

# CORSO ALGEBRE E GRUPPI DI LIE. ANNO 2010-2011

## PROGRAMMA.

- Introduzione ai gruppi di Lie. Sottogruppi a un parametro. La mappa esponenziale.
- Classificazione dei gruppi di Lie abeliani connessi. Definizione di sottogruppo di Lie. Caratterizzazione dei sottogruppi chiusi. Esempi: gruppi di trasformazioni unitarie e ortogonali.
- I gruppi simplettici e altri gruppi classici. Esercizi e prime proprietà (connessione, caratterizzazione del tangente..).
- Rappresentazioni di gruppi topologici compatti. Informazioni sulla misura di Haar. Tori massimali nei gruppi di Lie compatti.
- Azione aggiunta di un gruppo compatto sul tangente. Caso dei tori e dei tori massimali. Radici. Esempi  $SU(n)$ ,  $SP(n)$ ,  $SO(2n)$ ,  $SO(2n + 1)$ .
- Sistemi di radici, diagrammi di Dynkin e loro classificazione completa. Gruppi di Weyl.
- Algebre di Lie. Algebra di Lie associata ad un gruppo di Lie. Le azioni aggiunte Ad e ad. Forme bilineari e invarianza. Formula di Campbell Hausdorff (solo enunciato).
- Tutti i tori massimali di un gruppo compatto sono coniugati. Le algebre di Lie di un gruppo compatto sono riduttive. La forma di Killing.
- Costruzione di un gruppo di Lie compatto avente una data algebra di Lie con forma di Killing definita negativa. Caratterizzazione delle algebre di Lie semisemplici compatte. Rappresentazioni irriducibili di un gruppo topologico e il Lemma di Schur.
- Unicità della decomposizione in irriducibili di una rappresentazione di un gruppo. Il trucco unitario: esempio nel caso di  $sl(n, C)$ . Classificazione delle rappresentazioni irriducibili di  $sl(2, C)$ .
- Sollevamento della struttura di gruppo topologico ad un rivestimento. Caratterizzazione della famiglia di gruppi di Lie che hanno una data algebra di Lie fissata. Calcolo del primo gruppo di omotopia per alcuni gruppi classici complessi.
- Algebre risolubili, prime proprietà. Il teorema di Lie. Algebre torali massimali e splitting della complessificazione di un'algebra di Lie semisemplice compatta come somma dei suoi spazi peso rispetto alle radici.

- Come si ottiene il sistema di radici di un'algebra di Lie semisemplice complessa. Confronti fra metodo geometrico (visto per i gruppi compatti) e algebrico di ottenere un sistema di radici. Corollario: dimostrazione del teorema di classificazione delle algebre di Lie compatte reali. Informazioni sul fatto che questo si estende al teorema di classificazione delle algebre di Lie semisemplici complesse.
- Algebre tensoriali e simmetriche. L'algebra involuante di un'algebra di Lie, il teorema di Poincarè-Birkhoff-Witt e corollari.
- Azioni dell'algebra involuante. Dimostrazione del teorema di Poincarè Birkhoff Witt.
- Rappresentazioni di un'algebra di Lie semisemplice complessa. Spazi peso. Moduli standard ciclici e loro caratterizzazione. Teorema: ad ogni elemento nel duale della sottoalgebra torale corrisponde un unico modulo standard ciclico irriducibile.
- Teorema di classificazione completa delle rappresentazioni irriducibili complesse di dimensione finita di un'algebra di Lie semisemplice complessa. Esempi: rappresentazioni di  $sl(n, C)$  nell'algebra esterna e nell'algebra simmetrica.
- Cenni su: decomposizione di Levi, Teorema di Levi-Malcev, Teorema di Ado, rappresentazioni irriducibili di algebre di Lie non semisemplici.
- Algebre di Clifford, costruzione dei gruppi Spin e teoremi di rivestimento dei gruppi ortogonali.