LA DIAGONALIZZAZIONE DI UN ENDOMORFISMO

1. Autovalori e autovettori di un endomorfismo lineare

Sia $T : V \to V$ un endomorfismo lineare dello spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$.

Definizione 1.1. Un vettore $v \in V - \{O\}$ si dice un autovettore di T se
$$T(v) = \lambda v$$
per un certo $\lambda \in \mathbb{K}$.

In altre parole un autovettore di T è un vettore **diverso da** O dello spazio V che ha la seguente proprietà: la T lo manda in un multiplo di sé stesso.

Definizione 1.2. Se $v \in V - \{O\}$ è un autovettore di T tale che
$$T(v) = \lambda v$$
allora lo scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ si dice autovalore di T relativo a v (e viceversa si dirà che v è un autovettore relativo all'autovalore λ).

Si noti che l'autovalore può essere $0 \in K$: se per esempio T non è iniettiva, ossia $Ker\ T \supsetneq \{O\}$, tutti gli elementi $w \in (Ker\ T) - \{O\}$ soddisfano
$$T(w) = O = 0\ w$$
ossia sono autovettori relativi all'autovalore 0.

Definizione 1.3. Dato $\lambda \in \mathbb{K}$ chiamiamo l'insieme
$$V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$$
autospazio relativo a λ.

Anche se abbiamo definito l'autospazio V_λ per qualunque $\lambda \in \mathbb{K}$, in realtà V_λ è sempre uguale a $\{O\}$ a meno che λ non sia un autovalore di T. Questo è dunque il caso interessante: se λ è un autovalore di T allora V_λ è costituito da O e da tutti gli autovettori relativi a λ.

Esercizio 1.4. Verificare che un autospazio V_λ è un sottospazio vettoriale di V.

Osservazione 1.5. In particolare abbiamo notato che $V_0 = Ker\ T$.

Perché per noi sono importanti autovettori e autovalori ?

Supponiamo che V abbia dimensione n e pensiamo a cosa succederebbe se riuscissimo a trovare una base di V, $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, composta solo da autovettori di T.

Avremmo, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$,
$$T(v_i) = \lambda_i v_i$$

per certi autovalori λ_i (sui quali non abbiamo informazioni, per esempio potrebbero anche essere tutti uguali $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$).

Come sarebbe fatta la matrice

$$[T]\begin{array}{l} \\ v_1, v_2, \ldots, v_n \\ v_1, v_2, \ldots, v_n \end{array}$$

associata a T rispetto a questa base ?

Ricordandosi come si costruiscono le matrici osserviamo che la prima colonna conterrebbe il vettore $T(v_1)$ scritto in termini della base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, ossia

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4 + \cdots + 0v_n$$

la seconda il vettore $T(v_2) = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + 0v_3 + \cdots + 0v_n$ e così via. Quindi la matrice sarebbe diagonale:

$$[T]\begin{array}{l} \\ v_1, v_2, \ldots, v_n \\ v_1, v_2, \ldots, v_n \end{array} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ora, una matrice diagonale è per noi "leggibilissima"; a colpo d'occhio possiamo sapere tutto di T: il suo rango (dunque anche la dimensione del nucleo), quali sono esattamente i vettori di $Ker\ T$, quali sono (se esistono) i sottospazi in cui T si comporta come l'identità, ossia i sottospazi costituiti dai vettori di V che T lascia fissi, eccetera.

Dunque studiamo gli autovalori e gli autovettori di T nella speranza di trovare "basi buone" che ci permettano di conoscere bene il comportamento di T.

Ma esistono sempre queste "basi buone", ossia basi costituite solo da autovettori di T ? NO, non sempre. Se per un certo endomorfismo T esiste una base buona si dice che T è *diagonalizzabile*, altrimenti T è *non diagonalizzabile*.

Esempio 1.6. Consideriamo l'endomorfismo $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dato da una *rotazione* di angolo θ con centro l'origine. Si verifica immediatamente che, rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^2$, questo endomorfismo è rappresentato dalla matrice

$$[R_\theta =]\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Per esempio, nel caso di una rotazione di 60^0 (ovvero $\frac{\pi}{3}$), abbiamo:

$$[R_{\frac{\pi}{3}}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Nel caso in cui $0 < \theta < \pi$, non ci sono vettori $v \neq O$ che vengono mandati in un multiplo di se stessi, visto che tutti i vettori vengono ruotati di un angolo che non è nullo e non è di 180^0. Dunque non ci sono autovettori e autovalori.

Nel caso $\theta = 0$ la rotazione è l'identità, dunque tutti i vettori $v \neq O$ sono autovettori relativi all'autovalore 1, e $V_1 = \mathbb{R}^2$.

Nel caso $\theta = \pi$ la rotazione è uguale a $-I$, dunque tutti i vettori $v \neq O$ sono autovettori relativi all'autovalore -1, e $V_{-1} = \mathbb{R}^2$.

Esempio 1.7. Consideriamo l'endomorfismo $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ che, rispetto alla base standard di $\mathbb{C}^2$, è rappresentato dalla matrice

$$[T] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Si tratta della stessa matrice che nell'esempio precedente era associata alla rotazione di $\frac{\pi}{3}$ nel piano reale ma stavolta, visto che stiamo considerando uno spazio vettoriale complesso, riusciamo a trovare autovettori e autovalori per T. Si verifica infatti (esercizio!) che il vettore $\begin{pmatrix} \imath \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore relativo all'autovalore $\frac{1+\imath\sqrt{3}}{2}$ e che il vettore $\begin{pmatrix} -\imath \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore relativo all'autovalore $\frac{1-\imath\sqrt{3}}{2}$. Poiché i due vettori sono linearmente indipendenti sul campo $\mathbb{C}$, costituiscono una base. Dunque T è diagonalizzabile e possiamo facilmente verificare che

$$V_{\frac{1+\imath\sqrt{3}}{2}} =< \begin{pmatrix} \imath \\ 1 \end{pmatrix} >$$

$$V_{\frac{1-\imath\sqrt{3}}{2}} =< \begin{pmatrix} -\imath \\ 1 \end{pmatrix} >$$

$$\mathbb{C}^2 = V_{\frac{1-\imath\sqrt{3}}{2}} \oplus V_{\frac{1+\imath\sqrt{3}}{2}}.$$

2. Il polinomio caratteristico di un endomorfismo

Vogliamo trovare dei criteri semplici che ci permettano di decidere se un endomorfismo è diagonalizzabile o no. Un buon primo passo è quello di avere un metodo che, dato un endomorfismo $T : V \to V$ e posto $n = dim\, V$, ci permetta di decidere se uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ è o no un autovalore di T. Entrano qui in gioco i polinomi e le loro radici.

Innanzitutto osserviamo che, affinché $\lambda \in \mathbb{K}$ sia un autovalore, secondo la definizione bisogna che esista un $v \in V - \{O\}$ tale che

$$T(v) = \lambda v.$$

Questa equazione si può riscrivere anche come

$$T(v) - \lambda I(v) = O$$

dove $I : V \to V$ è l'identità (qui e nel seguito indicheremo con I sia l'applicazione identità sia la matrice identità). Riscriviamo ancora:

$$(T - \lambda I)(v) = O$$

Abbiamo scoperto che, se T possiede un autovalore λ, allora l'endomorfismo $T - \lambda I$ non è iniettivo: infatti manda il vettore non nullo v in O. Dunque, se scegliamo una base qualunque per V e costruiamo la matrice $[T]$ associata a T, la matrice $[T - \lambda I] = [T] - \lambda I$ dovrà avere determinante uguale a 0:

$$det([T] - \lambda I) = 0.$$

Osserviamo che il nucleo di $[T] - \lambda I$ e quello di $\lambda I - [T]$ coincidono e allora vale anche

$$det(\lambda I - [T]) = 0.$$

Questa osservazione è la premessa per la seguente definizione:

Definizione 2.1. Dato un endomorfismo lineare $T : V \to V$ con $n = dim\ V$, scegliamo una base per V e costruiamo la matrice $[T]$ associata a T rispetto a tale base. Il polinomio caratteristico $P_T(t) \in \mathbb{K}[t]$ dell'endomorfismo T è definito da:

$$P_T(t) = det(t[I] - [T]).$$

Osservazione 2.2. 1) Perché la definizione data abbia senso innanzitutto bisogna verificare che $det(t[I] - [T])$ sia veramente un polinomio. Utilizzando la definizione di determinante $\sum_{\sigma \in \Sigma_n} ...$ si mostra facilmente che $P_T(t)$ è un polinomio di grado n con coefficiente direttore 1: $P_T(t) = t^n + \ldots\ldots..$

2) È fondamentale inoltre che la definizione appena data non dipenda dalla base scelta di V: non sarebbe una definizione buona se con la scelta di due basi diverse ottenessimo due polinomi caratteristici diversi.

Questo problema in effetti non si verifica. Infatti, se scegliamo due basi b e b' di V, come sappiamo le due matrici $[T]_{\substack{b \\ b}}$ e $[T]_{\substack{b' \\ b'}}$ sono legate dalla seguente relazione: esiste una matrice $[B]$ invertibile tale che

$$[T]_{\substack{b \\ b}} = [B]^{-1}[T]_{\substack{b' \\ b'}}[B]$$

Usando il teorema di Binet a questo punto verifichiamo che

$$det\left(tI - [T]_{\substack{b \\ b}}\right) = det\left(tI - [B]^{-1}[T]_{\substack{b' \\ b'}}[B]\right) = det\left([B]^{-1}\left(tI - [T]_{\substack{b' \\ b'}}\right)[B]\right) =$$

$$= det\left([B]^{-1}\right) det\left(tI - [T]_{\substack{b' \\ b'}}\right) det\left([B]\right) = det\left(tI - [T]_{\substack{b' \\ b'}}\right)$$

Abbiamo dunque mostrato che $P_T(t) = det\ (tI - [T])$ non dipende dalla scelta della base.[1]

[1] Alcuni di voi avranno notato che abbiamo usato il teorema di Binet, che avevamo dimostrato per matrici con coefficienti in un campo. In questo caso alcuni dei coefficienti sono polinomi di grado 1, dunque non appartengono a $\mathbb{K}$. In realtà possiamo pensare che i coefficienti appartengano al campo $\mathbb{K}(t)$ delle funzioni razionali (ossia il campo i cui elementi sono frazioni con un polinomio al numeratore e un polinomio non nullo al denominatore) e dunque possiamo applicare il teorema di Binet senza problemi. Un modo alternativo di aggirare l'obiezione sull'uso del teorema di Binet è il seguente: i passaggi che abbiamo fatto valgono quando al posto di t poniamo un qualunque elemento $a \in \mathbb{K}$. Se il campo $\mathbb{K}$ ha almeno n elementi (per esempio se è infinito), questo significa che i polinomi $det\left(tI - [T]_{\substack{b' \\ b'}}\right)$ e $det\left(tI - [T]_{\substack{b \\ b}}\right)$ danno lo stesso valore su n diversi elementi di $\mathbb{K}$. Dunque devono coincidere (perché? Impostate un sistema, e troverete una matrice di Vandermonde!).

Esercizio 2.3. Grazie all'osservazione precedente, sappiamo in particolare che i coefficienti di $p_T(t)$ non dipendono dalla base scelta. Chiamiamo dunque

$$C_r \,:\, End(V) \to \mathbb{K}$$

la funzione che, ad ogni endomorfismo T associa il coefficiente di t^r in $P_T(t)$. Dimostrare che C_{n-1} è uguale a meno la traccia ossia $C_{n-1}(T) = -\mathcal{T}(T)$ (dove $\mathcal{T}$ indica la traccia) e che C_0 è uguale, a meno del segno, al determinante ossia $C_0(T) = \pm Det(T)$. Il polinomio caratteristico ci fornisce dunque l'esempio di altre funzioni che, come il determinante e la traccia, coinvolgono i coefficienti di una matrice $[T]$ ma in realtà non dipendono dalla base scelta.

Possiamo a questo punto enunciare il teorema principale che spiega l'utilità del polinomio caratteristico ai fini del problema della diagonalizzazione.

Teorema 2.4. *Considerato T come sopra, vale che uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore di T se e solo se λ è una radice di $P_T(t)$, ossia se e solo se $P_T(\lambda) = 0$*

Dimostrazione. Abbiamo già visto (l'osservazione prima della definizione del polinomio caratteristico) che se λ è un autovalore di T allora $det(\lambda I - [T]) = P_T(\lambda) = 0$. Resta dunque da dimostrare il viceversa. Supponiamo che $det(\lambda I - [T]) = P_T(\lambda) = 0$: allora l'applicazione lineare $\lambda I - T$ non è iniettiva. Dunque esiste $v \in V - \{O\}$ tale che $(\lambda I - T)(v) = 0$. Questo si può riscrivere anche come

$$T(v) = \lambda v$$

Abbiamo trovato un autovettore che ha autovalore λ e quindi abbiamo mostrato, come volevamo, che λ è un autovalore di T. $\square$

Esempio 2.5. Consideriamo l'endomorfismo T dell'Esempio 1.7. Il suo polinomio caratteristico risulta $P_T(t) = t^2 - t + 1$ (verificare!). Questo polinomio ha due radici in $\mathbb{C}$, ovvero $\frac{1-\imath\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1+\imath\sqrt{3}}{2}$, che in effetti, come sappiamo, sono gli autovalori di T.

Notiamo che $t^2 - t + 1$ non ha invece radici in $\mathbb{R}$, coerentemente col fatto, osservato nell'Esempio 1.6, che la rotazione $R_{\frac{\pi}{3}}$ del piano reale non ammette autovettori.

Esercizio 2.6. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita, nella base standard di $\mathbb{R}^2$, dalla matrice:

$$[F] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $P_F(t)$.

Esercizio 2.7. Sia $F : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'applicazione lineare definita, nella base standard di $\mathbb{C}^3$, dalla matrice:

$$[F] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2i & 1 & 2i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare $P_F(t)$.

Esercizio 2.8. Sia $F : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ l'applicazione lineare definita, nella base standard di $\mathbb{C}^4$, dalla matrice:

$$[F] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare $P_F(t)$.

3. Una strategia per scoprire se un endomorfismo è diagonalizzabile

In questo paragrafo descriviamo una strategia in quattro passi che ci permette di scoprire se un endomorfismo $T : V \to V$, dove V è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione n, è diagonalizzabile, e, in caso sia diagonalizzabile, di trovare una base che lo diagonalizza (ossia una base di V fatta tutta da autovettori di T) e di scrivere la matrice diagonale che rappresenta T rispetto a tale base. La nostra strategia sarà la seguente:

- PASSO 1. Data T, troviamo gli autovalori di T utilizzando il polinomio caratteristico.
- PASSO 2. Supponiamo di aver trovato gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$: a questo punto scopriamo chi sono i relativi autospazi $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_k}$.
- PASSO 3. Un teorema (vedi Teorema 3.3) ci assicurerà che gli autospazi $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_k}$ sono in somma diretta. Quindi se

  $$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k} = V$$

  allora è possibile trovare una base "buona", fatta da autovettori di T e T è diagonalizzabile. Per scrivere una base "buona" basta scegliere una base per ogni V_{λ_i} e poi fare l'unione. Altrimenti, se

  $$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k} \subsetneq V$$

  T non è diagonalizzabile.
- PASSO 4. Se T è risultata diagonalizzabile, usando la base trovata si scrive la matrice diagonale $[T]$.

Vediamo i dettagli passo per passo.

3.1. Passo 1.

Di questo ci siamo già occupati nel paragrafo precedente: per sapere quali sono gli autovalori di un endomorfismo T possiamo calcolare il polinomio caratteristico $P_T(t)$ e trovare le sue radici in $\mathbb{K}$.

3.2. Passo 2.

Supponiamo dunque di aver scoperto che T ha i seguenti autovalori: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, tutti distinti fra loro. Vogliamo individuare gli autospazi $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots V_{\lambda_k}$.

Per questo basterà risolvere dei sistemi lineari: per ogni $i = 1, 2, \dots, k$, l'autospazio V_{λ_i} è costituito per definizione dai vettori $v \in V$ tali che $T(v) = \lambda_i v$, ossia, scelta una base di V e dunque trovata la matrice $[T]$, dalle soluzioni del sistema lineare

$$([T]-\lambda_i I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.3. **Passo 3.** Cominciamo col dimostrare il seguente teorema.

Teorema 3.1. *Dato un endomorfismo lineare $T : V \to V$, siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ degli autovalori di T distinti fra loro. Consideriamo ora degli autovettori $v_1 \in V_{\lambda_1}, v_2 \in V_{\lambda_2}, \ldots, v_k \in V_{\lambda_k}$. Allora $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti.*

Osservazione 3.2. Spesso ci si riferisce a questo teorema con la frase: "autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti".

Dimostrazione. Procediamo per induzione su k. Per $k = 1$ l'enunciato è banale perché $\{v_1\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti (c'è un vettore solo... ed è diverso da O perché è un autovettore). Supponiamo di aver dimostrato che l'enunciato è vero fino al caso di $k-1$ vettori e cerchiamo di dimostrarlo per k. Supponiamo allora di avere un insieme di vettori $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ come nelle ipotesi e che valga:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k = O \tag{3.1}$$

Per mostrare che $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti dobbiamo mostrare che questo può accadere solo quando $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$.

Dalla equazione scritta ne ricaviamo due in due modi diversi. Prima applichiamo T ad entrambi i membri e per linearità otteniamo

$$a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \cdots + a_k T(v_k) = O$$

che svolgendo il calcolo diventa

$$a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + a_k \lambda_k v_k = O$$

Poi invece moltiplichiamo l'equazione per λ_k ottenendo:

$$a_1 \lambda_k v_1 + a_2 \lambda_k v_2 + \cdots + a_k \lambda_k v_k = O$$

Per sottrazione da queste due equazioni ricaviamo:

$$a_1(\lambda_k - \lambda_1)v_1 + a_2(\lambda_k - \lambda_2)v_2 + \cdots + a_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})v_{k-1} = O$$

Ma questa è una combinazione lineare dei $k-1$ vettori $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$ uguale a O: per ipotesi induttiva tutti i coefficienti devono essere uguali a 0. Visto che gli scalari $\lambda_k - \lambda_i$ sono tutti diversi da zero (gli autovalori in questione sono distinti fra loro per ipotesi) questo implica che $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k-1} = 0$. Sostituendo nella equazione iniziale (3.1), notiamo che deve essere anche $a_k = 0$. □

Il seguente teorema è un rafforzamento del precedente.

Teorema 3.3. *Dato un endomorfismo lineare $T : V \to V$, siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ degli autovalori di T distinti fra loro. Allora gli autospazi $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_k}$ sono in somma diretta.*

Dimostrazione. Ricordiamo che dire che gli autospazi $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_k}$ sono in somma diretta vuol dire che se ne prendiamo uno qualunque, diciamo V_{λ_1} tanto per fissare la notazione, la sua intersezione con la somma di tutti gli altri è banale, ossia

$$V_{\lambda_1} \cap (V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_k}) = \{O\}.$$

Supponiamo per assurdo che non sia così, e che ci sia un vettore $w \neq O$ tale che

$$w \in V_{\lambda_1} \cap (V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_k})$$

Allora possiamo scrivere w in due modi:

$$w = v_1 \in V_{\lambda_1} - \{O\}$$

perché $w \in V_{\lambda_1}$, e

$$w = v_2 + v_3 + \cdots + v_k$$

(dove i $v_j \in V_{\lambda_j}$ per ogni j) visto che $w \in V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_k}$. Alcuni dei vettori v_j potrebbero essere uguali a O, ma non tutti (se fossero tutti uguali a O allora anche w sarebbe uguale a O). Diciamo che, a meno di riordinamenti, i vettori diversi da zero siano $v_2, ..., v_s$, con $s \leq k$.

Dunque vale:

$$v_1 = w = v_2 + v_3 + \cdots + v_s$$

Da questa uguaglianza ricaviamo la relazione

$$v_1 - v_2 - v_3 - \cdots - v_s = O$$

che rivela che gli autovettori $\{v_1, ...v_s\}$ sono linearmente dipendenti, assurdo perché contraddice il Teorema 3.1 (si tratta di autovettori relativi ad autovalori distinti). □

Osservazione 3.4. Il teorema che abbiamo appena dimostrato è un caso particolare del seguente fatto più generale. Supponiamo che in uno spazio vettoriale V ci siano dei sottospazi $A_1, A_2, ..., A_k$ con la seguente proprietà:
ogni insieme $\{v_1, ..., v_k\}$ di vettori non nulli scelti in modo che, per ogni i, $v_i \in A_i$, è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Allora i sottospazi $A_1, A_2, ..., A_k$ sono in somma diretta. Provate a dimostrarlo (la dimostrazione è del tutto analoga a quella del teorema sopra).

Nelle ipotesi del teorema precedente sappiamo allora (riguardate il Paragrafo 4 delle dispense "LA FORMULA DI GRASSMANN PER SOTTOSPAZI E IL CONCETTO DI SOMMA DIRETTA"), che la dimensione della somma degli autospazi è "la massima possibile", ossia

$$dim\ (V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}) = dim\ V_{\lambda_1} + dim\ V_{\lambda_2} + \cdots + dim\ V_{\lambda_k}$$

Osserviamo che abbiamo dunque già ottenuto un criterio per dire se T è diagonalizzabile o no. Infatti, se

$$dim\ V_{\lambda_1} + dim\ V_{\lambda_2} + \cdots + dim\ V_{\lambda_k} = n = dim\ V$$

allora

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k} = V$$

e quindi è possibile trovare una base "buona", fatta da autovettori di T, insomma T è diagonalizzabile.
Per scrivere una simile base "buona", come sappiamo dal Paragrafo 4 delle dispense citate sopra, basta scegliere una base per ogni V_{λ_i} e poi fare l'unione.

Altrimenti, se

$$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \cdots + \dim V_{\lambda_k} < n = \dim V \tag{3.2}$$

T non è diagonalizzabile. Infatti non è possibile trovare una base di autovettori: se la trovassimo contraddiremmo la (3.2).

3.4. **Passo 4.** Se l'endomorfismo T è diagonalizzabile, scegliamo dunque una base di autovettori nel modo descritto al Passo 3, e avremo una matrice associata $[T]$ che risulterà diagonale. Manteniamo le notazioni introdotte al Passo 3: allora sulla diagonale troveremo $\dim V_{\lambda_1}$ coefficienti uguali a λ_1, $\dim V_{\lambda_2}$ coefficienti uguali a λ_2, …,$\dim V_{\lambda_k}$ coefficienti uguali a λ_k.

Il rango di T sarà uguale al numero dei coefficienti non zero che troviamo sulla diagonale di $[T]$, la dimensione del nucleo sarà uguale al numero dei coefficienti uguali a zero che troviamo sulla diagonale di $[T]$.

4. Il criterio della molteplicità algebrica e della molteplicità geometrica

Nel paragrafo precedente abbiamo descritto un algoritmo che ci permette di decidere se un endomorfismo è diagonalizzabile o no. In questo paragrafo faremo una osservazione che ci permetterà di riformulare questo algoritmo e di individuare alcune "scorciatoie".

Consideriamo come al solito un endomorfismo $T : V \to V$, dove V è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ con $n = \dim V$.

Calcoliamo il suo polinomio caratteristico e fattorizziamolo in $\mathbb{K}[t]$. Otterremo una espressione del tipo:

$$P_T(t) = (t-\lambda_1)^{a_1}(t-\lambda_2)^{a_2}\cdots(t-\lambda_k)^{a_k} f(t)$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sono gli autovalori di T in $\mathbb{K}$ e sono tutti distinti fra loro, e $f(t)$ o è 1 oppure è un polinomio di grado > 1 che non ha radici in $\mathbb{K}$.

Se la T è diagonalizzabile, allora esiste una base b di V in cui la matrice associata $[T]_b^b$ ha forma diagonale e sulla diagonale compaiono $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Più esattamente, per ogni $i = 1, 2, \dots, k$, λ_i compare $\dim V_{\lambda_i}$ volte. Dunque in questo caso possiamo ricalcolare il polinomio caratteristico P_T usando $[T]_b^b$:

$$P_T(t) = Det\ (tI - [T]_b^b)$$

Si tratta di calcolare il determinante di una matrice diagonale e si osserva allora che P_T si fattorizza come prodotto di fattori lineari (cioè polinomi di grado 1):

$$P_T(t) = (t-\lambda_1)^{\dim V_{\lambda_1}}(t-\lambda_2)^{\dim V_{\lambda_2}}\cdots(t-\lambda_k)^{\dim V_{\lambda_k}}$$

il che dimostra che il fattore $f(t)$ è 1.

In sintesi:

Proposizione 4.1. *Se l'endomorfismo T è diagonalizzabile sul campo $\mathbb{K}$, allora il suo polinomio caratteristico $P_T(t)$ si fattorizza come prodotto di fattori lineari in $\mathbb{K}[t]$:*

$$P_T(t) = (t-\lambda_1)^{\dim V_{\lambda_1}}(t-\lambda_2)^{\dim V_{\lambda_2}}\cdots(t-\lambda_k)^{\dim V_{\lambda_k}}$$

Dunque se P_T non si fattorizza come prodotto di polinomi di grado 1 in $\mathbb{K}[t]$ possiamo concludere che T non è diagonalizzabile. Ma cosa possiamo dire del viceversa ? Se P_T si fattorizza come prodotto di fattori lineari in $\mathbb{K}[t]$ allora T è diagonalizzabile ? NO, in generale non è vero. Basta considerare per esempio l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che nelle basi standard è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è $P_L(t) = (t-2)^2$ ma l'applicazione non è diagonalizzabile: possiamo verificarlo applicando il criterio del paragrafo precedente, infatti L ha il solo autospazio V_2 e se ne calcoliamo la dimensione scopriamo che $dim\ V_2 = 1 < 2 = dim\ \mathbb{R}^2$.

Prima di enunciare il nuovo criterio diamo qualche definizione:

Definizione 4.2. Data T come sopra con polinomio caratteristico

$$P_T(t) = (t-\lambda_1)^{a_1}(t-\lambda_2)^{a_2}\cdots(t-\lambda_k)^{a_k} f(t)$$

dove $f(t)$ o è 1 oppure è un polinomio di grado > 1 che non ha radici in $\mathbb{K}$, diremo che, per ogni $i = 1, 2, \ldots, k$, a_i è la *molteplicità algebrica* dell'autovalore λ_i. Chiameremo invece *molteplicità geometrica* dell'autovalore λ_i il numero intero positivo $dim\ V_{\lambda_i}$.

Proposizione 4.3. *Dati $T : V \to V$ e*

$$P_T(t) = (t-\lambda_1)^{a_1}(t-\lambda_2)^{a_2}\cdots(t-\lambda_k)^{a_k} f(t)$$

come sopra, per ogni autovalore λ_i vale che la sua molteplicità geometrica è minore o uguale alla sua molteplicità algebrica:

$$dim\ V_{\lambda_i} \leq a_i$$

Dimostrazione. Nella proposizione precedente abbiamo già visto che se l'applicazione T è diagonalizzabile, allora vale

$$dim\ V_{\lambda_i} = a_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k$$

Se invece T non è diagonalizzabile, ricordando che gli autospazi sono in somma diretta

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$$

possiamo cominciare a costruire una base di V prendendo una base per ogni V_{λ_i} e facendo l'unione, che chiameremo $\tilde{b}$. Poiché in questo caso

$$dim\ V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k} < dim\ V$$

l'insieme $\tilde{b}$ non è ancora una base di V, ma è solo un insieme di vettori linearmente indipendenti; possiamo allora, per il teorema di completamento, scegliere degli elementi $s_1, \ldots, s_r$ tali che $b = \tilde{b} \cup \{s_1, \ldots, s_r\}$ sia una base. Rispetto a questa base la matrice di T ha la seguente forma:

$$[T]_{\substack{b\\b}} = \begin{pmatrix}
\lambda_1 & 0 & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & 0 & * & .. & * & * \\
0 & \lambda_1 & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & 0 & * & .. & * & * \\
0 & 0 & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
0 & 0 & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & 0 & .. & .. & .. & .. \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & \lambda_k & 0 & * & .. & * & ..* \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & \lambda_k & * & .. & * & ..* \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & 0 & * & .. & * & * \\
.. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & 0 & * & .. & * & * \\
0 & 0 & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & 0 & * & .. & * & * \\
0 & 0 & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & 0 & * & .. & * & *
\end{pmatrix}$$

ossia ha una parte diagonale, dove troviamo λ_1 ripetuto $dim\ V_{\lambda_1}$ volte, λ_2 ripetuto $dim\ V_{\lambda_2}$ volte... λ_k ripetuto $dim\ V_{\lambda_k}$ volte, e poi sulle ultime r colonne, che corrispondono a $T(s_1), T(s_2), \dots, T(s_r)$ non sappiamo dire nulla.

Osserviamo però che, sviluppando il determinante di $tI - [T]_{\substack{b\\b}}$ a partire dalla prima colonna, poi dalla seconda, poi dalla terza, e così via otteniamo:

$$P_T(t) = Det\ (tI - [T]_{\substack{b\\b}}) = (t-\lambda_1)^{dim\ V_{\lambda_1}}(t-\lambda_2)^{dim\ V_{\lambda_2}} \cdots (t-\lambda_k)^{dim\ V_{\lambda_k}} Det\ M$$

dove M è il minore $r \times r$ che sta nell'angolo in basso a destra di $tI - [T]_{\substack{b\\b}}$.

Ricordiamo ora la fattorizzazione per P_T

$$P_T(t) = (t - \lambda_1)^{a_1}(t - \lambda_2)^{a_2} \cdots (t - \lambda_k)^{a_k} f(t)$$

dove $f(t)$ è un polinomio di grado > 1 che non ha radici in $\mathbb{K}$. Da questa fattorizzazione si ricava subito che la potenza massima di $(t - \lambda_1)$ che divide $P_T(t)$ è a_1. Dunque, qualunque polinomio sia $Det\ M$, possiamo dire che, per ogni $i = 1, 2, \dots, k$, $dim\ V_{\lambda_i} \leq a_i$. □

Le disuguaglianze appena dimostrate implicano subito il risultato principale di questa sezione:

Teorema 4.4 (Criterio delle molteplicità algebrica e geometrica.)**.** *Dato un endomorfismo lineare $T : V \to V$ di uno spazio vettoriale V (di dimensione finita n) sul campo $\mathbb{K}$, siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ gli autovalori (distinti fra loro) di T in $\mathbb{K}$. Allora T è diagonalizzabile se e solo se P_T si fattorizza come prodotto di fattori lineari e, per ogni autovalore λ_i, la sua molteplicità algebrica e quella geometrica sono uguali.*

Dimostrazione. Abbiamo già visto, nelle dimostrazioni delle proposizioni precedenti, che se T è diagonalizzabile allora P_T si fattorizza come prodotto di fattori lineari e, per ogni i vale

$$\text{molteplicità algebrica di } \lambda_i = dim\ V_{\lambda_i}.$$

Viceversa, se P_T si fattorizza come prodotto di fattori lineari

$$P_T(t) = (t-\lambda_1)^{a_1}(t-\lambda_2)^{a_2}\cdots(t-\lambda_k)^{a_k}$$

e, per ogni autovalore λ_i, la sua molteplicità algebrica a_i e quella geometrica sono uguali, allora calcoliamo

$$dim\ V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$$

Tale dimensione è uguale a

$$\sum_{i=1}^{k} dim\ V_{\lambda_i}$$

ma per la nostra ipotesi

$$\sum_{i=1}^{k} dim\ V_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{k} a_i$$

che è uguale al grado del polinomio caratteristico P_T, e dunque a $n = dim\ V$. Allora

$$dim\ V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k} = V$$

e T è diagonalizzabile come volevamo dimostrare. □

Esercizio 4.5. Dato un endomorfismo lineare $T : V \to V$ di uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$, dimostrare che se un autovalore di T ha molteplicità algebrica uguale a 1 allora anche la sua molteplicità geometrica è uguale a 1.

5. Esempi

Esempio 5.1. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo lineare la cui matrice rispetto alla base standard è:

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Vogliamo capire se è diagonalizzabile o no, e, se lo è, vogliamo trovare una base composta da autovettori. Innanzitutto calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$P_T(t) = det\left(tI - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right) = det\begin{pmatrix} t & -3 & 0 \\ -1 & t+2 & 0 \\ -1 & 3 & t-1 \end{pmatrix} = (t-1)^2(t+3)$$

Gli autovalori sono dunque 1 e -3. La molteplicità algebrica di -3 è uguale a 1 e coincide con la sua molteplicità geometrica. Ripetiamo infatti in questo caso particolare il ragionamento che alcuni lettori avranno già utilizzato per risolvere l'Esercizio 4.5: infatti la molteplicità geometrica di -3 è ≥ 1 (visto che -3 è autovalore[2]), e per la Proposizione 4.3 deve essere minore o uguale alla molteplicità algebrica, quindi è esattamente 1 e coincide con la molteplicità algebrica.

Dunque, volendo applicare il criterio del Teorema 4.4, dobbiamo studiare l'autovalore 1, che ha molteplicità algebrica 2, e controllare se la sua molteplicità

[2] La molteplicità geometrica di una autovalore è sempre ≥ 1, visto che, per definizione, l'autospazio relativo a tale autovalore non è banale.

geometrica è uguale a 2 o no. La molteplicità geometrica di 1 è la dimensione dell'autospazio $V_1 = Ker\ (1I - T)$, dunque dobbiamo calcolare la dimensione di:

$$Ker\ \left(1I - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right) = Ker\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Si osserva subito che la matrice ha rango uguale a 1, di conseguenza la dimensione del Ker è uguale a 2. Anche per quel che riguarda l'autovalore 1 la molteplicità geometrica risulta uguale alla molteplicità algebrica, dunque l'applicazione T è diagonalizzabile.

Per trovare una base formata da autovettori, dobbiamo scegliere una base di V_1 e una base di V_{-3} e fare l'unione. Cominciamo col trovare una base di V_1, ossia una base di

$$Ker\ (1I - T) = Ker\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema 'a occhio', si vede subito che una possibile base è data dai vettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Per trovare una base di V_{-3} che, come sappiamo, ha dimensione 1, basta individuare un vettore non nullo in

$$V_{-3} = Ker\ \left(-3I - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right) = Ker\ \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Anche in questo caso il sistema associato si risolve immediatamente: è facile osservare che il vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ costituisce una base di V_{-3}.

Dunque una base che diagonalizza l'endomorfismo T è data dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice di T rispetto a tale base è data da

$$[T]\begin{matrix} \\ v_1, v_2, v_3 \\ v_1, v_2, v_3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Esempio 5.2. Si consideri l'applicazione lineare $F_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che, rispetto alla base standard, ha matrice:

$$[F_a] = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vogliamo studiare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la diagonalizzabilità di F_a. Per prima cosa calcoliamo il polinomio caratteristico $P_{F_a}(t)$:

$$P_{F_a}(t) = det \left(tI - \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right) = det \begin{pmatrix} t-a & 0 & 0 \\ -1 & t-a & -1 \\ 0 & 1 & t-2 \end{pmatrix} =$$

$$= (t-a)(t^2 - (a+2)t + 2a + 1)$$

Ora osserviamo che il polinomio $t^2 - (a+2)t + 2a + 1$ ha radici

$$\frac{a + 2 \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$$

Tali radici sono reali se e solo se $a^2 \geq 4a$ ovvero se e solo se $a \geq 4$ oppure $a \leq 0$. Visto che il campo in cui stiamo cercando gli autovalori è $\mathbb{R}$, per il Teorema 4.4 possiamo intanto concludere che: *se $0 < a < 4$ l'endomorfismo F_a non è diagonalizzabile.*

Se invece $a \geq 4$ oppure $a \leq 0$, abbiamo tre autovalori reali:

$$\frac{a + 2 - \sqrt{a^2 - 4a}}{2}, \quad \frac{a + 2 + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}, \quad a$$

e la prima cosa che ci conviene fare è calcolare le loro molteplicità algebriche, ossia capire se per qualche valore di a questi autovalori coincidono. Infatti, per i valori di a per cui questi tre autovalori sono a due a due distinti possiamo subito dire, in base al Teorema 4.4, che F_a è diagonalizzabile: gli autovalori hanno molteplicità algebrica uguale a 1, e dunque (vedi Esercizio 4.5), anche molteplicità geometrica uguale a 1.

Affrontiamo il problema della coincidenza studiando separatamente le tre possibili uguaglianze:

$$\frac{a + 2 - \sqrt{a^2 - 4a}}{2} = \frac{a + 2 + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$$

$$\frac{a + 2 - \sqrt{a^2 - 4a}}{2} = a$$

$$\frac{a + 2 + \sqrt{a^2 - 4a}}{2} = a$$

La prima di queste uguaglianze è vera se e solo se

$$-\sqrt{a^2 - 4a} = \sqrt{a^2 - 4a}$$

ovvero se e solo se $\sqrt{a^2 - 4a} = 0$ ovvero se e solo se $a = 0$ oppure $a = 4$. Invece si verifica subito che le uguaglianze

$$\frac{a + 2 - \sqrt{a^2 - 4a}}{2} = a$$

$$\frac{a + 2 + \sqrt{a^2 - 4a}}{2} = a$$

non sono mai vere, qualunque sia il valore di a.

Dunque i casi che richiedono attenzione sono solo $a = 0$ e $a = 4$; possiamo trarre una seconda conclusione: *se $a > 4$ oppure $a < 0$ l'endomorfismo F_a è diagonalizzabile.*

Studiamo infine i due casi rimasti: per quel che riguarda $a = 0$, gli autovalori di F_0 sono 0 e 1 e il polinomio caratteristico $P_{F_0}(t)$ è $t(t-1)^2$. Per capire se F_0 è diagonalizzabile bisogna calcolare la molteplicità geometrica di 1, ossia calcolare

$$dim\ V_1 = dim\ Ker \left(1I - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right) = dim\ Ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice ha rango 2, dunque il Ker ha dimensione 1. La molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è uguale a 1, mentre la molteplicità algebrica è uguale a 2: l'endomorfismo F_0 non è diagonalizzabile.

Per quel che riguarda $a = 4$, gli autovalori di F_4 sono 4 e 3 e il polinomio caratteristico $P_{F_4}(t)$ è $(t-4)(t-3)^2$. Per capire se F_4 è diagonalizzabile bisogna calcolare la molteplicità geometrica di 3, ossia calcolare

$$dim\ V_3 = dim\ Ker \left(3I - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right) = det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

come nel caso precedente, il Ker ha dimensione 1 e risulta che l'endomorfismo F_4 non è diagonalizzabile.

6. Altri esercizi

Esercizio 6.1. Sia $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare che nella base standard è rappresentatata dalla matrice

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Dire se A è diagonalizzabile. Descrivere gli autovalori e gli autospazi di A.

Esercizio 6.2. Sia $F : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'applicazione lineare definita, nella base standard di $\mathbb{C}^3$, dalla matrice:

$$[F] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dire se F è diagonalizzabile e, se lo è, trovare un base di autovettori [nota: ricordate che stiamo lavorando sul campo $\mathbb{C}$].

Esercizio 6.3. Consideriamo l'endomorfismo lineare L_a di $\mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro reale a e definito da:

$$L_a(x, y, z) = (ax + y + z, x + ay + z, -x + y + az)$$

(1) Discutere la diagonalizzabilità di L_a al variare del parametro reale a.
(2) Determinare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per L_0.

Esercizio 6.4. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice rispetto alla base standard è

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 9 \\ 3 & 12 & 9 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

Dire se T è diagonalizzabile e, se lo è, trovare una base fatta da autovettori.

Esercizio 6.5. a) Si consideri l'endomorfismo $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ a cui nella base standard è associata la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Trovare gli autovettori di A e dire se A è diagonalizzabile.
b) Si consideri l'endomorfismo $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a cui nella base standard è associata la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

i) Per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile ?
ii) Sia k un intero positivo. Si trovino, in funzione di k e del parametro b, gli autovalori dell'endomorfismo B^k.

Esercizio 6.6. Consideriamo l'applicazione lineare $A_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita rispetto alla base standard dalla seguente matrice:

$$[A_a] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dire se esistono, e in caso affermativo trovare quali, valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per cui A_a è diagonalizzabile. Determinare inoltre gli autovettori di A_{-1}.

Esercizio 6.7. Sia $F_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica è la seguente:

$$[F_a] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

(1) Determinare per quali valori del parametro a la matrice $[F_a]$ è invertibile.
(2) Trovare i valori di a per i quali F_a è diagonalizzabile.
(3) Trovare, se esiste, una base di autovettori di F_a quando $a = 1/2$.

Esercizio 6.8. Sia $T_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo lineare che, rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$, è rappresentato dalla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2-a & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 7a & a \end{pmatrix}$$

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo T_a è diagonalizzabile ?

Esercizio 6.9. Sia $T_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo lineare che, rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$, è rappresentato dalla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -a \end{pmatrix}$$

a) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo T_a è diagonalizzabile ?

b) Trovare, per ogni a per cui T_a è diagonalizzabile, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di T_a.

Esercizio 6.10. Sia $T_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo lineare che, rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$, è rappresentato dalla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 2a-1 & 3a-1 & 1 \\ 0 & 4a-1 & 0 \\ -1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo T_a è diagonalizzabile ?

Esercizio 6.11. Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che, rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$, è rappresentata dalla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

a) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ T_k è diagonalizzabile ?

b) Nei casi in cui T_k è diagonalizzabile, trovare una base fatta da autovettori.

Esercizio 6.12. Sia $T_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo lineare che, rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^4$, è rappresentato dalla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo T_a è diagonalizzabile ?

b) Trovare, per ogni a per cui T_a è diagonalizzabile, una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di T_a.

Esercizio 6.13. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo $\mathbb{K}$ e sia $T : V \to V$ un endomorfismo lineare. Dimostrare che esiste in $\mathbb{K}[t]$ un polinomio

$$f(t) = a_{n^2} t^{n^2} + \cdots + a_1 t + a_0$$

di grado minore o uguale a n^2 tale che

$$f(T) = a_{n^2} T^{n^2} + \cdots + a_1 T + a_0 I$$

è l'endomorfismo nullo.

Esercizio 6.14. Un endomorfismo lineare $T : V \to V$ si dice *nilpotente* se per un certo intero positivo n vale che $T^n = T \circ T \circ T \cdots \circ T$ è l'endomorfismo nullo.[3] Dimostrare che se T è nilpotente allora ha un unico autovalore: $\lambda = 0$.

Esercizio 6.15. Nel caso in cui V sia uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{C}$ dimostrare il viceversa dell'enunciato dell'esercizio precedente, ossia che se T ha un unico autovalore, uguale a 0, allora T è nilpotente. Se il campo è $\mathbb{R}$ e si sa che T ha un unico autovalore reale, uguale a 0, allora si può concludere che T è nilpotente?

[3] Analogamente, una matrice quadrata A si dice *nilpotente* se per un certo intero positivo n vale che A^n è la matrice nulla.

Esercizio 6.16. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 sul campo $\mathbb{K}$ e sia $T : V \to V$ un endomorfismo lineare che, rispetto ad una certa base, è rappresentato dalla matrice:

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'endomorfismo T è nilpotente? È diagonalizzabile?

Esercizio 6.17. Sia $T : V \to V$ un endomorfismo lineare e sia λ un autovalore. Dimostrare che, per un ogni intero positivo n, λ^n è un autovalore di T^n.

Esercizio 6.18. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ e sia $T : V \to V$ un endomorfismo lineare diverso da I e da $-I$. Supponiamo che valga $T^2 = I$. Individuare gli autovalori di T e dimostrare che T è diagonalizzabile.

Esercizio 6.19 (Proiezione lineare su un sottospazio)**.** Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ e sia $T : V \to V$ un endomorfismo lineare diverso da I e dall'endomorfismo nullo. Supponiamo che valga $T^2 = T$. Dimostrare che T è diagonalizzabile e ha due autovalori, 1 e 0. Osservare che questo equivale a dire che T è una *proiezione lineare* di V su V_1: T manda V surgettivamente su V_1 e lascia fissi tutti i vettori di V_1. Sia $v_1, v_2, \ldots, v_n$ una base che diagonalizza T, con $V_1 =< v_1, v_2, \ldots, v_i >$ e $V_0 =< v_{i+1}, \ldots, v_n >$: scrivendo i vettori rispetto a questa base, la T è l'applicazione tale che

$$[T] \begin{pmatrix} a_1 \\ .. \\ a_i \\ a_{i+1} \\ .. \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ .. \\ a_i \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6.20 (Diagonalizzazione simultanea di endomorfismi che commutano)**.** Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo $\mathbb{K}$ e siano T ed S due endomorfismi lineari diagonalizzabili. Dimostrare che, se vale

$$T \circ S = S \circ T$$

allora esiste una base di V che diagonalizza S e T *simultaneamente*. Dimostrare che è vero anche il viceversa, ossia che se esiste una base di V che diagonalizza S e T simultaneamente allora T ed S commutano.

Suggerimento. Cominciare con l'osservare che, se λ è un autovalore per S e V_λ è il suo autospazio, allora $T(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.

Esercizio 6.21. Trovare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizza simultaneamante gli endomorfismi T ed S che, nella base standard, sono rappresentati rispettivamente dalle matrici:

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad [S] = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$