LA FORMULA DI GRASSMANN PER SOTTOSPAZI E IL CONCETTO DI SOMMA DIRETTA

1. La formula di Grassmann per le intersezioni e le somme di sottospazi.

Dati due sottospazi vettoriali A e B in $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 (dunque due piani contenenti O), di che dimensione può essere la loro intersezione?

Possono intersecarsi lungo una retta: in tal caso si nota che il sottospazio $A+B$ è tutto $\mathbb{R}^3$.

Oppure vale $A = B$: allora la loro intersezione è uguale ad A (e a B) e ha dimensione 2, e anche il sottospazio $A+B$ coincide con A.

In entrambi i casi, la somma delle dimensioni di $A \cap B$ e di $A+B$ è sempre uguale a 4.

E se in $\mathbb{R}^4$ consideriamo un piano C e un sottospazio D di dimensione 3?[1] Possono darsi tre casi per l'intersezione: $C \cap D = \{O\}$, $dim\ (C \cap D) = 1$, $C \cap D = C$. Qualunque sia il caso, si verifica sempre (esercizio!) che

$$dim\ C \cap D + dim\ (C+D) = 5.$$

Sembra di intuire che c'è una relazione fra le dimensioni in gioco. In effetti la relazione in questione viene illustrata dalla seguente *formula di Grassmann*:

$$dim\ A \cap B + dim\ (A+B) = dim\ A + dim\ B.$$

Questa formula ci dice, per esempio, che in $\mathbb{R}^5$ due sottospazi di dimensione 3 devono avere intersezione diversa da $\{O\}$: infatti $dim\ A = dim\ B = 3$ e inoltre, visto che $A+B$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^5$, $dim\ A+B \leq 5$, dunque $dim\ A \cap B \geq 1$.

Dimostreremo la formula di Grassmann come applicazione del teorema sulle dimensioni del nucleo e dell'immagine di una applicazione lineare.

Premettiamo un'osservazione sul prodotto cartesiano di due spazi vettoriali. Dati due spazi vettoriali V e W sul campo $\mathbb{K}$, sul loro prodotto cartesiano $V \times W$ c'è, come sappiamo, una struttura "naturale" di spazio vettoriale, dove la somma è definita da:

$$(v, w) + (v_1, w_1) = (v + v_1, w + w_1)$$

e il prodotto per scalare da:

$$\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w).$$

Si verifica immediatamente che, se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è una base di V e $\{w_1, \dots, w_m\}$ è una base di W, allora $\{(v_1, O), (v_2, O), \dots, (v_n, O), (O, w_1), \dots, (O, w_m)\}$ è una base[2] di $V \times W$, che dunque ha dimensione $n + m = (dim\ V) + (dim\ W)$.

[1] In generale, se V è uno spazio vettoriale di dimensione n e H è un sottospazio di dimensione $n-1$ si dice che H è un *iperpiano* di V.

[2] Una precisazione: lo O che compare nelle coppie (v_i, O) è lo O dello spazio W, mentre lo O che compare in (O, w_j) è lo O di V. Qui abbiamo scelto, per semplicità, di non aggiungere indici al vettore O.

Teorema 1.1 (Formula di Grassmann)**.** *Dati due sottospazi A, B di uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$, vale*

$$dim\ A + dim\ B = dim\ A \cap B + dim\ (A + B)$$

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione

$$\Phi\ :\ A \times B \to V$$

definita da $\Phi((a, b)) = a - b$. Si verifica (facile esercizio) che Φ è lineare. Dimostreremo il teorema studiando il nucleo e l'immagine di Φ.

Cosa sappiamo dire del nucleo di Φ ? Per definizione

$$Ker\ \Phi = \{(a, b) \in A \times B \mid a - b = O\}$$

dunque

$$Ker\ \Phi = \{(a, b) \in A \times B \mid a = b\}$$

Dunque una coppia (a, b) appartiene a $Ker\ \Phi$ se e solo se $a = b$ è un elemento di $A \cap B$. L'ultima equazione può allora essere riscritta così:

$$Ker\ \Phi = \{(z, z) \in A \times B \mid z \in A \cap B\}.$$

Si nota subito che l'applicazione lineare $\theta : A \cap B \to Ker\ \Phi$ data da $z \to (z, z)$ è iniettiva e surgettiva, dunque è un isomorfismo. Allora il suo dominio e il suo codominio hanno la stessa dimensione, ovvero

$$dim\ Ker\ \Phi = dim\ A \cap B$$

Cosa sappiamo dire dell'immagine di Φ? Per definizione

$$Imm\ \Phi = \{a - b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Visto che B, come ogni spazio vettoriale, se contiene un elemento b contiene anche il suo opposto $-b$, possiamo scrivere la seguente uguaglianza fra insiemi:

$$\{a - b \mid a \in A,\ b \in B\} = \{a + b \in V \mid a \in A,\ b \in B\} = A + B.$$

Dunque

$$Imm\ \Phi = A + B$$

Per il Teorema della dimensione del nucleo e dell'immagine applicato a Φ sappiamo che:

$$dim\ (A \times B) = dim\ Ker\ \Phi + dim\ Imm\ \Phi.$$

Questa formula, viste le osservazioni fatte fin qui, si traduce come:

$$dim\ A + dim\ B = dim\ A \cap B + dim\ (A + B)$$

□

Esercizio 1.2. Dare una dimostrazione alternativa della formula di Grassmann nel seguente modo: fissare una base $z_1, z_2, \ldots, z_k$ di $A \cap B$ e usare il teorema di completamento per completarla ad una base di A aggiungendo certi vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$. Poi usare di nuovo il teorema di completamento per completare la base $z_1, z_2, \ldots, z_k$ di $A \cap B$ ad una base di B aggiungendo certi vettori $w_1, w_2, \ldots, w_s$. A questo punto dimostrare che i vettori $z_1, z_2, \ldots, z_k, v_1, v_2, \ldots, v_r, w_1, w_2, \ldots, w_s$ sono una base di $A + B$.

2. Un metodo per calcolare l'intersezione di due sottospazi vettoriali

Fin qui abbiamo visto essenzialmente due modi di presentare un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V: come span di certi vettori ($Span(v_1, ..., v_r)$) oppure come nucleo di una applicazione lineare, il che equivale a dire come insieme delle soluzioni di un sistema lineare *omogeneo* ossia della forma

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo due sottospazi, U e W, di V. Se entrambi sono presentati come insieme delle soluzioni di un sistema è facile calcolare $U \cap W$: basta calcolare le soluzioni del sistema 'doppio', ottenuto considerando tutte le equazioni dei due sistemi.

Per esempio se U e W in $\mathbb{R}^4$ sono dati rispettivamente dalle soluzioni dei sistemi S_U:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4w & = 0 \\ 2x + y + z + w & = 0 \end{cases}$$

e S_W:

$$\begin{cases} x + 2y + z + w & = 0 \\ x + z + w & = 0 \end{cases}$$

allora $U \cap W$ è dato dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4w & = 0 \\ 2x + y + z + w & = 0 \\ x + 2y + z + w & = 0 \\ x + z + w & = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2.1. Calcolare $U \cap W$ nell'esempio proposto.

Ma come possiamo calcolare $U \cap W$ se i due sottospazi sono presentati come span di certi vettori? Consideriamo per esempio U e W in $\mathbb{R}^5$ definiti così:

$$U = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix})$$

$$W = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Un metodo per calcolare $U \cap W$ è quello di esprimere U e W come soluzioni di un sistema lineare. Mostriamo come si può fare, cominciando da U.

Per prima cosa scriviamo la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 2 & 4 & x_2 \\ 3 & 7 & x_3 \\ -1 & 2 & x_4 \\ 2 & -1 & x_5 \end{pmatrix}$$

Le prime due colonne sono i vettori della base di U, la terza colonna è data dal vettore $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$, dove x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sono dei numeri reali. Cosa possiamo dire sul rango di questa matrice? Se il vettore v appartiene ad U significa che è combinazione lineare delle prime due colonne, dunque il rango della matrice è 2. Se il vettore non appartiene ad U allora il rango della matrice è 3, perchè la matrice è formata da tre colonne linearmente indipendenti.

Dunque il calcolo del rango della matrice può essere utilizzato per decidere se v appartiene o no ad U. Possiamo allora, con delle mosse di riga, ridurre la matrice nella seguente forma:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 - 3x_1 \\ 0 & 0 & 2x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & 13x_1 - 4x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & -17x_1 + 5x_3 + x_5 \end{pmatrix}$$

Nel fare le mosse di riga il nostro scopo è stato quello di ridurre a scalini per riga la 'sottomatrice' data dalle prime due colonne. La matrice R ha lo stesso rango della matrice iniziale dato che le mosse di riga non cambiano il rango, e notiamo che ha rango due se e solo se i coefficienti x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 & = 0 \\ 13x_1 - 4x_3 + x_4 & = 0 \\ -17x_1 + 5x_3 + x_5 & = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Dunque il vettore $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ appartiene ad U se e solo se le sue coordinate soddisfano il sistema (2.1). Questo equivale a dire che le soluzioni del sistema coincidono con gli elementi di U. Abbiamo raggiunto il nostro scopo, ossia abbiamo presentato il sottospazio U come insieme di soluzioni di un sistema lineare.

Osservazione 2.2. Visto che U ha dimensione 2, un sistema le cui soluzioni coincidono con l'insieme U deve avere almeno 3 equazioni. Infatti la dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo è uguale al numero di variabili del sistema meno il rango della matrice (ricordiamo che tale spazio lo si può vedere come un nucleo, dunque la sua dimensione è uguale alla dimensione dello spazio di partenza - ovvero il numero di colonne della matrice - meno il rango della matrice).

Nel nostro caso le variabili sono cinque e dunque il rango deve essere tre, ovvero devono esserci almeno tre equazioni non nulle nel sistema. Questo vuol dire che nel nostro esempio abbiamo ottenuto una descrizione di U *col numero minimo possibile di equazioni* .

Esercizio 2.3. Dimostrare che l'osservazione precedente vale in generale: quando si parte da un sottospazio U di $\mathbb{K}^n$ di cui conosciamo una base $v_1, ...v_r$, il metodo descritto sopra permette di presentare U come lo spazio delle soluzioni di un sistema di $n - r$ equazioni, il numero minimo possibile di equazioni.

Per finire il calcolo di $U \cap W$ possiamo allo stesso modo ottenere un sistema le cui soluzioni sono tutti e soli i vettori di W:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + 2x_5 & = 0 \\ -10x_1 + 9x_2 - 5x_3 + 4x_4 & = 0 \end{cases}$$

A questo punto possiamo ottenere $U \cap W$ risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 & = 0 \\ 13x_1 - 4x_3 + 1x_4 & = 0 \\ -17x_1 + 5x_3 + 1x_5 & = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_5 & = 0 \\ -10x_1 + 9x_2 - 5x_3 + 4x_4 & = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2.4. Verificare nel dettaglio tutti i calcoli di questo paragrafo e concludere l'esercizio, indicando una base di $U \cap V$. La dimensione risulta uguale a quella prevista dalla formula di Grassmann (1.1)?

3. Somma diretta di due sottospazi vettoriali

Si dice che due sottospazi U e W di uno spazio vettoriale V formano una *somma diretta* se vale che $U \cap W = \{O\}$.[3] In questo caso, come sappiamo dalla formula di Grassmann, la dimensione di $U + W$ è 'la massima possibile', ovvero è uguale a $dim\ U + dim\ W$. La formula di Grassmann ci garantisce che vale anche il viceversa, ossia due sottospazi sono in somma diretta se e solo se $dim\ (U + W) = dim\ U + dim\ W$.

Quando siamo sicuri che $U + W$ è la somma di due sottospazi che sono in somma diretta, al posto di $U + W$ possiamo, se ci torna utile, scrivere $U \oplus W$ invece di $U + W$ (ma si tratta sempre dello stesso spazio, solo che col simbolo $\oplus$ si vuole dare al lettore un'informazione in più a colpo d'occhio).

Osserviamo se uno dei due spazi è $\{O\}$, per esempio se $W = \{O\}$, allora U e W sono per definizione in somma diretta e la loro somma è U.

Il caso di maggior interesse è dunque quando entrambi gli spazi sono diversi da $\{O\}$. In tal caso per avere una base di $U \oplus W$ basta fare l'unione di una base di U con una base di W. Infatti, supponiamo che U abbia dimensione $a > 0$ e W abbia dimensione $b > 0$. I vettori nell'unione delle basi sono $a + b$: si osserva immediatamente che i vettori di questa unione generano $U \oplus W$ e inoltre sono nel 'giusto numero' (perché $a + b = dim\ U + dim\ W = dim\ U \oplus W$), dunque sono una base.

[3]ATTENZIONE, la definizione sul Lang, paragrafo 1.4, è diversa dalla nostra, perché aggiunge un'altra richiesta. Ne riparleremo fra poco.

Per esempio, in $\mathbb{R}^4$, il sottospazio

$$U = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix})$$

e il sottospazio

$$W = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

sono in somma diretta, e una base di $U \oplus W$ è data dai tre vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dati due sottospazi U e W di uno spazio vettoriale V, può capitare che siano in somma diretta e che inoltre $U \oplus W = V$. Si dice in questo caso che i due sottospazi sono l'uno il *complementare* dell'altro e che V si *spezza* (o si *decompone*) come somma diretta di U e V. [4]

Un esempio banale di sottospazi complementari è fornito da $\{O\}$ e da V stesso, visto che vale $\{O\} \oplus V = V$. Osserviamo inoltre che è sempre possibile trovare uno spazio complementare ad un sottospazio proprio U di V. Infatti basta prendere una base di U e completarla ad una base di V. I vettori che abbiamo aggiunto sono la base di uno spazio vettoriale W complementare a U. A seconda di come completiamo la base possiamo ottenere altri complementari diversi da W, come illustra la prossima osservazione.

Osservazione 3.1. Attenzione: un sottospazio vettoriale U di V che non è uguale a V possiede in generale molti complementari (infiniti, se il campo $\mathbb{K}$ ha infiniti elementi). Per esempio, in $\mathbb{R}^3$ un piano passante per l'origine ha per complementare una qualunque retta passante per l'origine e che non giace sul piano. Come ulteriore esempio, il lettore può facilmente verificare che, in $\mathbb{R}^4$, il sottospazio

$$U = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix})$$

ha come complementare

$$W_1 = Span(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

[4] Per il Lang due sottospazi sono in somma diretta se la loro intersezione è $\{O\}$ e inoltre la loro somma decompone V. Come abbiamo anticipato, in questo caso per varie ragioni ci discostiamo dal Lang: se prestate un po' di attenzione, non avrete problemi.

ma anche

$$W_2 = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$$

4. Somma diretta di k sottospazi vettoriali

Iniziamo con un'osservazione sulla somma di sottospazi vettoriali, che fin qui abbiamo definito solo per due sottospazi, ma che vogliamo estendere al caso di k sottospazi.

Dati tre sottospazi A, B, C di uno spazio vettoriale V, possiamo costruire $A+B$. Inoltre, una volta costruito $(A+B)$ possiamo costruire $(A+B)+C$. Analogamente, possiamo costruire $B+C$. Inoltre, una volta costruito $(B+C)$ possiamo costruire $A+(B+C)$. Non è difficile verificare che $(A+B)+C = A+(B+C)$ e che entrambi coincidono con il seguente sottospazio, che chiameremo $A+B+C$ senza parentesi:

$$A + B + C = \{v_1 + v_2 + v_3 \mid v_1 \in A, v_2 \in B, v_3 \in C\}.$$

Allo stesso modo si mostra che la somma di k sottospazi $U_1, U_2, \dots, U_k$ (con $k \geq 2$) è ben definita ed è il sottospazio:

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_k = \{u_1 + u_2 + \cdots + u_k \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \dots, u_k \in U_k\}.$$

In generale, dati k sottospazi $U_1, U_2, \dots, U_k$ (con $k \geq 2$) di uno spazio vettoriale V, si dice che tali sottospazi sono in somma diretta se, per ogni $i = 1, 2, \dots, k$, vale che l'intersezione di U_i con la somma di tutti gli altri è uguale a $\{O\}$, ovvero

$$U_i \cap (U_1 + \cdots + \widehat{U}_i + \cdots + U_k) = \{O\}$$

dove il simbolo $\widehat{U}_i$ indica che nella somma si è saltato il termine U_i.

In tal caso per indicare $U_1 + U_2 + \cdots + U_k$ si può usare la notazione:

$$U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$$

se desideriamo mettere in evidenza il fatto che i sottospazi sono in somma diretta. Altrimenti possiamo non usarla: per esempio nella dimostrazione che troverete fra poche righe sceglieremo di non usare il simbolo $\oplus$.

Si osserva immediatamente che nel caso $k = 2$ ritroviamo la definizione data nel paragrafo precedente.

Osservazione 4.1. Segue dalla definizione che se i sottospazi $U_1, U_2, \dots, U_k$ sono in somma diretta e ne leviamo alcuni, anche i sottospazi rimanenti sono in somma diretta (esercizio!).

Teorema 4.2. *Se $U_1, U_2, \dots, U_k$ sono in somma diretta, vale:*

$$dim\ (U_1 + U_2 + \cdots + U_k) = dim\ U_1 + dim\ U_2 + \cdots + \dim\ U_k$$

Dimostrazione. Dimostriamolo per induzione su k. Nel caso $k = 2$ l'enunciato è vero per la formula di Grassmann, come abbiamo già evidenziato nel paragrafo precedente.

Supponiamo adesso che l'enunciato sia vero per $k-1$ sottospazi in somma diretta. Consideriamo dei sottospazi $U_1, U_2, \dots, U_k$ in somma diretta e cerchiamo di capire quanto vale $dim\ (U_1 + U_2 + \cdots + U_k)$. Dato che anche $U_1, U_2, \dots, U_{k-1}$ sono in somma diretta, per ipotesi induttiva sappiamo che

$$dim\ (U_1 + U_2 + \cdots + U_{k-1}) = dim\ U_1 + dim\ U_2 + \cdots + dim\ U_{k-1}$$

Inoltre, visto che $U_1, U_2, \dots, U_k$ sono in somma diretta vale per definizione in particolare che

$$U_k \cap (U_1 + \cdots + U_{k-1}) = \{O\}$$

ossia che i due sottospazi U_k e $U_1 + \cdots + U_{k-1}$ sono in somma diretta. Allora possiamo scrivere:

$$dim\ ((U_1 + U_2 + \cdots + U_{k-1}) + U_k) = dim\ (U_1 + \cdots + U_{k-1}) + dim\ U_k =$$

$$= dim\ U_1 + dim\ U_2 + \cdots + dim\ U_{k-1} + dim\ U_k$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usata l'ipotesi induttiva.

Per completare il passo induttivo ricordiamo che, come abbiamo osservato all'inizio del paragrafo, lo spazio $(U_1 + U_2 + \cdots + U_{k-1}) + U_k$ coincide con $U_1 + U_2 + \cdots + U_k$.

$\square$

In base al teorema precedente, osserviamo che per trovare una base di

$$U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$$

basta scegliere una base per ognuno dei sottospazi U_i e poi fare l'unione (si vede immediatamente che questi elementi sono generatori e il loro numero è 'il numero giusto'). Se accade che

$$U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k = V$$

si dice che V si *spezza* o si *decompone* come somma diretta dei sottospazi $U_1, .., U_k$. In tal caso, scegliendo una base per ognuno dei sottospazi U_i e facendo l'unione otterremo una base di V.

5. Altri esercizi

Esercizio 5.1. Trovare un complementare in $\mathbb{R}^5$ del sottospazio

$$U = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Esercizio 5.2. Stabilire se i due sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix})$$

e

$$W = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$$

sono in somma diretta.

Esercizio 5.3. Dire se è possibile trovare in $\mathbb{R}^4$ tre sottospazi vettoriali A, B, C di dimensione 2 tali che $A \cap B = \{O\}$, $A \cap C = \{O\}$ e $B \cap C = \{O\}$.

Esercizio 5.4. Dati tre sottospazi vettoriali A, B, C di uno spazio vettoriale V, dare una buona definizione di $A + B + C$ e dire se è vera la formula:

$$dim\ (A + B + C) =$$

$$= dim\ A + dim\ B + dim\ C - dim\ (A \cap B) - dim\ (B \cap C) - dim\ (A \cap C) + dim\ (A \cap B \cap C)$$

Esercizio 5.5. Dimostrare che se uno spazio vettoriale V si decompone come somma diretta di due sottospazi A,B allora ogni vettore $v \in V$ può essere espresso in modo unico come $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in A, v_2 \in B$. Generalizzare dimostrando che se V si decompone come somma diretta di sottospazi $U_1, U_2, ..., U_k$ allora ogni $v \in V$ si può scrivere in modo unico come $v = v_1 + \cdots + v_k$, con $v_1 \in U_1, ..., v_k \in U_k$.

Esercizio 5.6. È vero che se per certi sottospazi $U_1, U_2, \ldots, U_k$ di uno spazio vettoriale V vale:

$$dim\ (U_1 + U_2 + \cdots + U_k) = dim\ U_1 + dim\ U_2 + \cdots + \dim\ U_k$$

allora $U_1, U_2, \ldots, U_k$ sono in somma diretta?