Compitino di Matematica Discreta e Algebra Lineare
5 Aprile 2018

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **<u>TASSATIVAMENTE</u>** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento.

Esercizio 1 (Quiz, 4 + 1 +1 punti)**.** Consideriamo la successione $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definita tramite la seguente ricorrenza:

$$\begin{cases} a_{n+2} \equiv 4a_{n+1} + 21a_n \\ a_0 = 2 \\ a_1 = 4 \end{cases}$$

1) Si scriva una formula per calcolare a_n della forma $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ (trovare A, B, α, β).
2) Si determini il resto di a_{999} modulo 4.
3) Si determini il resto di a_{1000} modulo 4.

Risposta 1	Risposta 2	Risposta 3
$7^n + (-3)^n$	0	2

Esercizio 2 (Quiz, 3 + 3 punti)**.** Consideriamo lo spazio vettoriale V delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$.

1) Sia $B \subseteq V$ l'insieme delle matrici $M \in V$ tali che rango$(M) = 2$.

Dire se B è un sottospazio vettoriale di V in caso di risposta positiva scrivere nel riquadro la dimensione, altrimenti scrivere NO.

Risposta 2:

NO

2) Sia $A \subseteq V$ l'insieme delle matrici $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in V$ tali che $M \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dire se A è un sottospazio vettoriale di V in caso di risposta positiva scrivere nel riquadro la dimensione, altrimenti scrivere NO.

Risposta 1:

2

Esercizio 3 (5+3+2 punti)**.** Risolvere le due congruenze del seguente sistema, e poi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 49x \equiv 28 \pmod{119} \\ 5^x \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$$

Soluzioni prima cong.	Soluzioni seconda cong.	Soluzioni sistema
$x \equiv 3\ (17)$	$x \equiv 2\ (6)$	$x \equiv 20\ (102)$

Esercizio 4 (10 punti)**.** Si consideri l'applicazione lineare $F_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che, rispetto alla base standard, ha matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -a \\ -a & 2 & 2 \\ 2 & -a & 2 \end{pmatrix}$$

1) Per quali valori del parametro reale a vale che la dimensione di $Ker\ F_a$ è 2?
2) Per quali valori del parametro reale a vale che $Ker\ F_a = \{O\}$?
3) Trovare, nel caso $a = 4$, una base di $Imm\ F_4$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{a}{2} & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{a}{2} \\ 0 & 1+\frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{4} \\ 0 & 0 & 2+\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4} \end{pmatrix}$$

$$8 + 2a - a^2 = 0$$

$$b = \frac{a}{2}$$

$a \neq 4, -2 \longrightarrow 3$ pivot ker 0

$a = -2 \longrightarrow 1$ pivot dim ker 2

$a = +4 \longrightarrow 2$ pivot dim ker 1

Risposta 1: -2

Risposta 2: $\neq 4, -2$

Risposta 3: $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$