Compitino di Matematica Discreta e Algebra Lineare
5 Aprile 2018

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **<u>TASSATIVAMENTE</u>** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento.

Esercizio 1 (Quiz, 3 + 3 punti)**.** Consideriamo lo spazio vettoriale V delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$.

1) Sia $A \subseteq V$ l'insieme delle matrici $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in V$ tali che $M \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dire se A è un sottospazio vettoriale di V in caso di risposta positiva scrivere nel riquadro la dimensione, altrimenti scrivere NO.

Risposta 1:

2

2) Sia $B \subseteq V$ l'insieme delle matrici $M \in V$ tali che $\text{rango}(M) = 1$.

Dire se B è un sottospazio vettoriale di V in caso di risposta positiva scrivere nel riquadro la dimensione, altrimenti scrivere NO.

Risposta 2:

NO

Esercizio 2 (Quiz, 4 + 1 +1 punti)**.** Consideriamo la successione $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definita tramite la seguente ricorrenza:

$$\begin{cases} a_{n+2} \equiv 3a_{n+1} + 10a_n \\ a_0 = 2 \\ a_1 = 3 \end{cases}$$

1) Si scriva una formula per calcolare a_n della forma $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ (trovare A, B, α, β).
2) Si determini il resto di a_{1000} modulo 3.
3) Si determini il resto di a_{1001} modulo 3.

Risposta 1	Risposta 2	Risposta 3
$(-2)^n + 5^n$	2	0

Esercizio 3 (10 punti). Si consideri l'applicazione lineare $F_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che, rispetto alla base standard, ha matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ -a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

1) Per quali valori del parametro reale a vale che la dimensione di $Ker\ F_a$ è 2?
2) Per quali valori del parametro reale a vale che $Ker\ F_a = \{O\}$?
3) Trovare, nel caso $a = 2$, una base di $Imm\ F_2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -a \\ -a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 + aR_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & 1+a & 1-a^2 \\ 0 & -1-a & 1+a \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & 1+a & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 2+a-a^2 \end{bmatrix}$$

$2 + a - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \vee a = -1$.

Caso $a \neq 2, a \neq -1 \Rightarrow 3$ pivot $\Rightarrow Ker = \{\bar{0}\}$.

Caso $a = 2 \Rightarrow 2$ pivot $\Rightarrow \dim Ker = 1$

Caso $a = -1 \Rightarrow 1$ pivot $\Rightarrow \dim Ker = 2$.

Se $a = 2$, la matrice diventa $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

La terza colonna è nello span delle prime due

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

Una base è $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Risposta 1: $a = -1$

Risposta 2: $a \neq 2, -1$

Risposta 3: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

Esercizio 4 (5+3+2 punti)**.** Risolvere le due congruenze del seguente sistema, e poi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 49x \equiv 35 \pmod{119} \\ 3^x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$$

① La prima equivale a $7X \equiv 5 \ (17)$.

moltiplico per l'inverso di 7 mod 17, che è 5, e ottengo

$$X \equiv 25 \ (17).$$
$$\equiv 8$$

② La seconda equivale a $X \equiv 5 \ (6)$.

③ Il sistema diventa $\begin{cases} X \equiv 8 \ (17) \\ X \equiv 5 \ (6) \end{cases}$

Soluzione $X \equiv 59 \ (102)$.

Soluzioni prima cong.	Soluzioni seconda cong.	Soluzioni sistema
$X \equiv 8 \ (17)$	$X \equiv 5 \ (6)$	$X \equiv 59 \ (102)$