# Elementi di analisi matematica

Prove scritte dal 2007

## Prova scritta del 18 giugno 2007

**Esercizio 1** Determinare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2} - \frac{1}{n^\alpha} \ln \frac{3}{2} \right)$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 2** Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ sia $x_n$ il numero reale individuato dalla relazione

$$(x_n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt{1 - x_n}\,.$$

Dimostrare i fatti seguenti:

**(i)** il numero $x_n$ è ben definito ed appartiene a $]0, 1[$;

**(ii)** la successione $\{x_n\}$ è decrescente;

**(iii)** la successione $\{x_n\}$ converge a 0;

**(iv)** la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ è divergente.

**Esercizio 3** Si consideri l'integrale improprio

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{x^{3/2}}}{e^{3x^{3/2}} - 8} \sqrt{x}\, dx;$$

si provi che esso esiste e lo si calcoli.

**Esercizio 4** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \cos x + \sin x \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

## Risoluzione

**Esercizio 1** Notiamo anzitutto che

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}\right)=0$$

ed anzi

$$\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}=e^{\frac{1}{n}\ln 3}-e^{\frac{1}{n}\ln 2}=\frac{1}{n}\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{2n^2}\frac{(\ln 3)^2}{(\ln 2)^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad \text{per } n\to\infty.$$

Quindi se $\alpha<1$ il termine principale è quello di ordine $\alpha$; ne segue

$$\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}-\frac{1}{n^\alpha}\ln\frac{3}{2}=-\frac{1}{n^\alpha}\ln\frac{3}{2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\quad \text{per } n\to\infty,$$

per cui la serie diverge negativamente. Se invece $\alpha>1$ il termine principale è quello di ordine 1; dunque risulta

$$\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}-\frac{1}{n^\alpha}\ln\frac{3}{2}=\frac{1}{n}\ln\frac{3}{2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\quad \text{per } n\to\infty,$$

cosicché la serie diverge positivamente. Infine, se $\alpha=1$ i due termini di ordine 1 si elidono, ed otteniamo

$$\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}-\frac{1}{n^\alpha}\ln\frac{3}{2}=\frac{1}{2n^2}\frac{(\ln 3)^2}{\ln 2)^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad \text{per } n\to\infty,$$

per cui la serie converge. In definitiva la serie è convergente se e solo se $\alpha=1$.
**Esercizio 2 (i)** Per ogni $n\in\mathbb{N}^+$, la funzione

$$g_n(x)=x^{\frac{1}{n}}-\sqrt{1-x},\quad x\in[0,1],$$

è continua, crescente, e tale che $g_n(0)=-1$, $g_n(1)=1$. Quindi essa si annulla in un unico punto $x_n\in]0,1[$.

**(ii)** Confrontiamo $x_n$ con $x_{n+1}$. Essendo $0<x_n<1$ si ha

$$(x_n)^{\frac{1}{n+1}}>(x_n)^{\frac{1}{n}}=\sqrt{1-x_n},\qquad (x_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}=\sqrt{1-x_{n+1}},$$

da cui

$$g_{n+1}(x_n)>0,\qquad g_{n+1}(x_{n+1})=0;$$

per la crescenza di $g_{n+1}$, ne segue $x_{n+1} < x_n$.

**(iii)** Certamente $x_n$ converge ad un limite $L \in [0,1[$. Poiché $x \mapsto \sqrt{1-x}$ è continua, si ha

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1-x_n} = \sqrt{1-L},$$

ed essendo $L < x_n$, ricaviamo

$$\sqrt{1-L} = \lim_{n\to\infty} (x_n)^{\frac{1}{n}} \geq \lim_{n\to\infty} L^{\frac{1}{n}}.$$

Da qui segue $L = 0$: infatti assumendo $0 < L < 1$ ricaveremmo

$$\sqrt{1-L} \geq \lim_{n\to\infty} L^{\frac{1}{n}} = 1,$$

ossia $L = 0$, il che sarebbe contraddittorio.

**(iv)** Per ogni $n$ sufficientemente grande si ha, essendo $\ln(1-t) > -2t$ per $t$ piccolo e positivo,

$$x_n = (1-x_n)^{\frac{n}{2}} = e^{\frac{n}{2}\ln(1-x_n)} \geq e^{-nx_n},$$

da cui necessariamente

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} e^{-nx_n} \leq \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = +\infty.$$

Ciò prova che si ha definitivamente $x_n \geq \frac{1}{n}$ e quindi la serie $x_n$ diverge positivamente.

**Esercizio 3** La funzione integranda è

$$f(x) = \frac{e^{x^{3/2}}}{e^{3x^{3/2}} - 8}\sqrt{x}, \qquad x \geq 1.$$

Essa è non negativa e continua; inoltre per ogni $x \geq 1$ si ha

$$f(x) = \frac{e^{-2x^{3/2}}}{1 - 8e^{-3x^{3/2}}}\sqrt{x} \leq e^{-2x^{3/2}} \frac{\sqrt{x}}{1 - 8e^{-3}} \leq 2xe^{-2x},$$

da cui deduciamo, per confronto con la funzione sommabile $2xe^{-2x}$, che $f$ è sommabile su $[1,\infty[$.

Calcoliamo l'integrale improprio. Si ha, posto $x^{3/2} = t$,

$$\int_1^\infty \frac{e^{x^{3/2}}}{e^{3x^{3/2}} - 8}\sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\int_1^\infty \frac{e^t}{e^{3t} - 8}\, dt;$$

l'ulteriore sostituzione $u = e^t$ ci porta a

$$\int_1^\infty \frac{e^{x^{3/2}}}{e^{3x^{3/2}} - 8}\sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\int_e^\infty \frac{du}{u^3 - 8}.$$

Osservato che

$$\frac{1}{u^3 - 8} = \frac{1}{(u-2)(u^2 + 2u + 4)},$$

con noiosi ma facili calcoli troviamo

$$\frac{1}{u^3 - 8} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{u-2} - \frac{u+4}{u^2 + 2u + 4}\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{u-2} - \frac{u+4}{(u+1)^2 + 3}\right),$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\int_e^\infty \frac{du}{u^3 - 8} &= \frac{1}{18}\int_e^\infty \left(\frac{1}{u-2} - \frac{u+4}{(u+1)^2 + 3}\right) du = \\ &= \frac{1}{18}\int_e^\infty \left(\frac{1}{u-2} - \frac{u+1}{(u+1)^2 + 3} - \frac{3}{(u+1)^2 + 3}\right) du. \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} &\int_1^\infty \frac{e^{x^{3/2}}}{e^{3x^{3/2}} - 8}\sqrt{x}\, dx = \\ &= \frac{1}{18}\left[\ln(u-2) - \ln\sqrt{(u+1)^2 + 3} - \sqrt{3}\arctan\frac{u+1}{\sqrt{3}}\right]_e^\infty = \\ &= \frac{1}{18}\left[\lim_{u\to\infty}\left(\ln\frac{u-2}{\sqrt{(u+1)^2 + 3}} - \sqrt{3}\arctan\frac{u+1}{\sqrt{3}}\right) - K\right] = \\ &= -\frac{\pi\sqrt{3}}{36} - \frac{K}{18}, \end{aligned}$$

ove $K$ è il valore dell'integrando nel punto $e$, vale a dire

$$K = \ln\frac{e-2}{\sqrt{(e+1)^2 + 3}} - \sqrt{3}\arctan\frac{e+1}{\sqrt{3}}.$$

**Esercizio 4** Risolviamo l'equazione omogenea $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ ed ha la radice doppia $\lambda = 1$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Cerchiamo adesso una soluzione particolare $v$ dell'equazione non omogenea: questo si può fare in due modi.

**(a)** Si cerca una soluzione della forma

$$v(x) = p\cos x + q\sin x,$$

con $p, q$ parametri da determinare. Dato che

$$v'(x) = -p\sin x + q\cos x, \quad v''(x) = -p\cos x - q\sin x,$$

imponendo che $v$ risolva l'equazione otteniamo

$$\begin{aligned}
\cos x + \sin x &= v''(x) - 2v'(x) + v(x) = \\
&= (-p - 2q + p)\cos x + (-q + 2p + q)\sin x = \\
&= -2q\cos x + 2p\sin x,
\end{aligned}$$

da cui $q = -\frac{1}{2}$ e $p = \frac{1}{2}$. In definitiva

$$v(x) = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x.$$

**(b)** Utilizziamo il metodo di variazione delle costanti arbitrarie, cercando una soluzione particolare $v$ della forma

$$v(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x.$$

Le funzioni incognite $c_1(x)$ e $c_2(x)$ si determinano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0 \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x)(1+x)e^x = \cos x + \sin x. \end{cases}$$

Si trova

$$c_1'(x) = -xe^{-x}(\cos x + \sin x), \quad c_2'(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x),$$

da cui con qualche calcolo si ottengono, ad esempio,

$$c_1(x) = \frac{e^{-x}}{2}(\cos x - \sin x + 2x\cos x), \quad c_2(x) = -e^{-x}\cos x;$$

pertanto

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{e^{-x}}{2}(\cos x - \sin x + 2x\cos x)e^x - e^{-x}\cos x(xe^x) = \\ &= \frac{1}{2}(\cos x - \sin x). \end{aligned}$$

Come si vede, abbiamo ottenuto la stessa soluzione.

In definitiva l'integrale generale dell'equazione $y'' - 2y' + y = \cos x + \sin x$ è il seguente:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x - \sin x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Infine, imponiamo i valori $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$: essendo

$$y'(x) = c_1 e^x + c_2(1+x)e^x - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x),$$

si ottiene

$$c_1 + \frac{1}{2} = 1, \qquad c_1 + c_2 - \frac{1}{2} = -1,$$

da cui

$$c_1 = \frac{1}{2}, \qquad c_2 = -1.$$

In conclusione, la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x - xe^x + \frac{1}{2}(\cos x - \sin x).$$

## Prova scritta dell'11 luglio 2007

**Esercizio 1** Risolvere il sistema

$$\begin{cases} z^2\overline{w}^2 + |z|^2 w^2 + \overline{z}^2|w|^2 = i - 1 \\ z^2 + w^2 = 0 \end{cases}, \qquad z, w \in \mathbb{C}.$$

**Esercizio 2** Descrivere le principali proprietà della funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{|x| - 1}\max\{e^x, 1\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

tracciandone un grafico approssimativo.

**Esercizio 3** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{x}{2(1+x^2)}\,y(x) = \dfrac{(\sin x)^2}{(y(x))^3} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

## Risoluzione

**Esercizio 1** Dalla seconda equazione ricaviamo $z^2 = -w^2$. Sostituendo nella prima ed osservando che $w^2\overline{w}^2 = |w|^4$, $\overline{z}^2 = -\overline{w}^2$ e $|z^2| = |w^2|$, si ha

$$-|w|^4 + |w|^2 w^2 - \overline{w}^2 |w|^2 = i - 1,$$

ovvero

$$-|w|^4 + 2i|w|^2 \operatorname{Im} w^2 = i - 1.$$

Ne deduciamo

$$-|w|^4 = -1, \qquad 2|w|^2 \operatorname{Im} w^2 = 1,$$

da cui

$$|w| = 1, \qquad \operatorname{Im} w^2 = \frac{1}{2},$$

ovvero

$$w^2 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i.$$

Pertanto $w$ è una delle due radici quadrate di $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i = e^{\frac{i\pi}{6}}$ oppure una delle due radici quadrate di $\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i = e^{\frac{5i\pi}{6}}$; in altre parole si ha $w \in \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, ove

$$w_1 = e^{\frac{i\pi}{12}}, \quad w_2 = e^{\frac{13i\pi}{12}}, \quad w_3 = e^{\frac{5i\pi}{12}}, \quad w_4 = e^{\frac{17i\pi}{12}},$$

mentre, essendo $z^2 = -w^2$, otteniamo in corrispondenza di ciascun $w_i$ due valori di $z$, e precisamente:

- se $w = w_1$ oppure $w = w_2$, allora $z^2 = -e^{\frac{i\pi}{6}} = e^{\frac{5i\pi}{6}}$, da cui $z = e^{\frac{5i\pi}{12}}$ oppure $z = e^{\frac{17i\pi}{12}}$;
- se $w = w_3$ oppure $w = w_4$, allora $z^2 = -e^{\frac{5i\pi}{6}} = e^{\frac{11i\pi}{6}}$, da cui $z = e^{\frac{11i\pi}{12}}$ oppure $z = e^{\frac{23i\pi}{12}}$.

In definitiva si hanno le otto soluzioni $(w, z)$ seguenti:

$$(e^{\frac{i\pi}{12}}, e^{\frac{5i\pi}{12}}), \quad (e^{\frac{i\pi}{12}}, e^{\frac{17i\pi}{12}}), \quad (e^{\frac{13i\pi}{12}}, e^{\frac{5i\pi}{12}}), \quad (e^{\frac{13i\pi}{12}}, e^{\frac{17i\pi}{12}}),$$

$$(e^{\frac{5i\pi}{12}}, e^{\frac{11i\pi}{12}}), \quad (e^{\frac{5i\pi}{12}}, e^{\frac{23i\pi}{12}}), \quad (e^{\frac{17i\pi}{12}}, e^{\frac{11i\pi}{12}}), \quad (e^{\frac{17i\pi}{12}}, e^{\frac{23i\pi}{12}}).$$

Volendo esprimere tali soluzioni in termini delle due quantità

$$a = \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \qquad b = \sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

troviamo le coppie

$$(a+ib, b+ia), \quad (a+ib, -b-ia), \quad (-a-ib, b+ia), \quad (-a-ib, -b-ia),$$

$$(b+ia, -a+ib), \quad (b+ia, a-ib), \quad (-b-ia, -a+ib), \quad (-b-ia, a-ib).$$

**Esercizio 2** La funzione $f$ è definita in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Si ha anzitutto

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{x+1} & \text{se } x \leq 0,\ x \neq -1, \\[2ex] \dfrac{x^2 e^x}{x-1} & \text{se } x \geq 0,\ x \neq 1. \end{cases}$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-1^\pm} f(x) = \mp\infty, \qquad \lim_{x\to1^\pm} f(x) = \pm\infty.$$

Ci sono dunque due asintoti verticali, di equazioni $x = -1$ e $x = 1$. Vediamo se ci sono asintoti obliqui: poiché

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1, \qquad \lim_{x\to-\infty} (f(x) + x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2 + x(x+1)}{x+1} = 1,$$

la retta $y = -x + 1$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$; poiché

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

non ci sono asintoti obliqui per $x \to +\infty$.
Inoltre $f$ è continua nel punto $x = 0$, con $f(0) = 0$; questa è la sua unica intersezione con l'asse $x$. Essendo inoltre

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) = 0,$$

la funzione $f$ è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; con facili calcoli si trova

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2} & \text{se } x \leq 0,\ x \neq -1, \\[2ex] \dfrac{x(x^2-2)e^x}{(x-1)^2} & \text{se } x \geq 0,\ x \neq 1. \end{cases}$$

È facile allora determinare gli intervalli di monotonia: $f$ cresce sugli intervalli

$$[-2,-1[,\quad ]-1,0],\quad [\sqrt{2},+\infty[,$$

mentre decresce sugli intervalli

$$]-\infty,-2],\quad [0,1[,\quad ]1,\sqrt{2}].$$

Si conclude perciò che $f$ ha $-2$ come punto di minimo relativo, con $f(-2)=4$, ha 0 come punto di massimo relativo, con $f(0)=0$, ed ha $\sqrt{2}$ come punto di minimo relativo, con $f(\sqrt{2})=\frac{2e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1}$.
Si riconosce poi che $f$ ha derivata seconda nei punti di $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, in quanto nel punto 0 si ha

$$\lim_{x\to 0^{\pm}}\frac{f'(x)}{x}=f''(0)=-2.$$

Con facili calcoli si ottiene

$$f''(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{(x+1)^3} & \text{se } x\le 0,\ x\ne -1,\\[2ex] \dfrac{e^x(x^4-5x^2+4x+2)}{(x-1)^3} & \text{se } x\ge 0,\ x\ne 1.\end{cases}$$

Si riconosce allora facilmente che $f''$ è positiva per $x<-1$ e negativa per $-1<x\le 0$. Meno facile è lo studio del segno di $f''$ per $x>0$: esso dipende dal segno del fattore $g(x)=x^4-5x^2+4x+2$. Analizziamo in dettaglio la questione.
Risulta $g(0)=2$, $g(1)=2$, e

$$g(x)=x^4-5x^2+4x+2=\left(x^2-\frac{5}{2}\right)^2+4x-\frac{17}{4}>0\quad \forall x>\frac{17}{16}, \qquad (1)$$

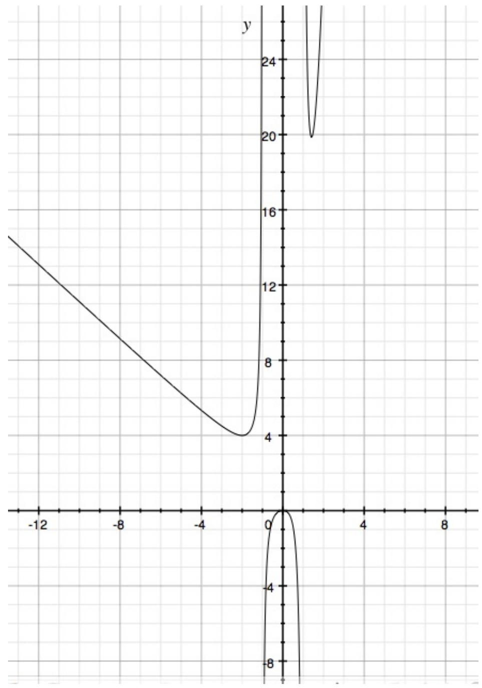
ma non è evidente se $g(x)$ sia positiva per ogni $x\in\left]0,\frac{17}{16}\right]$. Tuttavia, la derivata di $g$ è $g'(x)=4x^3-10x+4$, e in particolare essa verifica

$$\lim_{x\to-\infty}g'(x)=-\infty,\quad g'(0)=4,\quad g'(1)=-2,\quad g'(2)=16.$$

Pertanto la $g'$, che è un polinomio di terzo grado, si annulla esattamente in tre punti, uno negativo (di minimo locale per $g$), uno fra 0 e 1 (di massimo locale per $g$) e uno fra 1 e 2 (di minimo locale per $g$): chiamiamo questi ultimi punti $M$ e $m$. Si ha dunque $M \in ]0,1[$, $m \in ]1,2[$ e la $g$ cresce in [0,M], decresce in $[M,m]$ e cresce in $[m,\infty[$. Se ne deduce che $g(x) \geq \min\{g(m), g(0)\} = \min\{g(m), 2\}$ per ogni $x \geq 0$. Quindi dobbiamo solo provare che $g(m) > 0$. Dato che

$$g'(17/16) = -\frac{1871}{1024} < 0,$$

si ha $m > 17/16$ e quindi $g(m) > 0$ in virtù della (1), come richiesto.
Si conclude allora che $f''$ è negativa per $x \in [0,1[$ e positiva per $x > 1$. In definitiva $f$ è convessa su $]-\infty,-1[$, concava su $]-1,1[$ e convessa su $]1,\infty[$.




**Esercizio 3** Si tratta di una equazione differenziale di tipo Bernoulli, con esponente $\alpha = -3$. Per risolverla, poniamo $u(x) = y(x)^4$: si ha

$$u'(x) = 4y(x)^3 y'(x) = 4y(x)^3 \left( -\frac{x}{2(1+x^2)}\, y(x) + \frac{(\sin x)^2}{y(x)^3} \right),$$

e dunque $u$ risolve l'equazione differenziale lineare

$$u'(x) = -\frac{2x}{1+x^2}\, u(x) + 4\sin^2 x.$$

Posto allora

$$A(x) = \int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt = \ln(1+x^2),$$

si ha

$$\left(u(x)e^{A(x)}\right)' = (u(x)(1+x^2))' = 4(1+x^2)\sin^2 x,$$

da cui
$$u(x) = \frac{4}{1+x^2}\left[c + \int_0^x (1+t^2)\sin^2 t\,dt\right].$$
Poiché $u(0) = y(0)^4 = 1$, otteniamo $1 = u(0) = 4c$, da cui $c = 1/4$ e
$$u(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(1 + 4\int_0^x (1+t^2)\sin^2 t\,dt\right).$$
Pertanto
$$y(x) = \left[\frac{1}{1+x^2}\left(1 + 4\int_0^x (1+t^2)\sin^2 t\,dt\right)\right]^{\frac{1}{4}}.$$
Non resta che calcolare l'integrale. Si ha
$$\begin{aligned}\int_0^x (1+t^2)\sin^2 t\,dt &= \left[(1+t^2)\,\frac{t-\sin t\cos t}{2}\right]_0^x - \int_0^x t(t-\sin t\cos t)dt = \\ &= (1+x^2)\,\frac{x-\sin x\cos x}{2} - \frac{x^3}{3} + \int_0^x \frac{t\sin 2t}{2}\,dt = \\ &= \frac{x}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{1+x^2}{4}\,\sin 2x - \frac{1}{4}[t\cos 2t]_0^x + \frac{1}{8}[\sin 2t]_0^x = \\ &= \frac{x}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{1+2x^2}{8}\,\sin 2x - \frac{x\cos 2x}{4}.\end{aligned}$$
In definitiva la soluzione del problema di Cauchy è
$$y(x) = \left[\frac{1}{1+x^2}\left(1 + 2x + \frac{2}{3}\,x^3 - \frac{1+2x^2}{2}\,\sin 2x - x\cos 2x\right)\right]^{\frac{1}{4}}.$$

## Prova scritta del 21 settembre 2007

**Esercizio 1** Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita da
$$\begin{cases} a_0 = \lambda > 0 \\ a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n^2 + a_n + 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

**(i)** Si provi che esiste il limite $L$ della successione $\{a_n\}$ e lo si calcoli.

**(ii)** Nel caso in cui $L \in \mathbb{R}$, si descriva il comportamento della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - L).$$

**Esercizio 2** Si definisca
$$f(x) = \frac{e^x - 5}{e^{2x} - 9}\,.$$

**(i)** Si descriva qualitativamente il comportamento di $f$ e si tracci un grafico approssimativo della funzione (tralasciando lo studio della derivata seconda).

**(ii)** Calcolare, se esiste, l'integrale improprio
$$\int_{\ln 5}^{\infty} \frac{e^x - 5}{e^{2x} - 9}\,dx.$$

**Esercizio 3** Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y_n'(x) + x y_n(x) = x^{2n}, & x \in \mathbb{R}, \\ y_n(0) = \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

**(i)** Si scriva, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la soluzione $y_n$ del problema e si dica se essa è una funzione limitata su $\mathbb{R}$ oppure no.

**(ii)** Scelto $\alpha = 0$, si provi che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$ è convergente per ogni $x \in ]-1,1[$ ed è divergente per ogni $x$ tale che $|x| \geq 1$.

## Risoluzione

**Esercizio 1 (i)** È chiaro che, qualunque sia $\lambda > 0$, la successione $\{a_n\}$ è positiva. Osserviamo che la funzione $f(t) = \frac{1}{4}(t^2 + t + 1)$ è crescente per $t > 0$, e inoltre
$$f(t) < t \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{3-\sqrt{5}}{2} < t < \frac{3+\sqrt{5}}{2}\,;$$
quindi, se $t \in \left]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$ si ha
$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} = f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) < f(t) < t < \frac{3+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Dunque
$$\lambda \in \left]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[ \quad \Longrightarrow \quad a_1 \in \left]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \lambda\right[,$$

e con questa scelta di $\lambda$ è immediato verificare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$a_{n+1} \in \left]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, a_n\right[.$$

In modo del tutto analogo si dimostra induttivamente che

$$\lambda \in \left]0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[ \quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} \in \left]a_n, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[ \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\lambda \in \left]\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty\right[ \quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} \in ]a_n, \infty[ \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pertanto la successione è decrescente e limitata se $\lambda \in \left]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$, è crescente e limitata se $\lambda \in \left]0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[$, è crescente e illimitata se $\lambda \in \left]\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty\right[$ ed è costante se $\lambda = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. In tutti i casi essa ha limite; denotando tale limite con $L(\lambda)$, si ha

$$L(\lambda) = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & \text{se } \lambda \in \left]0, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[ \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2} & \text{se } \lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ +\infty & \text{se } \lambda \in \left]\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty\right[. \end{cases}$$

**(ii)** Se $\lambda = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, ovviamente $a_n$ è costante e quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - L)$, avendo tutti i termini nulli, è assolutamente convergente.
Supponiamo $\lambda \in \left]0, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$, $\lambda \neq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, e poniamo $L = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Dato che $L$ è radice dell'equazione $f(t) = t$, possiamo scrivere

$$a_{n+1} - L = \frac{1}{4}[(a_n^2 - L^2) + a_n - L] = \frac{1}{4}(a_n - L)(a_n + L + 1).$$

Adesso dobbiamo stimare la quantità $a_n + L + 1$ in modo indipendente da $n$. Ciò è facile, osservando che, quando $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < \lambda < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, la $a_n$ è decrescente e quindi $a_n \leq \lambda$ per ogni $n$, mentre quando $\lambda < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ si ha comunque $a_n \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ per ogni $n$. Ne segue

$$|a_{n+1} - L| \leq \frac{1}{4}|a_n - L| \left(\max\left\{\lambda, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\} + L + 1\right) = c|a_n - L|,$$

ove

$$c = \frac{1}{4}\left(\max\left\{\lambda, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\} + L + 1\right) < \frac{1}{4}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} + 1\right) = 1.$$

Pertanto, con un facile procedimento per induzione,

$$|a_n - L| < c^n\,|a_0 - L| = c^n\,|\lambda - L| \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ne segue, per confronto con la serie geometrica di ragione $c \in ]0,1[$, che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - L)$ è assolutamente convergente.
Infine se $\lambda \in \left]\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty\right[$ si ha $L = \infty$ e non c'è nulla da dimostrare.
**Esercizio 2 (i)** La funzione $f$ è definita in $\mathbb{R} \setminus \{\ln 3\}$; si ha $f(x) = 0$ se e solo se $x = \ln 5$, e risulta

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{5}{9}, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\ln 3^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\ln 3^+} f(x) = -\infty.$$

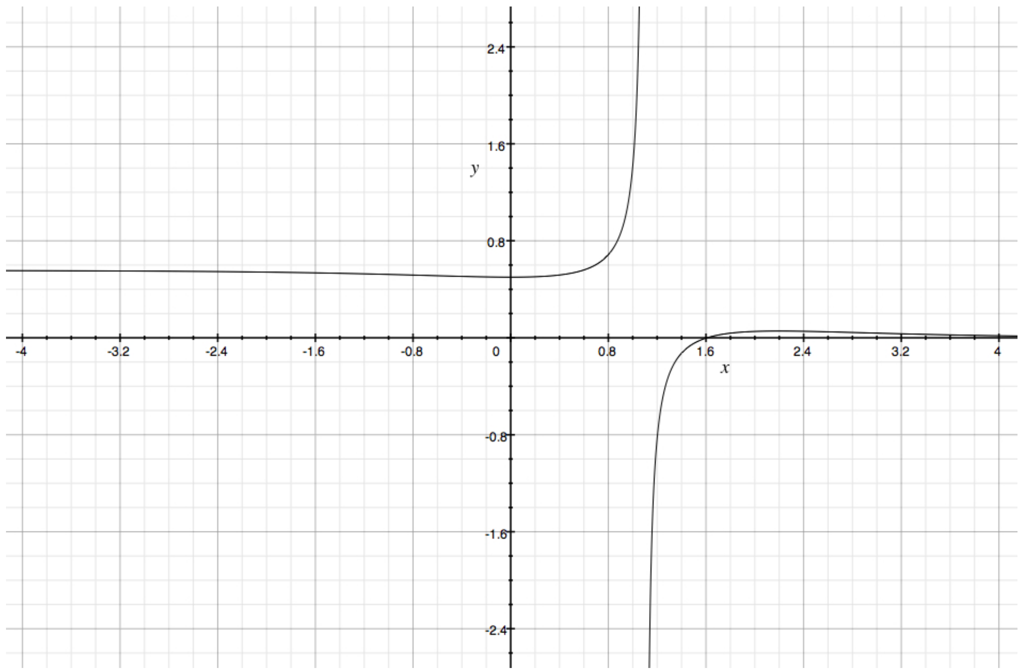
In particolare, $f$ non è limitata né superiormente, né inferiormente.
Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{e^x(e^{2x}-9) - 2e^{2x}(e^x-5)}{(e^{2x}-9)^2} = \frac{e^x}{(e^{2x}-9)^2}(-e^{2x} + 10e^x - 9).$$

Quindi

$$f'(x) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{2x} - 10e^x + 9 \leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^x \in [1,9],$$

cosicché $f$ è crescente negli intervalli $[0, \ln 3[$ e $]\ln 3, 2\ln 3]$, ed è decrescente in $]-\infty, 0]$ e in $[2\ln 3, +\infty[$. Il punto 0 è dunque di minimo relativo, con $f(0) = \frac{1}{2}$, mentre il punto $2\ln 3$ è di massimo relativo, con $f(2\ln 3) = \frac{1}{18}$. Sulla base delle informazioni ricavate, e tralasciando lo studio della derivata seconda, il grafico approssimativo della funzione è il seguente:




**(ii)** La funzione ha certamente integrale improprio finito in $]\ln 5, \infty[$, essendo continua, non negativa e infinitesima dell'ordine di $e^{-x}$ per $x \to \infty$. Si ha, ponendo $e^x = t$,

$$
\begin{aligned}
\int_{\ln 5}^{\infty} \frac{e^x - 5}{e^{2x} - 9}\, dx &= \int_5^{\infty} \left[ \frac{1}{t^2 - 9} - \frac{5}{t(t^2-9)} \right] dt = \\
&= \int_5^{\infty} \left[ \frac{1}{6}\left( \frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3} \right) + \frac{5}{18}\left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t-3} \right) + \frac{5}{18}\left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+3} \right) \right] dt = \\
&= \left[ \frac{1}{6} \ln \frac{t-3}{t+3} + \frac{5}{18} \ln \frac{t}{t-3} + \frac{5}{18} \ln \frac{t}{t+3} \right]_5^{\infty} = \\
&= -\frac{1}{6} \ln \frac{1}{4} - \frac{5}{18} \ln \frac{5}{2} - \frac{5}{18} \ln \frac{5}{8} = -\frac{5}{9} \ln 5 + \frac{13}{9} \ln 2.
\end{aligned}
$$

**Esercizio 3 (i)** L'equazione differenziale è del primo ordine: dalla formula risolutiva, con facili calcoli, si ottiene che la soluzione del problema di Cauchy è

$$y_n(x) = \alpha\, e^{-x^2/2} + e^{-x^2/2} \int_0^x t^{2n} e^{t^2/2}\, dt,$$

ed è inutile provare a dare forma esplicita all'integrale, che al più si può ricondurre, con $n$ integrazioni per parti, all'integrale di $e^{t^2/2}$.

La funzione $y_n$ verifica, in virtù del teorema di de L'Hôpital,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} y_n(x) &= \lim_{x\to\infty} \alpha\, e^{-x^2/2} + \lim_{x\to\infty} \left[ e^{-x^2/2} \int_0^x t^{2n} e^{t^2/2}\, dt \right] = \\
&= 0 + \lim_{x\to\infty} \frac{x^{2n} e^{x^2/2}}{x e^{x^2/2}} = +\infty \qquad \forall n \geq 1,
\end{aligned}$$

e quindi è limitata su $\mathbb{R}$ soltanto per $n = 0$.

**(ii)** Supponiamo $\alpha = 0$. Poiché in questo caso le funzioni $y_n$ sono tutte dispari, basta considerare il caso in cui $x \geq 0$; in tal caso, le $y_n$ sono anche tutte positive. Se $0 \leq x < 1$ si ha

$$y_n(x) = e^{-x^2/2} \int_0^x t^{2n} e^{t^2/2}\, dt \leq \int_0^x t^{2n}\, dt = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} < x^{2n+1},$$

e quindi la serie $\sum_{n=0}^\infty y_n(x)$ converge per confronto con la serie $\sum_{n=0}^\infty x^{2n+1}$.
Se invece $x \geq 1$ possiamo scrivere

$$y_n(x) = e^{-x^2/2} \int_0^x t^{2n} e^{t^2/2}\, dt \geq e^{-x^2/2} int_1^x t^{2n} e^{1/2}\, dt = e^{(1-x^2)/2}\, \frac{x^{2n+1} - 1}{2n+1},$$

e dato che l'ultimo membro tende a $+\infty$ per $n \to \infty$, la serie $\sum_{n=0}^\infty y_n(x)$ è necessariamente divergente a $+\infty$.
Naturalmente per $x < 0$ si avrà convergenza assoluta per $-1 < x \leq 0$ e divergenza a $-\infty$ per $x \leq -1$.

## Prova scritta del 4 ottobre 2007

**Esercizio 1** Posto

$$a_n = \int_n^{n+1} e^{-t^2}\, dt, \qquad n \in \mathbb{N},$$

si determini l'insieme di convergenza delle due serie di potenze

$$\sum_{n=0}^\infty a_n x^n, \qquad \sum_{n=0}^\infty a_n x^{n^2}.$$

**Esercizio 2** Dimostrare che

$$D^k \left( \frac{1 - e^{-t}}{t} \right) = \int_0^1 (-s)^k e^{-st}\, ds \qquad \forall t > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

## Risoluzione

**Esercizio 1** Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$: per ogni $x \in \mathbb{R}$ essa converge assolutamente, perché

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\int_n^{n+1} e^{-t^2} dt} \leq \sqrt[n]{e^{-n^2}} = e^{-n} \to 0 \quad \text{per} \quad n \to \infty.$$

Consideriamo adesso la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n^2}$: dato che

$$e^{-(n+1)^2} \leq a_n \leq e^{-n^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

moltiplicando per $|x|^{n^2}$ si ottiene

$$\left(\frac{|x|}{e}\right)^{n^2} e^{-2n-1} \leq a_n |x|^{n^2} \leq \left(\frac{|x|}{e}\right)^{n^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pertanto, quando $|x| > e$ la serie dei moduli diverge, e quindi la serie diverge per $x > e$ ed è indeterminata per $x < -e$; quando $|x| < e$ la serie converge assolutamente. Quando $|x| = e$, occorre un calcolo più preciso: si ha, posto $s = t - n$,

$$a_n e^{n^2} = \int_n^{n+1} e^{-(t^2-n^2)} dt = \int_0^1 e^{-s(s+2n)} ds = \int_0^1 e^{-s^2} e^{-2ns} ds \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui

$$a_n e^{n^2} \begin{cases} \leq \int_0^1 e^{-2ns} ds = \frac{1-e^{-2n}}{2n} \\ \geq e^{-1} \int_0^1 e^{-2ns} ds = \frac{1-e^{-2n}}{2ne}. \end{cases}$$

Dunque, per confronto asintotico con la serie armonica, la serie dei moduli diverge e quindi la serie diverge se $x = e$ e converge (in virtù del criterio di Leibniz) se $x = -e$.

**Esercizio 2** Proviamo la tesi per induzione su $k$. Se $k = 0$ la tesi è evidente perché

$$D^0 \left(\frac{1 - e^{-t}}{t}\right) = \frac{1 - e^{-t}}{t} = \int_0^1 e^{-st}\, ds = \int_0^1 (-s)^0 e^{-st}\, ds \qquad \forall t > 0.$$

Supponiamo vera la tesi per un intero $k \geq 0$ e proviamola per $k + 1$. Si ha, utilizzando al secondo passaggio l'ipotesi induttiva,

$$D^{k+1} \left(\frac{1 - e^{-t}}{t}\right) \;=\; D\left(D^k \left(\frac{1 - e^{-t}}{t}\right)\right) = D\left(\int_0^1 (-s)^k e^{-st}\, ds\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= D\left(\int_0^t (-r)^k e^{-r}\,dr \cdot \frac{1}{(-1)^k t^{k+1}}\right) = \\
&= \frac{(-1)^k e^{-t}}{t} - (k+1)\int_0^t (-r)^k e^{-r}\,dr \cdot \frac{1}{(-1)^k t^{k+2}} = \\
&= \frac{(-1)^k e^{-t}}{t} - (k+1)\int_0^1 (-s)^k \frac{e^{-st}}{t}\,ds = \\
&= \frac{(-1)^k e^{-t}}{t} + \left[(-s)^{k+1}\frac{e^{-st}}{t}\right]_0^1 + \int_0^1 (-s)^{k+1} e^{-st}\,ds = \\
&= \int_0^1 (-s)^{k+1} e^{-st}\,ds.
\end{aligned}
$$

## Prova scritta del 14 gennaio 2008

**Esercizio 1** Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+2}}{2n+1}$$

e calcolarne la somma nell'insieme di convergenza.
**Esercizio 2** Descrivere il comportamento della funzione

$$f(x) = e^{-|x|}|x-1|^{1/3}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

tracciandone un grafico approssimativo.
**Esercizio 3** Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3xy^3}{1+y} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

## Risoluzione

**Esercizio 1** Applichiamo il criterio della radice: poiché

$$\sqrt[n]{\frac{|2x|^{2n+2}}{2n+1}} = \frac{|2x|^{2+\frac{2}{n}}}{\sqrt[n]{2n+1}} \to 4x^2 \quad \text{per} \quad n \to \infty,$$

la serie dei moduli sarà assolutamente convergente quando $4x^2 < 1$ e divergente quando $4x^2 > 1$ (perché in quest'ultimo caso il termine generale non

è infinitesimo). Dunque si ha convergenza assoluta se e solo se $|x| < \frac{1}{2}$ e pertanto il raggio di convergenza della serie è $\frac{1}{2}$.
La serie diverge positivamente quando $x = \pm\frac{1}{2}$, per confronto asintotico con la serie armonica. Dunque l'insieme di convergenza è l'intervallo $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.
Calcoliamo la somma della serie. Anzitutto si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+2}}{2n+1} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}}{2n+1}.$$

Ora, posto

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |t| < 1,$$

si ha $S(0) = 0$ e, dalla teoria delle serie di potenze,

$$S'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} = \frac{1}{1-t^2} \qquad \forall t \in ]-1, 1[,$$

e dunque

$$S(t) = \int_0^t S'(s)\,ds = \int_0^t \frac{ds}{1-s^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} \qquad \forall t \in ]-1, 1[.$$

Se ne deduce

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+2}}{2n+1} = 2x\,S(2x) = x \ln \frac{1+2x}{1-2x} \qquad \forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[.$$

**Esercizio 2** La funzione $f$ è continua e non negativa su $\mathbb{R}$, con probabili discontinuità nella derivata prima. Si ha, eliminando i valori assoluti,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}(x-1)^{1/3} & \text{se } x \geq 1, \\ e^{-x}(1-x)^{1/3} & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ e^{x}(1-x)^{1/3} & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

In particolare,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad f(1) = 0, f(0) = 1$$

e 1 è punto di minimo assoluto.
Calcoliamo la derivata prima. Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x}\left[-(x-1)^{1/3} + \frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}\right] & \text{se } x > 1, \\ e^{-x}\left[-(1-x)^{1/3} - \frac{1}{3}(1-x)^{-2/3}\right] & \text{se } 0 < x < 1, \\ e^{x}\left[(1-x)^{1/3} - \frac{1}{3}(1-x)^{-2/3}\right] & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

e in particolare

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{4}{3}, \quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{2}{3}.$$

Inoltre

$$f'(x) \ge 0 \quad \iff \quad \begin{cases} -(x-1) + \frac{1}{3} \ge 0 & \text{se } x > 1, \\ -(1-x) - \frac{1}{3} \ge 0 & \text{se } 0 < x < 1, \\ 1 - x - \frac{1}{3} \ge 0 & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

è facile allora dedurre che $f'(x) \ge 0$ se e solo se $x < 0$ oppure $1 < x \le \frac{4}{3}$, per cui $f$ è crescente in $]-\infty, 0] \cup \left[1, \frac{4}{3}\right]$ ed è decrescente in $[0,1] \cup \left[\frac{4}{3}, \infty\right[$. In particolare, 0 è punto di massimo relativo con $f(0) = 1$ e $\frac{4}{3}$ è punto di massimo relativo con $f\left(\frac{4}{3}\right) = 3^{-1/3}e^{-4/3} < 1$, cosicché 0 è punto di massimo assoluto.
Calcoliamo la derivata seconda: si ha

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x}\left[(x-1)^{1/3} - \frac{2}{3}(x-1)^{-2/3} - \frac{2}{9}(x-1)^{-5/3}\right] & \text{se } x > 1, \\ e^{-x}\left[(1-x)^{1/3} + \frac{2}{3}(1-x)^{-2/3} - \frac{2}{9}(1-x)^{-5/3}\right] & \text{se } 0 < x < 1, \\ e^{x}\left[(1-x)^{1/3} - \frac{2}{3}(1-x)^{-2/3} - \frac{2}{9}(1-x)^{-5/3}\right] & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

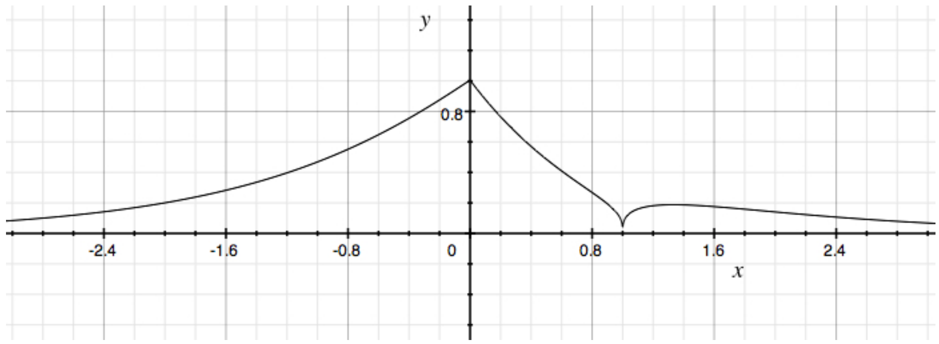
Risolvendo le tre disequazioni di secondo grado

$$\begin{aligned} &9(x-1)^2 - 6(x-1) - 2 \quad \text{se } x > 1, \\ &9(1-x)^2 + 6(1-x) - 2 \quad \text{se } 0 < x < 1, \\ &9(1-x)^2 - 6(1-x) - 2 \quad \text{se } x < 0, \end{aligned}$$

si arriva facilmente a concludere che

$$f''(x) \ge 0 \quad \iff \quad x \ge \frac{4+\sqrt{3}}{3} \ \text{ oppure } \ 0 < x \le \frac{4-\sqrt{3}}{3} \ \text{ oppure } \ x < 0.$$

I punti $\frac{4+\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{4-\sqrt{3}}{3}$ sono dunque di flesso.
Dalle informazioni raccolte è possibile ricavare il seguente grafico qualitativo:




**Esercizio 3** L'equazione differenziale è a variabili separabili. L'unica soluzione stazionaria è $y(x) = 0$, che non risolve il problema di Cauchy. Quindi, supposto $y \neq 0$, possiamo scrivere

$$\frac{1+y}{y^3}\, y' = 3x \iff \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2y^2} - \frac{1}{y}\right) = 3x \iff -\frac{1}{2y^2} - \frac{1}{y} = \frac{3}{2}x^2 + C,$$

e risolvendo rispetto a $\frac{1}{y}$ si trova

$$\frac{1}{y} = -1 \pm \sqrt{1 - 3x^2 + 2C},$$

ossia

$$y(x) = \frac{1}{\pm\sqrt{1-3x^2+2C} - 1}\,.$$

Poiché $y(0)$ deve essere positiva, scegliamo

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{1-3x^2+2C} - 1}\,.$$

Imponendo che $y(0) = 1$ si trova

$$1 = \frac{1}{\sqrt{1+2C} - 1}\,,$$

da cui $C = \frac{3}{2}$. Dunque la soluzione del problema di Cauchy è la funzione

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{4-3x^2} - 1}\,,$$

definita nel massimo intervallo possibile che contenga 0, ossia l'intervallo $]-1, 1[$.

## Prova scritta del 4 febbraio 2008

**Esercizio 1** Siano $u, v, w \in \mathbb{C}$ tali che $|u| = |v| = |w| > 0$. Dimostrare che i seguenti fatti sono equivalenti:

**(i)** $u + v + w = 0$;

**(ii)** $|u - v| = |v - w| = |w - u|$;

**(iii)** $u, v, w$ sono vertici di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza centrata nell'origine.

**Esercizio 2** Data la funzione

$$f(x) = \exp\left(|\ln x| - \sqrt{|\ln x|}\right),$$

se ne descriva il comportamento sul suo dominio, tracciandone un grafico approssimativo.

**Esercizio 3** Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\cos x} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\cos x} \right) dx.$$

## Risoluzione

**Esercizio 1** L'equivalenza fra (ii) e (iii) è ovvia.

Proviamo che (i) implica (ii). A meno di un'omotetia e di una traslazione possiamo supporre che

$$u = 1, \qquad |v| = |w| = 1,$$

cosicché risulta per ipotesi $v + w = -1$. Scrivendo $v = a + ib$, deduciamo $w = -1 - a - ib$; quindi

$$v - w = 2a + 1 + 2ib, \quad u - v = 1 - a - ib, \quad w - u = -2 - a - ib.$$

Si ha allora, ricordando che $a^2 + b^2 = 1$,

$$\begin{aligned} |v - w|^2 &= (2a + 1)^2 + 4b^2 = 5 + 4a, \\ |u - v|^2 &= (1 - a)^2 + b^2 = 2 - 2a, \\ |w - u|^2 &= (2 + a)^2 + b^2 = 5 + 4a. \end{aligned}$$

D'altra parte, si sa che $1 = |w|^2 = (1+a)^2 + b^2$, da cui facilmente segue $a = -1/2$ e pertanto $5 + 4a = 3 = 2 - 2a$, il che prova (ii).

Proviamo che (ii) implica (i). Essendo $u = 1$ e $|v| = |w| = 1$, posto $v = a+ib$ e $w = p + iq$, l'ipotesi $|1 - v| = |1 - w|$ ci dice che

$$(1-a)^2 + b^2 = (1-p)^2 + q^2, \quad \text{ossia} \quad 2 - 2a = 2 - 2p,$$

da cui $a = p$ e dunque $b^2 = q^2$.
Ora, se $b = q$ otteniamo $v = w$; dall'ipotesi deduciamo allora $1 = v = w$, che implica $u + v + w = 3$: assurdo. Perciò è $b = -q$, ossia $w = \overline{v}$. Questo implica $4b^2 = |v - w|^2 = |1 - v|^2 = 2 - 2a$, cioè

$$4 - 4a^2 = 2 - 2a, \quad \text{ovvero} \quad 2a^2 - a - 1 = 0.$$

Questa equazione ha le radici $a = 1$ e $a = -1/2$: la prima però è da scartare in quanto implica $b = 0$, cioè $v = w = 1$, che porta ancora a $u + v + w = 3$, assurdo. Perciò è $a = -1/2$, da cui $b = \pm\sqrt{3}/2$. Si ha in definitiva

$$u = 1, \quad v = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad w = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

che finalmente dà $u + v + w = 0$.
**Esercizio 2** La funzione $f$ è definita per $x > 0$. Risulta

$$f(x) = \begin{cases} x \exp\left(-\sqrt{\ln x}\right) & \text{se } x \geq 1, \\ \dfrac{1}{x} \exp\left(-\ln\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right) & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Si ha pertanto

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Calcolando la derivata prima, si trova

$$f'(x) = \begin{cases} \exp\left(-\sqrt{\ln x}\right)\left(1 - \dfrac{1}{2\sqrt{\ln x}}\right) & \text{se } x > 1, \\ -\dfrac{1}{x^2} \exp\left(-\ln\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)\left(1 - \dfrac{1}{2\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\right) & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Se ne deduce

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty, \quad f'_-(1) = +\infty, \quad f'_+(1) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0;$$

inoltre analizzando il segno di $f'$ si vede facilmente che $e^{1/4}$ e $e^{-1/4}$ sono punti di minimo relativo, con $f(e^{1/4}) = f(e^{-1/4}) = e^{-1/4}$; invece 1 è punto di massimo relativo con $f(1) = 1$, e si tratta di un punto di cuspide.
Analizziamo la derivata seconda: con qualche calcolo si ottiene

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp(-\sqrt{\ln x})}{4x(\ln x)^{3/2}}\left(1+\sqrt{\ln x}-2\ln x\right) & \text{se } x > 1, \\ \dfrac{\exp\left(-\ln\sqrt{\frac{1}{x}}\right)}{4x^3\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{3/2}}\left(8\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} - 6\ln\dfrac{1}{x} + \sqrt{\ln\dfrac{1}{x}} + 1\right) & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

da queste relazioni si deduce che per $x > 1$ risulta, posto $t = \sqrt{\ln x}$,

$$f''(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2t^2 - t - 1 \leq 0;$$

le due radici del trinomio sono $-\frac{1}{2}$ e 1, ma la prima è negativa: ne segue

$$f''(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < t \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 < x \leq e.$$

Invece se $0 < x < 1$ si ha, posto $t = \sqrt{\ln 1/x}$,

$$f''(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 8t^3 - 6t^2 + t + 1 \geq 0.$$

la funzione $g(t) = 8t^3 - 6t^2 + t + 1$, $t \geq 0$, soddisfa $g(0) = 1$ e

$$g'(t) = 24t^2 - 12t + 1 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq t \leq \frac{3-\sqrt{3}}{12} \quad \text{oppure} \quad t \geq \frac{3+\sqrt{3}}{12};$$

dunque $g$ cresce in $\left[0, \frac{3-\sqrt{3}}{12}\right]$, decresce in $\left[\frac{3-\sqrt{3}}{12}, \frac{3+\sqrt{3}}{12}\right]$ fino al valore

$$g\left(\frac{3+\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{11}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} > 0$$

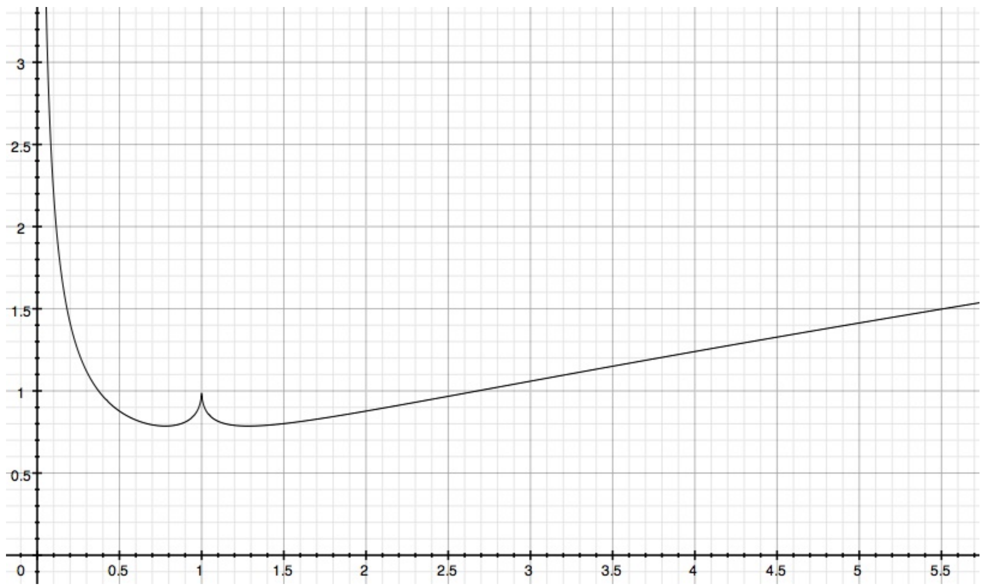
e poi cresce di nuovo. Pertanto $g(t) \geq 0$ per ogni $t \geq 0$ e ciò ci permette di concludere che $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in ]0, 1[$. In definitiva

$$f''(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow 0 < x < 1 \text{ oppure } 1 < x < e.$$

Si ha anche

$$f(e) = 1, \qquad f'(e) = \frac{1}{2e}\,.$$

Dalle informazioni raccolte è possibile ricavare il seguente grafico qualitativo.




**Esercizio 3** Posto $t = \tan\frac{x}{2}$, si ha

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt,$$

da cui

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{1+\frac{1}{2}\cos x} - \frac{1}{1-\frac{1}{4}\cos x} \right) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{2}{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\,t^2} - \frac{1}{\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\,t^2} \right) dt =$$

$$= 4\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{3+t^2} - \frac{1}{3+5t^2} \right) dt =$$

$$= \frac{4}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dt - \frac{4}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{5}\,t}{\sqrt{3}}\right)^2} \right) dt =$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_{-\infty}^{+\infty}-\frac{4}{\sqrt{15}}\left[\arctan\frac{\sqrt{5}\,t}{\sqrt{3}}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

## Prova scritta dell'11 giugno 2009

**Esercizio 1** **(i)** Dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{\alpha}{k}\left(\frac{\alpha}{2}-k\right)=\frac{m+1}{2}\binom{\alpha}{m+1}\qquad\forall\alpha\in\mathbb{R},\ \forall m\in\mathbb{N}.$$

**(ii)** Stabilire cosa succede per $m\to\infty$ nei due casi $\alpha<0$ e $0<\alpha<1$.

[**Suggerimento:** Per (ii), in entrambi i casi analizzare il rapporto fra due termini consecutivi del secondo membro; nel secondo caso, conviene anche sviluppare convenientemente il modulo del secondo membro e passare al logaritmo.]

**Esercizio 2** **(i)** Determinare le soluzioni $z\in\mathbb{C}$ dell'equazione

$$|z|z^3=4(1+i)^4.$$

**(ii)** Calcolare l'area e il perimetro del poligono che ha per vertici tali soluzioni.

**Esercizio 3** Calcolare, se esistono, i limiti seguenti:

$$\textbf{(a)}\ \lim_{x\to0}\left(\ln|3^x-1|-\ln|9^x-1|\right),\qquad\textbf{(b)}\ \lim_{x\to0}\frac{e^{1-\frac{x}{\sin x}}-1}{(\tan x)^2}.$$

**Esercizio 4** **(i)** Verificare che per ogni $n\in\mathbb{N}^+$ l'equazione

$$\tan x=(1-x)^n$$

ha un'unica soluzione $x_n\in\,]0,1[$.

(ii) Provare che la successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ è decrescente e infinitesima, e che la serie $\sum x_n$ è divergente.

[**Suggerimento:** Per la divergenza della serie, confrontare con $\sum\tan x_n$.]

**Esercizio 5** Descrivere le principali proprietà (dominio, comportamento agli estremi del dominio, eventuali asintoti, intervalli di crescenza e di convessità) della funzione

$$f(x)=(x+2|x|)e^{-1/x^2},$$

tracciandone un grafico qualitativo.
**Esercizio 6** Verificare che esiste l'integrale improprio

$$\int_1^4 \frac{[x+1]-x}{(4-x)^{3/2}}\,dx,$$

e calcolarlo.

## Risoluzione

**Esercizio 1** **(i)** Proviamo la tesi per induzione. Per $m=0$ si ha

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{\alpha}{k}\left(\frac{\alpha}{2}-k\right) = \binom{\alpha}{0}\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\binom{\alpha}{1},$$

quindi la tesi è vera. Se la tesi vale per un fissato $m \in \mathbb{N}$, si ha, isolando l'ultimo termine della somma di sinistra,

$$\sum_{k=0}^{m+1} \binom{\alpha}{k}\left(\frac{\alpha}{2}-k\right) = \sum_{k=0}^{m} \binom{\alpha}{k}\left(\frac{\alpha}{2}-k\right) + \binom{\alpha}{m+1}\left(\frac{\alpha}{2}-m-1\right);$$

per ipotesi induttiva possiamo scrivere allora

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+1} \binom{\alpha}{k}\left(\frac{\alpha}{2}-k\right) &= \frac{m+1}{2}\binom{\alpha}{m+1} + \binom{\alpha}{m+1}\left(\frac{\alpha}{2}-m-1\right) = \\
&= \binom{\alpha}{m+1}\frac{\alpha-m-1}{2} = \\
&= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-m)(\alpha-m-1)}{2(m+1)!} = \\
&= (m+2)\,\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-m)(\alpha-m-1)}{2(m+2)!} = \\
&= \frac{m+2}{2}\binom{\alpha}{m+2},
\end{aligned}$$

e ciò prova la tesi nel caso $m+1$. Ne segue che il risultato è vero per ogni $m \in \mathbb{N}$.
**(ii)** Dobbiamo calcolare, se esiste, il limite della successione

$$\left\{\frac{m}{2}\binom{\alpha}{m}\right\}_{m\in\mathbb{N}}.$$

Sia $\alpha < 0$. Allora

$$\frac{m}{2}\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-m+1)}{2(m-1)!},$$

da cui, essendo $\alpha = -|\alpha|$,

$$\frac{\frac{m+1}{2}\binom{\alpha}{m+1}}{\frac{m}{2}\binom{\alpha}{m}} = \frac{\alpha-m}{m} = -\frac{m+|\alpha|}{m} < -1.$$

Se ne deduce che la successione ha segni alterni e cresce in valore assoluto: pertanto essa non ha limite.

Sia $0 < \alpha < 1$. Procedendo esattamente allo stesso modo si ottiene stavolta che

$$\frac{\frac{m+1}{2}\binom{\alpha}{m+1}}{\frac{m}{2}\binom{\alpha}{m}} = \frac{\alpha-m}{m} = -\frac{m-\alpha}{m} \in ]-1,0[,$$

e dunque la successione è a segni alterni e decrescente in valore assoluto: pertanto essa o è indeterminata, o converge a 0. Passiamo al logaritmo del modulo:

$$\begin{aligned}\ln\left|\frac{m}{2}\binom{\alpha}{m}\right| &= \ln\left(\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{1}\cdot\frac{2-\alpha}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{m-1-\alpha}{m-1}\right) = \\ &= \ln\frac{\alpha}{2} + \sum_{k=1}^{m-1}\ln\frac{k-\alpha}{k} = \ln\frac{\alpha}{2} - \sum_{k=1}^{m-1}\ln\left(1-\frac{\alpha}{k}\right).\end{aligned}$$

La serie all'ultimo membro è a termini positivi e diverge a $+\infty$, per confronto asintotico con la serie armonica. Quindi

$$\lim_{m\to\infty}\ln\left|\frac{m}{2}\binom{\alpha}{m}\right| = -\infty$$

da cui

$$\exists \lim_{m\to\infty}\frac{m}{2}\binom{\alpha}{m} = 0.$$

Osserviamo che la stessa proprietà vale per ogni $\alpha \geq 0$; se in particolare $\alpha \in \mathbb{N}$, la successione è definitivamente nulla. Osserviamo anche che, per $\alpha < 0$, lo stesso procedimento ci dice che

$$\begin{aligned}\ln\left|\frac{m}{2}\binom{\alpha}{m}\right| &= \ln\left(\frac{|\alpha|}{2}\cdot\frac{1+|\alpha|}{1}\cdot\frac{2+|\alpha|}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{m-1+|\alpha|}{m-1}\right) = \\ &= \ln\frac{|\alpha|}{2} + \sum_{k=1}^{m-1}\ln\frac{k+|\alpha|}{k} = \ln\frac{|\alpha|}{2} - \sum_{k=1}^{m-1}\ln\left(1+\frac{\alpha}{k}\right),\end{aligned}$$

da cui
$$\lim_{m\to\infty} \ln \left| \frac{m}{2} \binom{\alpha}{m} \right| = +\infty$$
e pertanto, ricordando che, come abbiamo visto, $\frac{m}{2}\binom{\alpha}{m}$ ha segni alterni,
$$\limsup_{m\to\infty} \frac{m}{2} \binom{\alpha}{m} = +\infty, \qquad \liminf_{m\to\infty} \frac{m}{2} \binom{\alpha}{m} = -\infty.$$
**Esercizio 2 (i)** Se $z$ è soluzione, allora passando al modulo si trova
$$|z|^4 = 4|1+i|^4 = 4\sqrt{2}^4 = 16,$$
da cui $|z| = 2$; quindi l'equazione diventa
$$z^3 = 2(1+i)^4 = 2(2i)^2 = -8,$$
per cui $z$ è una delle tre radici cubiche di $-8$. Dato che $\arg(-8) = \pi$, le soluzioni sono
$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3},$$
$$z_2 = -2,$$
$$z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$$
Viceversa, è chiaro che $z_1$, $z_2$, $z_3$ risolvono l'equazione proposta.
**(ii)** L'area del triangolo di vertici $z_1$, $z_2$, $z_3$ è pari alla metà del prodotto fra la base (verticale), lunga $|z_1 - z_3| = 2\sqrt{3}$, e l'altezza (orizzontale), di lunghezza $|\operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Re} z_1| = 3$. Quindi l'area vale $3\sqrt{3}$.
Il perimetro, trattandosi di un triangolo equilatero, è invece uguale a $3|z_1 - z_3| = 6\sqrt{3}$.
**Esercizio 3** Per il primo limite si ha
$$\ln|3^x - 1| - \ln|9^x - 1| = \ln\frac{|3^x - 1|}{|3^{2x} - 1|} = \ln\frac{1}{3^x + 1},$$
cosicché
$$\lim_{x\to 0} (\ln|3^x - 1| - \ln|9^x - 1|) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2.$$
Per il secondo limite, utilizzando i noti limiti notevoli
$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

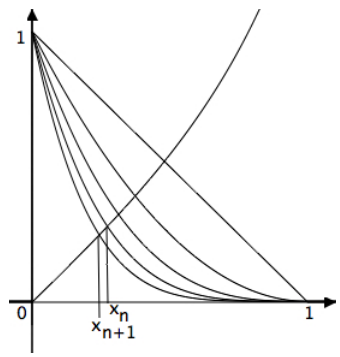
possiamo scrivere per $x \to 0$

$$\frac{e^{1-\frac{x}{\sin x}}-1}{(\tan x)^2} \simeq \frac{1-\frac{x}{\sin x}}{x^2} = \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x} \simeq \frac{\sin x - x}{x^3};$$

poiché risulta $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$ per $x \to 0$, l'ultima quantità ha limite $-\frac{1}{6}$. Otteniamo perciò

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{1-\frac{x}{\sin x}}-1}{(\tan x)^2} = -\frac{1}{6}\,.$$

**Esercizio 4** **(i)** La funzione $g(x) = \tan x$ è crescente in $[0,1]$, mentre per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ la funzione $f_n(x) = (1-x)^n$ è decrescente. Inoltre $g(0) = 0$, $f_n(0) = 1$, $g(1) = \frac{\pi}{4}$, $f_n(1) = 0$. Ne segue che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ i grafici di $g$ e di $f_n$ si incontrano in un unico punto di ascissa $x_n \in ]0,1[$.




**(ii)** Osserviamo che

$$f_n(x) > f_{n+1}(x) \qquad \forall x \in ]0,1[;$$

questo vale in particolare per $x = x_{n+1}$, ossia

$$f_n(x_{n+1}) > f_{n+1}(x_{n+1}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Ne segue

$$f_n(x_{n+1}) > f_{n+1}(x_{n+1}) = g(x_{n+1}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+ :$$

dunque la funzione decrescente $f_n - g$, che si annulla per $x = x_n$, è invece positiva per $x = x_{n+1}$. Ciò significa che $x_{n+1}$ deve precedere $x_n$, ossia deve essere $x_{n+1} < x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Detto $L$ il limite di $x_n$, si ha $0 \le L < 1$ e quindi, per la continuità della funzione tangente e per la decrescenza di $\{x_n\}$,

$$\tan L = \lim_{n\to\infty} \tan x_n = \lim_{n\to\infty} (1-x_n)^n \le \lim_{n\to\infty} (1-L)^n;$$

dunque, se fosse $L \in ]0,1[$ avremmo

$$0 < \tan L \le \lim_{n\to\infty} (1-L)^n = 0,$$

il che è assurdo: pertanto $L = 0$.
Per quanto riguarda la serie $\sum x_n$, si può osservare che risulta definitivamente

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n > \tan\frac{1}{n} = g\left(\frac{1}{n}\right),$$

in quanto il primo membro converge a $e^{-1}$ mentre il secondo converge a 0. Quindi la funzione decrescente $f_n - g$, che si annulla per $x = x_n$, è invece positiva per $x = \frac{1}{n}$ e questo ci dice che $\frac{1}{n} < x_n$. Dunque, per confronto con la serie armonica, la serie $\sum x_n$ diverge.
**Esercizio 5** La funzione ha per dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = 0;$$

quindi $f$ è prolungabile con continuità a tutto $\mathbb{R}$. Poiché

$$e^{-1/x^2} = 1 - \frac{1}{x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{per} \quad x \to \pm\infty,$$

si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 3,$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x\to+\infty} 3x\left(e^{-1/x^2} - 1\right) = -\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0,$$

e quindi vi è l'asintoto di equazione $y = 3x$ per $x \to +\infty$. Similmente, essendo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) + x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(1 - e^{-1/x^2}\right) = -\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x} = 0,$$

vi è l'asintoto di equazione $y = -x$ per $x \to -\infty$.
Analizziamo la derivata prima: con facili calcoli si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \left(3 + \frac{6}{x^2}\right) e^{-1/x^2} & \text{per } x > 0 \\ -\left(1 + \frac{2}{x^2}\right) e^{-1/x^2} & \text{per } x < 0, \end{cases}$$

il che ci dice che $f$ cresce per $x > 0$ e decresce per $x < 0$, mentre anche l'origine è un punto di derivabilità con $f'(0) = 0$. In particolare 0 è l'unico punto di minimo (assoluto) di $f$, mentre non vi sono massimi relativi e

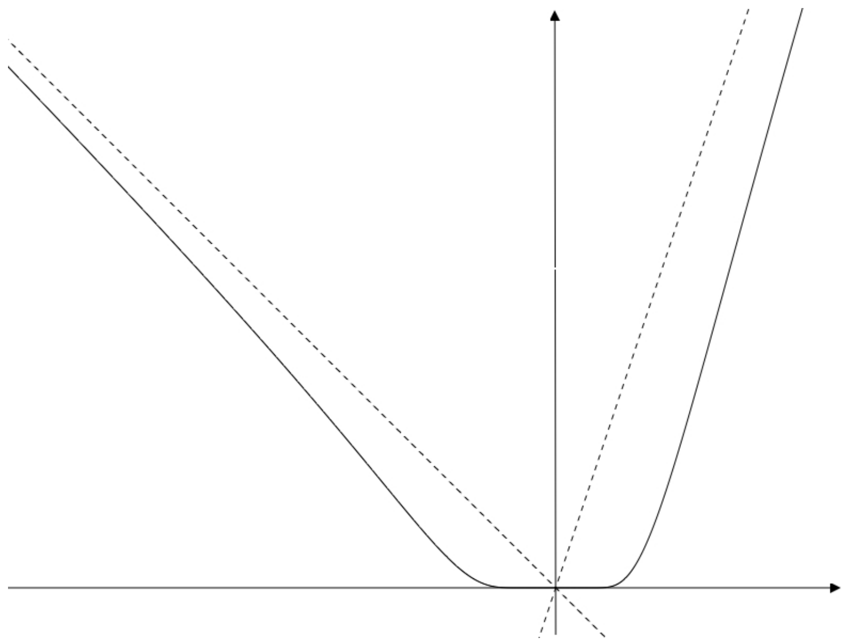
$\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$.
La derivata seconda vale, con altri facili calcoli,

$$f''(x) = \begin{cases} \left(-6 + \frac{12}{x^2}\right) \frac{e^{-1/x^2}}{x^3} & \text{per } x > 0 \\ \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) \frac{e^{-1/x^2}}{x^3} & \text{per } x < 0, \end{cases}$$

e, tenuto conto del segno di $x$, si ottiene che $f$ è convessa nell'intervallo $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Nei punti di flesso $\pm\sqrt{2}$ si ha rispettivamente

$$f(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}\, e^{-1/2}, \qquad f(\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}\, e^{-1/2},$$
$$f'(-\sqrt{2}) = -2\, e^{-1/2}, \qquad f'(\sqrt{2}) = 6\, e^{-1/2}.$$

Dalle informazioni ottenute, si ricava il seguente grafico qualitativo.



**Esercizio 6** Dato che l'integrando è non negativo, l'integrale improprio (con singolarità nel punto $x = 4$) esiste certamente. Per definizione di parte intera, esso si scrive così:

$$\int_1^4 \frac{[x+1] - x}{(4-x)^{3/2}}\, dx = \int_1^2 \frac{2-x}{(4-x)^{3/2}}\, dx + \int_2^3 \frac{3-x}{(4-x)^{3/2}}\, dx + \int_3^4 \frac{1}{(4-x)^{1/2}}\, dx.$$

I primi due integrali sono comuni integrali secondo Riemann: si trova

$$\int_1^2 \frac{2-x}{(4-x)^{3/2}}\, dx = \int_1^2 \frac{2}{(4-x)^{3/2}}\, dx - \int_1^2 \frac{x}{(4-x)^{3/2}}\, dx =$$

$$= \left[4(4-x)^{-1/2}\right]_1^2 - \left[2x(4-x)^{-1/2}\right]_1^2 + 2\int_1^2 (4-x)^{-1/2}\,dx =$$

$$= \left[(4-2x)(4-x)^{-1/2} - 4(4-x)^{1/2}\right]_1^2 = -4\sqrt{2} + \frac{10}{\sqrt{3}}\,,$$

e analogamente

$$\int_2^3 \frac{3-x}{(4-x)^{3/2}}\,dx = \int_2^3 \frac{3}{(4-x)^{3/2}}\,dx - \int_1^2 \frac{x}{(4-x)^{3/2}}\,dx =$$

$$= \left[6(4-x)^{-1/2}\right]_2^3 - \left[2x(4-x)^{-1/2}\right]_2^3 + 2\int_2^3 (4-x)^{-1/2}\,dx =$$

$$= \left[(6-2x)(4-x)^{-1/2} - 4(4-x)^{1/2}\right]_2^3 = -4 + 3\sqrt{2}.$$

Infine,

$$\int_3^4 \frac{1}{(4-x)^{1/2}}\,dx = \lim_{c\to 4^+} \int_3^c \frac{1}{(4-x)^{1/2}}\,dx = \lim_{c\to 4^+} \left[-2(4-x)^{1/2}\right]_3^c = 2.$$

Si conclude che

$$\int_1^4 \frac{[x+1]-x}{(4-x)^{3/2}}\,dx = \frac{10}{\sqrt{3}} - \sqrt{2} - 2.$$

## Prova scritta del 2 luglio 2009

**Esercizio 1** Si consideri la successione $\{a_n\}$ definita da:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{c+a_n}\,, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

ove $c$ è un parametro positivo.

**(i)** Determinare una formula esplicita per $a_n$ .

**(ii)** Stabilire per quali $c > 0$ la successione $\{a_n\}$ è convergente.

**(iii)** Stabilire per quali $c > 0$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ è convergente.

**(iv)** Stabilire per quali $c > 0$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente.

**Esercizio 2 (i)** Descrivere le principali proprietà (dominio, limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia e di convessità) della funzione

$$f(x) = \sqrt{x}\,\ln x,$$

tracciandone un grafico qualitativo.

**(ii)** Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda x$ al variare del parametro reale $\lambda$.

**Esercizio 3** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) - u(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = \alpha, \end{cases}$$

ove $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f$ è una funzione continua su $\mathbb{R}$.

**(i)** Si scriva la soluzione $u$ del problema nel caso in cui $f(t) = e^{-t} \sin t$.

**(ii)** Si provi che esiste un unico $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quale la soluzione $u$ del punto precedente è infinitesima per $t \to +\infty$.

**(iii)** Si mostri che, in generale, se $f$ è infinitesima per $t \to \infty$, allora esiste un unico $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quale la corrispondente soluzione $u$ è infinitesima per $t \to +\infty$.

## Risoluzione

**Esercizio 1 (i)** Si ha

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{c+1}, \quad a_2 = \frac{1}{c^2+c+1};$$

proviamo a dimostrare per induzione che

$$a_n = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} c^k} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

La formula è vera per $n = 0$; supponiamola vera per un certo $n$, e dimostriamola per $n + 1$. Si ha in effetti

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{c + a_n} = \frac{\frac{1}{\sum_{k=0}^{n} c^k}}{c + \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} c^k}} = \frac{1}{c\sum_{k=0}^{n} c^k + 1} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n+1} c^k},$$

come si voleva. Dunque $a_n$ è dato dalla formula (2).
**(ii)** Se $0 < c < 1$ la serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} c^k$ converge e la sua somma è $\frac{1}{1-c}$; ne segue

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} c^k} = 1 - c.$$

Se invece $c \geq 1$, la serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} c^k$ diverge, e di conseguenza la successione $\{a_n\}$ è infinitesima.
**(iii)-(iv)** Supponiamo $c > 1$: allora si ha

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{c + a_n} \leq \frac{a_n}{c} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui, induttivamente,

$$a_n \leq \frac{1}{c^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$

pertanto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, per confronto con la serie geometrica convergente $\sum_{n=0}^{\infty} c^{-n}$, e quindi anche $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.
Se invece $c = 1$, allora da (2) si ha

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

e quindi $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ è convergente, pr il criterio di Leibniz, ma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è divergente.
**Esercizio 2 (i)** La funzione $f$ è definita per $x > 0$ ed agli estremi si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Si ha $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$. Non ci sono asintoti obliqui per $x \to +\infty$ in quanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0.$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{2} \ln x + 1 \right).$$

Dunque $f' \geq 0$ se e solo se $\ln x \geq -2$, ossia se e solo se $x \in [e^{-2}, +\infty[$. Ne segue che $f$ decresce in $]0, e^{-2}]$ e cresce in $[e^{-2}, +\infty[$. Quindi $x = e^{-2}$ è punto di minimo assoluto, con

$$f(e^{-2}) = -\frac{2}{e}\,.$$

Si ha anche, in particolare,

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f'(x) = 0.$$

Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{1}{2x^{3/2}}\left(\frac{1}{2}\,\ln x + 1\right) + \frac{1}{2x^{3/2}} = -\frac{\ln x}{4x^{3/2}}\,.$$

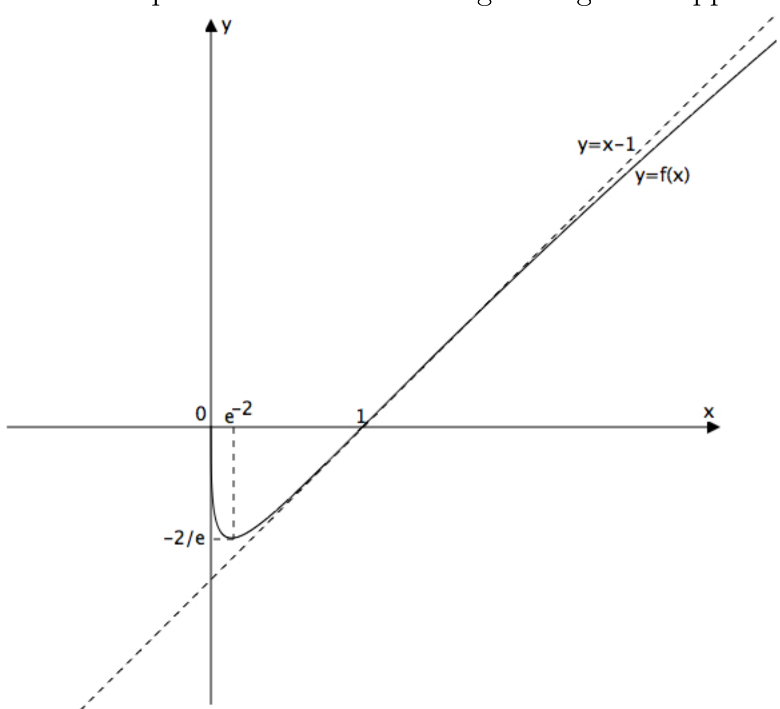
Pertanto $f'' \geq 0$ se e solo se $\ln x \leq 0$, ossia se e solo se $x \in ]0, 1]$. Ne segue che $f$ è convessa in $]0, 1]$ ed è concava in $[1, +\infty[$; in particolare $x = 1$ è punto di flesso con

$$f(1) = 0, \qquad f'(1) = 1,$$

e l'equazione della retta tangente in $(1, 0)$ è

$$y = x - 1.$$

Dalle considerazioni precedenti si ricava il seguente grafico approssimativo.



**(ii)** Consideriamo una generica retta del tipo $y = \lambda x$. L'equazione $f(x) - \lambda x = 0$ equivale a
$$g(x) := \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lambda.$$
Consideriamo la funzione $g$: essa è derivabile su $]0, \infty[$ e si ha
$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0;$$
quindi $g$ ha massimo assoluto su $]0, \infty[$. Per trovare questo massimo, analizziamo la diseguaglianza $g'(x) \geq 0$. Si trova
$$g'(x) = \frac{1}{x^{3/2}} - \frac{\ln x}{2x^{3/2}} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln x \leq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq e^2.$$
Quindi g cresce da $-\infty$ a $2/e$ nell'intervallo $]0, e^2]$ e decresce da $2/e$ a 0 nella semiretta $[e^2, +\infty[$, cosicché il punto $x_0 = e^2$ è necessariamente di massimo con $g(e^2) = 2/e$. È chiaro allora che l'equazione $g(x) = \lambda$ avrà

- nessuna soluzione se $\lambda > 2/e$,
- una soluzione se $\lambda = 2/e$,
- due soluzioni se $0 < \lambda < 2/e$,
- una soluzione se $\lambda \leq 0$.

**Esercizio 3 (i)** L'equazione è lineare. Risolviamola col metodo usuale: una primitiva di 1 è $t$; si moltiplica allora l'equazione per $e^{-t}$ ed essa si può riscrivere nella forma
$$\frac{d}{dt}\left(e^{-t}u(t)\right) = e^{-t}f(t),$$
da cui, integrando fra 0 e $t$,
$$e^{-t}u(t) = \alpha + \int_0^t e^{-s}f(s)\,ds,$$
ossia
$$u(t) = e^t\left(\alpha + \int_0^t e^{-s}f(s)\,ds\right). \tag{3}$$

Nel caso $f(s) = e^{-s} \sin s$ si ha poi

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{-s} f(s)\, ds &= \int_0^t e^{-2s} \sin s\, ds = \left[-e^{-2s} \cos s\right]_0^t - 2 \int_0^t e^{-2s} \cos s\, ds = \\
&= \left[-e^{-2s} \cos s - 2e^{-2s} \sin s\right]_0^t - 4 \int_0^t e^{-2s} \sin s\, ds,
\end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^t e^{-s} f(s)\, ds = \frac{1}{5} \left[-e^{-2s} \cos s - 2e^{-2s} \sin s\right]_0^t = -\frac{1}{5} e^{-2t} \left[\cos t + 2 \sin t\right] + \frac{1}{5}$$

e quindi

$$u(t) = e^t \left(\alpha + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5} e^{-t} \left[\cos t + 2 \sin t\right]. \tag{4}$$

**(ii)** Dalla (4) è chiaro che

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = -\frac{1}{5}.$$

**(iii)** Riprendiamo in esame la (3): affinché $u(t) \to 0$ per $t \to \infty$ è certamente necessario che

$$\lim_{t \to \infty} \left(\alpha + \int_0^t e^{-s} f(s)\, ds\right) = 0,$$

ossia deve essere

$$\alpha = -\int_0^\infty e^{-s} f(s)\, ds.$$

Viceversa, supponiamo che valga questa relazione: dobbiamo provare che la funzione $u$, definita da (3), è infinitesima per $t \to +\infty$. Sia $\varepsilon > 0$: allora, dato che per ipotesi $f(t) \to 0$ per $t \to +\infty$, esiste $M > 0$ tale che

$$|f(s)| < \varepsilon \qquad \forall s \geq M.$$

Si ha allora per $t \geq M$

$$|u(t)| = \left| \int_t^\infty e^{t-s} f(s)\, ds \right| = \left| \int_0^\infty e^{-\sigma} f(t + \sigma)\, d\sigma \right| \leq \int_0^\infty e^{-\sigma} \varepsilon\, d\sigma = \varepsilon,$$

e questo prova che $u(t) \to 0$ per $t \to +\infty$.

## Prova scritta del 10 settembre 2009

**Esercizio 1** Si consideri la successione $\{a_n\}$ definita da:

$$a_n = \int_n^{n+1} \frac{dt}{\arctan t} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

**(i)** Dimostrare che $a_n > a_{n+1}$.

**(ii)** Determinare il limite $L$ della successione $\{a_n\}$.

**(iii)** Stabilire se la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - L)$ è convergente.

**Esercizio 2** Descrivere le principali proprietà (dominio, limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia e di convessità) della funzione

$$f(x) = -2x + \int_{-|x|}^{x} \frac{\arctan t}{t}\, dt, \qquad x \in \mathbb{R},$$

tracciandone un grafico qualitativo.

**Esercizio 3** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 4^{t-u}\, 2^{t+u}, \\ u(0) = c. \end{cases}$$

**(i)** Per ogni $c \in \mathbb{R}$ si scriva la soluzione esplicita $u$ del problema.

**(ii)** Si determini l'intervallo massimale in cui tale soluzione è definita.

**(iii)** Si calcoli il limite di $u(t)$ quanto $t$ tende a ciascuno dei due estremi dell'intervallo di esistenza.

## Risoluzione

**Esercizio 1 (i)** Poiché $t \mapsto \arctan t$ è crescente e positiva in $]0, \infty[$, è chiaro che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ si ha

$$a_n = \int_n^{n+1} \frac{dt}{\arctan t} > \int_n^{n+1} \frac{dt}{\arctan(t+1)} = \int_{n+1}^{n+2} \frac{ds}{\arctan s} = a_{n+1}\,.$$

**(ii)** Dato che $\{a_n\}$ è decrescente e positiva, il limite $L$ esiste certamente e si ha $L \geq 0$. D'altronde, osservato che

$$\frac{1}{\arctan(n+1)} < a_n < \frac{1}{\arctan n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

si conclude subito, per confronto, che

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\arctan n} = \frac{2}{\pi}\,.$$

**(iii)** Dalla stima per $a_n$ appena dimostrata si deduce che

$$\frac{1}{\arctan(n+1)} - \frac{2}{\pi} < a_n - L < \frac{1}{\arctan n} - \frac{2}{\pi}\,,$$

ossia

$$\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(n+1)}{\frac{\pi}{2}\ \arctan(n+1)} < a_n - L < \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{\frac{\pi}{2}\ \arctan n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+;$$

ricordando l'identità

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x > 0,$$

si ricava che

$$\frac{\arctan\frac{1}{n+1}}{\frac{\pi}{2}\ \arctan(n+1)} < a_n - L < \frac{\arctan\frac{1}{n}}{\frac{\pi}{2}\ \arctan n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

La prima delle due stime ci dice che

$$a_n - L > \frac{\arctan\frac{1}{n+1}}{\frac{\pi}{2}\arctan(n+1)} > \frac{4}{\pi^2}\arctan\frac{1}{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

e quindi, per confronto asintotico con la serie armonica, la serie $\sum(a_n - L)$ diverge.

**Esercizio 2** Ricordando che $-|x| = -x$ se $x > 0$ e $-|x| = x$ se $x < 0$, la funzione da analizzare può riscriversi, grazie alla parità di $\frac{\arctan t}{t}$, così:

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < 0, \\[2ex] -2x + 2\displaystyle\int_0^x \frac{\arctan t}{t}\,dt & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

La funzione è ben definita per ogni $x \geq 0$ grazie al fatto che

$$\lim_{t\to 0} \frac{\arctan t}{t} = 1,$$

ed è chiaro che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0);$$

dunque $f$ è continua su $\mathbb{R}$ e per $x \le 0$ essa coincide con il proprio asintoto obliquo per $x \to -\infty$ di equazione $y = -2x$. Inoltre, evidentemente si ha $f'(x) = -2$ per ogni $x < 0$ e

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -2.$$

Adesso analizziamo cosa succede per $x \to +\infty$. Notando che $-2x = -2\int_0^x 1\,dt$, possiamo scrivere per ogni $x \ge \pi/2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\int_0^x \left(-1 + \frac{\arctan t}{t}\right) dt = 2\int_0^x \frac{\arctan t - t}{t}\,dt = \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan t - t}{t}\,dt + 2\int_{\pi/2}^x \frac{\arctan t - t}{t}\,dt < 2\int_{\pi/2}^x \frac{\pi/2 - t}{t}\,dt = \\ &= \pi\ln x - \pi\ln\pi/2 - 2x + \pi, \end{aligned}$$

da cui, per confronto,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Dunque, in particolare,

$$\inf_{\mathbb{R}} f = -\infty, \quad \sup_{\mathbb{R}} f = +\infty.$$

Vediamo se per $x \to +\infty$ c'è un asintoto obliquo: si ha

$$\frac{f(x)}{x} = -2 + \frac{2}{x}\int_0^x \frac{\arctan t}{t}\,dt;$$

ma, essendo $\frac{\arctan t}{t} \simeq \frac{\pi}{2t}$ per $t \to +\infty$, si ha $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t}\,dt = +\infty$, da cui, utilizzando il teorema di de L'Hôpital, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -2 + 2\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan x}{x} = -2.$$

Inoltre

$$f(x) + 2x = 2\int_0^x \frac{\arctan t}{t}\,dt,$$

da cui
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+2x] = 2\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t}\,dt = +\infty.$$
Si conclude che l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$ non esiste.
Scriviamo la derivata prima:
$$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x < 0, \\ -2 + 2\,\dfrac{\arctan x}{x} & \text{se } x > 0, \end{cases}$$
mentre per $x = 0$ si ha, utilizzando nuovamente il teorema di de L'Hôpital,
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -2, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -2 + \lim_{x\to 0^+} 2\,\frac{\arctan x}{x} = 0.$$
Dunque $(0,0)$ è (l'unico) punto angoloso del grafico di $f$. Si può anche osservare che
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -2.$$
Si noti che si ha $f'(x) < 0$ per ogni $x > 0$, per cui $f$ è decrescente in $[0,\infty[$.
Analizziamo la derivata seconda: si ha
$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ \text{non esiste} & \text{se } x = 0 \\ 2\,\dfrac{\frac{x}{1+x^2} - \arctan x}{x^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$
Dunque per $x > 0$ risulta
$$f''(x) \le 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (1+x^2)\arctan x \ge x.$$
Posto $g(x) = (1+x^2)\arctan x$ e $h(x) = x$, notiamo che per $x > 0$ si ha
$$g(0) = h(0) = 0, \quad g'(x) = 2x\arctan x + 1 > 1 = h'(x) \quad \forall x > 0,$$
e dunque
$$g(x) = g(0) + \int_0^x g'(t)\,dt > h(0) + \int_0^x h'(t)\,dt = h(x) \qquad \forall x > 0.$$
Se ne deduce che effettivamente risulta
$$f''(x) \le 0 \qquad \forall x > 0,$$

ossia $f$ è una funzione concava in $[0, \infty[$. In particolare, utilizzando noti sviluppi di Taylor si può osservare che

$$f''(x) = \frac{x(1 - x^2 + \mathrm{o}(x^3)) - (x - x^3/3 + \mathrm{o}(x^4))}{x^2} = -\frac{2}{3}\,x + \mathrm{o}(x^2) \quad \text{per } x \to 0^+,$$

ed anche

$$\lim_{x \to +\infty} f''(x) = 0.$$

Si noti che, pur essendo $f'' \leq 0$ per ogni $x \neq 0$, $f$ non è concava su $\mathbb{R}$ perché, scrivendo

$$f(0) = f\left(\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}(-\varepsilon)\right),$$

si ha

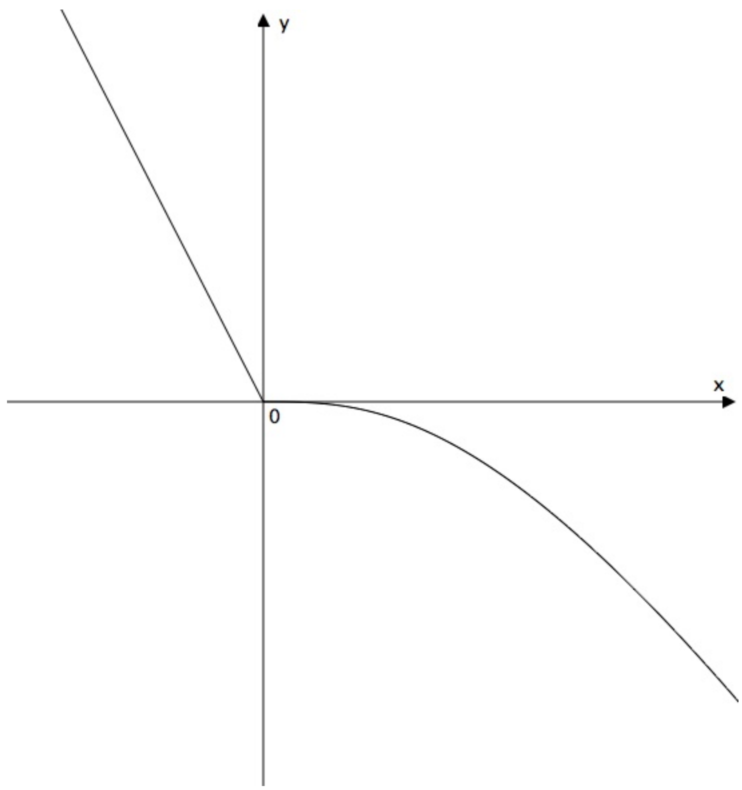
$$f(\varepsilon) \simeq -\frac{2}{3}\,\varepsilon, \quad f(-\varepsilon) = 2\varepsilon \qquad \text{per } \varepsilon \to 0^+,$$

da cui per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo

$$\frac{1}{2}f(\varepsilon) + \frac{1}{2}f(-\varepsilon) \simeq \frac{2}{3}\,\varepsilon > 0 = f(0),$$

il che viola la concavità.

Sulla base delle informazioni ottenute, possiamo tracciare il seguente grafico approssimativo di $f$.




**Esercizio 3** **(i)** L'equazione differenziale è a variabili separabili. Dato che il secondo membro non si annulla mai, si ha

$$u' = 4^{t-u}\,2^{t+u} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2^u\,u' = 8^t,$$

che equivale, integrando fra 0 e $t$, a

$$\frac{2^{u(t)} - 2^c}{\ln 2} = \frac{8^t - 1}{3\ln 2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2^{u(t)} = 2^c + \frac{8^t - 1}{3}$$

ossia

$$u(t) = \log_2\left(2^c + \frac{8^t - 1}{3}\right).$$

**(ii)** L'intervallo massimale dove è definita la funzione $u$ sopra scritta è determinato dalla disequazione

$$2^c + \frac{8^t - 1}{3} > 0,$$

che equivale a

$$8^t > 1 - 3 \cdot 2^c.$$

Allora: se $1 - 3 \cdot 2^c \leq 0$, ossia $c \geq -\log_2 3$, la disuguaglianza precedente è verificata per ogni $t \in \mathbb{R}$ e dunque la soluzione $u$ è definita su tutto $\mathbb{R}$; se invece $1 - 3 \cdot 2^c > 0$, ossia $c < -\log_2 3$, la disuguaglianza precedente è verificata solo per $t > \log_8(1 - 3 \cdot 2^c)$, e dunque la soluzione $u$ è definita nell'intervallo $]\log_8(1 - 3 \cdot 2^c), +\infty[$.
**(iii)** Per $c > -\log_2 3$ si ha

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to-\infty} u(t) = \log_2\left(2^c - \frac{1}{3}\right);$$

per $c = -\log_2 3$ si ha

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty;$$

infine per $c < -\log_2 3$ si ha

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to\log_8(1-3\cdot 2^c)^+} u(t) = -\infty.$$

## Prova scritta del 7 gennaio 2010

**Esercizio 1** Si consideri la successione $\{x_n\}$ definita da

$$\begin{cases} x_0 = a \\ \\ x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n + x_n^3}{2}}, \qquad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

ove $a \geq 0$. Si determini, al variare di $a$, il comportamento della successione per $n \to \infty$.
**Esercizio 2** Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{4\int_0^x \ln(1+t^3)\,dt - x^4}{x\tan^3 x \arctan^3 x - x^8}.$$

**Esercizio 3** Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x}}{e^x + 1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Analizzare le principali proprietà di $f$ (limiti a $\pm\infty$, eventuali asintoti, segno, monotonia, massimi e minimi relativi, tralasciando la convessità) tracciandone un grafico approssimato.
**Esercizio 4** Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\ln 3} \frac{e^{-\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x}}{e^x + 1}\,dx.$$

## Risoluzione

**Esercizio 1** Proviamo, per cominciare, che la successione è monotona crescente. Utilizziamo l'induzione: per ogni $a \geq 0$ si ha

$$x_1 = \sqrt{\frac{a + a^3}{2}} \geq a = x_0,$$

infatti questa disuguaglianza equivale alla relazione

$$a + a^3 \geq 2a^2, \quad \text{ossia} \quad a(a-1)^2 \geq 0,$$

che è sempre verificata. Poi, se $x_n \geq x_{n-1}$, allora

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n + x_n^3}{2}} \leq \sqrt{\frac{x_{n-1} + x_{n-1}^3}{2}} = x_n\,,$$

e ciò prova il passo induttivo. Dunque $\{x_n\}$ è monotona crescente; si noti che la monotonia è stretta se $a \neq 0$ e $a \neq 1$.
Perciò per ogni $a \geq 0$ la successione ha limite $L \in [0, \infty]$.
Passando al limite nella formula che definisce $x_n$, si trova

$$L = \sqrt{\frac{L + L^3}{2}} \quad \text{cioè} L \in \{0, 1, +\infty\}.$$

Se $a = 0$, la successione è costantemente 0 e quindi il limite è 0.
Se $0 < a < 1$, si ha evidentemente

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n + x_n^3}{2}} < \sqrt{\frac{1+1}{2}} = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

quindi il limite è positivo e non supera 1: l'unica possibilità è $L = 1$.
Se $a = 1$, la successione è costantemente 1 e quindi il limite è 1.
Infine, se $a > 1$ il limite è strettamente maggiore di 1: l'unica possibilità è $L = +\infty$. In definitiva:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0 & \text{se } a = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < a \leq 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

**Esercizio 2** Analizziamo anzitutto il denominatore: poiché

$$\begin{cases} \tan x = x + \mathrm{o}(x) \\ \arctan x = x + \mathrm{o}(x) \end{cases} \qquad \text{per } x \to 0,$$

otteniamo

$$\begin{cases} \tan^3 x = x^3 + \mathrm{o}(x^3) \\ \arctan^3 x = x^3 + \mathrm{o}(x^3) \end{cases} \qquad \text{per } x \to 0,$$

e quindi

$$x \tan^3 x \arctan^3 x = x^7 + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{per } x \to 0,$$

da cui finalmente

$$x \tan^3 x \arctan^3 x - x^8 = x^7 + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Il limite proposto, pertanto, esiste se e solo se esiste il limite seguente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4\int_0^x \ln(1+t^3)\,dt - x^4}{x^7}\,.$$

Conviene adesso utilizzare il teorema di de L'Hôpital, onde far sparire l'integrale. Consideriamo dunque il rapporto delle derivate:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4\ln(1+x^3) - 4x^3}{7x^6}\,.$$

Dallo sviluppo di Taylor

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2) \qquad \text{per } t \to 0$$

ricaviamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{4\ln(1+x^3) - 4x^3}{7x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3 - 2x^6 - 4x^3}{7x^6} = -\frac{2}{7}\,.$$

Si conclude che il limite proposto vale $-2/7$.

**Esercizio 3** La funzione $f$ è definita su $\mathbb{R}$. Analizziamone i limiti a $\pm\infty$: si ha

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$

Vediamo il segno di $f$: si ha $f(x) \geq 0$ se e solo se $e^{-\frac{1}{2}x} \geq e^{-\frac{3}{2}x}$, ossia se e solo se $e^x \geq 1$: ciò chiaramente accade se e solo se $x \geq 0$.

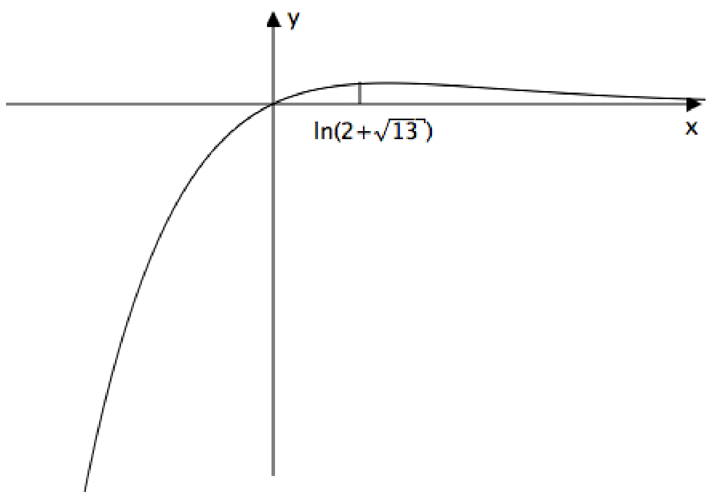
Esaminiamo il segno della derivata. Dato che

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(e^x+1)^2}\left[\left(-\frac{1}{2}e^{-x/2} + \frac{3}{2}e^{-3x/2}\right)(e^x+1) - \left(e^{-x/2} - e^{-3x/2}\right)e^x\right] = \\ &= \frac{1}{(e^x+1)^2}\left[-\frac{3}{2}e^{x/2} + 2e^{-x/2} + \frac{3}{2}e^{-3x/2}\right] = \\ &= \frac{e^{-3x/2}}{2(e^x+1)^2}\left[-3 + 4e^x + 3e^{2x}\right]; \end{aligned}$$

dunque $f'(x) \geq 0$ se e solo se $3e^{2x} + 4e^x - 3 \leq 0$, e ciò accade per $-2 - \sqrt{13} \leq e^x \leq -2 + \sqrt{13}$, ossia per $0 < e^x \leq -2 + \sqrt{13}$. Quindi il punto $x = \ln(-2 + \sqrt{13})$ è l'unico punto di massimo relativo, mentre non ci sono punti di minimo relativo. Il punto $x = \ln(-2 + \sqrt{13})$ è anche di massimo assoluto, con

$$\max_{\mathbb{R}} f = f(-2 + \sqrt{13}) = \frac{1}{(-2 + \sqrt{13})^{3/2}} \frac{-3 + \sqrt{13}}{-1 + \sqrt{13}},$$

mentre $\inf_{\mathbb{R}} f = -\infty$.
Dalle informazioni raccolte si ricava il seguente grafico approssimato:




**Esercizio 4** Si ha

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x}}{e^x + 1} = e^{-\frac{3}{2}x} \frac{e^x - 1}{e^x + 1};$$

quindi

$$\int_0^{\ln 3} \frac{e^{-\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x}}{e^x + 1}\, dx = \int_0^{\ln 3} e^{-\frac{3}{2}x} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx = \quad [e^x = t]$$

$$= \int_1^3 t^{-\frac{3}{2}} \frac{t-1}{t+1} \frac{dt}{t} = \int_1^3 \frac{1}{t^2} \frac{t-1}{t+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \quad [\sqrt{t} = s]$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{s^4} \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}\, ds = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{s^4} \frac{s^2 + 1 - 2}{s^2 + 1}\, ds =$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{s^4}\, ds - 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{s^4(s^2 + 1)}\, ds =$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{s^4}\, ds - 2\int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{s^2+1} + \frac{2(1-s^2)}{s^4}\right) ds = \\
&= 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{s^4}\, ds - 4\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{s^2+1}\, ds - 4\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{s^4}\, ds + 4\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{s^2}\, ds = \\
&= \left[-4\arctan s + \frac{2}{3s^3} - \frac{4}{s}\right]_1^{\sqrt{3}} = \\
&= -\frac{\pi}{3} + \frac{10}{3} - \frac{34}{9\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}
$$

## Prova scritta del 4 febbraio 2010

**Esercizio 1** Fissato un numero $a$ positivo e diverso da 1, si calcoli, se esiste,

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{a^x-1}{x(a-1)}\right]^{\frac{1}{x}}.$$

**Esercizio 2** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e dotata di asintoti obliqui per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$. Si provi che $f$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.

**Esercizio 3** Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+2x+2}}{x-1}\,.$$

Analizzare le principali proprietà di $f$ (dominio, limiti a $\pm\infty$, eventuali asintoti, segno, monotonia, massimi e minimi relativi, tralasciando la convessità) e tracciare un grafico approssimato della funzione.

## Risoluzione

**Esercizio 1** Si ha

$$\left[\frac{a^x-1}{x(a-1)}\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln\frac{a^x-1}{x(a-1)}},$$

quindi basta calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln\frac{a^x-1}{x(a-1)}\,.$$

Distinguiamo due casi: $a > 1$ e $0 < a < 1$.
Nel primo caso, $a > 1$, si ha

$$\frac{1}{x} \ln \frac{a^x - 1}{x(a-1)} = \frac{1}{x} \ln(a^x - 1) - \frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} \ln(a-1),$$

e gli ultimi due termini a secondo membro sono chiaramente infinitesimi per $x \to \infty$. D'altra parte

$$\frac{1}{x} \ln(a^x - 1) = \frac{1}{x} \ln[a^x(1 - a^{-x})] = \ln a - \frac{1}{x} \ln(1 - a^{-x}),$$

e l'ultimo termine è infinitesimo per $x \to \infty$. Si conclude allora che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{a^x - 1}{x(a-1)} = \ln a \quad \text{se} \quad a > 1.$$

Nel secondo caso, $0 < a < 1$, scriviamo

$$\frac{1}{x} \ln \frac{a^x - 1}{x(a-1)} = \frac{1}{x} \ln \frac{1 - a^x}{x(1-a)}$$

e procediamo come prima: si ha

$$\frac{1}{x} \ln \frac{1 - a^x}{x(1-a)} = \frac{1}{x} \ln(1 - a^x) - \frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} \ln(1-a),$$

e per $x \to \infty$ si riconosce che tutti e tre gli addendi sono infinitesimi. Pertanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{a^x - 1}{x(a-1)} = 0 \quad \text{se} \quad 0 < a < 1.$$

Si conclude che il limite proposto vale

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{a^x - 1}{x(a-1)}\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x} \ln \frac{a^x-1}{x(a-1)}} = \begin{cases} e^{\ln a} = a & \text{se} \quad a > 1 \\ e^0 = 1 & \text{se} \quad 0 < a < 1, \end{cases}$$

ossia

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{a^x - 1}{x(a-1)}\right]^{\frac{1}{x}} = a \vee 1.$$

**Esercizio 2** Supponiamo che $f$ abbia l'asintoto $y = ax + b$ per $x \to +\infty$ e l'asintoto $y = cx + d$ per $x \to -\infty$ (con $a, c \neq 0$). Si ha allora

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax - b] = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - cx - d] = 0,$$

dunque, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $M > 0$ tale che

$$|f(x) - ax - b| < \varepsilon/3 \quad \forall x \geq M, \qquad |f(x) - cx - d| < \varepsilon/3 \quad \forall x \leq -M.$$

Inoltre $f$ è uniformemente continua sull'intervallo $[-M-1, M+1]$: quindi esiste $\delta > 0$ (e non è restrittivo supporre $\delta \leq 1 \wedge \frac{\varepsilon}{3|a|} \wedge \frac{\varepsilon}{3|c|}$) tale che

$$|x|, |x'| \leq M+1, \quad |x - x'| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(x')| < \varepsilon/3.$$

Siano ora $x, x' \in \mathbb{R}$ con $|x - x'| < \delta$. Essendo $\delta \leq 1$, i casi possibili sono tre, non mutuamente esclusivi: $x, x' \in [-M-1, M+1]$, oppure $x, x' \in [M, +\infty[$, oppure $x, x' \in ]-\infty, M]$.
Nel primo caso, cioè quando $x, x' \in [-M-1, M+1]$, si ha ovviamente $|f(x) - f(x')| < \varepsilon/3 < \varepsilon$. Nel secondo caso, cioè quando $x, x' \in [M, +\infty[$, possiamo scrivere

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - ax - b| + |a(x - x')| + |ax' + b - f(x')|;$$

il primo e il terzo addendo sono minori di $\varepsilon/3$, mentre il secondo è minore di $|a|\delta$ e quindi minore di $\varepsilon/3$. Ne segue $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Nel terzo caso, cioè quando $x, x' \in ]-\infty, M]$, si ha analogamente

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - cx - d| + |c(x - x')| + |cx' + d - f(x')|;$$

ne segue, allo stesso modo, che $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
Si conclude che

$$x, x' \in \mathbb{R}, \quad |x - x'| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(x')| < \varepsilon,$$

ossia $f$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.
**Esercizio 3** La funzione $f$ non è definita per $x = 1$, mentre il termine sotto radice è sempre positivo, dato che si può scrivere nella forma $(1+x)^2 + 1$. Quindi il dominio di $f$ è $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. In particolare si ha

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty,$$

e la retta di equazione $x = 1$ è un asintoto verticale per $f$.
Si ha poi

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}}{1 - \frac{1}{x}} = 2,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}} = 0,$$

cosicché la retta $y = 2$ è asintoto orizzontale di $f$ per $x \to +\infty$ mentre la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale di $f$ per $x \to -\infty$.
Inoltre si ha $f(x) = 0$ se e solo se $x = -\sqrt{x^2+2x+2}$, cioè se e solo se $x < 0$ e $x^2 = x^2 + 2x + 2$; quindi $f(x) = 0$ se e solo se $x = -1$.
Calcoliamo la derivata prima di $f$. Trattiamo l'espressione di $f$ come un prodotto fra il numeratore e la funzione $\frac{1}{(x-1)}$. Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(x-1)^2}(x+\sqrt{x^2+2x+2}) + \frac{1}{(x-1)}\left(1+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right) = \\ &= \frac{1}{(x-1)^2}\left(-1-\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right) = \\ &= \frac{1}{(x-1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}(-\sqrt{x^2+2x+2}-2x-3). \end{aligned}$$

Da questa espressione si ricava subito che $f'(x) < 0$ per tutti gli $x$ tali che $2x+3 \geq 0$, ossia per ogni $x \geq -3/2$ (escluso naturalmente $x = 1$). Se invece $x < 3/2$, si ha $f'(x) > 0$ se e solo se

$$2x + 3 < -\sqrt{x^2+2x+2};$$

questa disuguaglianza fra numeri negativi equivale, elevando al quadrato, a

$$4x^2 + 12x + 9 > x^2 + 2x + 2,$$

ossia a $3x^2 + 10x + 7 > 0$. Le radici di questo trinomio sono $-7/3$ e $-1$, quindi il trinomio è positivo (essendo $x < 3/2$) per $x < -7/3$. In definitiva, $f' > 0$ in $]-\infty, -7/3[$ e $f' < 0$ in $]-7/3, 1[\cup]1, +\infty[$. Dunque $-7/3$ è punto di massimo relativo e si ha, con facili calcoli, $f(-7/3) = 1/5$.
Tralasciamo lo studio, alquanto intricato, della convessità. Dalle informazioni raccolte possiamo ricavare il seguente grafico qualitativo di $f$: