconda riga dall'alto.

Il secondo giocatore risponde con una mossa in cui mangia due soli quadratini:

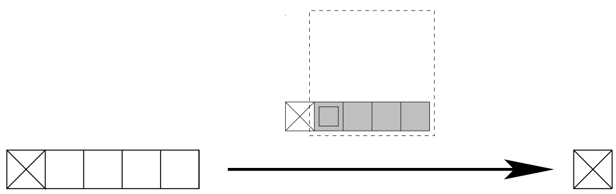


infatti sceglie il quadratino nella seconda riga dal basso e nella seconda colonna da destra, determinando così il "morso" rettangolare che è tratteggiato nella figura (e che, come da regola, ha il vertice in alto a destra in corrispondenza dell'angolo in alto a destra della tavoletta originale). Questo morso ha l'effetto pratico di togliere i due quadratini marcati in grigio - perchè il resto era già stato mangiato nella prima mossa.

Non riuscendo ad indovinare la strategia dell'avversario, il giocatore che aveva cominciato la partita opta ora per una mossa drastica, nella speranza di distruggere l'oscuro disegno dell'avversario: sceglie il quadratino appena sopra quello avvelenato, e si fa un'inaudita quanto discutibilmente salutare scorpacciata di ben 7 quadratini!



Ma ahimè! La golosità è spesso cattiva consigliera: non appena la sua ingordigia si è placata, egli si accorge di avere in pratica regalato la vittoria all'avversario. E infatti,



mangiando tutta la cioccolata “sana” dell’ultima riga, il secondo giocatore ha gioco facile nel costringere l’avversario ad affrontare la dura realtà, sebbene a pancia piena, e a pentirsi di non aver riflettuto più attentamente sulla ricerca delle mosse che lo avrebbero invece condotto alla vittoria.

Per non rischiare di finire anche noi un giorno nella sua stessa situazione, vogliamo ora studiare il problema e cercare di scoprire qual è il modo migliore per giocare a Chomp.

Una strada per provare a vincere potrebbe essere quella di studiare una lista di tutte le mosse possibili: si potrebbero cioè scrivere *tutte* le situazioni di gioco possibili, collegandole con delle frecce che indicano da quale situazione a quale altra si può passare con una mossa valida. Seguiremo questa idea, ma con quale spirito? Ci rendiamo conto che se questo ci desse informazioni solo per il caso della tavoletta 4×5, non ci soddisferebbe. Chiaramente il Chomp si può giocare con una tavoletta di qualsiasi dimensione: ci piacerebbe dunque utilizzare gli esempi come spunto per cercare, se possibile, di individuare qualche idea più generale. Cominciamo a porci alcune domande.

Domanda 1.1. *Il gioco è già segnato in partenza? Ovvero: si può mostrare che il primo o il secondo giocatore può sempre vincere, se gioca in maniera sufficientemente astuta?*

Questa domanda naturalmente presuppone già la risposta, che nel caso del Chomp sembra piuttosto evidente, alla prossima

Domanda 1.2. *Il gioco finisce? Ovvero: possono crearsi situazioni dove si continua a eseguire delle mosse senza mai approdare alla vittoria di uno dei contendenti?*

C’è anche un’altra questione che ci incuriosisce e che precisa quella sulla finitezza del gioco. Chiamiamo *configurazione* del gioco una forma che la tavoletta di cioccolata può assumere durante il gioco.

Domanda 1.3. *Quante sono le configurazioni possibili di un Chomp con $n \times m$ quadratini?*

Pur avendo, come si diceva, l’intenzione di trovare qualche regola generale, ci conviene iniziare da un esempio piccolo: proviamo a disegnare tale schema (detto *grafo del gioco*) alla lavagna per il caso del Chomp 2×3 (ci saranno 10 configurazioni possibili: una di esse è quella finale, che non disegnamo, dove tutta la tavoletta è stata mangiata – e dunque uno dei due concorrenti, ahimè...).

Notiamo che, partendo dal basso, ossia dalla configurazione banalmente perdente (nel Chomp è quella con solo il quadratino avvelenato: chi se la trova davanti ha perso), abbiamo contrassegnato una configurazione come *vincente* (V, in figura) o *perdente* (P) se chi trova il gioco

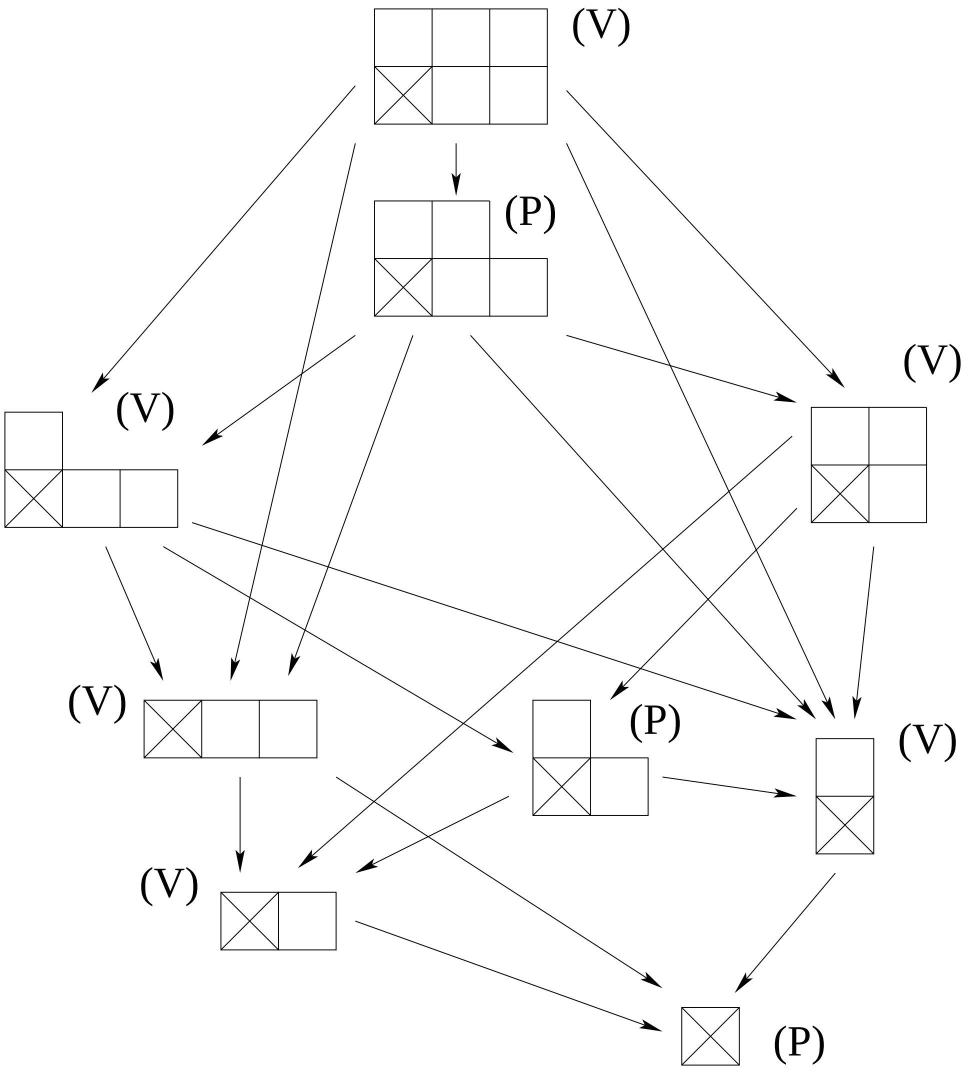


FIGURA 1.2. Il grafo del Chomp 2×3.

in quella configurazione e deve muovere ha una strategia per vincere il gioco o no. Questo fa nascere un sospetto:

SOSPETTO 1.4. In principio, lo schema si può scrivere per ogni Chomp: è vero che le configurazioni si possono sempre tutte contrassegnare come perdenti o vincenti a partire "dal fondo", come abbiamo fatto nell'esempio? Se così fosse, in ogni Chomp uno dei due contendenti avrebbe a disposizione una strategia vincente. Infatti se la posizione iniziale avesse una V, vorrebbe dire che il primo giocatore vince, se invece avesse una P, vorrebbe dire che vince il secondo...

Visto che abbiamo un sospetto, non molliamo la presa. Supponiamo che ciò che sospettiamo sia vero... quali altre conclusioni ne seguirebbero? Da un sospetto, cosa può nascere? Beh, ne può nascere un altro:

Sospetto 1.5. Il primo giocatore, se gioca in modo sufficientemento scaltro, riesce sempre a vincere.

Questo fin da subito appare un po' più di un sospetto: ci pare di intuire quale potrebbe essere un buon argomento per provarlo. Infatti il primo giocatore ha a disposizione una mossa "speciale": mangiare il quadratino in alto a destra. Qualsiasi mossa il secondo riesca a fare partendo da lì, avrebbe potuto esser eseguita già all'inizio dal primo giocatore (dunque se il secondo giocatore avesse una buona mossa il primo potrebbe precederlo facendola prima di lui: questo si chiama *argomento della mossa rubata*). Quindi la posizione iniziale di un Chomp dovrebbe venire sempre contrassegnata con una V...

Questi sospetti, sorti in maniera un po' intuitiva, meritano di essere ripensati e dimostrati. Fissiamo alcuni punti su cui concentrare l'attenzione durante il laboratorio.

Compito 1-I. *Come si può dire "bene" che i sospetti sono veri? In particolare: come posso scrivere un ragionamento che mostri inoppugnabilmente che il primo giocatore può sempre vincere?*

I seguenti sono casi particolari che possono essere illuminanti.

Compito 1-II. *Descrivi una strategia con la quale il primo giocatore può vincere il Chomp* $2 \times n$.

Compito 1-III. *Descrivi una strategia con la quale il primo giocatore può vincere il Chomp* 3×4.

Compito 1-IV. *Descrivi una strategia con la quale il primo giocatore può vincere un Chomp quadrato* $n \times n$ *(qui la simmetria del quadrato facilita la risposta...).*

Un'altra presentazione: numeri e divisori. Cambiamo (apparentemente) argomento e descriviamo ora un gioco che si svolge all'interno dell'insieme D dei divisori di un numero intero dato, per esempio 120, e che chiameremo quindi *gioco dei divisori*. Ogni giocatore a turno sceglie un divisore d del numero dato, e la sua "mossa" consiste nel togliere dall'insieme D il numero d e tutti i suoi multipli. Il giocatore successivo ripete l'operazione con ciò che resta di D. Perde chi si vede obbligato a togliere il più piccolo divisore, cioè 1. Si può formulare questo gioco anche ricorrendo alla decomposizione del numero dato nei suoi fattori primi. Per esempio, siccome $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, ogni suo divisore avrà la forma

$$2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma, \qquad 0 \leq \alpha \leq 3, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad 0 \leq \gamma \leq 1.$$

Una mossa del gioco sta quindi nello scegliere tre esponenti, diciamo a, b, c e togliere dall'insieme dei divisori di 120 tutti quelli che si scrivono $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$ con $\alpha \geq a, \beta \geq b, \gamma \geq c$. Ora l'ultima domanda:

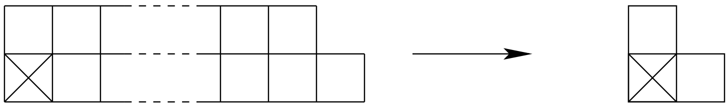
Compito 1-V. *Cosa c'entra il gioco dei divisori con il Chomp?*

A questo punto la palla passa nel campo dei ragazzi, liberi di cimentarsi con i compiti assegnati.

Laboratorio

Tra i ragazzi si sono formati subito autonomamente dei gruppetti di lavoro. Tutti si sono dedicati al compito 1-II, che chiede di esplicitare la strategia con la quale il primo giocatore può vincere il Chomp $2 \times n$. Il primo approccio è stato per tutti quello di provare a giocare qualche breve partita, per esempio di Chomp 2×3 o 2×4.

Solo due gruppi hanno sviluppato un argomento basato sull'idea di induzione. In particolare, un gruppo è giunto ad una formulazione abbastanza rigorosa del passo induttivo.



(a) (b)

Figura 1.3. La strategia del Chomp $2 \times n$

Si era capito che al primo giocatore conviene giocare la mossa "minima" (mangiare cioè solo il quadratino in alto a destra, raggiungendo una configurazione a "scalino" come nella figura 1.3(a)) poichè, qualsiasi sia la risposta del secondo giocatore, alla terza mossa chi ha cominciato può sempre ricreare la configurazione della figura per un Chomp più piccolo. I ragazzi hanno intuito che questa configurazione è perdente perchè "andando avanti" si arriva alla situazione chiaramente perdente di figura 1.3(b)... da qui, con l'aiuto dei tutori, hanno formulato una "corretta" induzione.

Anche per quel che riguarda il Chomp quadrato $n \times n$, (compito 1-IV), è stata presto trovata la strategia vincente per il primo giocatore: mangiare il quadrato di dimensione $(n-1) \times (n-1)$ a destra in alto, e poi, ad ogni mossa dell'avversario, fare la mossa "simmetrica". Abbiamo detto *la* strategia, perché si nota subito che è unica: ogni altra mossa iniziale dà al secondo giocatore la possibilità di vincere. Infatti, se con la prima mossa si staccasse un rettangolo che tocca il bordo sinistro o il bordo in basso, eccoci ridotti ad un Chomp più piccolo, che non è più quadrato ma in cui, come abbiamo intuito, vince il primo che muove, e a questo punto il primo a muovere è il secondo giocatore; se invece si staccasse un rettangolo che non tocca il bordo sinistro o il bordo in basso, allora il secondo giocatore potrebbe fare lui la mossa vincente finendo di staccare il quadrato $(n-1) \times (n-1)$ in alto a destra.

Non tutte le domande poste a lezione sono state affrontate durante il laboratorio. Ad alcune di quelle rimaste in sospeso si darà risposta nelle prossime lezioni (per esempio al compito 1-I), mentre altre restano come esercizio per il lettore. Diamo qui la traccia per rispondere alla domanda 1.3.

Quante sono le configurazioni possibili di un Chomp con n righe e m colonne? Per prima cosa stabiliamo una notazione: data una configurazione del gioco, chiamiamo a_n il numero di quadretti di cioccolata che restano nell'ultima riga in basso, a_{n-1} il numero di quelli che sono nella penultima, a_{n-2} per la terzultima e così via fino alla prima riga in alto che contiene a_1 quadretti.

Ora osserviamo che con le mosse regolamentari possiamo ottenere tutte e sole le configurazioni in cui

$$m \geq a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_2 \geq a_1 \geq 0.$$

Quindi il nostro compito è stabilire in quanti modi diversi posso scrivere una lista non crescente di n numeri compresi fra 0 e m (eventualmente con ripetizioni). La possibilità di ammettere ripetizioni può far apparire il conto abbastanza complicato. Allora ricorriamo ad uno stratagemma: a partire dalla nostra lista

$$a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_2 \geq a_1$$

ne generiamo un'altra così:

$$a_n + n > a_{n-1} + n - 1 > \cdots > a_2 + 2 \geq a_1 + 1.$$

Adesso i numeri che compaiono sono tutti distinti, e $a_n + n \leq m + n$ e $a_1 + 1 \geq 1$. Viceversa, data una simile lista di numeri tutti distinti compresi fra 1 e $m + n$, sottraendo n al più grande, $n - 1$ al secondo etc... si ritrova una lista del primo tipo. Quindi abbiamo sostituito il problema originale con uno equivalente (questo è tipico dei problemi del contare: se si trova una difficoltà si cerca di mostrare che il conto che dobbiamo fare si può affrontare da un altro punto di vista): quanti sono i possibili modi di scegliere n numeri interi positivi *tutti distinti* fra loro e minori o uguali a $n+m$? Chi già conosce i coefficienti binomiali, sa che la risposta è il numero

$$\binom{n+m}{n} = \frac{(n+m)!}{n!m!} = \frac{(n+m)(n+m-1)\cdots(m+1)}{n!}.$$

Anche chi non ha mai visto il simbolo a sinistra, può provare a ricostruire da solo la risposta: abbiamo $n + m$ scelte per il primo numero, poi $n + m - 1$ per il secondo... fino a $n + m - (n - 1)$ per l'ennesimo. Dunque avremmo trovato

$$(n+m)(n+m-1)\cdots(m+1).$$

Lasciamo a questo punto al lettore il compito di spiegare perché questo non è il numero giusto ma si deve dividere per $n!$ (si veda anche più avanti, alla fine del capitolo sul "gioco del 15", quando si discuterà il concetto di permutazione).

CAPITOLO 2

Secondo giorno

Buffet di biscotti: il gioco del Nim

Ancora sul Chomp

Ripartiamo dal "gioco dei divisori" per chiarire cosa ha a che vedere con il Chomp. Consideriamo l'esempio del numero $200 = 2^3 \times 5^2$. Come abbiamo visto, in questo gioco scegliere un numero $2^a \times 5^b$ implica il togliere tutti gli altri divisori della forma $2^x \times 5^y$ con $x \geq a$, $y \geq b$. Se si scrivono i divisori di 200 su una griglia 3×4 in modo che nella casella (i, j) ci sia il numero $2^i \times 5^j$ (come nella figura), si vede subito che il "gioco dei divisori del 200" non è altro che un classico Chomp 3×4.

25	50	100	200
5	10	20	40
1	2	4	8

Figura 2.1. Lo schema per il gioco dei divisori di 200

Conclusione 2.1. *Con i numeri del tipo $n = p^a q^b$, dove p e q sono numeri primi, il gioco dei divisori di n è un Chomp $(a+1) \times (b+1)$.*

A questo punto è naturale chiedersi cosa succede se si considerano "giochi dei divisori" con numeri che hanno più di due fattori primi diversi. Con numeri del tipo di $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ ci si può immaginare una "griglia" tridimensionale fatta di cubetti impilati che poi vengono mangiati partendo da un "angolo" del parallelepipedo iniziale... Il caso generale, "n-dimensionale", ossia con n numeri primi diversi che compaiono nella fattorizzazione, viene chiamato *iperChomp*.

Ora è spontaneo porsi la

Domanda 2.2. *Anche negli iperChomp vale che il primo giocatore ha una strategia vincente?*

A livello intuitivo la risposta sembra affermativa e l'importanza del compito 1-I appare evidente. Infatti anche questi iperChomp hanno un numero finito di situazioni possibili e il loro grafo ha, fra le configurazioni diverse da quella iniziale, una configurazione "massima" (quella che il primo giocatore può ottenere mangiando solo un... "ipercubetto"). È ragionevole pensare che le risposte al compito 1-I siano generalizzabili alla situazione attuale. Sarà possibile contrassegnare ogni situazione del gioco come "perdente" o "vincente" e poi, facendo eseguire dal primo giocatore la mossa "minima", si nota che ogni situazione perdente creata dalla successiva mossa del secondo giocatore avrebbe potuto essere raggiunta già dal primo giocatore: quindi, a livello intuitivo, anche in questo caso sembra valere il cosiddetto *argomento della mossa rubata* (vedi giustificazione del sospetto 1.5).

Vorremmo far notare che qui si sta compiendo un processo tipico dell'attività matematica: esaminare una situazione e scoprire che possiamo trarne delle conclusioni che si applicano in contesti più generali.

Ma è ora opportuno "mettere per iscritto" le intuizioni precedenti, per *dimostrare* che nel Chomp il primo giocatore vince sempre, se gioca bene (e completare quindi il compito 1-I). Lo faremo in maniera abbastanza rigorosa e generale; come conseguenza delle nostre osservazioni ricaveremo che anche nell'iperChomp il primo giocatore vince sempre (vedi domanda 2.2). Daremo la traccia di una argomentazione matematica, una "piccola teoria", con tanto di definizioni, teoremi e dimostrazioni!

La "teoria della mossa rubata". Ci siamo sempre riferiti, in maniera abbastanza informale, ad un oggetto che conviene ora definire chiaramente.

Il ***grafo di un gioco*** è lo schema che nasce scrivendo tutte le situazioni possibili del gioco dato e collegandole con delle frecce che indichino da quale situazione a quale altra si può passare con una mossa "valida".

La prima cosa da dire è che finora abbiamo sempre avuto a che fare con giochi *finiti* (cioè: quando faccio la lista delle possibili situazioni vedo che la lista termina ad un certo punto - vi è insomma un numero finito di possibili situazioni). Chiaramente,

ogni gioco finito ha un grafo finito.

La domanda naturale ora è se questa nozione di *finitezza* coincida con il fatto che il gioco ha un termine. In realtà perchè il gioco abbia un termine bisogna verificare che non si possano creare gruppi di mosse "cicliche", ovvero che percorrendo le frecce non si possa tornare ad una situazione precedentemente visitata. Ciò non è affatto assicurato se si sa solo che il gioco è finito nel senso che abbiamo detto - si pensi agli scacchi e alle situazioni di 'stallo'. Quindi *se il grafo del gioco è finito e non ha cicli, il gioco termina entro un numero finito di mosse. In questo caso diremo che il gioco è* ***finito-finito***.

Ora vogliamo dimostrare che in un gioco finito-finito in cui non sono ammesse situazioni finali di "partita patta" si può, in linea di principio, seguire tutte le possibili evoluzioni di ogni situazione e di conseguenza etichettarla come "vincente" o "perdente".

In un gioco finito-finito in cui non sono ammesse situazioni finali di "partita patta" ogni situazione è vincente o perdente.

Diamo la traccia di una dimostrazione: nel grafo di un gioco finito-finito ci devono essere delle situazioni "finali", ossia da cui non è più possibile fare alcuna mossa (altrimenti i giocatori potrebbero non smettere mai di giocare...e fare per esempio più mosse di quante siano le situazioni del grafo, ma questo vorrebbe dire che cè un ciclo..). Chiamiamo dunque F l'insieme, non vuoto, delle situazioni finali. Ognuna di esse, in base alle regole del gioco, sarà V-incente o P-erdente per il giocatore che deve muovere (visto che le "patte" non sono ammesse).

Adesso consideriamo le altre situazioni del gioco, e classifichiamole così: chiamiamo $S(1)$ l'insieme di tutte le situazioni dalle quali, comunque si muova, in una mossa si arriva ad una situazione di F. Consideriamo ora una situazione in $S(1)$: se muovendo da essa si può arrivare a una situazione finale P-erdente (per il giocatore successivo), possiamo etichettarla con una V (è vincente per il giocatore che deve muovere). Altrimenti, la etichettiamo con una P (perché?). Dunque con questa regola possiamo dare una etichetta a tutte le situazioni in $S(1)$.

Poi chiamiamo $S(2)$ l'insieme di tutte le situazioni tali che esiste almeno un percorso di due mosse che le porta ad una situazione in F e non esistono percorsi più lunghi. Consideriamo una situazione $\mathcal{S}$ in $S(2)$: per come è stato definito $S(2)$, facendo una mossa arriviamo ad una situazione di $S(1)$ o di F – in ogni caso, situazioni che hanno già una etichetta. Se fra queste ce n'è una etichettata con la P, allora possiamo etichettare $\mathcal{S}$ con una V, altrimenti notiamo che $\mathcal{S}$ è perdente e la etichettiamo con una P. Osserviamo dunque che in questo modo possiamo dare una etichetta a tutte le situazioni in $S(2)$. Continuando così possiamo definire $S(3)$, $S(4)$ e tutti i seguenti, mettendo etichette con la solita regola, fino ad aver dato una etichetta a tutte le situazioni del gioco (questa ovviamente è la presentazione informale di una dimostrazione per induzione – chi vuole provi per esercizio a riscriverla in maniera formale).

Cerchiamo ora di chiarire cosa intendevamo dire quando parlavamo del fatto che il grafo del gioco avesse una configurazione "massima".

Chiamiamo $\mathcal{J}$ l'insieme delle situazioni del gioco che si possono raggiungere, con una sola mossa, dalla situazione iniziale. Si dice ***massimo di un gioco*** una situazione M del grafo, diversa da quella iniziale, dalla quale, in una sola mossa, si possono raggiungere tutte, e sole, le situazioni in $\mathcal{J}$ eccetto ovviamente M stessa – dunque, in simboli, tutte (e sole) le situazioni in $\mathcal{J} - \{M\}$. Visto che nel grafo di un gioco finito-finito non sono ammessi cicli, possiamo subito dedurre che

in un gioco finito-finito c'è al più un massimo.

Supponiamo ora di avere a che fare con un gioco finito-finito, in cui non sono amesse situazioni finali di "partita patta", che ammette un massimo. L'unico a poter lasciare sul tavolo la situazione massima è in effetti il primo giocatore con la sua prima mossa (perché per forza con una mossa sola? Se la situazione massima fosse raggiungibile anche in più di una mossa allora si troverebbe un ciclo...). Ora, o la configurazione "massima" è contrassegnata da una P, e allora il primo giocatore vince, oppure è contrassegnata da una V, ma in tal caso la situazione P-erdente raggiungibile dalla contromossa del secondo giocatore potrebbe essere raggiunta, per definizione di massimo, anche dal primo giocatore già con la prima mossa. In altre parole se il secondo giocatore ha una strategia di vittoria, il primo può rubargliela. E quindi possiamo trarre la

Conclusione 2.3. *In ogni gioco finito-finito in cui non sono ammesse situazioni finali di "partita patta" e che possiede un massimo, il primo giocatore ha una strategia vincente.*

Abbiamo ottenuto un risultato generale su una certa classe di giochi, usando uno strumento molto conveniente, il grafo del gioco, che può non essere familiare a tutti. Sarà quindi bene ripensarci nel laboratorio.

Compito 2-I. *Ripensare al grafo di un gioco.*

Ma questo grafo è tanto più grande (e quindi tanto più scomodo da usare effettivamente) quante più sono le situazioni possibili. Per esempio, nell'iperChomp del numero $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ ogni "prima mossa" corrisponde a scegliere un divisore di 210, e quindi anche solo con la prima mossa ci sono tante situazioni raggiungibili (nell'insieme $\mathcal{J}$, secondo la notazione introdotta prima) quanti sono i sottoinsiemi di $\{2, 3, 5, 7\}$, ovvero 16 situazioni raggiungibili. Più in generale, troviamo lo spunto per lasciare questo compito:

Compito 2-II. *Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme con un numero finito n di elementi?*

Tornando al Chomp, per una questione risolta (infatti ora sappiamo che il primo giocatore potrà sempre vincere), se ne apre naturalmente un'altra:

Domanda 2.4. *In un Chomp $n \times m$ si può dire qual è concretamente la strategia vincente per il primo giocatore? In particolare: fare la mossa che lascia sul tavolo la situazione massima è vincente o no?*

Come capite, la differenza qualitativa fra sapere che il primo giocatore, se gioca bene, vince e sapere *come* in concreto può vincere è notevole. La seconda domanda è più complessa della prima, e la risposta, come vedremo, in generale non è ancora nota!

La questione precedente si può precisare con altre domande, anche queste difficili e tuttora aperte:

Domanda 2.5. *Quante sono in un Chomp $n \times m$ le strategie vincenti per il primo giocatore? In altre parole: per vincere è obbligato a seguire una sola precisa sequenza di mosse o può scegliere? Per esempio, che libertà ha sulla prima mossa?*

Il gioco del Nim

Una delle particolarità del gioco del Chomp presentato sopra consisteva nel fatto che il gioco aveva un massimo. Vogliamo ora chiederci cosa succede se eliminiamo questa proprietà.

Cominciamo con il considerare un esempio appropriato - e cioè un gioco "di tipo Chomp" ma in cui il grafo in generale *non* ha un massimo: il gioco del Nim.

Fedeli alle nostre metafore alimentari, descriviamo il gioco del Nim come la sfida tra due contendenti golosi di biscotti. I due giocatori si trovano davanti ad un certo numero (finito) n di piatti, ognuno dei quali contiene un certo numero (finito) dei biscotti di cui loro sono più ghiotti (diciamo che i piatti sono numerati, e che nell'i-esimo piatto ci sono, all'inizio, m_i biscotti). Ogni giocatore a turno deve scegliere un piatto e mangiare almeno un biscotto da questo piatto. Perde chi si ritrova davanti agli n piatti vuoti, e quindi non può più mangiare.

Si vede subito che in questo gioco non c'è un massimo, anche se il gioco è finito-finito. Quindi, dalle considerazioni che abbiamo fatto in generale sul Chomp traiamo una conclusione e una domanda:

Conclusione 2.6. *Siccome il Nim è un gioco finito-finito, per ogni Nim dato esiste sempre una strategia vincente.*

Domanda 2.7. *Come si può stabilire quale giocatore ha una strategia vincente?*

Cominciamo a studiare i casi più semplici: per esempio, chi si trova a dover giocare un Nim a due piatti con lo stesso numero di biscotti ha chiaramente perso, perchè ad ogni sua mossa l'avversario può rispondere con la mossa "simmetrica". Quindi nel Chomp a due piatti che contengono lo stesso numero di biscotti esiste una strategia vincente per il secondo giocatore. Se invece il numero dei biscotti sui due piatti non è lo stesso, esiste una strategia vincente per il primo.

Risolto il caso a due piatti, si può passare a tre piatti, con un esempio particolare, quello di tre piatti con quattro biscotti ciascuno. In questo caso si vede che il primo giocatore può vincere, e lo fa in un modo che funziona per tutti i Nim a tre piatti dove due piatti abbiano lo stesso numero di biscotti: abbuffandosi per svuotare il terzo piatto (vedi figura 2.2).

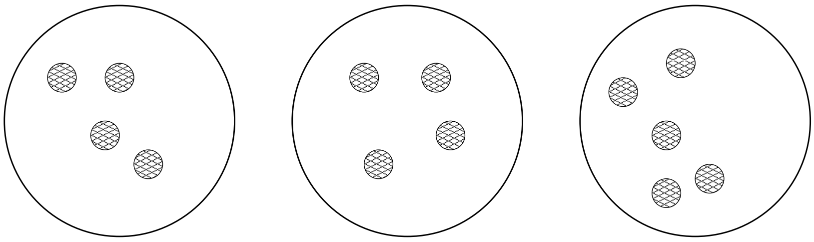


FIGURA 2.2. Un Nim a tre piatti, di cui due con lo stesso numero di biscotti. $n = 3$, $m_1 = m_2 = 4$, $m_3 = 5$. Vince chi comincia.

La questione da trattare nel laboratorio sarà dunque la seguente:

COMPITO 2-III. *Come si vince il Nim, e perché?*

Introduciamo qui di seguito la *Nim-somma*, che è l'"ingrediente" fondamentale per rispondere al compito, lasciando a voi il "gusto" di concludere l'argomento.

Come abbiamo visto, un gioco di Nim è determinato dalla specificazione di un numero m_i (di biscotti) per ogni i da 1 a n (il numero di piatti). La "Nim-somma" dei numeri m_i si ottiene scrivendo i numeri m_i *espressi in base* 2 e disponendoli uno sopra l'altro come se si dovesse calcolare, appunto, la loro somma. Invece di fare la somma tradizionale, a questo punto si scrive "sotto la riga" una p in ogni colonna dove compaiono un numero pari di 1 e una d se in quella colonna compaiono un numero dispari di 1 ([1]).

Notiamo che la Nim-somma associata ad un gioco a due piatti con lo stesso numero di biscotti sarà sempre $ppp \cdots p$, mentre se i due piatti portano un numero diverso di biscotti, la Nim-somma conterrà dei d. La Nim-somma per il gioco di figura 2.2 sarà:

$$\begin{array}{rccc}
(4)_2 = & 1 & 0 & 0 \\
(4)_2 = & 1 & 0 & 0 \\
(5)_2 = & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & d & p & d
\end{array}$$

L'idea è che la possibilità di vincere il gioco del Nim è legata al risultato della Nim-somma. Ed ora... a voi!

[1]Normalmente si scrive 0 per p e 1 per d, così che la Nim-somma diventa una specie di 'somma in colonna senza riporto in base due'.

Il Chomp sui grafi

Come ulteriore stimolo per il laboratorio, presentiamo un'altra specie di Chomp dove invece di mangiare cioccolata o biscotti si "mangiano" pezzetti di grafi.

Occorre dapprima definire cosa intendiamo per *grafo*. Per una prima idea intuitiva, pensiamo al "grafo di un gioco" che abbiamo visto studiando il Chomp. Se ci dimentichiamo della direzione delle frecce, vediamo che essenzialmente l'informazione che rimane è quella delle "situazioni" connesse da dei tratti.

Diamo ora una definizione più precisa: chiamiamo ***grafo semplice finito*** un insieme costituito da un numero finito di punti del piano (detti *vertici*) e da dei percorsi (detti *lati*), in modo che ogni lato congiunga due vertici distinti. Chiediamo inoltre che, presi due vertici, ci sia al più un solo lato che li congiunge.

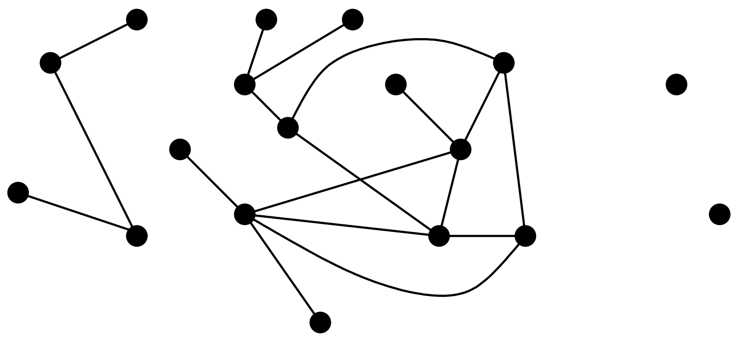


FIGURA 2.3. Un grafo semplice finito

DOMANDA 2.8. *Proviamo a disegnare nel piano qualche grafo. Sarà sempre possibile disegnarlo in modo che due lati o non si intersecano o si intersecano solo in un vertice?*

Siamo pronti ora a giocare a Chomp sul nostro grafo semplice finito: ogni giocatore al suo turno può mangiare un vertice o un lato. La regola è che se si mangia un lato, dal grafo si cancella il lato in questione ma *non* i suoi vertici. Se invece si mangia un vertice, bisogna cancellare anche tutti i lati che lo toccano - in modo che non ci sia mai nel gioco un lato senza un vertice, e quindi che ad ogni stadio si crei effettivamente un grafo semplice finito che soddisfa la definizione. Perde il giocatore che non ha più nulla da mangiare e si ritrova davanti al foglio bianco.

Il gioco è chiaramente finito-finito ma, di nuovo, in generale non ha un massimo.

COMPITO 2-IV. *Divertirsi a pensare tipi diversi di grafi e trovare le corrispondenti strategie vincenti.*

C'è un caso particolare del compito precedente che merita di essere messo in rilievo. Chiamiamo ***albero*** un grafo semplice finito che sia

- *connesso* (ossia o è costituito da un solo vertice o, se contiene più di un vertice, comunque si prendano due vertici è possibile trovare una sequenza di lati che li congiunge), e
- *senza cicli* (ovvero non è possibile andare da un vertice ad un altro con due distinte sequenze di lati).

Come caso speciale, osserviamo che un grafo costituito da un solo punto (un solo vertice) è un albero visto che soddisfa le richieste della definizione. Osserviamo anche che i lati sono percorribili nei due sensi, non c'è una orientazione fissata, come invece accade naturalmente quando costruiamo il grafo di un gioco finito. Chiamiamo ***foresta*** un grafo semplice finito che è unione disgiunta di alberi (anche un albero solo, se la foresta è proprio... povera!).

COMPITO 2-V. *Trovare una strategia vincente per il Chomp sulle foreste.*

Laboratorio

Anche se la maggioranza si è dedicata alla strategia del Nim (compito 2-III), alcuni ragazzi hanno affrontato anche i compiti 2-II, 2-IV e 2-V.

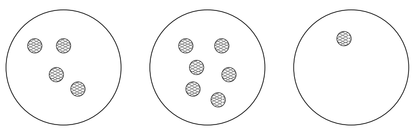
Per quanto riguarda il compito 2-II, che chiede di contare i sottoinsiemi di un insieme finito, va detto che qualche problema è sorto a proposito dell'idea di insieme vuoto. Alcuni erano riluttanti ad annoverarlo tra i sottoinsiemi.

Tutti quelli che ci hanno provato sono comunque approdati infine alla risposta corretta contando tutte le "possibilità" date dal fatto che un sottoinsieme può contenere (o no) il primo elemento, può contenere (o no) il secondo e così via, aggiungendo un fattore 2 per ogni elemento. Un insieme di n elementi ha quindi 2^n sottoinsiemi.

Riguardo alla strategia del Nim, almeno due gruppi sono arrivati ad una soluzione corretta motivata esaurientemente. Tutti sono giunti a congetturare che ogni situazione con Nim-somma $ppp\cdots p$ è p-erdente per chi si trova a doverla affrontare. Infatti per prima cosa i ragazzi hanno osservato che se la Nim-somma contiene solo p, ogni mossa condurrà ad una situazione con Nim-somma contenente almeno un d; a questo punto è sorto il sospetto che una tale situazione possa sempre essere "annullata" dall'avversario, che può presentare al primo ancora una situazione con Nim-somma p-erdente. Il "programma" della dimostrazione dunque è:

se da una situazione con almeno una d nella somma si riesce sempre a creare una situazione p-erdente in una mossa, allora (1) il primo giocatore ha una strategia per vincere il Nim se la Nim-somma della situazione iniziale contiene almeno una d, (2) altrimenti è il secondo giocatore che ha una strategia vincente.

Infatti, se la Nim-somma di una situazione ha una d, allora in quella colonna c'è un 1 di troppo, e quindi ci sono dei biscotti "in più" nel piatto associato alla riga dove appare l'1 incriminato. Il problema emerso dopo l'entusiasmo iniziale è che nulla assicura che ci sia una riga ("un piatto") contenente un 1 per ogni colonna dove la Nim-somma ha una d. Ecco un piccolo controesempio dove effettivamente non è così:



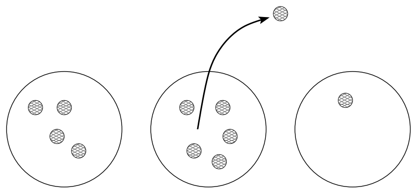
$$\begin{array}{rccc} (m_1 = 4)_2 = & 1 & 0 & 0 \\ (m_2 = 6)_2 = & 1 & 1 & 0 \\ (m_3 = 1)_2 = & 0 & 0 & 1 \\ \hline & p & d & d \end{array}$$

Il controesempio e la sua Nim-somma.

Una via d'uscita è quella di accorgersi che in effetti non si tratta di togliere a tutti i costi un 1, ma eventualmente anche di aggiungerne: basta creare una situazione di parità. Dalla Nim-somma si ricava in effetti un numero binario sostituendo d con 1 e p con 0 . Questo numero è quello che avremmo voluto sottrarre idealmente da una riga con gli 1 "al posto giusto". Ora però quello di cui effettivamente abbiamo bisogno è trasformare una riga in modo che le cifre che cambiano siano quelle nelle colonne volute, e in modo che il numero risultante sia minore di quello iniziale (fondamentale: i biscotti si possono solo togliere).

Ma questo è semplice da realizzare: basta trovare una riga j con un 1 nella colonna della prima d da sinistra (nel nostro esempio: che abbia un 1 nella seconda colonna). Tale riga esiste sicuramente: infatti per avere d nella somma bisogna avere un 1 da qualche parte (e infatti, nel nostro esempio m_2 soddisfa il criterio, quindi $j = 2$). Invertendo le cifre (0 va in 1 e 1 va in 0) della riga j corrispondenti alle colonne con Nim-somma d si ottiene una nuova riga che corrisponde all'espressione in base 2 di un numero N_j sicuramente minore di m_j. Nel nostro esempio, cambiando le cifre di $(m_2 = 6)_2$ alle colonne 2 e 3, si ottiene $N_2 = 101 = (5)_2$.

E ora ci siamo: basta togliere $m_j - N_j$ biscotti dal piatto numero j per ottenere nella j-esima riga il numero N_j, ossia il risultato sperato. Nel nostro esempio ciò significa togliere 1 biscotto dal secondo piatto, e in effetti verifichiamo che... funziona!



$$
\begin{array}{rccc}
(m_1 = 4)_2 = & 1 & 0 & 0 \\
(N_2 = 5)_2 = & 1 & 0 & 1 \\
(m_3 = 1)_2 = & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & p & p & p
\end{array}
$$

Il controesempio e la sua Nim-somma dopo la prima mossa.

Qualcuno, dopo aver risolto il Nim, si è dedicato al Chomp sui grafi, come richiesto dai compiti 2-IV e 2-V. Già restringendo l'obiettivo, ossia se per esempio cerchiamo di capire le strategie possibili nei Chomp su un grafo con 5 vertici, il problema si rivela interessante.

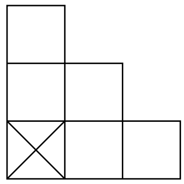
Un approccio possibile in questo caso consiste nell'enumerare tutti i grafi con 5 vertici o con meno di 5 vertici; questo già permette di distinguere l'importanza di proprietà come l'"essere connesso", e il "non avere cicli".

Come ulteriore stimolo, diamo qui la risposta al compito 2-V ossia il caso dove il grafo è una foresta: il primo giocatore perde se e solo se il numero dei vertici della foresta e il numero degli alberi che contiene sono entrambi pari. Per esempio, se il gioco comincia con un grafo costituito da un solo albero, il primo giocatore vince comunque sia fatto l'albero (consigliamo di provare a verificare da soli – per maggiori dettagli si veda [**3**]). Da questo segue anche che se si gioca a Chomp su un grafo che è un poligono, il primo giocatore perde sempre (perché?).

A riguardo dei grafi, la risposta alla domanda 2.8 è che non tutti i grafi semplici finiti possono essere disegnati in modo che due lati o non si intersecano o si intersecano in un qualche vertice. Un esempio è quello di un pentagono con tutte le sue diagonali. Ne sapreste trovare un altro? La questione è risolta nella sua completezza dal teorema di Kuratowski (vedi [**1**]).

Ecco infine qualche informazione in merito alle domande 2.4 e 2.5. Come abbiamo visto, la mossa iniziale vincente è unica per il Chomp $2 \times n$ e $n \times n$. Potete studiare i casi 4×5 e 4×6 e troverete anche in tali casi la stessa risposta. Ma non funziona sempre così, anche se non è semplice da dimostrare: il più piccolo controesempio di mossa iniziale vincente non unica è il Chomp 8×10, mentre il caso del Chomp $3 \times n$ è ancora aperto. Gli esempi $3 \times n$ "piccoli" sono stati fatti calcolare ad un computer e si è visto che la mossa iniziale è comunque unica per $n \leq 100000$.

È più facile trovare esempi di strategie vincenti non uniche in posizioni non iniziali. Per esempio, nel Chomp $3 \times n$, se uno si ritrova con una tavoletta di tipo $(3, 2, 1)$ come quella della figura, ha due mosse vincenti... quali?



Ci eravamo anche chiesti (nella domanda 2.4): in quali Chomp la strategia vincente prevede che il primo giocatore faccia la mossa che lascia sul tavolo la posizione “massima” (ossia mangi il quadratino in alto a destra)? Per il Chomp $2 \times n$, come sappiamo, tale mossa è vincente. Si pensa invece che per un Chomp $n \times m$ con n e m maggiori o uguali a 3 fare questa mossa sia sempre perdente, ma non ci risulta che nessuno sia ancora riuscito a dimostrarlo in generale.

Come avevamo anticipato, c'è molto da fare per chi si vuole divertire a studiare questi problemi... Per ulteriori approfondimenti rimandiamo per esempio all'articolo [**2**].

CAPITOLO 3

Alla fine del secondo giorno

1000$ per spostare due blocchetti

Il gioco "del 15"

Al termine del laboratorio del secondo giorno si è proposto un problema legato ad un ulteriore gioco, detto "del quindici". Si tratta della versione "numerica" di un gioco che si inserisce nella tradizione dei *giochi a blocchetti mobili*, ovvero *"costituiti da una serie di blocchetti mobili che possono scorrere all'interno di una scatola attraverso spazi vuoti, senza poter superare i confini della scatola stessa, dalla quale non possono neanche essere sollevati e riposizionati* [**10**]. Questi giochi sembrano avere antiche origini e provenire dall'Asia. A noi interessa un gioco di questo tipo che consiste di 15 blocchetti quadrati inseriti in una scatola quadrata con il lato lungo quanto quattro blocchetti. In più, i blocchetti sono numerati da 1 a 15. La *configurazione di base* del gioco è quella riportata in figura 3.1, e un'**istanza** del gioco è data da qualsiasi disposizione dei blocchetti con la condizione che lo spazio in basso a destra resti libero. Risolvere un'istanza del gioco significa riuscire a far scorrere i blocchetti in modo da ricreare la configurazione di base, partendo dall'istanza data.

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
13	14	15	

Figura 3.1. Configurazione di base del gioco del 15

Vediamo subito che questo è un gioco diverso dai precedenti: tanto per cominciare, nella sua versione classica è un solitario, non un gioco a due giocatori. Ci introduce, dunque, ad un'altra categoria di giochi, fra i quali c'è anche il Sudoku, di cui ci occuperemo nella prossima lezione. Vorremmo sottolineare tre aspetti che motivano la nostra scelta di proporre a questo punto il gioco del 15:

1. Possiamo comunque pensare al grafo del gioco del 15: scopriamo allora di avere a che fare con un esempio di gioco finito, che però *non è* finito-finito. Infatti il grafo del gioco del 15 è ciclico (perchè?).
2. Anche nello studio di questo gioco si scopre che c'è una chiave di interpretazione aritmetica, più precisamente risulta determinante una somma, come nel Nim.
3. Le disposizioni di questi 15 numeri ci introducono all'idea di *permutazione* che sarà cruciale nelle nostre considerazioni sul Sudoku.

L'invenzione del gioco del 15 risale ad un portalettere americano, Noyes Chapman ([**11**]), anche se il famoso inventore di giochi Samuel Loyd cercò sempre di attribuirsene la paternità, includendolo nella sua *cyclopedia of puzzles*, e offrendo addirittura un premio di 1000$ a chi avesse risolto l'istanza ottenuta dalla configurazione di base "scambiando" il 14 e il 15, come illustrato nella riproduzione del disegno originale alla figura 3.2.

FIGURA 3.2

In realtà, questa istanza del gioco era già stata proposta da Chapman come particolarmente interessante. La chiameremo *istanza di Chapman.*

DOMANDA 3.1. *C'è una strategia per risolvere il gioco del* 15*? Ma prima di tutto: è sempre possibile risolverlo? E se sì, come si fa nel caso particolare dell'istanza di Chapman?*

Lo strumento decisivo da considerare è la seguente *somma del 15.* Diciamo che un blocchetto *viene dopo* un altro se si trova in una riga più bassa o sulla stessa riga, ma a destra del blocchetto dato (insomma, nell'ordine in cui si legge un testo nelle lingue neolatine). Questo ci permette di ordinare i blocchetti in un elenco $b_1, b_2, \ldots, b_{15}$. Ora in una data istanza (diciamo I) si consideri, per ogni blocchetto b_i, il numero n_{b_i} di blocchetti che vengono dopo di lui e recano un numero minore del suo. Associamo ora all'istanza data la *somma del 15*:

$$S_I = n_{b_1} + n_{b_2} \ldots + n_{b_{15}}$$

Nei due esempi che abbiamo considerato vediamo che questa somma è 0 nella configurazione di base e 1 nell'istanza di Chapman. Ora diventa interessante sapere come cambia la somma S_I effettuando delle mosse del gioco.

COMPITO 3-I. *Studiare cosa accomuna S_{I_1} e S_{I_2} se le istanze I_1 e I_2 sono collegate da una successione di mosse del gioco.*

Ecco il sospetto subito sorto fra i ragazzi dopo qualche esempio calcolato alla lavagna.

SOSPETTO 3.2. Passando da un'istanza all'altra con mosse valide si mantiene la parità della somma.

Se questo sospetto è vero, concludiamo diverse cose. Primo, che non tutti i giochi del 15 sono risolubili: infatti, si potranno ricondurre alla configurazione di base al massimo le istanze I con S_I pari. Ne segue che il grafo del gioco si spezza in più parti che non sono collegate tra loro da nessun lato (ossia il grafo *non è connesso*). Secondo, quel furbacchione del signor Loyd aveva un bel promettere premi – la configurazione di Chapman *non* è risolubile: ha somma dispari!

In realtà il sospetto *è* vero. Ecco una traccia di dimostrazione: possiamo vedere il passaggio da una istanza ad un'altra come la "storia" di un cammino del quadratino vuoto, che parte dalla posizione in fondo a destra e si muove per poi tornare nella posizione iniziale. Se pensiamo (con un po' di fantasia) che anche questo quadratino sia un blocchetto con sopra scritto il numero 16, possiamo definire una nuova somma, con le stesse regole di quella di prima, ma su 16 blocchetti. Questa nuova somma $\tilde{S}_C$ ha senso per qualunque configurazione C del gioco (non solo per le istanze, che, secondo la nostra definizione, sono le configurazioni in cui il quadratino bianco è in fondo a destra):

$$\tilde{S}_C = n_{b_1} + n_{b_2} + \ldots + n_{b_{15}} + n_{b_{16}}$$

Inoltre notiamo che , quando C è una istanza, $\tilde{S}_C = S_C$: ossia le due somme coincidono. Si tratta allora di scoprire come cambia la parità di $\tilde{S}_C$ ad ogni mossa (esercizio: dimostrare che la parità *cambia* ad ogni mossa, analizzando i 4 tipi di mosse, ossia quando il quadratino bianco si sposta verso destra, verso sinistra, verso l'alto o verso il basso...). Poi ricordiamo che, come dicevamo all'inizio, per passare da un'istanza all'altra, il nostro quadratino bianco fa un percorso in cui parte e torna nello stesso posto. Quindi farà tanti spostamenti verso sinistra quanti verso destra, tanti verso l'alto quanti verso il basso, e dunque alla fine la parità cambierà un numero pari di volte...

COMPITO 3-II. *Finire di dimostrare, con tutti i dettagli, il sospetto 3.2.*

Per verificare di aver capito bene come entra in gioco la somma del 15, provate a rispondere alla seguente:

DOMANDA 3.3. *È possibile, partendo dalla configurazione base, ottenere la configurazione del gioco del 15 in cui i blocchetti sono disposti "a serpente" come nella figura?*

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
	15	14	13

Resta da capire un'ultima cosa, per sapere se da una istanza con somma pari si può sempre arrivare ad un'altra con somma pari (e da una dispari ad una dispari):

COMPITO 3-III. *In quante parti si spezza effettivamente il grafo del gioco? In particolare: la parte del grafo del gioco data dalle istanze con somma pari è connessa? Ovvero: data una qualunque istanza pari, è sempre possibile raggiungere la configurazione base?*

La risposta è che il grafo del gioco si spezza in due componenti connesse e dunque che, data una qualunque istanza pari, è sempre possibile raggiungere la configurazione base. È interessante notare che la strategia di dimostrazione di questo fatto deve essere di natura diversa da quella della dimostrazione precedente. Prima si trattava di far vedere che *non esistono* mosse che fanno passare da un'istanza con somma pari ad una con somma dispari, ed è bastato trovare un impedimento aritmetico (fornito dalla "somma del 15"). Ora dobbiamo mostrare che *per ogni* istanza pari esiste una serie di mosse che la collega alla configurazione base. Bisogna trovare un algoritmo, ossia una "strategia vincente", che si possa applicare a tutte le istanze pari.

Lasciamo ad ognuno il compito di trovare il suo algoritmo preferito. Un suggerimento potrebbe essere quello di dividere il problema in due parti: per cominciare, non è difficile (per chi ha giocato abbastanza) descrivere una strategia che sistemi nel giusto ordine i blocchetti con i numeri da 1 a 11. A questo punto per essere sicuri di saper piazzare il 12 e il 13 conviene studiare in modo analitico i casi possibili, che ormai non sono più molti: quante diverse istanze con somma pari esistono in cui i numeri da 1 a 11 sono già sistemati? (La risposta è 12; perché?) Ora abbiamo finito, perché il 14 e il 15 sono automaticamente al posto giusto (altrimenti l'istanza non sarebbe pari....).

Permutazioni

Per concludere, vogliamo dedicare un po' di spazio al concetto di permutazione[1], e usarlo per una "rilettura" del gioco del 15.

Spiegheremo l'argomento rispondendo in successione alle domande che immaginiamo il lettore potrebbe porsi. Per un'esposizione più dettagliata e formale rinviamo il lettore a [**8**].

Di cosa si parla. Cosa intendiamo per *permutazione dei numeri* $\{1, 2, \ldots, n\}$?

Intendiamo una funzione f *biunivoca* dall'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ in sé stesso, in altre parole una funzione tale che i numeri $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ siano tutti distinti fra loro e siano esattamente, a meno magari di un riordinamento, i numeri $1, 2, \ldots, n$.
Le permutazioni si possono *comporre*, cioè far agire una dopo l'altra: questo corrisponde all'idea di comporre due funzioni, applicando prima una e poi l'altra.

Per illustrare il concetto possiamo pensare di avere davanti a noi n palline (numerate da 1 a n) e n bicchieri vuoti, anch'essi numerati da 1 a n. Vogliamo supporre che i bicchieri siano grandi abbastanza da contenere ognuna delle palline.

Ora, una permutazione dei numeri $\{1, \ldots, n\}$ corrisponde ad un modo di mettere le palline nei bicchieri in modo tale che (1) nessun bicchiere contenga più di una pallina e (2) ogni bicchiere contenga almeno una pallina. Ovvero: in modo tale che ogni bicchiere contenga esattamente una pallina.

Comporre due permutazioni con questa interpretazione equivale a riempire i bicchieri con le palline seguendo la regola indicata dalla prima permutazione, e poi prendere altri bicchieri numerati come i primi, ma un po' più grossi, e *mettere i bicchieri piccoli dentro quelli grossi* seguendo la regola data dalla seconda permutazione. Il risultato della composizione è la permutazione che si ottiene dimenticando i bicchieri piccoli.

Come se ne parla. Illustriamo un modo per rappresentare (scrivere) una permutazione. Poniamo per esempio $n = 9$, allora col simbolo

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 7 & 2 & 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

indichiamo la permutazione che manda ogni numero in quello che sta sotto di lui: per esempio 1 in 3, 2 in 4, 3 in 6, 4 in 1, 5 in 7... e così via. Nella nostra metafora interpreteremmo questa scrittura pensando

[1] Nelle tre giornate con i ragazzi il tema è stato solo accennato, questo resoconto ci dà l'occasione di offrire qualche spunto in più.

che nella prima riga ci sia la lista delle palline, e sotto ad ogni pallina stia scritto il numero del bicchiere nel quale viene messa.

Un altro modo di rappresentare la stessa funzione è quello *in cicli disgiunti*:

$$f = (1, 3, 6, 2, 4)(5, 7, 8)(9)$$

Questa scrittura va letta così: il primo ciclo (la prima parentesi) ci dice che la f manda 1 in 3, 3 in 6, 6 in 2, 2 in 4 e 4 in 1, ossia ogni elemento viene mandato in quello che lo segue tranne l'ultimo, che viene rimandato nel primo (ecco perché si chiamano "cicli"). Il secondo ciclo dice che 5 viene mandato in 7, 7 in 8 e 8 in 5. L'ultimo ciclo dice che 9 viene mandato in sé stesso, ossia viene lasciato fisso dalla f ("la pallina numero 9 viene messa nel bicchiere numero 9").

Di solito quando un elemento viene lasciato fisso non lo indichiamo, dunque possiamo anche scrivere:

$$f = (1, 3, 6, 2, 4)(5, 7, 8).$$

Quante ce ne sono. E, già che ci siamo: quante sono le permutazioni dei numeri $\{1, 2, \ldots, n\}$?

Ritornando alla nostra interpretazione, se "prendiamo le palline una dopo l'altra", abbiamo n scelte per decidere dove mettere la pallina col numero 1, $n - 1$ modi per dire dove mettere quella col numero 2 e così via, fino a quella col numero n per cui rimarà una sola possibilità. Quindi il numero totale delle permutazioni di $\{1, \ldots, n\}$ è

$$n(n - 1)(n - 2) \cdots 1,$$

che come sappiamo si abbrevia comunemente scrivendo "$n!$".

Come ci gioco. Il gioco del 15 è in realtà equivalente a un gioco nell'insieme delle permutazioni dei numeri $\{1, 2, 3, \ldots, 16\}$. Sia infatti S_I un'istanza del gioco del 15 e siano come prima $b_1, b_2, \ldots, b_{15}$ i blocchetti ordinati. Chiamiamo g_i il numero che è scritto sul blocchetto b_i. Aggiungiamo, come siamo abituati a fare, il quadratino bianco, considerandolo come un blocchetto con sopra scritto il numero 16. A questo punto all'istanza S_I possiamo far corrispondere in maniera naturale una permutazione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & \ldots & 15 & 16 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & \ldots & \ldots & g_{15} & 16 \end{pmatrix}.$$

In realtà anche ad una qualunque configurazione possiamo far corrispondere una permutazione: l'unica differenza sarà che, se il quadratino bianco non è in basso a destra stavolta non è vero che il 16 rimane fisso.

Studiamo ora cosa significa fare una mossa che ci porta dalla configurazione S_C alla configurazione $S_{C'}$. Una mossa ha come effetto di cambiare di posizione alcuni dei 16 blocchetti. Questo si traduce nel linguaggio delle permutazioni dicendo che componiamo la permutazione data dalla configurazione S_C con quella generata dallo scambio delle posizioni dei blocchetti. Il risultato è la configurazione $S_{C'}$ a cui, come sappiamo, è associata una permutazione. Giocare al gioco del 15 dunque vuol dire partire da una permutazione che è associata ad una istanza, e, componendo successivamente le permutazioni associate alle mosse, arrivare alla configurazione base – a cui è associata la permutazione banale (quella che lascia fissi tutti i numeri).

Come potete intuire, questo nuovo punto di vista apre il campo a molte possibili (talune anche difficili) generalizzazioni del gioco del 15 sotto forma di "ricerca di percorsi" nell'insieme delle permutazioni, con delle regole che descrivono le mosse possibili. Noi rimaniamo invece nell'ambito del gioco tradizionale e ci divertiamo a fare un po' di conti.

DOMANDA 3.4. *Quante sono le istanze possibili del gioco del 15? Ossia: quanti possibili diverse "partite, quanti possibili diversi punti di partenza del gioco del 15 esistono?*

Sappiamo rispondere subito: sono 15!. Sono cioè tanti quante sono le permutazioni dei numeri $\{1, 2, \ldots, 16\}$ che però lasciano fisso il 16 (e queste a loro volta sono tante quante le permutazioni dei numeri $\{1, 2, \ldots, 15\}$).

Ma quante di queste istanze ammettono una soluzione? Studiando il gioco del 15 abbiamo scoperto che solo le istanze con somma pari ci permettono di ottenere la configurazione base. Allora, per sapere quante diverse partite risolubili del gioco del 15 esistono, dobbiamo chiederci:

DOMANDA 3.5. *Quante sono le istanze con somma pari nel gioco del 15?*

Qui ci viene in aiuto un ragionamento di simmetria (e meno male: fare il calcolo diretto presenterebbe serie difficoltà...). Se ho una istanza con somma pari e immagino di scrivere "1" sul blocchetto dove è scritto 15 e "15" sul blocchetto dove è scritto 1 (questo equivale a permutare i due blocchetti, ma attenzione, non pretendiamo di farlo con le mosse del gioco! – anzi dalla conclusione capirete che sarebbe impossibile farlo con le mosse consentite...) ottengo una istanza con somma dispari (come mai? Verificatelo!). E viceversa, se in una istanza con somma dispari scambio l'1 e il 15 ottengo una istanza con somma pari.

Allora le istanze con somma pari e quelle con somma dispari sono in ugual numero: le possiamo infatti far corrispondere a due due tramite questo scambio dell'1 col 15.

Dunque le istanze pari sono la metà del totale, ossia

$$\frac{15!}{2} = 653'837'184'000.$$

Certo alcune di queste istanze saranno di risoluzione molto facile o immediata (fra queste c'è per esempio la configurazione base, che dà partita vinta all'istante) ma, come vedete, ce ne sono di partite del gioco del 15 da fare...

CAPITOLO 4

Terzo giorno

Numeri e simmetria: il Sudoku

Florilegio ludico-matematico

Dopo due giorni di lavoro “al fronte” può essere interessante alzare un attimo lo sguardo e guardare ciò che si è fatto in prospettiva.

Vale la pena di evidenziare due caratteristiche che - sebbene fin qui non menzionate esplicitamente - stanno alla base del nostro ragionamento sulle strategie. Prima di tutto si noti che abbiamo sempre considerato giochi *deterministici*: ogni giocatore è sempre padrone di decidere la mossa che farà. Se ci pensiamo, ci accorgiamo che non è sempre così: per esempio, ogni gioco che implichi il “tirare il dado” *non* è deterministico. Infatti la mossa viene in qualche modo condizionata, quando non direttamente imposta, dal dado che (per lo meno ordinariamente...) non è controllato dal giocatore. Lo stesso vale ovviamente anche per il “pescare” o “distribuire” carte da un mazzo mescolato (anche qui, almeno in linea di principio) in modo casuale. Questa indipendenza dei giocatori dal caso naturalmente è una caratteristica fondamentale parlando di strategia di un gioco e non potremmo continuare ad utilizzare il nostro modello se ci rinunciassimo. Questo non vuol dire che non sia possibile elaborare strategie anche per giochi non deterministici; esse però si devono avvalere anche di altri strumenti, tipicamente probabilistici, e non solo di quelli che abbiamo introdotto finora.

Analogamente, nei giochi visti fino a questo momento ogni giocatore possiede una *informazione completa* circa la situazione. In altre parole, l’unica incertezza che egli è costretto a tenere in conto è quella che deriva dalle decisioni dell’avversario. In molti giochi, ad esempio, ad ogni giocatore è disponibile una parte dell’informazione che è nascosta a tutti gli altri, per cui nessuno può determinare se la propria posizione sia vincente o perdente. Se l’informazione non è completa per tutti i giocatori si introduce una sorta di indeterminazione, lievemente diversa da quella dei fenomeni casuali, ma simile nel senso che la si può affrontare con calcoli probabilistici; in tutti e due i casi, perciò, si tratta di rimanere nel dominio della certezza e non sconfinare nel campo delle probabilità.

In secondo luogo, non abbiamo mai considerato la possibilità che un gioco finisca "pari", nonostante questo caso sia previsto in molti giochi. Ciò può chiaramente avvenire anche se il grafo è aciclico e finito: si pensi al comune "tris" o al famoso "forza 4", per non parlare degli scacchi (per i quali le proprietà del grafo sono garantite da apposite regole). A questa carenza però possiamo rimediare facilmente. I metodi che abbiamo sviluppato fin qui si possono infatti usare anche per studiare le strategie di un gioco "con patta", ad esempio utilizzando un artificio che ora illustriamo brevemente. Il problema delle situazioni di "patta" è il fatto che non possono essere contrassegnate né da "perdente" né da "vincente"; l'artificio consiste proprio nel considerare in un primo tempo le situazioni di patta "d'ufficio" come perdenti, naturalmente in aggiunta alle situazioni veramente perdenti. Se nel (nuovo) gioco che risulta da questa operazione il primo giocatore ha una strategia vincente, allora la stessa strategia lo farà vincere nel gioco originale. Se invece non è così, si considera un'altra modifica del gioco: quella ottenuta aggiungendo stavolta le situazioni di patta alle vincenti. Se ora il primo giocatore ha una strategia vincente, questa strategia gli permetterà comunque di forzare il pari nel gioco originale (se lo portasse alla vittoria sarebbe infatti stata trovata prima). Se nemmeno in questo secondo caso il primo giocatore dispone di una strategia vincente, allora sarà il secondo giocatore a disporre di una strategia per vincere il gioco.

Una considerazione analoga ci permette di studiare anche i giochi con più di due giocatori. Infatti, se il gioco non ha elementi probabilistici, basterà associare le situazioni vincenti per tutti i giocatori tranne uno (più eventualmente le situazioni di pareggio tra due o più giocatori) come situazioni perdenti per il giocatore rimasto, e considerare le azioni degli altri come quelle di un'unica alleanza di giocatori. Il fenomeno che avviene in questo caso è molto interessante: naturalmente, l'esistenza di una strategia vincente per un certo giocatore determina il gioco completamente, ma anche se tale strategia non esiste, è comunque possibile che un giocatore vinca grazie al fatto che nelle situazioni reali gli altri non si comporteranno davvero - per lo meno non sin dall'inizio e costantemente - come un'alleanza contro di lui. Lo schema utilizzato è perciò ancora valido in questo caso come nel precedente, pur se con qualche piccola variazione, ma suggerisce anche che lo studio potrebbe essere spinto ancora un po' più in profondità (fino a giungere, per chi desiderasse approfondire l'argomento, alla celebre nozione di *equilibrio di Nash*).

Possiamo dire quindi che abbiamo abbozzato una teoria dei giochi con grafo finito ed aciclico, deterministici e con informazione completa, a due o eventualmente più giocatori, senza o eventualmente con possibilità di patta. Ma veramente ci siamo limitati a questo? In questa breve panoramica, ci imbattiamo ora d'improvviso in un paio di sorprese che

citiamo a titolo di esempio, confidando nel fatto che l'atteggiamento curioso e pronto all'astrazione che ci ha condotto in questo percorso porti ciascuno a sperimentarne altre.
Per prima cosa torniamo all'idea del grafo di un gioco per illustrarne un'insospettabile applicazione. Come abbiamo visto, se consideriamo un grafo di un gioco finito-finito e decidiamo di studiare le strategie del gioco assegnando un valore di "vincente" o "perdente" ad ogni situazione, il criterio da usare è questo: per il giocatore che deve fare la mossa una situazione è vincente se *esiste* una situazione perdente che è raggiungibile da essa, mentre una situazione è perdente se *ogni* situazione raggiungibile da essa è vincente. Come si vede, dichiarare una situazione vincente o perdente corrisponde in realtà a *quantificare* una variabile in modo esistenziale ("esiste una situazione s", simbolicamente: $\exists s$) o universale ("per ogni situazione s", simbolicamente: $\forall s$). E questi quantificatori possono essere concatenati in una proposizione "leggendoli" lungo un cammino nel grafo. Se, poniamo il caso, nel nostro gioco il primo giocatore ha una strategia vincente, allora a questa strategia corrisponderà una proposizione del tipo

$$\exists s_1 \forall s_2 \exists \ldots$$

dove gli s_i indicano la situazione verso la quale si va nella i-esima mossa. Più esattamente: una strategia vincente per il primo giocatore è una *dimostrazione* della proposizione.

Questo è precisamente l'idea dei *giochi di Hintikka*, che prendono il nome da Jaakko Hintikka, il filosofo finlandese che ha mostrato come per ogni proposizione logica ("di un certo tipo": per i dettagli si veda [**9**]) si possa creare un gioco corrispondente in modo che è sufficiente saper vincere il gioco per dimostrare la formula.

La seconda cosa che vogliamo mettere in risalto riguarda un aspetto fondamentale dell'agire matematico che, forse senza farci troppo caso, abbiamo incontrato nelle nostre discussioni sui giochi. In particolare conviene tornare con il pensiero alla prima giornata, quando abbiamo parlato di Chomp e "giochi con i numeri". Ci siamo accorti che il gioco dei divisori con numeri a due fattori primi è "in fondo la stessa cosa" del Chomp sulle tavolette di cioccolato, e che l'iperChomp è "in fondo identico" al gioco dei divisori generale.

Abbiamo insomma capito che questi due giochi, definiti in modo molto diverso, sono due incarnazioni della stessa entità - si può dire che, costretti a gettare la loro maschera, "hanno la stessa forma" o, come si dice in linguaggio matematico, sono *isomorfi*. Non fermiamoci, però: nel fare ciò, non solo abbiamo trovato una somiglianza sorprendente, ma abbiamo colto con l'intuizione e poi isolato e "purificato" il concetto di isomorfismo, che è ora disponibile per noi in campi e situazioni che vanno molto al di là del caso particolare che ce lo ha fatto identificare.

Ad esso in effetti è collegata una delle attività principali (e tra le più gratificanti) della matematica, che è appunto lo scoprire isomorfismi tra cose apparentemente diverse e che non avrebbero a priori nessun motivo per essere collegate.

Una parte fondamentale della ricerca matematica consiste nell'accorgersi di qualcosa che è magari sempre stato sotto gli occhi di tutti senza essere notato. Può trattarsi di un certo isomorfismo; ma astraendo, può essere il concetto stesso di isomorfismo. Bisogna saper vedere su vari livelli.

Questa prima parte si chiude augurando ad ognuno di provare almeno una volta la sensazione di scoprire un isomorfismo inaspettato, o di scavalcare una barriera concettuale raggiungendo un "livello" superiore!

Il Sudoku

Ci occuperemo ora del gioco del Sudoku, cercando di mantenere il più possibile l'atteggiamento libero di cui abbiamo appena parlato. La grande popolarità di questo gioco rende superfluo spiegarne le regole. È importante però sottolineare che esiste un aspetto "estetico" del Sudoku. Al contrario del suo parente prossimo, il *number place*, che consiste generalmente di alcuni numeri inseriti in una griglia che si richiede di completare secondo le ben note regole, un vero *Sudoku* deve essere "simmetrico" in qualche modo. Per esempio le posizioni dei numeri dati devono essere simmetriche rispetto al centro della griglia, o simmetriche per rotazione, o rispetto a qualche asse, e chi più ne ha più ne metta.

Questo aspetto del Sudoku reca traccia della sua storia, che ripercorriamo brevemente. A quanto pare, il gioco del number place fu inventato negli anni Settanta negli Stati Uniti ed esportato in Giappone, dove fu rilanciato come *Suji wa dokushin ni kagiuru* (che significa più o meno "numeri limitati ad una sola persona"), presto abbreviato, cosa abituale in Giappone, in Su Doku ("numeri solitari"); ma forse l'abbreviazione non fu senza motivo, giacché propone anche un gioco di parole, in quanto con ideogrammi diversi, ma stessa pronuncia, significa "veleno numerico". La nota propensione giapponese per l'estetica aveva nel frattempo aggiunto la consuetudine di dare gli indizi iniziali in modo simmetrico. Questa versione giunse poi in Europa qualche anno fa, prima nel Regno Unito e poi anche in Italia. Inizialmente in Italia ci fu chi ammetteva Sudoku con più di una soluzione, ma presto l'uso si uniformò alla scuola dei Sudoku con soluzione unica.

In continuità con il nostro punto di vista forse "irriverente", non ci occuperemo affatto della questione più ovvia, cioè di come si risolva un Sudoku. Non è perché tale questione sia priva di interesse – si tratta pur sempre di un enigma logico, a volte difficile, che può tramutarsi in una sfida appassionante – ma piuttosto per il gusto di andare in direzioni meno esplorate (non ce ne occuperemo, ma per esempio, perché non immaginare un modo per rendere il Sudoku un gioco a più giocatori?).

Innanzitutto, cerchiamo di intenderci sui termini: chiameremo *riquadro* ognuno dei 9 elementi 3×3 che compongono il Sudoku, e *cella* ogni elemento di un riquadro. *Indizio* sarà ciascuno dei numeri già presenti nella griglia all'inizio del gioco, con la loro posizione, e una *serie di indizi* indicherà tutti gli indizi dati, da cui il giocatore è chiamato a partire per giungere alla soluzione unica. Anche con il Sudoku come per gli altri giochi, ci sono molte domande che sorgono immediatamente...

Domanda 4.1. *Qual'è il numero minimo di "indizi" che bisogna fornire perché la soluzione di un Sudoku sia unica?*

Come affrontare una domanda come questa? Si può naturalmente tentare di usare la "forza bruta". Supponiamo di avere a disposizione la lista di tutte le griglie 9×9 riempite secondo le regole (cioè con i numeri da 1 a 9 in modo che in ogni riga, colonna e riquadro 3×3 non appaia mai due volte lo stesso numero), che chiameremo "Sudoku svolti". Allora per vedere se un Sudoku ha soluzione unica basta sovrapporlo a tutte le griglie nella lista e vedere se ce n'è più di uno che "combacia". Il problema è che, con l'allungarsi della lista, la compilazione della lista stessa e il confronto rischiano di costare molto tempo. Perciò ci chiediamo:

Domanda 4.2. *Quanti Sudoku* 9×9 *svolti ci sono?*

Qui rientrano in gioco le permutazioni, che abbiamo già incontrato nel capitolo precedente. Come passo preliminare per giungere alla risposta a questa domanda si può infatti notare che, se ho una griglia "buona", anche la griglia che ottengo da essa permutando le cifre (scambiando, per esempio, l'1 con il 2) sarà buona. Quindi basta contare tutti i Sudoku svolti nei quali il riquadro 3×3 in alto a sinistra ha la forma

1	2	3
4	5	6
7	8	9

,

e poi ricordarsi che per ognuno di questi ci sono $9!$ griglie "buone" ottenibili permutando le cifre (osserviamo qui incidentalmente che l'uso di cifre per riempire le celle non è affatto necessario; basta avere 9 simboli diversi scelti a piacere – tanto che esistono effettivamente anche sulle riviste specializzate Sudoku che non utilizzano cifre, ma lettere o altri simboli).

Questa idea della permutazione ci dà uno spunto per un certo tipo di generalizzazione. A quale fenomeno siamo di fronte? Lo possiamo vedere così: un certo numero di "mosse" possono essere fatte sul nostro oggetto senza che la sua “struttura” cambi realmente. È allora chiaro che ci troviamo di fronte ad una incarnazione del concetto di isomorfismo di cui abbiamo parlato sopra, e lo utilizziamo per semplificare il nostro problema.

Ma subito viene allora da chiedersi: si può ottenere di più? Possiamo semplificare ulteriormente il quesito, riducendo ancora i casi da studiare, magari fino al punto da renderlo facilmente trattabile? Si possono trovare ancora altre permutazioni: per esempio, considerando un Sudoku come unione di tre “strisce” verticali ottenute raggruppando le colonne a tre a tre, ci accorgiamo che scambiare tra loro in qualunque modo queste tre strisce produce altri Sudoku validi; la stessa cosa, ovviamente, vale per le 3 strisce orizzontali (ma non va bene qualunque permutazione delle 9 colonne o delle 9 righe!). Inoltre, si possono permutare tra loro le tre colonne di una stessa striscia verticale o le tre righe di una striscia orizzontale. Tutte le permutazioni che abbiamo descritto non sono però indipendenti, perciò dobbiamo fare attenzione a non rovinare con una di esse ciò che avevamo ottenuto con le altre. La varietà delle “simmetrie” del Sudoku, cioè dei movimenti, non necessariamente geometrici, che possiamo fare ottenendo comunque altri Sudoku validi, risulta notevole e legata strettamente alle regole del gioco. Tanto è stretto questo legame, che piano piano si fa strada una nuova idea che ci spinge a cambiare punto di vista: sono davvero le regole del gioco a fissare le simmetrie? O non sono forse le simmetrie stesse le “vere” regole del gioco, che vengono semplicemente espresse in modo equivalente ma più comprensibile come “non mettere mai due numeri uguali nella stessa riga, nella stessa colonna o nello stesso riquadro”? Chi trova interessante questo quesito, scoprirà forse con piacere che esso investe il concetto moderno di “Geometria” secondo il cosiddetto Programma di Erlangen di Felix Klein.

Questo studio è dunque interessante in sé – ma basterà a permetterci di calcolare il numero totale di Sudoku svolti?

Per cominciare a studiare questo quesito sarà utile considerare un caso più piccolo.

Domanda 4.3. *Quanti Sudoku* 4×4 *esistono? E quanti numeri bisogna dare perché la soluzione sia unica?*

Usiamo le osservazioni fatte fin qui per rispondere subito alla prima parte della domanda – la risposta alla seconda parte la lasciamo al laboratorio. Nel primo riquadro 2×2 possiamo dunque supporre, a meno di una permutazione, di avere i numeri da 1 a 4 disposti così:

1	2		
3	4		

Questa riduzione diminuisce il risultato che stiamo cercando di un fattore 24, ossia del numero delle possibili permutazioni di $\{1, 2, 3, 4\}$. Esaminiamo ora la terza e la quarta colonna: sappiamo che scambiandole tra di loro, a prescindere da come siano disposti i numeri al loro interno, otteniamo ancora un Sudoku valido, perciò possiamo supporre che nella prima riga, dove ormai possiamo piazzare solo i numeri 3 e 4, essi siano già in questo ordine.

1	2	3	4
3	4		

Allo stesso modo, possiamo scambiare la terza e la quarta riga, se necessario, per avere 2 e 4 in quest'ordine.

1	2	3	4
3	4		
2			
4			

Queste due riduzioni producono un ulteriore fattore $2 \times 2 = 4$. A questo punto, però, osserviamo il riquadro in basso a destra, per ora del tutto vuoto: è facile dedurre che nella posizione in alto a sinistra deve esserci il 4.

Rimanendo solo poche caselle vuote, esaminiamo ora i casi uno per uno. Ad esempio ci chiediamo: dove sarà l'1 dell'ultima riga? Se è nella seconda cella, gli ulteriori due 1 dovranno essere nella quarta cella della terza riga e nella terza della seconda riga e da questo si riempie facilmente il resto del diagramma. Analogamente accade per le altre due posizioni possibili dell'1 nell'ultima riga: abbiamo quindi trovato 3 Sudoku diversi. È ora sufficiente moltiplicare per 24 e per 4 per concludere che esistono

$$24 \times 4 \times 3 = 288$$

Sudoku 4×4 diversi.

Tornando ora al caso 9×9, accade che, nonostante tutte le riduzioni, non si giunge a rendere il problema del numero di Sudoku umanamente trattabile. Troppo lunga la serie dei casi che restano da studiare e non si intravede nessuna idea decisiva per trovare una ulteriore scorciatoia. Per chi si è lanciato in questo conto, si fa strada un po' di delusione, accompagnata dalla domanda: ha senso continuare questi calcoli?

In effetti, la curiosità ci ha spinti fin qui, ma la risposta al problema che ci eravamo posti ("quanti Sudoku $9\times$ 9 esistono?") è così lunga e di tipo "catalogativo" da mettere alla prova il nostro interesse. Un simile "stop" in un problema di matematica può capitare (come sempre, quando ci si pongono domande nuove): come reagire? Abbandonare e dedicarsi a questioni che possono rivelarsi più interessanti oppure insistere? Ognuno risponderà secondo i suoi gusti e le sue necessità.

Nel caso in questione, c'è chi non ha abbandonato l'impresa e la ha affidata ad un calcolatore (vedi [**4**]): qualche ora di tempo di calcolo e si trova che ci sono

$$6'670'903'752'021'072'936'960 \qquad \simeq 6,67 \times 10^{21}$$

Sudoku svolti diversi.

Ora, questo numero è piuttosto grande e anche se grazie a tutte le simmetrie di cui abbiamo parlato sopra, il numero dei Sudoku "veramente" diversi è in realtà solo di 3546146300288, o anzi, dopo una ulteriore riduzione, di 5472730538, il totale è talmente grosso che nessun attuale computer riuscirebbe in tempo utile a scrivere la lista completa: figuriamoci a fare i confronti che servirebbero per rispondere (col metodo della "forza bruta") alla domanda 4.1 sul numero minimo di indizi!

In realtà, la risposta alla domanda sul numero degli indizi, una delle più intriganti circa il Sudoku, al momento non è nota: i Sudoku con meno indizi iniziali che sono stati trovati hanno 18 indizi (vedi figura 4.1), mentre i number place minimali trovati ne hanno 17. Detto per curiosità: i number place minimali "avvistati" sono più di 30000 e qualcuno (vedi [**12**]) si è anche divertito a far girare un programma che leva a turno un numero da tutti i loro indizi iniziali e verifica se il number place così ottenuto ha soluzione unica. La risposta è stata finora sempre no, ma questo, visto che è solo un esperimento fatto su un certo numero (sia pur grande) di esempi, non ci basta per dire che non esistono number place o Sudoku con soluzione unica e un numero minore di indizi iniziali (non è una dimostrazione rigorosa! Siete d'accordo?).

						8		6
		9						
		6		4	2			
	8		1					
	1						2	
					9		4	
			8	3		1		
						9		
2		5						

FIGURA 4.1. Un Sudoku con soli 18 indizi iniziali

Come per gli altri giochi, anche con il Sudoku si possono inventare mille variazioni sul tema. Non è solo la difficoltà delle domande viste fin qui a spingerci verso altre questioni: nelle "reazioni" del gioco al variare delle regole e dei parametri cui lo sottoponiamo si esprime di fatto la sua struttura, che è il nostro reale interesse. Si può osservare, ad esempio, che i Sudoku "normali" sono delle griglie 9×9 o, meglio, $(3 \times 3) \times (3 \times 3)$. Con questa scrittura è facile vedere che si potrebbero considerare Sudoku con un numero diverso di celle, che verrebbero scritti $(n \times n) \times (n \times n)$, che chiameremo Sudoku *quadrati* (ne sono stati "avvistati" in letteratura fino a $n = 7$). Oppure si potrebbe anche passare a Sudoku *rettangolari*, della forma $(n \times m) \times (m \times n)$. E perché non considerare Sudoku "cubici", o addirittura gli *iperSudoku* che chiederebbero di riempire con i numeri da 1 a k, secondo le regole standard, degli schemi

$$(n_1 \times m_1) \times (n_2 \times m_2) \times \ldots \times (n_d \times m_d),$$

richiedendo naturalmente che $n_i \cdot m_i = k$ per ogni i?

Una versione ancora più raffinata del Sudoku (almeno per quello "bidimensionale") è quella che richiede che tutti i numeri che stanno in posizioni corrispondenti nei riquadri $n \times m$ siano diversi (per esempio, tutti i numeri "in alto a destra" nei 9 riquadri 3×3, ecc.). Un Sudoku che ha questa proprietà è un *Sudoku perfetto.* Ma a forza di aggiungere condizioni e rendere più difficile il problema, non comincia a venire il dubbio che si parli di cose inesistenti?

Domanda 4.4. *Esiste un Sudoku quadrato perfetto? Esistono Sudoku cubici? Per esempio: si può costruire un Sudoku "$4 \times 4 \times 4$" (o, seguendo il nostro formalismo,* $(2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2)$*)?*

In realtà la costruzione di un Sudoku quadrato perfetto non è difficile, se si segue una strategia adatta. Una possibilità è quella di usare una opportuna permutazione di 9 elementi: proverete nel laboratorio.

È invece più difficile rispondere alla domanda:

Domanda 4.5. *Quanti sono i Sudoku perfetti svolti?*

Quanto ai Sudoku tridimensionali, ne esistono: ad esempio, si può costruire un Sudoku $(3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3)$. Naturalmente per descriverlo su carta, però, è necessario ad esempio dividerlo in piani paralleli, ciascuno costituente un Sudoku 9×9 per suo conto, che il giocatore deve poi immaginare sovrapposti.

Di nuovo, si vede che tutte queste variazioni condividono lo stesso "principio", e quindi le seguenti domande hanno senso (e probabilmente risposta simile) per ogni variazione.

Domanda 4.6 (Multipla).

- *Possono esserci diversi "indizi iniziali" che conducono allo stesso*

Sudoku?
• *La strategia di soluzione e i "passi" necessari per risolvere un Sudoku sono unici? Ovvero: ci possono essere più strade per risolvere lo stesso Sudoku?*
• *Qual'è il numero* massimo *di indizi che posso dare se voglio che il mio Sudoku abbia* più *di una soluzione?*

Per capire meglio tutti questi problemi, e per incontrarli "sul campo", proponiamo infine il compito seguente.

COMPITO 4-I. ***Make Your Own Sudoku!*** *Vi sfidiamo a costruire un Sudoku (bidimensionale,* $(3 \times 3) \times (3 \times 3)$*) con al più* 30 *indizi, che abbia soluzione unica e, se possibile, che sia perfetto.*

Laboratorio

Tutti gli studenti hanno raccolto con entusiasmo la sfida 4-I, e si sono lanciati alla costruzione di un Sudoku. Il punto di partenza è stato, per tutti, il cercare di costruire un Sudoku "svolto" valido, con l'intento di "cancellare" successivamente più numeri possibili mantenendo l'unicità della soluzione.

Descriveremo la soluzione presentata da un gruppo che ha usato particolare furbizia nella costruzione del Sudoku.

(1) Costruzione della griglia. Dapprima si nota che c'è un modo semplice di costruire un "Sudoku perfetto svolto". I riquadri della griglia e le celle di ogni riquadro sono ordinate secondo lo "schema di base":

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Ora si comincia a costruire la griglia riempiendo il primo riquadro con lo schema di base. Poi si riempiono gli altri riquadri con la seguente regola: per ogni riquadro già riempito, il riempimento dei riquadri adiacenti a destra e sotto si ottiene applicando alle righe (risp. alle colonne) del riquadro dato la permutazione (132). In questo modo è chiaro che si ottiene (a) un Sudoku (b) perfetto che chiameremo *griglia di base.*

Per mescolare ancora le carte si può applicare alla griglia di base una qualsiasi permutazione delle cifre contenute nelle celle.

(2) Eliminazione dei numeri ridondanti. Ci si riferisce ancora alla griglia di base. Dapprima si sono considerati i primi tre riquadri, e l'idea iniziale è stata di considerare la situazione della figura 4.2.(b) dove, come nelle figure seguenti, le celle annerite contengono i numeri dati.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4	8	9	7
5	6	4	8	9	7	2	3	1
8	9	7	2	3	1	5	6	4
3	1	2	6	4	5	9	7	8
6	4	5	9	7	8	3	1	2
9	7	8	3	1	2	6	4	5

(a)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6

(b)

FIGURA 4.2. La griglia di base e il primo approccio

Si vede che con questi 8 dati si può assegnare unicamente una terna di numeri ad ogni riga di ogni riquadro. Siccome vogliamo un Sudoku con soluzione unica, bisogna assicurare anche la giusta "sequenza" di ogni terna. Siccome si voleva mantenere la quantità di numeri dati per ogni riquadro più bassa possibile, i dati mancanti sono stati aggiunti in altri riquadri. Nella figura 4.3 si vedono i tre dati aggiunti per determinare univocamente la posizione di $4, 5, 6$ nel primo riquadro.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4	8	9	7
5	6	4	8	9	7	2	3	1
8	9	7	2	3	1	5	6	4
3	1	2	6	4	5	9	7	8
6	4	5	9	7	8	3	1	2
9	7	8	3	1	2	6	4	5

FIGURA 4.3

La libertà nello scegliere questi ulteriori numeri è abbastanza grande. Visto che vogliamo anche soddisfare i criteri di simmetria del Sudoku, è consigliabile sceglierli con criterio. Ora, i primi tre riquadri mostrano una possibile simmetria centrale, quindi si è deciso di tentare di scegliere i dati in modo che il Sudoku ottenuto scambiando la prima "riga" di riquadri con la seconda sia simmetrico rispetto al suo centro. Per esempio si ottiene la griglia di figura 4.4.(a), che scambiando le prime due "righe" e applicando la permutazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 7 & 9 & 3 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

diventa il Sudoku raffigurato in figura 4.4.(b).

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4	8	9	7
5	6	4	8	9	7	2	3	1
8	9	7	2	3	1	5	6	4
3	1	2	6	4	5	9	7	8
6	4	5	9	7	8	3	1	2
9	7	8	3	1	2	6	4	5

(a)

			3	1		2	6	
3	1							4
		5			4			
4	8	7						
			5		6			
						9	3	1
			1			6		
1							4	8
	5	2		4	8			

(b)

Figura 4.4

A questo punto ci si è convinti ("euristicamente") che anche i numeri negli altri riquadri fossero determinati univocamente e quindi siamo passati alla verifica.

(3) I risultati. Alla fine è stato messo a disposizione un programma che permette ad un computer di risolvere i Sudoku e abbiamo potuto verificare i risultati.

Dando in pasto al calcolatore il Sudoku di figura 4.4 abbiamo visto che in realtà la soluzione non era unica. Visto che il programma indicava anche le cella dove l'algoritmo compie una scelta non obbligata, si è comunque potuto porre riparo a questa falla, aggiungendo i dati corrispondenti (assieme naturalmente ai loro simmetrici rispetto al centro del Sudoku!). Il risultato è stato un Sudoku che soddisfa la sfida posta come compito, con esattamente 30 numeri dati. Lo riportiamo in figura 4.5.(a), assieme all'altra soluzione proposta che ha vinto la sfida

			3	1		2	6	
3	1			6				4
		5			4	3		
4	8	7						
			5		6			
						9	3	1
		8	1			6		
1				5			4	8
	5	2		4	8			

(a)

1	9							3
	4			5		7		6
		6	7		2	9		
3				1				
7			2		4			5
				7				2
		9	3		7	5		
6		2		4			3	
8							2	7

(b)

Figura 4.5. I due *Sudoku* a soluzione unica con 30 numeri dati creati durante il laboratorio.

(figura 4.5.(b)) e che mostra una simmetria centrale e di rotazione (!). La figura 4.7 riporta l'altro Sudoku a soluzione unica prodotto durante il laboratorio.

Nella ricerca di questi Sudoku, non tutti hanno lavorato in modo strutturato come il gruppo di cui abbiamo parlato sopra. La griglia di base del number place di figura 4.6 è stata creata fondamentalmente "a caso", provando a riempire la griglia e cancellando ogni volta che si finiva in un vicolo cieco. Però si è anche visto come un approccio sistematico possa essere vantaggioso sia come risparmio di tempo sia come "controllo" della situazione: il number place di figura 4.6 è stato ottenuto cancellando i numeri "a occhio", e con continui controlli al computer, e questo metodo è risultato alla fine molto più laborioso. L'importanza di avere un lavoro strutturato fin dall'inizio è quindi emersa in modo evidente anche per i ragazzi. Riportiamo infine in figura 4.7 anche gli altri due number place ottenuti, che però non hanno soluzione unica.

1				8		4		
		6	1			7		9
7				5	6		2	3
9	1			7		3	4	5
3		5	9		2	6		
		8		4			1	
	9		5	6	7		3	
2		4						7
5	6		2	3		8	9	

FIGURA 4.6. Un *number place* con soluzione unica e 40 numeri dati.

Diamo ora qualche risposta ad alcune delle domande lasciate in sospeso: cominciamo dalla seconda parte della domanda 4.3 e cerchiamo di calcolare il minimo numero di indizi necessari per avere un Sudoku 4×4 con soluzione unica. Osserviamo a questo scopo che il Sudoku seguente

1			
		2	
	3		
			4

ha soluzione unica. La domanda che ci dobbiamo porre è quindi se sia possibile avere soluzione unica dando solamente 3 indizi; questo non è molto verosimile, perciò congetturiamo che in effetti sia impossibile e ci disponiamo a dimostrarlo rigorosamente.

	8				5			
2			1				7	9
3			4			6		
	1			9		2		
		7	3	8				4
6							5	
			6		2	8		
	5			7		1		
9		4				3		

(a)

	2				6	7		9
4	5			8			2	
		9			3		6	
				6			9	
		8		1	2	3		
3	7		9				1	
	3	1	2			6		
				7				1
	6		8			4	5	

(b)

FIGURA 4.7. Gli altri risultati ottenuti: (a) *number place*, 27 dati, 2 soluzioni, (b) *number place*, 31 dati, 4 soluzioni.

Innanzitutto osserviamo che se nei 3 indizi non compaiono 3 cifre distinte la soluzione non potrà essere unica, perché in una soluzione si potrebbero scambiare tra loro dappertutto due delle cifre che non comparivano all'inizio ottenendo una soluzione differente. Possiamo naturalmente supporre di avere quindi un 1, un 2 ed un 3.

Gli indizi non possono essere contenuti nelle prime due righe o colonne (o nelle seconde due), perché altrimenti alla fine si potrebbero scambiare le righe o colonne che non contenevano indizi.

Possiamo così ridurci ad esaminare due casi: ci sono due indizi nel riquadro in alto a sinistra ed uno nel riquadro in basso a destra, o uno per riquadro tranne che in quello in basso a destra.

Nel primo caso, a meno di scambiare colonne e numeri, ci rimangono due possibilità:

1	2		
		3	

1			
	2		
		3	

.

Perché solo queste due e non anche quella con il 2 sotto all'1? Questo perché possiamo sfruttare qui un'ulteriore caso di simmetria, quella per riflessione lungo la diagonale del Sudoku che parte dall'1. Nelle considerazioni sul numero di Sudoku questa simmetria era impedita dalla nostra scelta di fissare i numeri del primo riquadro, ma in questo caso, quando cioè non consideriamo un Sudoku svolto, ma solo i suoi indizi iniziali, possiamo utilizzarla.

Ora, la prima possibilità può essere verificata facilmente e risulta avere 6 soluzioni; la seconda non può averne una sola, perché per riflessione lungo la diagonale da una se ne ottiene un'altra (che è sicuramente diversa: perché?).

Nel secondo caso, con un indizio per riquadro in tre riquadri, possiamo ridurci a queste tre possibilità:

1		2	
3			

1		2	
	3		

1			
		2	
	3		

che hanno rispettivamente 10, 3 e 3 soluzioni.

Poiché quindi ogni scelta di 3 indizi porta ad un Sudoku con soluzione multipla, mentre esiste una scelta di 4 indizi con soluzione unica, il minimo cercato è 4. Questo non vuol dire però che ogni scelta di 4 indizi vada bene, come si vede facilmente per esempio riempiendo la diagonale con 1,2,3 e 4 nell'ordine.

Occupiamoci ora della domanda 4.6. Possono esserci diversi indizi iniziali che conducono allo stesso Sudoku? La risposta è affermativa, come si può verificare risolvendo questi due Sudoku:

1			
		3	
	2		
			4

		4	
2			
			3
	1		

È inoltre possibile avere anche un numero diverso di indizi per lo stesso Sudoku; lo si può fare banalmente aggiungendo posizioni deducibili ad una serie di indizi data, ma anche se nessuno degli indizi è "inutile", cioè se qualunque indizio si tolga il Sudoku perde l'unicità della soluzione, si possono avere serie diverse di indizi, anche con un numero diverso di elementi. Un esempio è dato dalla seguente serie di indizi, che ha la stessa soluzione dei Sudoku della figura precedente (controllare che nessuno degli indizi è inutile sarà per voi un buon esercizio):

	3		
2			
			3
	1	2	

Quanto alla strategia di soluzione di un Sudoku, si possono facilmente trovare esempi in cui ad un certo punto della soluzione sono possibili diverse mosse, e dunque la strategia non è unica. Qui però si fa strada una questione più sottile: infatti in questo caso andrebbe data una definizione più stringente di che cosa è una "strategia per risolvere un Sudoku", visto che se la soluzione è unica a rigore tutti i numeri sono deducibili sin dall'inizio dalla serie di indizi data.

Infine, il numero massimo di indizi per cui la soluzione non è unica, nel caso 9×9, è 77. Dimostrare questo è facile: se mancano meno di 4 numeri, infatti, almeno uno di essi si trova in una riga o una colonna con 8 numeri già piazzati ed è quindi obbligato e questo ragionamento si può immediatamente riapplicare ai restanti numeri mancanti, quindi la soluzione deve essere unica.

Ma se invece mancano 4 numeri? La soluzione può non essere unica, come viene mostrato nell'esempio della figura 4.8. Infatti se le celle vuote sono ai vertici di un "rettangolo" con due celle in un riquadro e due in un altro e in ciascuna coppia vanno piazzati gli stessi due numeri (1 e 8 nel caso in figura 4.8), rimangono due scelte possibili.

5	3	9	1	6	8	7	2	4
7	4	6	3	5	2	8	1	9
8	2	1	9	4	7	6	3	5
2	5	3	4	7	6	9	8	1
9	8	7	5	1	3	4	6	2
1	6	4	2	8	9	5	7	3
3	7	2	6	9	4	1	5	8
6	9	5	8	2	1	3	4	7
4	1	8	7	3	5	2	9	6

FIGURA 4.8.

Dalla teoria alla pratica

Come atto conclusivo del laboratorio abbiamo voluto dare ad ogni partecipante un ricordo tangibile da poter anche condividere con amici o familiari e abbiamo consegnato a ciascuno una tavoletta di cioccolato. Inspiegabilmente, esse avevano un angolo contrassegnato da un inquietante segno rosso...

Bibliografia

[1] B. Bollobas, *Modern Graph Theory.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 184, Springer, New York, 1998.

[2] A. E. Brouwer, G. Horvath, I. Molnar-Saska, C. Szabo, *On three-rowed Chomp.* Electronic Journal of combinatorial number theory 5 (2005)

[3] J. Draisma, S. van Rijnswou; *How to chomp forests, and some other graphs.* Preprint at
`http://www.math.unibas.ch/ draisma/recreational/graphchomp.pdf`

[4] B. Felgenhauer, F. Jarvis; *Enumerating possible Sudoku grids.*
`http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/sudoku.pdf`

[5] B. Felgenhauer, F. Jarvis; *Mathematics of Sudoku I.*
`http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/felgenhauer_jarvis_spec1.pdf`

[6] Martin Gardner; *Mathematical Games.* Scientific American, Jan. 1973, pp. 110-111.

[7] Paul Halmos; *Problems for Mathematicians, Young and Old.* Dolciani Math. Expositions Nr. 12, Math. Assoc. America, 1991. ISBN: 0-88385-320-5. pp 43-46 and 212-215 riguardano il Chomp.

[8] I.N. Herstein; *Algebra.* Editori Riuniti, Roma, 1994.

[9] J. Hintikka, G. Sandu; *Game-theoretic semantics*, in Handbook of logic and language, 361-410, North-Holland, Amsterdam, 1997.

[10] `http://utenti.quipo.it/base5/jsgioco15/g15did.htm`

[11] `http://en.wikipedia.org/wiki/Fifteen_puzzle`

[12] *Per informazioni sui number place con numero minimo di indizi*:
`http://sudokugarden.de/en/info/minimal`

[13] *Per un programma completo per creare Sudoku, contare il numero si soluzioni e altro:* `http://www.scanraid.com/sudoku.htm`

[14] *Per il blog "Caffè e Matematica", dove si discute anche di Sudoku,*
`http://www.paranoiko.com/blog/`

Bonus track

A cura di Giulio Tiozzo.

E ora qualcosa di completamente simile

Ovvero: mettiamo in pratica con nuovi esempi le strategie studiate nel laboratorio.

Vediamo alcuni esempi di giochi e rompicapi formulabili su scacchiere che si risolvono con osservazioni di sapore "matematico". Premetto che in questa sezione tutti i giochi saranno di tipo finito-finito e non saranno possibili condizioni di parità, perciò avrà sempre senso chiedersi

Quale dei due giocatori ha una strategia vincente?

Simmetria

Iniziamo considerando la seguente situazione:

Problema 1. Due giocatori giocano al seguente gioco su una scacchiera 8×8: a turno ogni giocatore mette un cavallo sulla scacchiera, e non può metterlo in una casella minacciata da uno dei cavalli messi dall'avversario. Perde chi non può muovere. Quale dei due giocatori ha una strategia vincente?

Soluzione. Appena si considerano tutte le alternative possibili ci si rende conto che il numero di configurazioni da trattare è enorme; fortunatamente in questo caso esiste una considerazione molto semplice che permette di risolvere il problema. Consideriamo infatti la simmetria rispetto al centro della scacchiera: in questo gioco il secondo giocatore, giocando "a specchio, è sicuro di avere sempre una mossa a disposizione e quindi non potrà mai perdere. Non essendo possibile il pareggio, è anche sicuro di vincere. Supponiamo infatti che il gioco sia andato avanti in modo simmetrico per un certo numero di mosse; dopo la mossa del secondo giocatore si ha una situazione simmetrica rispetto al centro della scacchiera. Se a questo punto il primo giocatore non ha mosse possibili, allora il secondo ha vinto. Supponiamo invece che abbia a disposizione la casella X: ciò vuol dire che X è libera e non è minacciata da nessun cavallo del secondo giocatore. Essendo la situazione simmetrica, questo vuol dire anche che la casella simmetrica di X è libera e non è minacciata dai cavalli del primo giocatore. Quindi il secondo giocatore può mettere il proprio cavallo nella casella simmetrica ad X se tale casella non è minacciata dall'ultimo pezzo messo dal primo giocatore; tale pezzo è in X e, per come è fatta la mossa di spostamento del cavallo degli scacchi, non può minacciare la pedina simmetrica ad X rispetto al centro (provare per credere). Concludiamo che il secondo potrà sempre rispondere alle mosse del primo giocatore, conducendolo ad una lenta ma inesorabile sconfitta.

Cambiamo ora leggermente le regole del gioco:

Problema 2. Due giocatori giocano al seguente gioco su una scacchiera 8×8: a turno ogni giocatore mette un alfiere sulla scacchiera, e non può metterlo in una casella minacciata da uno degli alfieri messi dall'avversario. Perde chi non può muovere. Quale dei due giocatori ha una strategia vincente?

Osserviamo subito che la strategia precedente non funziona: infatti se il primo giocatore muove su una delle diagonali lunghe (quelle che comprendono gli angoli della scacchiera) allora il secondo non può muovere in modo simmetrico rispetto al centro, perché tale casella risulta minacciata dall'alfiere messo all'inizio; riuscite a vedere però un altro tipo di simmetria che consente di trovare una strategia ottimale per il secondo giocatore?

Soluzione. è sufficiente considerare la simmetria assiale rispetto all'asse di una coppia di lati opposti della scacchiera: lascio a voi tutti i dettagli per dimostrare che questa è effettivamente una strategia vincente.

Vi suggerisco di notare il seguente fatto nei due problemi proposti: *nessuna posizione è minacciata dalla sua simmetrica* (dove le parole "minacciata e "simmetrica vanno opportunamente interpretate nei 2 casi). Ancora una volta considerare delle proprietà generali ci consente di risolvere diversi problemi con uno stesso metodo: questa attitudine è sicuramente una delle caratteristiche comuni a tutti i rami della matematica.

Vi lascio infine un'ulteriore variante del problema, questa volta senza dirvi la soluzione:

Problema 3. Due giocatori giocano al seguente gioco su una scacchiera 7×7: a turno ogni giocatore mette un cavallo sulla scacchiera, e non può metterlo in una casella minacciata da uno dei cavalli messi dall'avversario. Perde chi non può muovere. Quale dei due giocatori ha una strategia vincente?

Invarianti

Nell'affrontare il gioco del 15 abbiamo capito che quando abbiamo diverse mosse possibili è importante considerare ciò che cambia e ciò che rimane invariato durante il gioco. Vediamo un altro esempio:

Problema 4. È data una scacchiera 3×3 contenente i numeri da 1 a 9 nell'ordine, come in figura (A); a ogni mossa possiamo aggiungere o togliere uno *stesso* numero intero da due caselle adiacenti (dove si considerano "adiacenti" due caselle che abbiano in comune un lato); possiamo con questo tipo di mosse ottenere la configurazione di figura (B)?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

(A)

7	8	9
6	3	4
3	5	1

(B)

7	8	9
6	2	4
3	5	1

(C)

Soluzione. La somma di tutti i numeri sulla scacchiera aumenta o diminuisce ogni volta di un numero pari, poiché aggiungiamo o togliamo lo stesso numero da due caselle, quindi alla somma aggiungeremo o toglieremo il doppio di un numero, che è sempre pari. Poiché la somma nella configurazione (A) è dispari e nella configurazione (B) è pari, allora non si potrà mai passare da una configurazione all'altra.

Problema 5. Possiamo con lo stesso tipo di mosse passare dalla configurazione (A) alla configurazione (C)?

Soluzione. La somma di tutti i numeri stavolta è uguale a quella iniziale, essendo presenti di nuovo tutti i numeri da 1 a 9, ma in un altro ordine: possiamo però costruire un invariante più raffinato che ci permette di dimostrare che questa configurazione non verrà mai raggiunta:

$$\left(\begin{array}{c}\text{somma dei numeri}\\ \text{nelle caselle ai vertici}\end{array}\right)-\left(\begin{array}{c}\text{somma dei numeri}\\ \text{nelle caselle ai lati}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\text{numero}\\ \text{al centro}\end{array}\right).$$

I valori presenti in due caselle adiacenti verranno sempre contati con segno opposto nella somma; di conseguenza il numero aggiunto a entrambe le caselle verrà una volta contato con segno positivo e una volta con segno negativo e di conseguenza la somma alternata si manterrà costante ad ogni mossa. Notiamo che in (A) tale somma è $1-2+3-4+5-6+7-8+9 = 5$ e in (C) vale $7-8+9-6+2-4+3-5+1 = -1$, quindi tale posizione non è raggiungibile da quella iniziale.

E ora tocca a voi!

Problema 6. Su ogni casella di una scacchiera 8×8 è scritto un numero intero. Ad ogni mossa posso scegliere un quadrato 3×3 o 4×4 e aggiungere 1 a tutti i numeri di quel quadrato. Posso sempre ottenere che tutti i numeri sulla scacchiera siano pari? Posso sempre ottenere che tutti i numeri sulla scacchiera siano multipli di 3?

Suggerimento: eliminare alcune colonne dalla scacchiera...

Problema 7. Sedici lampadine sono sistemate a formare un quadrato 4×4; ad ogni mossa scelgo una riga, una colonna o una diagonale e posso cambiare lo stato (acceso o spento) di tutte le lampadine su questa riga, colonna o diagonale. Se all'inizio tutte le lampadine sono spente, posso arrivare nella configurazione in cui l'unica lampadina accesa è in una casella adiacente a una casella d'angolo?

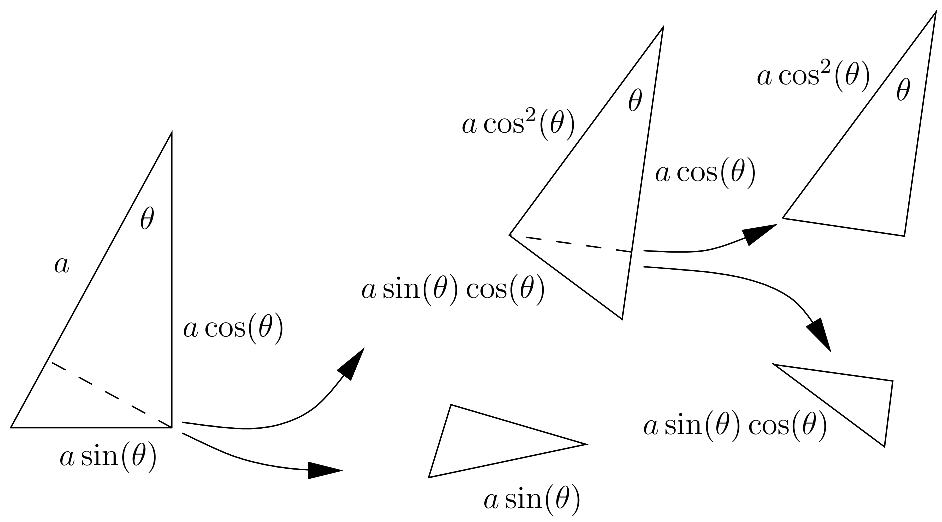
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

$\xrightarrow{?}$

0	1	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Un curioso isomorfismo

Sul tavolo ci sono quattro triangoli rettangoli uguali di carta. Con un paio di forbici possiamo tagliare in due uno dei triangoli lungo l'altezza relativa all'ipotenusa, ottenendo ancora due triangoli rettangoli. Operando in questo modo potremo riuscire ad ottenere triangoli tutti diversi fra loro?



Chiamiamo a la lunghezza dell'ipotenusa dei triangoli iniziali. Notiamo che, tagliando lungo l'altezza relativa all'ipotenusa, si ottengono due triangoli rettangoli che sono simili a quello iniziale; di conseguenza anche procedendo coi tagli si ottengono sempre triangoli rettangoli simili a quelli di partenza e pertanto essi si possono identificare in maniera univoca considerando la lunghezza della loro ipotenusa. Se parto da un triangolo di ipotenusa l e chiamo θ uno dei due angoli acuti, ottengo dopo il taglio due triangoli di ipotenuse $l \sin\theta$ e $l \cos\theta$; partendo da un triangolo di ipotenusa a si potranno ottenere quindi, con un numero arbitrario di tagli, triangoli di ipotenusa $a\cos^h\theta\sin^k\theta$, con h e k numeri naturali.

Possiamo quindi associare ad ognuno di questi triangoli una coppia di numeri naturali, precisamente al triangolo di ipotenusa $a\cos^h\theta\sin^k\theta$ la coppia (h, k); di conseguenza la mossa di taglio corrisponde a sostituire il triangolo (h, k) con i due triangoli $(h+1, k)$ e $(h, k+1)$. Vediamo quindi che, sorprendentemente, il gioco può essere riformulato in questa maniera:

Problema 8. Su un piano cartesiano infinito mettiamo 4 pedine nella posizione $(0, 0)$; ad ogni mossa possiamo sostituire una pedina nella posizione (a, b) con due pedine, una in posizione $(a, b + 1)$ e una in posizione $(a+1, b)$; riusciremo in un numero finito di mosse ad avere pedine tutte in posizioni diverse?

Siamo riusciti quindi a costruire un isomorfismo fra due giochi che apparentemente non hanno nulla in comune: da una parte si tagliano dei triangoli, dall'altra si spostano delle pedine. Una volta convinti che questi giochi siano davvero isomorfi, ci si può dedicare a svelarne la soluzione. Proprio per l'isomorfismo, infatti, è sufficiente dare la soluzione di uno dei due: ci occuperemo quindi della formulazione con le pedine.

La soluzione del gioco è molto elegante, ma richiede della matematica leggermente più sofisticata di quella fin qui utilizzata. Niente di particolarmente complicato, ma forse un po' oscura per chi non frequenta l'ultimo anno. In questo caso l'idea chiave è quella di associare a ogni pedina in posizione (x, y) il numero $\frac{1}{2^{x+y}}$ e poi sommare tutti i numeri così ottenuti. Tale somma anche questa volta ci fornisce un invariante, il che dimostra come spesso per trovare l'invariante giusto sia necessario adoperare idee molto raffinate. Il fatto che questo numero non varii durante il gioco è subito dimostrato: infatti alla pedina in (a, b) è associato il numero $\frac{1}{2^{a+b}}$, mentre alle due pedine in $(a, b + 1)$ e $(a + 1, b)$ è associata la somma

$$\frac{1}{2^{a+b+1}} + \frac{1}{2^{a+b+1}} = \frac{1}{2^{a+b}}.$$

Come al solito confrontiamo quindi il valore dell'invariante nella posizione iniziale e in quella finale:

- ogni pedina in $(0, 0)$ vale 1, quindi
  la somma relativa alla posizione iniziale è 4;
- supponiamo di arrivare in una situazione in cui su ogni casella c'è al più una pedina: essendo tutte le pedine in numero finito, esisterebbe un quadrato con vertici a coordinate intere che le contenga tutte; di conseguenza l'invariante calcolato nella nostra

situazione finale sarebbe minore o uguale di quello che calcoleremmo se in ogni casella di questo quadrato mettessimo una pedina. Sia N la lunghezza del lato del quadrato, che quindi ha il vertice in basso a sinistra in $(0, 0)$ e il vertice in alto a destra in (N, N); la somma sulla prima colonna sarebbe

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^N} = 2 - \frac{1}{2^N},$$

quella sulla seconda colonna sarebbe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{N+1}} = \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2^N}),$$

e così via fino alla $(N+1)$-esima colonna. Sommando tutti questi risultati otteniamo che *la somma relativa alla posizione finale è*

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^N}\right)\left(2 - \frac{1}{2^N}\right) = \left(2 - \frac{1}{2^N}\right)^2,$$

che è *strettamente minore di* 4.

Di conseguenza abbiamo ancora una volta dimostrato che le due configurazioni non sono ottenibili una dall'altra attraverso le mosse previste.

E per finire...

...ancora qualche sfida!

Concludiamo questa rassegna con alcuni problemi dei quali non fornirò la soluzione, e con cui potete cimentarvi se ne avete voglia...

Problema 9. Una pedina è sistemata all'angolo di una scacchiera quadrata di lato n: a turno i due giocatori muovono la pedina in una casella adiacente a quella attualmente occupata; è vietato però tornare in una casella che era già stata occupata dalla pedina precedentemente. Perde chi non ha più mosse possibili. Quale dei due giocatori ha una strategia vincente?

Cosa succede invece se all'inizio la pedina è collocata in una casella adiacente a una casella d'angolo?

Se alle scacchiere preferite i grafi, potete provare il seguente

Problema 10. Al 4297-esimo CMA (il Congresso dei Matematici dell'Antichità) si è deciso di attribuire un "premio simpatia ai matematici che conoscono personalmente tutti gli altri invitati al congresso. Archimede, incaricato di costruire il premio, affida a Euclide il compito di controllare quali invitati effettivamente si conoscano e quali no. Tornato dall'ispezione Euclide afferma: "In ogni gruppo di 4 persone almeno un invitato conosce gli altri 3". Archimede risponde: "Bene, allora dovremo consegnare almeno un premio". Come ha fatto a rispondere?

Problema 11. A e B giocano su una scacchiera quadrata di lato pari. Ad ogni turno A indica una casella libera della scacchiera; B sceglie una casella libera adiacente a quella indicata da A e sistema una tessera del domino sulla scacchiera, in modo che copra esattamente le 2 caselle scelte. A vince se riesce a ricoprire tutta la scacchiera di tessere del domino; se a un certo punto non restano mosse possibili, ma la scacchiera non è ricoperta interamente da tessere, allora vince B. Chi dei due ha una strategia vincente?

Bibliografia per l'appendice

A. Engel; *Problem Solving Strategies.* Problem Books in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1998.