Appello straordiario di Matematica Discreta e Algebra Lineare
5 Aprile 2018

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **TASSATIVAMENTE** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento.

Esercizio 1 (8 punti)**.** Si consideri l'applicazione lineare $F_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che, rispetto alla base standard, ha matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ -a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

1) Per quali valori del parametro reale a vale che la dimensione di $Ker\ F_a$ è 2?
2) Per quali valori del parametro reale a vale che $Ker\ F_a = \{O\}$?
3) Trovare, nel caso $a = 2$, una base di $Imm\ F_2$.

Risposta 1:	Risposta 2:	Risposta 3:
$a = -1$	$a \neq -1, 2$	$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

Esercizio 2 (8 punti)**.** Consideriamo la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Determinare il polinomio caratteristico di M.
2) Determinare gli autovalori di M sul campo $\mathbb{R}$.
3) Stabilire se la matrice M è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ (scrivere SI o NO nel riquadro).
4) Determinare gli autovalori di M sul campo $\mathbb{C}$.
5) Stabilire se M è diagonalizzabile sul campo $\mathbb{C}$ (scrivere SI o NO nel riquadro).

polinomio:	autovalori su $\mathbb{R}$:	SI/NO:	autovalori su $\mathbb{C}$:	SI/NO:
$-x^3-x^2-x-1$	-1	NO	$-1, i, -i$	SI

Esercizio 3 (8 punti)**.** Risolvere le due congruenze del seguente sistema, e poi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 49x \equiv 35 \pmod{119} \\ 3^x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$$

Soluzioni prima cong.	Soluzioni seconda cong.	Soluzioni sistema
$x \equiv 8 \ (17)$	$x \equiv 5 \ (6)$	$x \equiv 59 \ (102)$

Esercizio 4 (8 punti). Quanti sono gli interi n compresi tra 1 e 1000 (estremi inclusi) tali che
1) $MCD(21, n) = 1$?
2) $MCD(30, n) = 2$?

1) Tra 1 e 1000 ci sono
142 multipli di 7
333 multipli di 3
47 multipli di 21
Quindi $333 + 142 - 47$ multipli di 3 o di 7
e $1000 - 333 - 142 + 47$ numeri n con $MCD(21, n) = 1$.

2) $MCD(30, n) = 2 \longrightarrow n = 2K$ con $MCD(15, K) = 1$ e $1 \leq K \leq 500$

Tra 1 e 500 ci sono
166 multipli di 3
100 multipli di 5
33 multipli di 15
Quindi $166 + 100 - 33$ multipli di 3 o di 5
e $500 - 166 - 100 + 33$ numeri K con $MCD(15, K) = 1$
Quindi altrettanti n con $MCD(30, n) = 1$ e $1 \leq n \leq 1000$.

Risposta 1:

$1000 - 333 - 142 + 47$
$= 572$

Risposta 2:

$500 - 166 - 100 + 33$
$= 267$