Calcolo differenziale - Analisi in più variabili 1

Prove scritte dal 2008

Prova scritta del 18 gennaio 2008

Esercizio 1 Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \ln(1 + x^{1/n} + n^{-1/x}), \quad x > 0, \qquad n \in \mathbb{N}^+.$$

Provare che $\{f_n\}$ converge puntualmente, determinare il limite f e stabilire in quali sottointervalli di $]0, \infty[$ la convergenza è uniforme.
Esercizio 2 Posto

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -y \sin x + x \cos y = 0\},$$

verificare che in un intorno del punto $(\pi, \pi/2)$ l'insieme Z è grafico di una funzione $g(x)$ invertibile, e scrivere i polinomi di Taylor di grado 2 relativi a g e g^{-1}, rispettivamente nei punti $x_0 = \pi$ e $y_0 = \pi/2$.
Esercizio 3 Determinare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x, y) = (2y - 1)(2x + 1)e^{y-2x}$$

nell'insieme chiuso delimitato dal triangolo di vertici $(-1, 0)$, $(0, 0)$ e $(0, 2)$.
Esercizio 4 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''' - 2u'' + 2u' - u = e^t \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = -1, \quad u''(0) = 0. \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 1 Le funzioni $\{f_n\}$ appartengono a $C^\infty(]0, \infty[)$ e sono crescenti, dunque limitate in ogni sottointervallo limitato. Inoltre, per monotonia, sono prolungabili a 0 nel punto 0, in quanto

$$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = \ln 1 = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Per $x > 0$ fissato, dato che $x^{1/n} \to 1$ e $n^{-1/x} \to 0$ per $n \to \infty$, si ha

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \ln 2.$$

Dunque il limite puntuale è la funzione costante $f(x) \equiv \ln 2$.
La convergenza non può essere uniforme in alcun intervallo illimitato, perché

$$\lim_{x\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = +\infty.$$

La convergenza non può essere uniforme neanche in intervalli della forma $]0, a]$, poiché

$$\ln 2 = \lim_{x\to 0^+} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in]0,a]} |f_n(x) - f(x)|.$$

Consideriamo allora un generico intervallo $[a, b]$ con $0 < a < b < \infty$: a causa della crescenza risulta

$$\ln(1 + a^{1/n} + n^{-1/a}) \leq f_n(x) \leq \ln(1 + b^{1/n} + +n^{-1/b}) \qquad \forall x \in [a, b],$$

da cui, per ogni $x \in [a, b]$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \max\left\{\left|\ln\frac{1 + a^{1/n} + n^{-1/a}}{2}\right|, \left|\ln\frac{1 + b^{1/n} + n^{-1/b}}{2}\right|\right\},$$

e la quantità a secondo membro tende a 0 per $n \to \infty$. Pertanto $f_n \to f$ uniformemente in $[a, b]$, per ogni $0 < a < b < \infty$.
Esercizio 2 Posto

$$F(x, y) = -y \sin x + x \cos y,$$

la funzione F è definita su $\mathbb{R}^2$ ed è di classe C^∞. Si ha

$$\nabla F(x, y) = (-y \cos x + \cos y, - \sin x - x \sin y),$$

quindi

$$\nabla F\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}, -\pi\right) \neq (0, 0).$$

Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di π ed un intorno V di $\pi/2$ tali che $Z \cap (U \times V)$ è grafico di una funzione $g : U \to V$, la quale è invertibile, essendo non nulle in $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ entrambe le derivate parziali di F. Si ha in particolare

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in U, \qquad F(g^{-1}(y), y) = 0 \quad \forall y \in V.$$

Da qui deduciamo

$$F_x + F_y\, g' = 0, \quad F_{xx} + F_{xy}\, g' + F_{yx}\, g' + F_{yy}\, (g')^2 + F_y\, g'' = 0,$$

da cui, essendo

$$F_{xx} = y \sin x, \quad F_{xy} = F_{yx} = -\cos x - \sin y, \quad F_{yy} = -x \cos y,$$

si ottiene

$$g(\pi) = \frac{\pi}{2}, \quad g'(\pi) = \frac{1}{2}, \quad g''(\pi) = 0.$$

Similmente

$$F_x(g^{-1})' + F_y = 0, \quad F_{xx}[(g^{-1})']^2 + F_{xy}(g^{-1})' + F_x(g^{-1})'' + F_{yx}(g^{-1})' + F_{yy} = 0,$$

da cui

$$(g^{-1})(\pi/2) = \pi, \quad (g^{-1})'(\pi/2) = 2, \quad (g^{-1})''(\pi/2) = 0.$$

Il polinomio di Taylor di g è allora

$$P_2(x) = g(\pi) + g'(\pi)(x-\pi) + \frac{1}{2}g''(\pi)(x-\pi)^2 = \frac{\pi}{2} + \frac{x-\pi}{2} = \frac{x}{2},$$

mentre quello di g^{-1} è

$$\begin{aligned} Q_2(y) &= g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) + (g^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(y - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}(g^{-1})''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 = \\ &= \pi + 2\left(y - \frac{\pi}{2}\right) = 2y. \end{aligned}$$

Esercizio 3 Anzitutto calcoliamo f sui vertici del triangolo T:

$$f(-1,0) = e^2, \qquad f(0,0) = -1, \qquad f(0,2) = 3e^2.$$

Cerchiamo gli eventuali punti stazionari di f interni a T: il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) = \left(-4x(2y-1)e^{y-2x}, (2x+1)(2y+1)e^{y-2x}\right),$$

cosicché il gradiente è nullo se e solo se

$$(x,y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad \text{oppure} \qquad (x,y) = \left(0, -\frac{1}{2}\right).$$

Il secondo punto non appartiene a T, il primo sì, e si ha $f(-1/2, 1/2) = 0$. Si può notare direttamente che si tratta di un punto di sella, osservando che

$$f\left(-\frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon\right) < 0, \qquad f\left(-\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon\right) > 0.$$

Comunque, scrivendo le derivate seconde di f

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= (8x-4)(2y-1)e^{y-2x}, \\
f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = -4x(2y+1)e^{y-2x}, \\
f_{yy}(x,y) &= (2x+1)(2y+1)e^{y-2x}
\end{aligned}$$

e calcolando l'Hessiana nel punto $(-1/2, 1/2)$ si trova

$$H\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 4e^{3/2} \\ 4e^{3/2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det H\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = -16e^3 < 0,$$

a conferma che il punto è di sella.
Indichiamo con I_1 il segmento di vertici $(-1,0)$ e $(0,0)$: la restrizione di f a tale segmento è la funzione

$$g(x) = f(x,0) = -(2x+1)e^{-2x}, \qquad x \in [-1,0];$$

essa è decrescente, perché $g'(x) = 4xe^{-2x} \leq 0$ per ogni $x \in [-1,0]$. Dunque g è massima in $x=-1$, dove vale e^2, e minima in $x=0$, dove vale -1.
Detto I_2 il segmento di vertici $(0,0)$ e $(0,2)$, la restrizione di f a tale segmento è la funzione

$$h(y) = f(0,y) = (2y-1)e^y, \qquad y \in [0,2]:$$

essa è crescente, perché $h'(y) = (2y+1)e^y \geq 0$ per ogni $y \in [0,2]$. Dunque h è minima in $y=0$, dove vale -1, e massima in $y=2$, dove vale $3e^2$.
Infine denotiamo con I_3 il segmento di vertici $(-1,0)$ e $(0,2)$: la restrizione di f a tale segmento è la funzione

$$k(x) = f(x,2x+2) = (4x+3)(2x+1)e^2 = (8x^2+10x+3)e^2, \qquad x \in [-1,0].$$

Si ha $k'(x) = e^2(16x+10)$, quindi k è decrescente in $[-1,-5/8]$ e crescente in $[-5/8,0]$. Perciò k è minima in $x=-5/8$, dove vale $-e^2/8$, e massima in uno dei due estremi (per l'esattezza in $x=0$, ove vale $3e^2$, mentre in $x=-1$ vale e^2).
In conclusione, confrontando i valori trovati, poiché $e^2 < 8$ si ha

$$\max_T f = 3e^2, \qquad \min_T f = -1.$$

Esercizio 4 Cominciamo col risolvere l'equazione omogenea: cercando soluzioni della forma $e^{\lambda t}$ si ottiene

$$e^{\lambda t}(\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda - 1) = 0,$$

da cui

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0.$$

Si vede facilmente che $\lambda_1 = 1$ è soluzione di questa equazione; ci si riduce allora all'equazione di secondo grado

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0,$$

che è risolta da

$$\lambda_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \qquad \lambda_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è pertanto

$$V_0 = \left\{ c_1\, e^t + c_2\, e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}\, t}{2} + c_3\, e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}\, t}{2} : c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare v dell'equazione non omogenea. Essendo $\lambda = 1$ soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicità 1, possiamo cercare v della forma

$$v(t) = a\, t\, e^t.$$

Si ha

$$v'(t) = a(1 + t)e^t, \qquad v''(t) = a(2 + t)e^t, \qquad v'''(t) = a(3 + t)e^t,$$

da cui

$$v'''(t) - 2v''(t) + 2v'(t) - v(t) = a\, e^t\, [(3 + t) - 2(2 + t) + 2(1 + t) - t] = a\, e^t.$$

Quindi v risolve l'equazione se e solo se $a = 1$. Perciò l'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$V_f = \left\{ c_1\, e^t + c_2\, e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}\, t}{2} + c_3\, e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}\, t}{2} + t\, e^t : c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Imponiamo le condizioni di Cauchy: dato che per un generico elemento $u \in V_f$ si ha

$$u'(t) = c_1\, e^t + c^2 \left[\frac{1}{2}\, e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}\,t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}\,t}{2} \right] +$$

$$c_3 \left[\frac{1}{2}\, e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}\,t}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}\,t}{2} \right] + (1+t)e^t,$$

$$u''(t) = c_1\, e^t + c^2 \left[-\frac{1}{2}\, e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}\,t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}\,t}{2} \right] +$$

$$c_3 \left[-\frac{1}{2}\, e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}\,t}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}\,t}{2} \right] + (2+t)e^t,$$

si deduce

$$\begin{cases} 1 = u(0) = c_1 + c_2 \\ \\ -1 = u'(0) = c_1 - \dfrac{c_2}{2} + \dfrac{\sqrt{3}c_3}{2} + 1 \\ \\ 0 = u''(0) = c_1 - \dfrac{c_2}{2} + \dfrac{\sqrt{3}c_3}{2} + 2, \end{cases}$$

ovvero $c_2 = 0$, $c_1 = 1$, $c_3 = -2\sqrt{3}$. Dunque la soluzione del problema di Cauchy è

$$u(t) = e^t - 2\sqrt{3}\, e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}\,t}{2} + t\, e^t.$$

Prova scritta del 7 febbraio 2008

Esercizio 1 Si consideri l'insieme

$$M = \left\{ f \in C^1[-1,1] : \int_{-1}^{1} x f'(x)\, dx = 0 \right\}.$$

(i) Si verifichi che M è un sottospazio vettoriale di $C[-1,1]$.

(ii) Si provi che ogni funzione di classe C^1 e dispari appartiene a M. È vero il viceversa?

(iii) Si dimostri che

$$\overline{M} = \left\{ f \in C[-1,1] : f(1) + f(-1) - \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0 \right\}.$$

Esercizio 2 Determinare, se esistono, il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = xye^{-2x^2-y^2}$$

sull'insieme

$$Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2x^2 - 3y^2 \geq 1, \ x \geq 0\}.$$

Esercizio 3 Descrivere qualitativamente le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'(t) = \frac{1+u(t)}{t-u(t)}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in M$, allora $af + bg \in C^1[-1,1]$ e

$$\int_{-1}^{1} x(af+bg)'\, dx = a\int_{-1}^{1} xf'(x)\, dx + b\int_{-1}^{1} xg'(x)\, dx = 0,$$

cosicché $af + bg \in M$.
(ii) Se f è di classe C^1 e dispari, allora f' è pari: dunque la funzione $xf'(x)$ è dispari e pertanto il suo integrale sull'intervallo simmetrico $[-1,1]$ è nullo. Pertanto $f \in M$.
Il viceversa è falso: la funzione costante $f(x) \equiv 1$ appartiene a M, ma non è dispari.
(iii) Sia $f \in \overline{M}$: allora esiste una successione $\{f_n\}$ contenuta in M, tale che $f_n \to f$ in $C[-1,1]$, ossia uniformemente in $[-1,1]$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha, integrando per parti,

$$0 = \int_{-1}^{1} xf_n'(x)\, dx = f_n(1) + f_n(-1) - \int_{-1}^{1} f_n(x)\, dx,$$

e quindi, con un passaggio al limite sotto il segno di integrale, per $n \to \infty$ si ricava

$$0 = f(1) + f(-1) - \int_{-1}^{1} f(x)\, dx.$$

Ciò prova la prima inclusione.
D'altra parte, sia f una funzione continua su $[-1,1]$ che verifica la condizione

$$f(1)+f(-1)-\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0:$$

poiché $C^1[-1,1]$ è denso in $C[-1,1]$, possiamo scegliere una successione $\{f_n\}$ di funzioni di classe C^1 che converge uniformemente a f in $[-1,1]$. Allora si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} x f_n'(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\left(f_n(1)+f_n(-1)-\int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx\right) = \\ &= f(1)+f(-1)-\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0;\end{aligned}$$

dunque, posto

$$a_n = f_n(1)+f_n(-1)-\int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx,$$

la successione numerica $\{a_n\}$ è infinitesima per $n\to\infty$. Consideriamo allora le funzioni

$$g_n(x) = f_n(x) - \frac{3}{4}\,a_n\,x^2, \qquad x\in[-1,1]:$$

esse appartengono a M, poiché sono di classe C^1 e

$$\int_{-1}^{1} x g_n'(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\left[f_n'(x)-\frac{3}{2}\,a_n\,x\right]\,dx = \int_{-1}^{1} x f_n'(x)\,dx - a_n = 0.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[-1,1]}|g_n(x)-f(x)| &\leq \sup_{x\in[-1,1]}|f_n(x)-f(x)| + \sup_{x\in[-1,1]}\left|\frac{3}{4}\,a_n\,x^2\right| = \\ &= \sup_{x\in[-1,1]}|f_n(x)-f(x)| + \frac{3}{4}|a_n|,\end{aligned}$$

il che implica che $g_n \to f$ uniformemente in $[-1,1]$. Dunque $f\in\overline{M}$, e ciò prova la seconda inclusione.
Esercizio 2 La funzione f è di classe C^∞ ed è limitata su tutto $\mathbb{R}^2$; inoltre

essa tende a 0 per $\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$. Cerchiamo eventuali punti stazionari interni a Z: si ha

$$\nabla f(x,y) = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y(1-4x^2)e^{-2x^2-y^2} = 0 \\ x(1-2y^2)e^{-2x^2-y^2} = 0, \end{cases}$$

ossia se e solo se $(x,y) = (0,0)$ oppure $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, oppure $(x,y) = \left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Dato che nessuno di tali punti appartiene a Z, non vi sono punti stazionari di f interni a Z.

La frontiera di Z è costituita dai punti (x,y) con $x \geq 0$ e $2x^2 - 3y^2 = 1$, ossia $x = \sqrt{\frac{1+3y^2}{2}}$. La restrizione di f a questo insieme è la funzione

$$g(y) = y\sqrt{\frac{1+3y^2}{2}}e^{-1-4y^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Dato che

$$g'(y) = \left(\sqrt{\frac{1+3y^2}{2}} + \frac{3y^2}{2\sqrt{\frac{1+3y^2}{2}}} - 8y^2\sqrt{\frac{1+3y^2}{2}}\right)e^{-1-4y^2},$$

si ha

$$g'(y) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 - 2y^2 - 24y^4 \geq 0,$$

ossia, posto $t = y^2$,

$$g'(y) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 24t^2 + 2t - 1 \leq 0.$$

Le radici di questo trinomio sono $-\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$: dato che $t = y^2 \geq 0$, otteniamo che

$$g'(y) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \leq y^2 \leq \frac{1}{6} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{\sqrt{6}} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{6}}\,.$$

Dunque $y = \frac{1}{\sqrt{6}}$ è punto di massimo relativo per g, mentre $y = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ è punto di minimo relativo per g; ne segue che $(\sqrt{3}/2, -1/\sqrt{6})$ e $(\sqrt{3}/2, 1/\sqrt{6})$ sono gli unici punti stazionari vincolati per f su Z. Ricordando che f tende a 0 per $\sqrt{x^2+y^2} \to +\infty$, concludiamo che

$$\min_Z f = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{5}{3}}\,, \quad \max_Z f = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{5}{3}}\,.$$

Esercizio 3 Le orbite del sistema non possono attraversare la retta $u = t$ del piano tu. Inoltre in tali punti le orbite arrivano o partono con pendenza infinita, ad eccezione dell'orbita orizzontale $u = -1$, che attraversa tale retta in $t = -1$ (e dunque la retta $u = -1$ è costituita da due orbite distinte).
Si ha

$$u' > 0 \quad \iff \quad \frac{1+u}{t-u} > 0 \quad \iff \quad -1 < u < t \text{ oppure } t < u < -1.$$

Poniamo

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(t,u) : -1 < u < t\}, \quad A_2 = \{(t,u) : -1 \vee t < u\}, \\ A_3 &= \{(t,u) : t < u < -1\}, \quad A_4 = \{(t,u) : u < -1 \wedge t\}. \end{aligned}$$

Poiché, dopo qualche calcolo, si trova

$$u''(t) = \frac{d}{dt}\,\frac{1+u(t)}{t-u(t)} = \frac{(1+u(t))^2}{(t-u(t))^3}\,,$$

ricaviamo

$$u'' \geq 0 \quad \iff \quad u < t \quad \iff \quad (t,u) \in A_1 \cup A_4\,.$$

In definitiva le orbite sono:

- crescenti e convesse in A_1,
- decrescenti e concave in A_2,
- crescenti e concave in A_3,
- decrescenti e convesse in A_4.

Infine osserviamo che ciascuna orbita u è definita solo in un intervallo limitato. Precisamente:

- le orbite giacenti in A_1 sono definite per $t \in]-1, t_0[$, per un opportuno $t_0 > -1$. Infatti sono crescenti, ma non possono avere asintoti obliqui per $t \to +\infty$, perché dall'equazione differenziale ricaveremmo $u'(t) \to -1$ per $t \to +\infty$, mentre $u' > 0$. Dunque per ciascuna di queste orbite esiste $t_0 > -1$ tale che $u(t) \to t_0$ per $t \to t_0^-$, e dall'equazione differenziale ricaviamo $u'(t) \to +\infty$ per $t \to t_0^-$. Similmente, le $u(t)$, non potendo attraversare l'orbita $u = -1$ e dovendo decrescere per t decrescente, devono per forza tendere a -1 per $t \to -1^+$; inoltre, per convessità, anche $u'(t)$ ha limite non negativo per $t \to -1^+$, e dall'equazione differenziale, con l'ausilio del teorema di de l'Hôpital, ricaviamo

$$L = \lim_{t \to -1^+} u'(t) = \lim_{t \to -1^+} \frac{1 + u(t)}{t - u(t)} = \lim_{t \to -1^+} \frac{u'(t)}{1 - u'(t)} = \frac{L}{1 - L}\,,$$

da cui $L = 0$. Dunque tutte le orbite giacenti in A_1 arrivano in -1 per $t \to -1^+$ con tangente orizzontale.

- Le orbite giacenti in A_3 hanno un comportamento simmetrico rispetto a quelle di A_1: sono definite in un intervallo limitato $]t_0, -1[$, e verificano

$$\lim_{t \to t_0^+} u(t) = t_0\,, \quad \lim_{t \to t_0^-} u'(t) = +\infty, \quad \lim_{t \to -1^-} u(t) = -1, \quad \lim_{t \to t_0^-} u'(t) = 0.$$

- Le orbite giacenti in A_4 sono definite in semirette del tipo $]t_0, +\infty[$, per un certo $t_0 < -1$; infatti sono decrescenti e convesse, quindi al decrescere di t la derivata (che è negativa) decresce fino a $-\infty$ allorché $u(t)$ tende alla retta $u = t$ in corrispondenza di t_0, mentre per $t \to \infty$ la derivata tende a 0^- (come si vede dall'equazione differenziale usando, come in precedenza, il teorema di de l'Hôpital); il limite delle $u(t)$ per $t \to +\infty$ è finito oppure $-\infty$, e a priori non è evidente in che modo stabilire la validità dell'una o dell'altra possibilità. Tuttavia, queste orbite sono grafici di funzioni $u(t)$ invertibili: le inverse $t(u)$ risolvono l'equazione differenziale

$$t'(u) = \frac{t - u}{1 + u}\,,$$

da cui, con qualche calcolo,

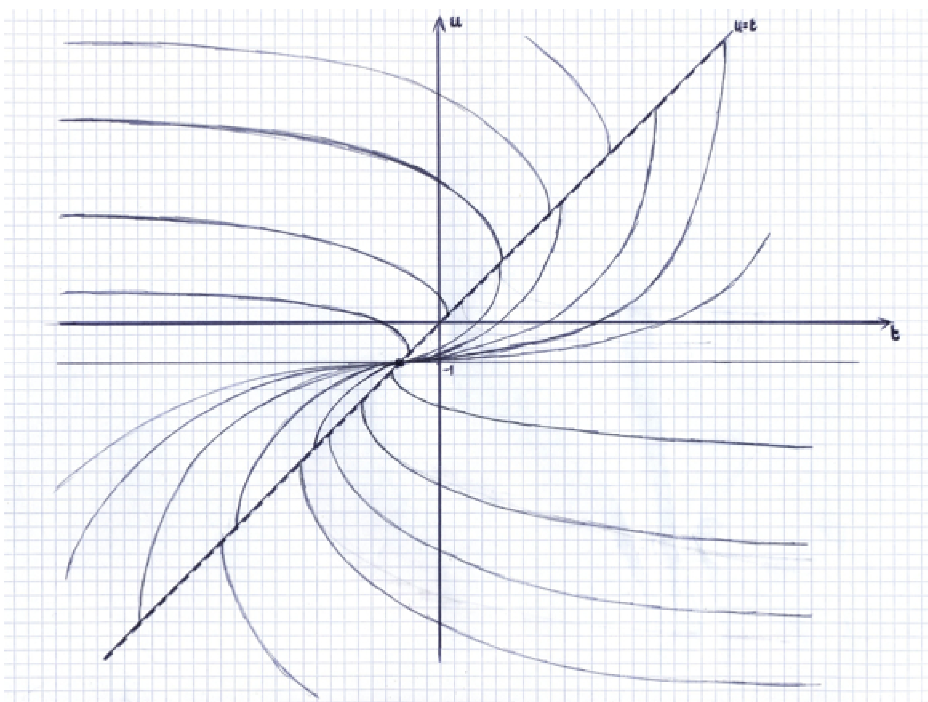
$$t''(u) = -\frac{1}{(1 + u)^2}\,.$$

Se avessimo $u(t) \to c^+$ per $t \to +\infty$, con $c \in]-\infty, -1[$, per simmetria dei grafici ricaveremmo $t(u) \to +\infty$ per $u \to c^+$: la funzione $t(u)$ avrebbe dunque un asintoto verticale, il che implicherebbe $t'(u) \to +\infty$ per $u \to c^+$, e per la stessa ragione anche $t''(u) \to +\infty$ per $u \to$

c^+. Quest'ultimo fatto è però contraddetto dall'espressione esplicita di $t''(u)$, dalla quale segue invece $t''(u) \to -1/(1+c)^2$ per $u \to c^+$. Ciò prova che tutte le orbite che giacciono in A_4 tendono a $-\infty$ per $t \to +\infty$.

- Le orbite giacenti in A_2 hanno un comportamento simmetrico rispetto a quelle di A_4: sono definite in semirette del tipo $]-\infty, t_0[$, per un certo $t_0 > -1$, e si ha
$$\lim_{t\to-\infty} u'(t) = 0^-, \quad \lim_{t\to t_0^-} u(t) = t_0, \quad \lim_{t\to t_0^-} u'(t) = -\infty,$$
mentre il limite per $t \to -\infty$ di $u(t)$ è $+\infty$.

Dalla discussione precedente si può ricavare la seguente descrizione qualitativa delle orbite:



Prova scritta del 12 giugno 2008

Esercizio 1 Descrivere il comportamento della serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ove
$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{se } n \text{ è pari} \\ e^{-nx^3} & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

e calcolarne la somma nell'insieme di convergenza.

Esercizio 2 Si consideri l'insieme

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y^2 = x^3, \ z = x^2\}.$$

(i) Si verifichi che $V \setminus \{(0, 0, 0)\}$ è una varietà 1-dimensionale e si scriva l'equazione del piano normale a V nel punto $(1, 1, 1)$.

(ii) Si trovino, se esistono, il massimo ed il minimo su V della funzione

$$f(x, y, z) = yz\, e^{-x^3-y/3}.$$

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' + u = |x|, & x \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = -1. \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 1 Affinché il termine generale della serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ sia infinitesimo per $n \to \infty$ occorre che si abbia simultaneamente

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} e^{-nx^3} = 0;$$

ciò accade se e solo se $x \in]0, 1[$. Quindi la serie non può convergere quando x è al di fuori di tale intervallo. Invece, quando $x \in]0, 1[$ per le somme parziali $S_N(x)$ della serie si ha

$$S_{2n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} e^{-(2k+1)x^3}, \quad S_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} e^{-(2k+1)x^3};$$

la serie data è dunque somma della serie geometrica di ragione x^2 e della serie geometrica di ragione e^{-2x^3}, moltiplicata per il fattore e^{-x^3}. Si ha dunque convergenza puntuale ed assoluta in $]0, 1[$; la convergenza è anche totale ed uniforme in ogni intervallo chiuso $I \subset]0, 1[$. La somma della serie è

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)x^3} = \frac{1}{1 - x^2} + \frac{e^{-x^3}}{1 - e^{-2x^3}}, \qquad x \in]0, 1[.$$

Esercizio 2 (i) L'insieme V è il luogo di zeri della funzione

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 - x^3 \\ z - x^2 \end{pmatrix},$$

la quale è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$. La matrice Jacobiana di $\mathbf{F}$ è

$$D\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -3x^2 & 2y & 0 \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

essa ha rango 2 in ogni punto di V diverso dall'origine, come è immediato verificare. Pertanto $V \setminus \{\mathbf{0}\}$ è una varietà 1-dimensionale; essa è costituita da due rami, che denominiamo V^+ e V^-, simmetrici rispetto al piano $y = 0$, i quali si toccano nell'origine. L'insieme V^+ può essere parametrizzato ad esempio nella forma

$$x = x, \quad y = x^{3/2}, \quad z = x^2, \qquad x \geq 0.$$

mentre per V^- la parametrizzazione è

$$x = x, \quad y = -x^{3/2}, \quad z = x^2, \qquad x \geq 0.$$

Il vettore $\mathbf{v}$, tangente a V nel punto $(1,1,1) \in V^+$, si ottiene derivando rispetto a x la prima espressione e calcolandola per $x = 1$: si trova $\mathbf{v} = (1, \frac{3}{2}, 2)$. A meno di costanti moltiplicative, si arriva allo stesso risultato imponendo che $\mathbf{v}$ sia ortogonale ai due vettori $\nabla F_1(1,1,1)$ e a $\nabla F_2(1,1,1)$, che sappiamo essere ortogonali a V nel punto. Quindi, il piano normale a V in $(1,1,1)$ è perpendicolare a $\mathbf{v}$: ne segue che tale piano può essere scritto, in forma cartesiana, come

$$(x-1) + \frac{3}{2}(y-1) + 2(z-1) = 0,$$

ovvero $2x + 3y + 4z = 9$.

(ii) La funzione f, ristretta al vincolo V^+, diventa

$$g^+(x) = f(x, x^{3/2}, x^2) = x^{7/2} e^{-x^3 - \frac{1}{3}x^{3/2}}, \qquad x \geq 0,$$

mentre ristretta al vincolo V^- diventa

$$g^-(x) = f(x, -x^{3/2}, x^2) = -x^{7/2} e^{-x^3 + \frac{1}{3}x^{3/2}}, \qquad x \geq 0.$$

La funzione g^+ è positiva per $x > 0$ e nulla per $x = 0$, mentre la funzione g^- è negativa per $x > 0$ e nulla per $x = 0$: quindi l'origine, unico punto di non regolarità, che corrisponde al valore $x = 0$ del parametro, non è punto né di massimo, né di minimo. Inoltre è chiaro che

$$\lim_{x\to+\infty} g^+(x) = \lim_{x\to+\infty} g^-(x) = 0,$$

cosicché il massimo ed il minimo di f su V esistono e vanno ricercati ovviamente fra i punti in cui si annulla la derivata rispettivamente di g^+ e di g^-. Per g^+ risulta

$$(g^+)'(x) = \left[\frac{7}{2}\,x^{5/2} - x^{7/2}\left(3x^2 + \frac{1}{2}\,x^{1/2}\right)\right] e^{-x^3-\frac{1}{3}x^{3/2}},$$

quindi si ha $(g^+)'(x) = 0$ se e solo se

$$x^{5/2}(7 - 6x^3 - x^{3/2}) = 0,$$

ovvero

$$6x^3 + x^{3/2} - 7 = 0.$$

Le radici di questa equazione sono date da

$$x^{3/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+168}}{12} = \begin{cases} 1 \\ -7/6, \end{cases}$$

ma la radice $-7/6 < 0$ è da scartare, essendo il parametro x positivo. Dunque $(g^+)'$ si annulla solo per $x^{3/2} = 1$, ossia $x = 1$: tale punto è quindi di massimo e si ha

$$\max_V f = g(1) = e^{-4/3}.$$

Per g^- invece risulta

$$(g^-)'(x) = -\left[\frac{7}{2}\,x^{5/2} - x^{7/2}\left(3x^2 - \frac{1}{2}\,x^{1/2}\right)\right] e^{-x^3+\frac{1}{3}x^{3/2}},$$

quindi si ha $(g^-)'(x) = 0$ se e solo se

$$x^{5/2}(-7 + 6x^3 - x^{3/2}) = 0,$$

ovvero

$$6x^3 - x^{3/2} - 7 = 0.$$

Le radici di questa equazione sono

$$x^{3/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+168}}{12} = \begin{cases} 7/6 \\ -1, \end{cases}$$

ma la radice -1 è da scartare, essendo il parametro x positivo. Dunque $(g^-)'$ si annulla solo per $x^{3/2} = 7/6$, ossia $x = (7/6)^{2/3}$: tale punto è quindi di minimo e si ha

$$\min_V f = g(7/6) = -(7/6)^{7/3} e^{-7/9}.$$

Esercizio 3 Risolviamo l'equazione omogenea: l'equazione caratteristica, $\lambda^2 + 1 = 0$, ha soluzioni $\lambda = \pm i$ e pertanto l'integrale generale è

$$u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Cerchiamo adesso una soluzione particolere dell'equazione non omogenea della forma

$$v(x) = a_1(x) \cos x + a_2(x) \sin x.$$

Come si sa dalla teoria, è sufficiente che le funzioni a_1' e a_2' soddisfino il sistema

$$\begin{cases} a_1'(x) \cos x + a_2'(x) \sin x = 0 \\ -a_1'(x) \sin x + a_2'(x) \cos x = |x|. \end{cases}$$

Facili conti portano a

$$a_1'(x) = -|x| \sin x, \qquad a_2'(x) = |x| \cos x;$$

da qui, scegliendo come primitive quelle che si annullano per $x = 0$ (il che è consigliabile a causa della presenza del valore assoluto), si ricava

$$a_1(x) = -\int_0^x |t| \sin t \, dt, \qquad a_2(x) = \int_0^x |t| \cos t \, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo esplicitamente queste funzioni: notando che il segno di t nell'integrando è sempre uguale al segno di x, si ha

$$a_1(x) = -\mathrm{sgn}(x) \int_0^x t \sin t \, dt = \mathrm{sgn}(x)(x \cos x - \sin x),$$

$$a_2(x) = \mathrm{sgn}(x) \int_0^x t \cos t \, dt = \mathrm{sgn}(x)(x \sin x + \cos x - 1).$$

Pertanto

$$\begin{aligned} v(x) &= \operatorname{sgn}(x)[\cos x(x\cos x - \sin x) + \sin x(x\sin x + \cos x - 1)] = \\ &= \operatorname{sgn}(x)(x - \sin x) = |x - \sin x|, \end{aligned}$$

ove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $x - \sin x$ è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$. Dunque l'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + |x - \sin x|.$$

Infine, imponendo le condizioni $u(0) = 1$ e $u'(0) = -1$ ed osservando che la funzione $|x - \sin x|$ è infinitesima del terzo ordine per $x \to 0$, e quindi si annulla insieme con la sua derivata per $x = 0$, si ottiene facilmente

$$c_1 = 1, \qquad c_2 = -1$$

da cui, finalmente, otteniamo la soluzione del problema di Cauchy:

$$u(x) = \cos x - \sin x + |x - \sin x|.$$

Prova scritta del 3 luglio 2008

Esercizio 1 Analizzare il comportamento per $n \to \infty$ della successione di funzioni $\{f_n\}$, dove

$$f_n(x) = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad x > 0, \qquad n \in \mathbb{N}^+.$$

Esercizio 2 Determinare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x, y) = \sin x + \frac{1}{2}\sin y$$

nella regione K delimitata dal triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, \pi)$, $(-2\pi, \pi)$.

Esercizio 3 Risolvere il sistema differenziale

$$\begin{cases} u' = 3u + w \\ v' = -3u + w + 1 \\ w' = u + v + w + 2, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 Conviene distinguere il caso $0 < x < 1$ e il caso $x > 1$, tenuto conto che, ovviamente, per $x = 1$ la successione data vale $2^{1/n}$ e quindi converge a 1.
Per $0 < x < 1$ possiamo scrivere

$$f_n(x) = \frac{1}{x}(1 + x^{2n})^{1/n},$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{x} \qquad \forall x \in]0, 1[.$$

Invece per $x > 1$ si ha

$$f_n(x) = x(1 + x^{-2n})^{1/n},$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x \qquad \forall x \in]1, \infty[.$$

Quindi la successione converge puntualmente in $]0, \infty[$ alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } \; x \geq 1, \\ 1/x & \text{se } \; x \in]0, 1]. \end{cases}$$

Valutiamo la convergenza uniforme:
se $0 < x \leq 1$ si ha

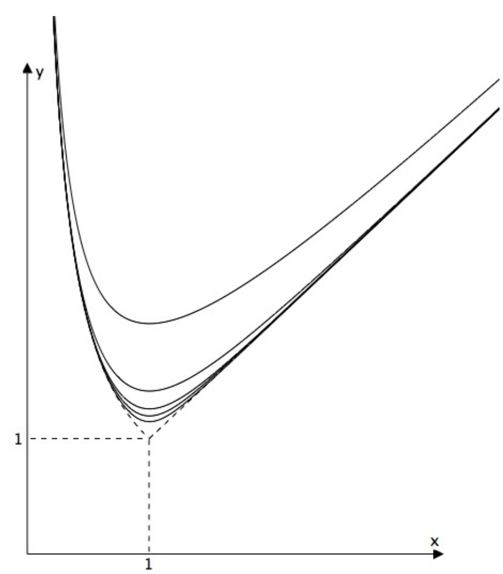
$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x}[(1 + x^{2n})^{1/n} - 1];$$

ora notiamo che per ogni $t \in]0, 1]$ si ha, in virtú del teorema di Lagrange,

$$(1 + t)^{1/n} - 1 = \frac{1}{n}(1 + \mathbf{x}i)^{\frac{1}{n}-1}\, t \leq \frac{t}{n}$$

ove $\mathbf{x}i \in]0, t[$ è un punto opportuno; scelto $t = x^{2n}$ ricaviamo

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{x^{2n}}{n} \leq \frac{1}{n} \;\; \forall x \in]0, 1],$$



e quindi vi è convergenza uniforme su $]0,1]$.
Similmente, se $x \geq 1$ si ha

$$|f_n(x) - f(x)| = x[(1 + x^{-2n})^{1/n} - 1];$$

scelto nella stima precedente $t = x^{-2n}$, si ottiene

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{x^{-2n}}{n} \leq \frac{1}{n} \qquad \forall x \in [1, \infty[,$$

e quindi vi è convergenza uniforme su $[1, \infty[$. Se ne deduce che la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in $]0, \infty[$. Si noti comunque che sia le f_n, sia la f sono illimitate in $]0, \infty[$.

Esercizio 2 Cerchiamo anzitutto gli eventuali punti stazionari di f interni a K: il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \cos x = 0 \\ f_y(x,y) = \frac{1}{2}\cos y = 0 \end{cases}$$

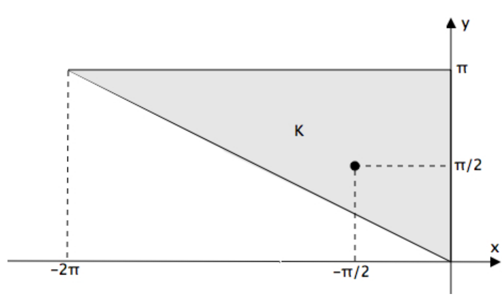
ha le soluzioni

$$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + h\pi\right), \qquad h, k \in \mathbb{Z}.$$

Di questi punti, l'unico interno al triangolo K è $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, e risulta $f\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.
Vediamo il comportamento di f lungo la frontiera di K. Nei tre vertici si ha

$$f(0,0) = 0, \qquad f(0,\pi) = 0, \qquad f(-2\pi, \pi) = 0.$$

Consideriamo i tre lati del triangolo:



$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = y, \end{cases} \quad y \in [0, \pi];$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} x = x \\ y = \pi, \end{cases} \quad x \in [-2\pi, 0];$$

$$\Gamma_3 : \begin{cases} x = -2y, \\ y = y, \end{cases} \quad y \in [0, \pi].$$

La restrizione di f a Γ_1 è $g(y) = \frac{1}{2}\sin y$, $y \in [0, \pi]$: essa è minima in $y = -\frac{\pi}{2}$ con $g(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$ e massima in $y = -\frac{3\pi}{2}$ con $g(-\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{2}$.

La restrizione di f a Γ_2 è $h(x) = \sin x$, $x \in [-2\pi, 0]$: essa è massima in $x = -\frac{3\pi}{2}$ con $f(-\frac{3\pi}{2}) = 1$ e minima in $x = -\frac{\pi}{2}$ con $h(-\frac{\pi}{2}) = -1$.
La restrizione di f a Γ_3 è $k(y) = -\sin 2y + \frac{1}{2}\sin y$, $y \in [0, \pi]$; si ha

$$k'(y) = -2\cos 2y + \frac{1}{2}\cos y = -4\cos^2 y + \frac{1}{2}\cos y + 2,$$

cosicché $k'(y) > 0$ se e solo se

$$-\frac{\sqrt{129}+1}{16} < \cos y < \frac{\sqrt{129}-1}{16},$$

ovvero se e solo se $y_1 < y < y_2$, ove

$$\begin{aligned} y_1 &= \arccos \tfrac{\sqrt{129}+1}{16} \simeq 0.68824249083, \\ y_2 &= \arccos \left(-\tfrac{\sqrt{129}-1}{16}\right) \simeq 2.27491656649. \end{aligned}$$

Se ne deduce che k è minima in $y = y_1$ con

$$k(y_1) = -\sin 2y_1 + \frac{1}{2}\sin y_1 \simeq -0.66359051123,$$

ed è massima in $y = y_2$ con

$$k(y_2) = -\sin 2y_2 + \frac{1}{2}\sin y_2 \simeq 1.36790755204.$$

In conclusione, confrontando i valori di f nei punti selezionati, si ha

$$\max_K f = f(-2y_2, y_2) \simeq 1.36790755204, \qquad \min_K f = f\left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right) = -1.$$

Esercizio 3 Risolviamo il sistema omogeneo. Cerchiamo gli autovalori della matrice dei coefficienti:

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ -3 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (3-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0,$$

ossia λ è autovalore se e solo se $\lambda \in \{3, 2, -1\}$. Gli autovettori corrispondenti sono: $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0)$ per $\lambda_1 = 3$; $\mathbf{v}_2 = (1, -2, -1)$ per $\lambda_2 = 2$; $\mathbf{v}_3 = (1, 7, -4)$

per $\lambda_3 = -1$.
L'integrale generale del sistema omogeneo è dunque

$$\mathbf{u}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{3t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{2t} = c_3\mathbf{v}_3 e^{-t}.$$

Cerchiamo ora una soluzione del sistema non omogeneo, della forma $\mathbf{v}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{c}(t)$, ove

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{2t} & e^{-t} \\ -e^{3t} & -2e^{2t} & 7e^{-t} \\ 0 & -e^{2t} & -4e^{-t} \end{pmatrix}$$

è la matrice Wronskiana associata alle soluzioni dell'equazione omogenea già trovate, e $\mathbf{c}(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t))$ sono funzioni da determinare risolvendo il sistema

$$\mathbf{W}(t)\mathbf{c}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

ossia

$$\begin{cases} e^{3t}c_1' + e^{2t}c_2' + e^{t}c_3' = 0 \\ -e^{3t}c_1' - 2e^{2t}c_2' + 7e^{-t}c_3' = 1 \\ -e^{2t}c_2' - 4e^{-t}c_3' = 2. \end{cases}$$

Si ottiene facilmente

$$c_1'(t) = \frac{7}{4}\,e^{-3t}, \quad c_2'(t) = -\frac{5}{3}\,e^{-2t}, \quad c_3'(t) = -\frac{1}{12}\,e^{t},$$

da cui, ad esempio,

$$c_1(t) = -\frac{7}{12}\,e^{-3t}, \quad c_2(t) = \frac{5}{6}\,e^{-2t}, \quad c_3(t) = -\frac{1}{12}\,e^{t}.$$

In definitiva la soluzione particolare del sistema non omogeneo è

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{2t} & e^{-t} \\ -e^{3t} & -2e^{2t} & 7e^{-t} \\ 0 & -e^{2t} & -4e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{12}\,e^{-3t} \\ \frac{5}{6}\,e^{-2t} \\ -\frac{1}{12}\,e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Naturalmente, vista la forma del termine noto del sistema, avremmo potuto più comodamente cercare una soluzione $\mathbf{v}$ *costante*: se $\mathbf{v} = (a, b, c)$, sostituendo nel sistema si trova subito

$$\begin{cases} 0 = 3a + c \\ 0 = -3a + c + 1 \\ 0 = a + b + c + 2, \end{cases}$$

da cui

$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{6}, -\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}\right).$$

Prova scritta del 15 settembre 2008

Esercizio 1 Descrivere il comportamento per $n \to \infty$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x}{n} e^{-n(x+n)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Esercizio 2 Sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 + z^2, z^2 + x^2, x^2 + y^2), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) In quali punti di $\mathbb{R}^3$ la funzione $\mathbf{F}$ è localmente invertibile?

(ii) Si scriva l'inversa locale di $\mathbf{F}$ nel punto $\mathbf{F}(-1, 1, -1)$.

Esercizio 3 Descrivere qualitativamente le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'(t) = \arctan[u(t)^2], \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 Dato che l'esponenziale diverge più velocemente di ogni polinomio, si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Analizziamo la convergenza uniforme: anzitutto, risulta

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n| \geq |f_n(-n)| = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

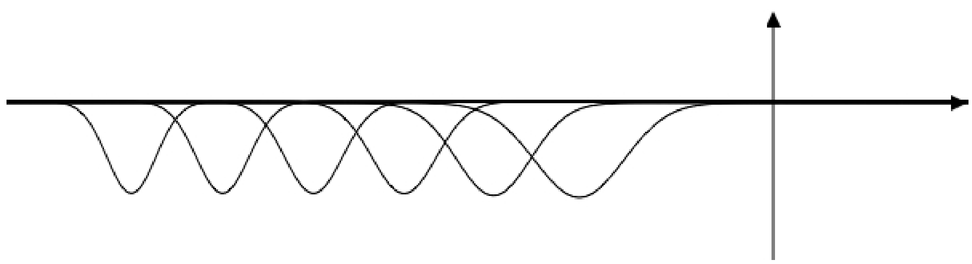
e ciò mostra che non può aversi convergenza uniforme in $\mathbb{R}$. Tuttavia si ha convergenza uniforme in ogni semiretta $[a, \infty[$ con $a \in \mathbb{R}$: ciò è abbastanza chiaro quando $a \geq 0$, essendo

$$\max_{[0,\infty[} |f_n| = \max_{[0,\infty[} f_n \leq \frac{1}{n} \max_{x \geq 0} x\, e^{-x^2} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty;$$

D'altronde, se $a < 0$ si ha

$$\max_{[a,0]} |f_n| \leq \max_{[a,0]} \frac{|x|}{n} e^{-n(n-|x|)^2} \leq \frac{|a|}{n} e^{-n(n-|a|)^2} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty,$$

il che prova quanto affermato.



Esercizio 2 (i) Risulta

$$D\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 2y & 2z \\ 2x & 0 & 2z \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\det D\mathbf{F}(x, y, z) = 16xyz.$$

Si ha quindi invertibilità locale in tutti i punti (x, y, z) a coordinate tutte diverse da 0. Negli altri punti non vi è invertibilità locale: ad esempio, in un qualunque intorno di $\mathbf{F}(x_0, y_0, 0) = (y_0^2, x_0^2, x_0^2 + y_0^2)$, con $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$, cadono i punti $(y_0^2+\varepsilon, x_0^2+\varepsilon, x_0^2+y_0^2)$ con ε positivo e sufficientemente piccolo, i quali hanno le due controimmagini $(x_0, y_0, \pm\sqrt{\varepsilon})$.

(ii) Scriviamo l'inversa locale di $\mathbf{F}$ nel punto $\mathbf{F}(-1, 1, -1)$, ossia in $(2, 2, 2)$: fissato un punto (u, v, w), il sistema $\mathbf{F}(x, y, z) = (u, v, w)$ si scrive

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = u \\ x^2 + z^2 = v \\ x^2 + y^2 = w, \end{cases}$$

ed ha per soluzioni

$$x^2 = \frac{-u+v+w}{2}, \quad y^2 = \frac{u-v+w}{2}, \quad z^2 = \frac{u+v-w}{2}.$$

Dunque, in un intorno di $(2,2,2)$ si ha univocamente

$$(x,y,z) = \mathbf{F}^{-1}(u,v,w) = \left(-\sqrt{\frac{-u+v+w}{2}}, \sqrt{\frac{u-v+w}{2}}, -\sqrt{\frac{u+v-w}{2}}\right).$$

Esercizio 3 Le soluzioni $u(t)$ sono tutte definite per ogni $t \in \mathbb{R}$. Vi è ovviamente la soluzione identicamente nulla; quindi tutte le altre hanno segno costante e per ciascuna di esse si ha $u'(t) > 0$ per ogni $t \neq 0$, cosicché le soluzioni non nulle sono tutte strettamente crescenti. Inoltre, essendo

$$u''(t) = \frac{2u(t)u'(t)}{1+u(t)^4} = \frac{2u(t)\arctan[u(t)^2]}{1+u(t)^4},$$

otteniamo che le soluzioni positive sono sempre convesse, mentre quelle negative sono sempre concave.
Possiamo inoltre osservare che per le soluzioni positive si ha:

- $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$, perchè u è crescente e convessa.
- $\lim\limits_{t\to-\infty} u(t) = 0$, perché tale limite (che indichiamo con m) deve esistere per monotonia: d'altronde, poiché u non può attraversare la retta $u = 0$, il limite della u' (che esiste a sua volta per la convessità di u) deve essere nullo; ma dall'equazione differenziale ricaviamo, per $t \to -\infty$, $0 = u'(m) = \arctan m^2$ e dunque $m = 0$.
- $\lim\limits_{t\to\infty} u'(t) = \frac{\pi}{2}$, utilizzando l'equazione differenziale e il fatto che $u(t) \to +\infty$ per $t \to +\infty$.
- $\lim\limits_{t\to-\infty} u'(t) = 0$, come si è già osservato.

Per le soluzioni negative risulta, analogamente,

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0, \quad \lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty, \qquad \lim_{t\to\infty} u'(t) = 0, \quad \lim_{t\to-\infty} u'(t) = -\frac{\pi}{2}.$$

Quando $t \to \infty$ le $u(t)$ sono dotate di asintoto obliquo di coefficiente angolare $\pi/2$. Infatti, sappiamo che

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = +\infty.$$

Inoltre, dato che $u'(t) \to \pi/2$, si ha dal teorema di de L'Hôpital

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{u(t) - u(0)}{t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left[u'(s) - \frac{\pi}{2} \right] ds + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Infine, utilizzando l'identità $\arctan x + \arctan 1/x = \pi/2$, valida per ogni $x > 0$, risulta

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \infty} \left(u(t) - \frac{\pi}{2}\, t \right) &= \lim_{t \to \infty} \left(u(1) + \frac{\pi}{2} + \int_1^t \left[u'(s) - \frac{\pi}{2} \right] dt \right) = \\ &= \lim_{t \to \infty} \left(u(1) + \frac{\pi}{2} + \int_1^t \arctan \frac{1}{u(s)^2}\, ds \right), \end{aligned}$$

cosicché il limite esiste e non vale $-\infty$; e poiché, per convessità,

$$u(s) \geq u(1) + u'(1)(s-1) \qquad \forall s \geq 1,$$

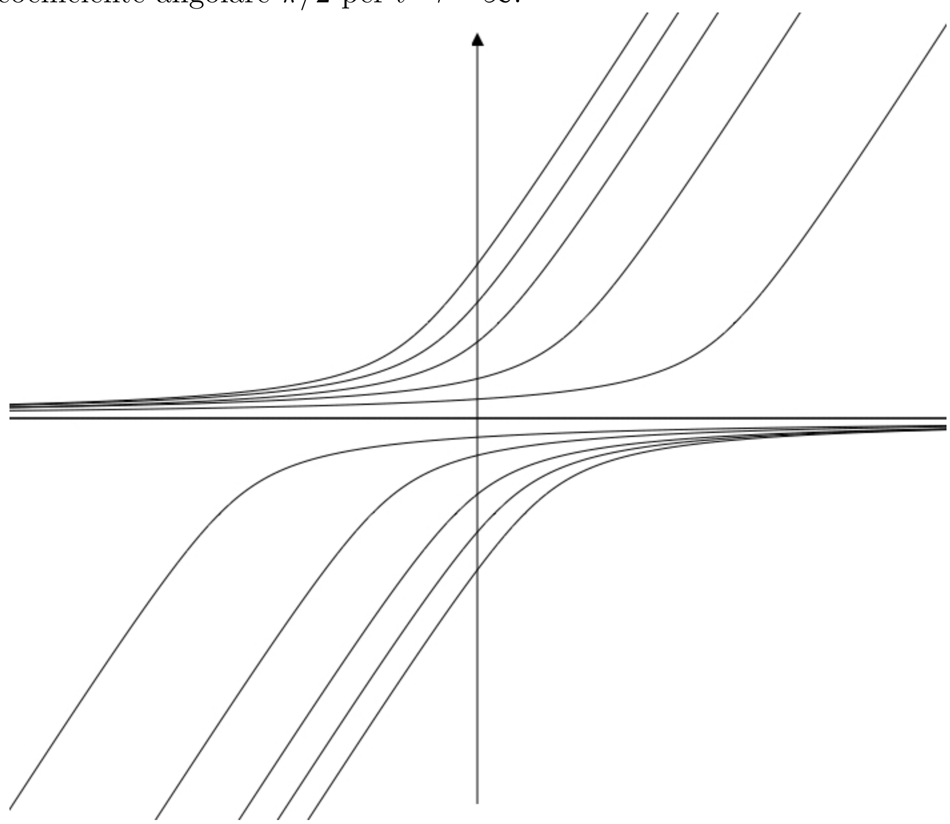
si conclude che

$$\lim_{t \to \infty} \left(u(t) - \frac{\pi}{2}\, t \right) \leq u(1) + \frac{\pi}{2} + \int_1^\infty \frac{1}{[u(1) + u'(1)(s-1)]^2}\, ds < \infty,$$

ossia

$$\exists \lim_{t \to \infty} \left(u(t) - \frac{\pi}{2}\, t \right) \in \mathbb{R}.$$

Si può anche notare che se $u(t)$ è soluzione, anche $v(t) = -u(-t)$ lo è: quindi il comportamento delle soluzioni negative è esattamente simmetrico a quello delle soluzioni positive, ed in particolare anch'esse hanno un asintoto obliquo di coefficiente angolare $\pi/2$ per $t \to -\infty$.



Prova scritta del 29 ottobre 2008

Esercizio 1 **(i)** Descrivere il comportamento per $n \to \infty$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = (1 - x^2)^n, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

(ii) Stabilire se è vero che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f_n(x)\, dx = 0.$$

Esercizio 2 Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x, y) = e^{xy} - 3x - y - 1, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

e si definisca $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$.

(i) In quali punti l'insieme Z è localmente un grafico?

(ii) Si scriva il polinomio di Taylor di centro 0 e grado 2 della funzione $f(x)$ definita implicitamente dall'equazione $F(x,y) = 0$ nell'intorno del punto $(0,0)$.

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'''(t) - 3u''(t) + 4u'(t) - 2u(t) = \cos t, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(\pi) = 2, \quad u'(\pi) = 0, \quad u''(\pi) = 0. \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Le funzioni f_n sono pari, quindi è sufficiente studiarle sulla semiretta $[0, \infty[$. Per la convergenza puntuale si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (1-x^2)^n \begin{cases} \text{non esiste} & \text{se } x \geq \sqrt{2} \\ = 1 & \text{se } x = 0 \\ = 0 & \text{se } 0 < x < \sqrt{2}. \end{cases}$$

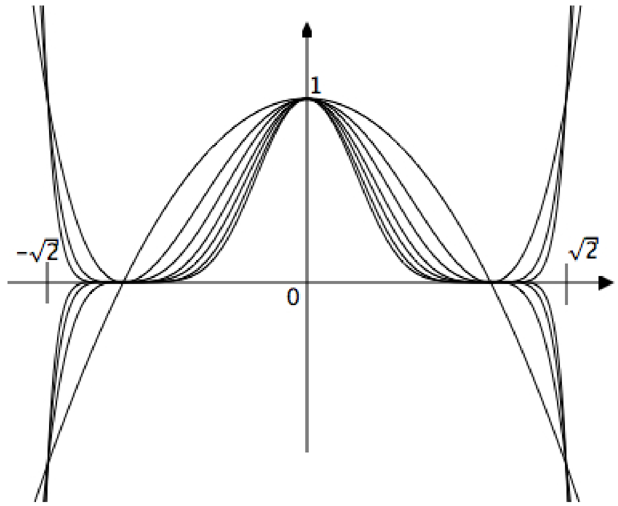
Pertanto vi è convergenza puntuale solo su $[0, \sqrt{2}[$, e la funzione limite è

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } 0 < x < \sqrt{2}. \end{cases}$$

In tale intervallo la convergenza non può essere uniforme perché la funzione f è discontinua negli estremi. Vi è però convergenza uniforme nei sottointervalli della forma $[\sqrt{\delta}, \sqrt{2-\delta}]$ con δ arbitrariamente piccolo: infatti se $x \in [\sqrt{\delta}, \sqrt{2-\delta}]$ si ha

$$|f_n(x)| = |(1-x^2)^n| < (1-\delta)^n,$$

da cui $f_n \to 0$ uniformemente in $[\sqrt{\delta}, \sqrt{2-\delta}]$.



(ii) Dobbiamo calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f_n(x)\,dx = 2\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{2}}(1-x^2)^n\,dx.$$

Non è detto a priori che il limite esista, né che faccia 0, poiché l'integrando non converge uniformemente in $[0,\sqrt{2}]$: tuttavia possiamo scrivere, utilizzando la sostituzione $x^2 = t$,

$$2\int_0^{\sqrt{2}}(1-x^2)^n\,dx = \int_0^2 \frac{(1-t)^n}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Si ha allora, fissato $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^2 \frac{(1-t)^n}{\sqrt{t}}\,dt\right| &\le \int_0^\varepsilon \frac{|1-t|^n}{\sqrt{t}}\,dt + \int_\varepsilon^{2-\varepsilon}\frac{|1-t|^n}{\sqrt{t}}\,dt + \int_{2-\varepsilon}^2 \frac{|1-t|^n}{\sqrt{t}}\,dt \le \\ &\le \int_0^\varepsilon \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_\varepsilon^{2-\varepsilon}\frac{(1-\varepsilon)^n}{\sqrt{t}}\,dt + \int_{2-\varepsilon}^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \\ &= 2\sqrt{\varepsilon} + 2[\sqrt{2-\varepsilon}-\sqrt{\varepsilon}](1-\varepsilon)^n + 2[\sqrt{2}-\sqrt{2-\varepsilon}],\end{aligned}$$

da cui

$$\limsup_{n\to\infty}\int_0^2 \frac{(1-t)^n}{\sqrt{t}}\,dt \le c\sqrt{\varepsilon}$$

e dunque, per l'arbitrarietà di ε,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^2 \frac{(1-t)^n}{\sqrt{t}}\,dt = 0.$$

Esercizio 2 (i) Certamente l'insieme Z è un grafico nell'intorno di ogni punto $(x,y) \in Z$ in cui

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} y\,e^{xy} - 3 \\ x\,e^{xy} - 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

cerchiamo allora quali sono i punti potenzialmente "cattivi": il sistema

$$\begin{cases} F(x,y) = e^{xy} - 3x - y - 1 = 0 \\ F_x(x,y) = y\,e^{xy} - 3 = 0 \\ F_y(x,y) = x\,e^{xy} - 1 = 0 \end{cases}$$

equivale a

$$\begin{cases} e^{xy} = 3x + y + 1 \\ e^{xy} = 3/y \\ e^{xy} = 1/x \end{cases}$$

da cui, eliminando l'esponenziale,

$$\begin{cases} y = 3x \\ 6x + 1 = 1/x \end{cases}$$

ed infine

$$6x^2 + x - 1 = 0.$$

Questa equazione ha le soluzioni $1/3$ e $-1/2$. Tuttavia la terza equazione del sistema originario ci dice che necessariamente $x > 0$, quindi rimane solo la scelta di $x = 1/3$, a cui corrisponde $y = 1$; ma la coppia $(1/3, 1)$ non risolve la terza equazione $x\,e^{xy} - 1 = 0$. Ne segue che il sistema sopra scritto non ha soluzioni, il che ci dice che *tutti* i punti di Z hanno un intorno in cui Z è un grafico.

(ii) La funzione F è di classe C^∞ e nel punto $(0,0)$ si ha $F_x(0,0) = -3$ e $F_y(0,0) = -1$; dunque, per il teorema del Dini esiste la funzione implicita $f(x)$, la quale é di classe C^∞ e verifica $f(0) = 0$. Inoltre

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}, \qquad f'(0) = -3.$$

Poi, essendo

$$F_{xx}(x,y) = y^2 e^{xy}, \quad F_{xy}(x,y) = e^{xy}(1 + xy), \quad F_{yy}(x,y) = x^2 e^{xy},$$

sopprimendo per semplicità gli argomenti $(x, f(x))$ si ha

$$f''(x) = -\frac{[F_{xx} + F_{xy}f'(x)]F_y - F_x[F_{yx} + F_{yy}f'(x)]}{F_y^2}, \qquad f''(0) = -6,$$

e dunque il polinomio di Taylor di f di centro 0 e grado 2 è

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = -3x - 3x^2.$$

Esercizio 3 Cominciamo a risolvere l'equazione omogenea. L'equazione caratteristica è

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0;$$

Cercando soluzioni intere, si vede subito che vi è la soluzione $\lambda = 1$, da cui dividendo per il fattore $(\lambda - 1)$ ci si riduce a

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 :$$

le radici di questa equazione sono $1 \pm i$. La teoria ci dice che l'integrale generale dell'equazione omogenea ha la forma

$$c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t + c_3 e^t, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}.$$

Poiché $\lambda = i$ non è radice dell'equazione caratteristica, possiamo cercare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea della forma

$$A \cos t + B \sin t.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene

$$(3B + A)\cos t + (B - 3A)\sin t = \cos t,$$

da cui

$$3B + A = 1, \qquad B - 3A = 0$$

e quindi

$$A = \frac{1}{10}, \qquad B = \frac{3}{10};$$

dunque la soluzione particolare è

$$\frac{1}{10}\cos t + \frac{3}{10}\sin t.$$

In definitiva l'integrale generale dell'equazione non omogenea è dato da

$$u(t) = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t + c_3 e^t + \frac{1}{10}\cos t + \frac{3}{10}\sin t, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C},$$

da cui, facilmente,

$$u'(t) = (c_1 + c_2)e^t \cos t + (c_2 - c_1)e^t \sin t + c_3 e^t - \frac{1}{10}\sin t + \frac{3}{10}\cos t,$$

$$u''(t) = 2c_2 e^t \cos t - 2c_1 e^t \sin t + c_3 e^t - \frac{1}{10}\cos t - \frac{3}{10}\sin t.$$

Imponendo le condizioni iniziali si trova

$$\begin{cases} 2 = u(\pi) = -c_1 e^\pi + c_3 e^\pi - \frac{1}{10} \\ 0 = u'(\pi) = -(c_1 + c_2)e^\pi + c_3 e^\pi - \frac{3}{10} \\ 0 = u''(\pi) = -2c_2 e^\pi + c_3 e^\pi + \frac{1}{10}\,, \end{cases}$$

e questo sistema ha le soluzioni

$$c_1 = \frac{7}{5}e^{-\pi}, \quad c_2 = \frac{9}{5}e^{-\pi}, \quad c_3 = \frac{7}{2}e^{-\pi}.$$

Si conclude che la soluzione del problema di Cauchy assegnato è la funzione

$$u(t) = \frac{7}{5}e^{t-\pi}\cos t + \frac{9}{5}e^{t-\pi}\sin t + \frac{7}{2}e^{t-\pi} + \frac{1}{10}\cos t + \frac{3}{10}\sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Prova scritta del 7 gennaio 2010

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$F(x, y) = x\,e^y + y\,e^x.$$

(i) Verificare che in un intorno del punto $(0, 0)$ sono verificate le ipotesi del teorema delle funzioni implicite.

(ii) Analizzare l'insieme degli zeri di F in un intorno di $(0, 0)$ e tracciarne un grafico approssimato.

(iii) Dimostrare che esistono $\delta > 0$ ed un'unica funzione $g :]-\delta, +\infty[\to \mathbb{R}$, di classe C^∞, tale che per ogni $x > -\delta$ risulti $F(x, g(x)) = 0$.

(iv) Tracciare un grafico approssimato della funzione g.

Esercizio 2 Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(x - \frac{(-1)^n}{5} \right)^n,$$

determinare:

(i) l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}$ nei quali la serie converge assolutamente;

(ii) l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}$ nei quali la serie converge;

(iii) i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ nei quali la serie converge totalmente;

(iv) la somma della serie nei punti in cui essa converge.

Esercizio 3 Determianare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$F(x,y) = \frac{x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} - x^2 - 2y$$

sul dominio

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \ x \ge 0, \ y \ge 0\}.$$

Esercizio 4 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''' - u'' - 5u' - 3u = e^{3t} + t \\ u(0) = -4/9 \\ u'(0) = 2/3 \\ u''(0) = 0. \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione F è di classe C^∞ e $F(0,0) = 0$. Inoltre

$$F_x(x,y) = e^y + y\, e^x, \qquad F_y(x,y) = x\, e^y + e^x,$$

quindi $F_x(0,0) = 1$ e $F_y(0,0) = 1$: le ipotesi del teorema del Dini sono verificate e, in particolare, esistono $\delta > 0$ ed un'unica funzione $g :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$, di classe C^∞, tale che

$$F(x, g(x)) = 0 \qquad \forall x \in]-\delta, \delta[.$$

Si ha

$$g(0)=0, \qquad g'(0)=-\frac{F_x(0,0)}{F_y(0,0)}=-1.$$

Più in generale

$$g'(x)=-\frac{F_x(x,g(x))}{F_y(x,g(x))} \qquad \forall x\in]-\delta,\delta[,$$

da cui, sempre per $x\in]-\delta,\delta[$,

$$\begin{aligned} g''(x) \;=\; & -\frac{1}{F_y(x,g(x))^2}\Big[\Big(F_{xx}(x,g(x))+F_{xy}(x,g(x))g'(x)\Big)F_y(x,g(x)) - \\ & \qquad -F_x(x,g(x))\Big(F_{yx}(x,g(x))+F_{yy}(x,g(x))g'(x)\Big)\Big]; \end{aligned}$$

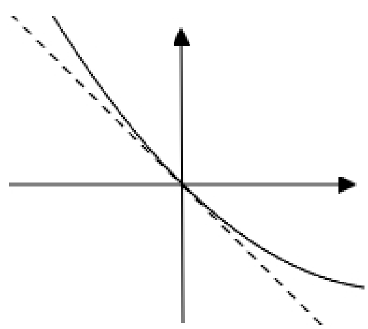
Inoltre, essendo

$$F_{xx}(x,y)=y\,e^x, \quad F_{xy}(x,y)=e^y+e^x, \quad F_{yy}(x,y)=x\,e^y,$$

si ricava $F_{xx}(0,0)=0$, $F_{xy}(0,0)=4$, $F_{yy}(0,0)=0$, da cui $g''(0)=4$, Perciò la funzione implicita g ha lo sviluppo di Taylor

$$g(x)=-x+2x^2+\mathrm{o}(x^2) \qquad \text{per } x\to 0.$$

Un grafico approssimato di g in un intorno di 0 è riportato qui sotto.



Analizziamo ora la situazione per $x>0$. Fissato $x>0$, la funzione $y\mapsto F(x,y)$ verifica

$$\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=-\infty, \qquad \lim_{y\to\infty}F(x,y)=+\infty.$$

Qundi, per ogni $x > 0$ esiste un unico punto $g(x) \in \mathbb{R}$ tale che $F(x, g(x)) = 0$; si ha anche $g(x) < 0$, essendo $F(x, 0) = x > 0$. L'estensione di g così ottenuta è di classe C^∞, perché il teorema del Dini vale in ogni punto (x, y) con $x > 0$ (nel quale $F(x, y) = 0$).
Dall'identità $x\, e^{g(x)} + g(x)\, e^x = 0$ segue, derivando,

$$0 = e^g(x) + x\, e^{g(x)} g'(x) + g'(x)\, e^x + g(x)\, e^x,$$

da cui

$$g'(x) = -\frac{e^{g(x)} + g(x)\, e^x}{x\, e^{g(x)} + e^x};$$

dato che $x\, e^{g(x)} = -g(x)\, e^x$ otteniamo

$$g'(x) = -\frac{e^{g(x)} + g(x)\, e^x}{x\, e^{g(x)} + e^x} = \frac{e^{g(x)} - x\, e^{g(x)}}{x\, e^{g(x)} + e^x} = e^{g(x)}\, \frac{x - 1}{x\, e^{g(x)} + e^x}\,.$$

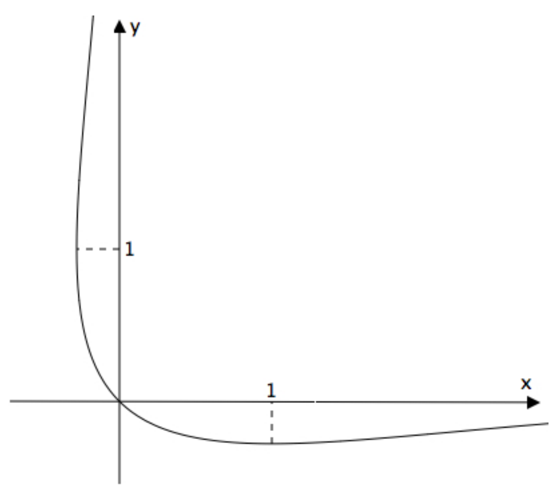
Perciò g decresce in $[0, 1]$ e cresce in $[1, \infty[$. Il minimo $g(1)$ è compreso fra -1 e 0, in quanto $F(1, -1) = e^{-1} - e < 0$. Inoltre, esiste il limte di g a $+\infty$: ma essendo

$$|g(x)| = | - x\, e^{-x} e^{g(x)}| \le x\, e^{-x} \qquad \forall x \ge 0,$$

si ottiene

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0.$$

Infine si può osservare che $F(x, y) = F(y, x)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, quindi l'insieme $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ è simmetrico rispetto alla bisettrice $y = x$. Pertanto un disegno approssimativo di Z è il seguente:



Esercizio 2 La condizione necessaria per la convergenza della serie è che $a_n \to 0$ per $n \to \infty$. Dato che

$$a_n = \begin{cases} \left(x - \frac{1}{5}\right)^n & \text{se } n \text{ è pari} \\ \left(x + \frac{1}{5}\right)^n & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

occorre che

$$\lim_{n\to\infty} \left(x - \frac{1}{5}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(x + \frac{1}{5}\right)^n = 0,$$

il che avviene se e solo se

$$x \in \left]-\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right[\cap \left]-\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right[= \left]-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right[.$$

Dunque la serie non converge se $|x| \geq \frac{4}{5}$: precisamente, se $x \geq \frac{4}{5}$ essa diverge a $+\infty$, essendo a termini positivi, mentre se $x < -\frac{4}{5}$ essa è indeterminata, essendo a segni alterni con termine generale non infinitesimo.
Invece se $|x| < \frac{4}{5}$ la serie converge assolutamente, in quanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| x - \frac{(-1)^n}{5} \right|^n = \sum_{k=0}^{\infty} \left| x - \frac{1}{5} \right|^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \left| x + \frac{1}{5} \right|^{2k+1} < \infty$$

trattandosi di due serie geometriche con ragione minore di 1.
La convergenza sarà totale ed uniforme in ogni intervallo della forma $[-\delta, \delta]$ con $0 < \delta < \frac{4}{5}$.
La somma della serie si calcola osservando che per la somma parziale S_{2n} possiamo scrivere

$$S_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{1}{5}\right)^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(x + \frac{1}{5}\right)^{2k+1},$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(x - \frac{1}{5}\right)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(x + \frac{1}{5}\right)^{2k+1} = \frac{1}{1 - \left(x - \frac{1}{5}\right)^2} + \frac{x - \frac{1}{5}}{1 - \left(x + \frac{1}{5}\right)^2}.$$

Esercizio 3 Cerchiamo anzitutto eventuali punti stazionari interni al dominio Ω. Il sistema

$$\nabla F(x, y) = \mathbf{0}$$

diventa, con facili calcoli,

$$\begin{cases} 2x\left[\dfrac{3y^2}{(x^2+y^2)^2}-1\right]=0 \\ -2\left[\dfrac{3x^2y}{(x^2+y^2)^2}-1\right]=0, \end{cases}$$

e dato che $x, y > 0$, la seconda equazione non ha soluzioni e quindi non ci sono punti stazionari interni a Ω.
Cerchiamo i punti stazionari vincolati sulla frontiera di Ω. Essa è fatta di quattro pezzi:

$$\Gamma_1: \quad x^2+y^2=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0;$$

$$\Gamma_2: \quad y=0,\ 1\leq x\leq 2;$$

$$\Gamma_3: \quad x^2+y^2=4,\ x\geq 0,\ y\geq 0;$$

$$\Gamma_4: \quad x=0,\ 1\leq y\leq 2.$$

La $F|_{\Gamma_1}$ è descritta dalla funzione

$$\begin{aligned} g_1(\vartheta) &= F(\cos\vartheta,\sin\vartheta)=\cos^2\vartheta-2\sin^2\vartheta-\cos^2\vartheta-2\sin\vartheta= \\ &= -2\sin^2\vartheta-2\sin\vartheta, \quad \vartheta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]; \end{aligned}$$

poiché $g_1'(\vartheta)=-4\sin\vartheta\cos\vartheta-2\cos\vartheta<0$ all'interno di tale intervallo, gli unici punti da considerare sono gli estremi di Γ_1, nei quali si ha

$$F(1,0)=0, \qquad F(0,1)=-4.$$

La $F|_{\Gamma_2}$ è descritta dalla funzione

$$g_2(x)=F(x,0)=1-x^2, \qquad x\in[1,2];$$

chiaramente g_2 è decrescente in tale intervallo, quindi gli unici punti da considerare sono gli estremi di Γ_2, nei quali si ha

$$F(1,0)=0, \qquad F(2,0)=-3.$$

La $F|_{\Gamma_3}$ è descritta dalla funzione

$$\begin{aligned} g_3(\vartheta) &= F(2\cos\vartheta,2\sin\vartheta)=\cos^2\vartheta-2\sin^2\vartheta-4\cos^2\vartheta-4\sin\vartheta= \\ &= \sin^2\vartheta-4\sin\vartheta-3, \quad \vartheta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]; \end{aligned}$$

poiché $g_3'(\vartheta) = 2\sin\vartheta\cos\vartheta - 4\cos\vartheta = (2\sin\vartheta - 2)\cos\vartheta < 0$ all'interno di tale intervallo, gli unici punti da considerare sono gli estremi di Γ_3, nei quali si ha

$$F(2,0) = -6, \qquad F(0,2) = -6.$$

Infine la $F|_{\Gamma_4}$ è descritta dalla funzione

$$g_4(x) = F(0,y) = -2 - 2y, \qquad y \in [1,2];$$

chiaramente g_2 è decrescente in tale intervallo, quindi gli unici punti da considerare sono gli estremi di Γ_4, nei quali si ha

$$F(0,2) = -6, \qquad F(0,1) = -4.$$

Si conclude allora che

$$\max_{\overline{\Omega}} F = F(1,0) = 0, \qquad \min_{\overline{\Omega}} F = F(0,2) = -6.$$

Esercizio 4 Cominciamo a risolvere l'equazione omogenea. l'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0;$$

cercandone soluzioni intere si ottengono facilmente le radici $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$ (doppia). L'integrale generale dell'equazione omogenea è dunque

$$V_0 = \{c_1\, e^{3t} + c_2\, e^{-t} + c_3\, t\, e^{-t},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}\}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare v dell'equazione non omogenea. Tenuto conto dalla forma del secondo membro, cerchiamo v del tipo

$$v(t) = at\, e^{3t} + bt + c,$$

con a, b, c costanti da determinare. Notando che

$$v'(t) = 3at\, e^{3t} + a\, e^{3t} + b,$$

$$v''(t) = 9at\, e^{3t} + 6a\, e^{3t},$$

$$v'''(t) = 27at\, e^{3t} + 27a\, e^{3t},$$

ed imponendo che v sia soluzione, si ottiene

$$\begin{aligned} e^{3t} + t &= (27a - 9a - 15a - 3a)t\, e3t + (27a - 6a - 5a)e^{3t} - 3bt - b - 3c = \\ &= 16a\, e^{3t} - 3bt - (b + 3c), \end{aligned}$$

da cui si ricava il sistema

$$\begin{cases} 16a = 1 \\ -3b = 1 \\ 5b + 3c = 0. \end{cases}$$

Si vede facilmente che la soluzione di questo sistema è

$$a = \frac{1}{16}\,, \qquad b = -\frac{1}{3}\,, \qquad c = \frac{5}{9}\,.$$

l'integrale generale dell'equazione non omogenea è dunque

$$V = \left\{ c_1\, e^{3t} + c_2\, e^{-t} + c_3\, t\, e^{-t} + \frac{1}{16}\, t\, e^{3t} - \frac{1}{3}\, t + \frac{5}{9}\,,\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Cerchiamo infine la soluzione del problema di Cauchy. Per il generico elemento u di V risulta

$$u(t) = c_1\, e^{3t} + c_2\, e^{-t} + c_3\, t\, e^{-t} + \frac{1}{16}\, t\, e^{3t} - \frac{1}{3}\, t + \frac{5}{9}\,.$$

$$u'(t) = 3c_1\, e^{3t} - c_2\, e^{-t} + c_3\, e^{-t} - c_3\, t\, e^{-t} + \frac{1}{16}\, e^{3t} + \frac{3}{16}\, t\, e^{3t} - \frac{1}{3}\,,$$

$$u''(t) = 9c_1\, e^{3t} + c_2\, e^{-t} - 2c_3\, e^{-t} + c_3 t\, e^{-t} + \frac{3}{8}\, e^{3t} + \frac{9}{16}\, t\, e^{3t}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} -\frac{4}{9} &= u(0) = c_1 + c_2 + \frac{5}{9}\,, \\ \frac{2}{3} &= u'(0) = 3c_1 - c_2 + c_3 + \frac{1}{16} - \frac{1}{3}\,, \\ 0 &= u''(0) = 9c_1 + c_2 - 2c_3 + \frac{3}{8}\,. \end{aligned}$$

Si ha dunque il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -1 \\ 3c_1 - c_2 + c_3 = \dfrac{15}{16} \\ 9c_1 + c_2 - 2c_3 = -\dfrac{3}{8}\,, \end{cases}$$

Dopo facili calcoli si trova la soluzione

$$c_1 = \frac{1}{32}\,, \qquad c_2 = -\frac{33}{32}\,, \qquad c_3 = -\frac{3}{16}\,.$$

La soluzione del problema di Cauchy è in definitiva la funzione

$$u(t) = \frac{1}{32}\,e^{3t} - \frac{33}{32}\,e^{-t} - \frac{3}{16}\,t\,e^{-t} + \frac{1}{16}\,t\,e^{3t} - \frac{1}{3}\,t + \frac{5}{9}\,.$$

Prova scritta del 4 febbraio 2010

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$G(x,y) = \begin{cases} xy\,e^{-|x|}\,\ln|y| & \text{se } x \in \mathbb{R},\ y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R},\ y = 0. \end{cases}$$

(i) Si verifichi che G è una funzione continua in $\mathbb{R}^2$.

(ii) Posto $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |y| \leq 3\}$, determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativo, sia liberi che vincolati, di G in Ω.

(iii) Stabilire se G ha massimo assoluto o minimo assoluto in Ω.

Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$F(x,y) = x - y - \arctan x - \arctan y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

e si definisca

$$Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ F(x,y) = 0\}.$$

(i) Verificare che in un intorno del punto $(0,0)$ sono verificate le ipotesi del teorema delle funzioni implicite.

(ii) Provare che l'insieme Z è il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞.

(iii) Descrivere qualitativamente il grafico della funzione f.

Esercizio 3 Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $[a,b]$ un intervallo compatto di $\mathbb{R}$. Si provi che se f_n, f sono funzioni continue su $[a,b]$ tali che $f_n \to f$ uniformemente in $[a,b]$, allora $g \circ f_n \to g \circ f$ uniformemente in $[a,b]$.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Le uniche verifiche da fare riguardano i punti della forma $(x_0, 0)$. Dato che

$$\lim_{y\to 0} y \ln|y| = 0,$$

fissato $\varepsilon > 0$ si ha per $|x - x_0| \leq \delta$ e $|y| \leq \delta$, con $\delta \in]0, 1[$ opportuno:

$$|G(x, y) - G(x_0, 0)| = |xy\, e^{-|x|} \ln|y|| \leq (|x_0| + \delta)\varepsilon \leq (|x_0| + 1)\varepsilon,$$

da cui segue la continuità di G in $(x_0, 0)$.

(ii) La funzione G non è differenziabile nei punti $(x_0, 0)$, cioè sulla retta $y = 0$, ma lungo tale retta essa è identicamente nulla. Inoltre, dato che G assume valori sia positivi che negativi in un arbitrario intorno di ciascun punto $(x_0, 0)$, questi punti non ci interessano.
Cerchiamo eventuali punti stazionari interni a Ω ed esterni alla retta $y = 0$. Si ha

$$G_x(x, y) = \begin{cases} y\, \ln|y|\,(1 - x)e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ y\, \ln|y|\,(1 + x)e^{x} & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad G_y(x, y) = x\, e^{-|x|}(1 + \ln|y|),$$

da cui segue facilmente che le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} G_x(x, y) = 0 \\ G_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

sono

$$(1, e^{-1}), \quad (1, -e^{-1}), \quad (-1, e^{-1}), \quad (-1, -e^{-1}), \quad (0, 1), \quad (0, -1).$$

Dato che

$$G_{xx}(x, y) = \begin{cases} y\, \ln|y|\,(-2 + x)e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ y\, \ln|y|\,(2 + x)e^{x} & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

$$G_{xy}(x, y) = G_{yx}(x, y) = \begin{cases} (1 + \ln|y|)(1 - x)e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ (1 + \ln|y|)(1 + x)e^{x} & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

$$G_{yy}(x, y) = x\, y^{-1} e^{-|x|},$$

si ottengono le seguenti matrici Hessiane:

$$\mathbf{H}(1,e^{-1}) = \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}(1,-e^{-1}) = \begin{pmatrix} -e^{-2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}(-1,e^{-1}) = \begin{pmatrix} -e^{-2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}(-1,-e^{-1}) = \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto: $(1,e^{-1})$ è punto di minimo relativo, con $G(1,e^{-1}) = -e^{-2}$; $(1,-e^{-1})$ è punto di massimo relativo, con $G(1,-e^{-1}) = e^{-2}$; $(-1,e^{-1})$ è punto di massimo relativo, con $G(-1,e^{-1}) = e^{-2}$; $(-1,-e^{-1})$ è punto di minimo relativo, con $G(-1,-e^{-1}) = -e^{-2}$; infine $(0,1)$ e $(0,-1)$ sono punti di sella, con $G(0,1) = G(0,-1) = 0$, perché le corrispondenti Hessiane hanno autovalori ± 1.
Analizziamo la funzione sulla frontiera di Ω, costituita dalle due rette $y = 3$ e $y = -3$. Possiamo limitarci allo studio per $y = 3$, dato che per ogni ascissa x si ha $G(x,-3) = -G(x,3)$. La G ristretta alle retta $y = 3$ è data dalla funzione

$$g(x) = G(x,3) = 3\ln 3\, x\, e^{-|x|}, \qquad x \in \mathbb{R} :$$

si tratta di una funzione dispari, infinitesima a $\pm\infty$, che per $x > 0$ ha massimo quando $\frac{d}{dx}(xe^{-x}) = 0$, cioè per $x = 1$, e si ha $g(1) = 3\ln 3\, e^{-3}$; di conseguenza g ha minimo per $x = -1$, con $g(-1) = -3\ln 3\, e^{-3}$. Quindi $(1,3)$ e $(-1,-3)$ sono punti di massimo vincolato per G, con $G(1,3) = G(-1,-3) = 3\,\ln 3\, e^{-1}$, mentre $(-1,3)$ e $(1,-3)$ sono punti di minimo vincolato per G, con $G(-1,3) = G(1,-3) = -3\,\ln 3\, e^{-1}$.
(iii) La funzione G è infinitesima per $x \to \pm\infty$ uniformemente rispetto a y: infatti

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sup_{|y|\le 3} |G(x,y)| \le 3\ln 3 \lim_{x\to\pm\infty} |x|e^{-|x|} = 0.$$

Quindi essa ha massimo e minimo assoluti su Ω e tali punti sono necessariamente fra quelli già selezionati. Notiamo che si ha $\ln 3 > 1 > e/3$, da cui

$$G(1,3) = 3\ln 3\, e^{-3} > e^{-2} = G(1,-e^{-1})$$

e di conseguenza

$$G(1,-3) = -3\ln 3\, e^{-3} < -e^{-2} = G(1,e^{-1});$$

dunque, malgrado Ω non sia un insieme compatto,

$$\exists \max_{\Omega} G = G(1,3) = G(-1,-3) = 3\ln 3\, e^{-3},$$

$$\exists \min_{\Omega} G = G(-1,3) = G(1,-3) = -3\ln 3\, e^{-3}.$$

Esercizio 2 (i) La funzione F è di classe C^∞ e il punto $(0,0)$ appartiene a Z. Dato che

$$F_x(x,y) = 1 - \frac{1}{1+x^2}\,, \qquad F_y(x,y) = -1 - \frac{1}{1+y^2}\,,$$

si ha $F_x(0,0) = 0$ ma $F_y(0,0) = -2$, cosicché il teorema del Dini è applicabile. In particolare, esistono due intorni U, V di 0 ed una funzione $f : U \to V$, di classe C^∞, tale che

$$(x,y) \in Z \cap (U \times V) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = f(x), \quad x \in U.$$

(ii) Per ogni fissato $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$F_y(x,y) = -1 - \frac{1}{1+y^2} \le -1 < 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R},$$

per cui $y \mapsto F(x,y)$ è strettamente decrescente in $\mathbb{R}$, con

$$\lim_{y\to+\infty} F(x,y) = -\infty, \qquad \lim_{y\to-\infty} F(x,y) = +\infty.$$

Quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un unico $y \in \mathbb{R}$, che battezziamo $f(x)$, tale che $F(x, f(x)) = 0$ (chiaramente la funzione f estende quella precedentemente costruita nell'intorno U di 0). Si ha

$$F(x,0) = x - \arctan x \begin{cases} > 0 & \text{se } x > 0 \\ < 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

da cui, per la decrescenza di $F(x,\cdot)$, si ha $f(x) > 0$ se $x > 0$ e $f(x) < 0$ se $x < 0$. Inoltre, essendo $F_x(x,y) > 0$ per $x \neq 0$,

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Poi, essendo

$$F_{xx}(x,y) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,, \quad F_{xy}(x,y) = F_{yx}(x,y) = 0, \quad F_{yy}(x,y) = \frac{2y}{(1+y^2)^2}\,,$$

si ottiene

$$f''(x) = -\frac{(F_{xx} + F_{xy}f')F_y - F_x(F_{yx} + F_{yy}f')}{(F_y)^2} = -\frac{F_{xx}}{F_y} + \frac{F_x F_{yy} f'}{(F_y)^2},$$

e si riconosce facilmente che $f''(x) > 0$ per $x > 0$ e $f''(x) < 0$ per $x < 0$. Quindi f è crescente e convessa sulla semiretta positiva, crescente e concava sulla semiretta negativa.

Infine dalla relazione

$$0 = F(x, f(x)) = x - f(x) - \arctan x - \arctan f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

segue che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty;$$

inoltre

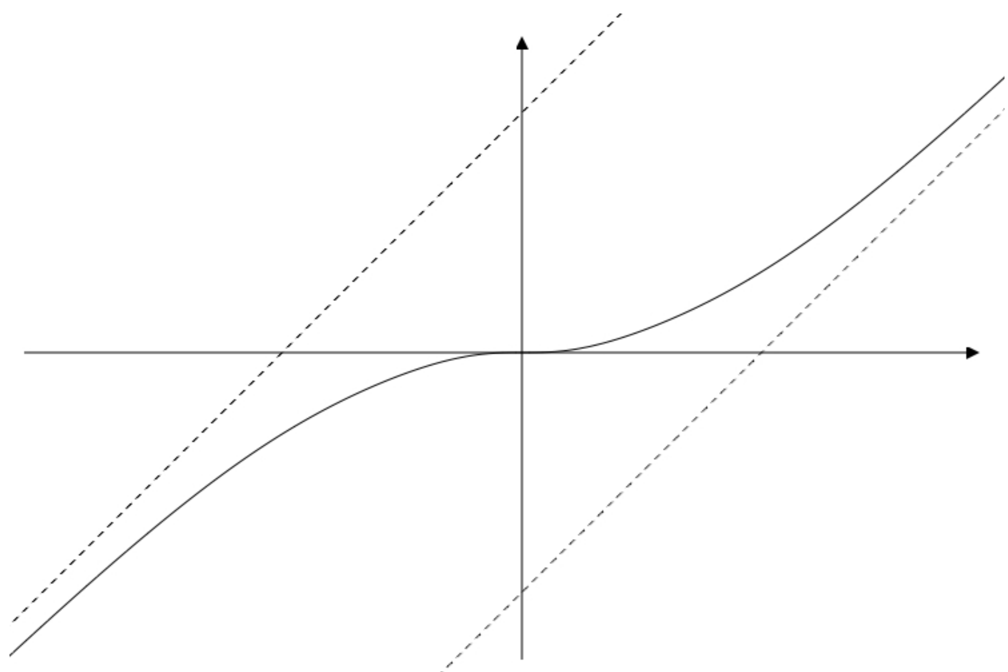
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

e infine

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = -\pi, \qquad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - x] = \pi,$$

cosicché f ha gli asintoti obliqui $y = x - \pi$ per $x \to +\infty$ e $y = x + \pi$ per $x \to -\infty$.

Il grafico di f è dunque approssimativamente il seguente:



Esercizio 3 Le funzioni f_n sono equilimitate in $[a,b]$: infatti, fissato $\varepsilon = 1$ esiste ν tale che

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < 1 \qquad \forall n \geq \nu,$$

da cui

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| \leq 1 + \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \qquad \forall n \geq \nu.$$

Ne segue che esiste una costante K tale che

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| \leq K \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Adesso osserviamo che g è uniformemente continua sul compatto $[-K,K]$; dunque, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$x, y \in [-K,K], \quad |x-y| \leq \delta_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon.$$

Scelto allora $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \delta_\varepsilon \qquad \forall n \geq \nu_\varepsilon\,,$$

deduciamo

$$\sup_{x\in[a,b]} |g(f_n(x)) - g(f(x))| \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq \nu_\varepsilon\,,$$

e dunque, per definizione, $g \circ f_n \to g \circ f$ in $[a,b]$.

Prova scritta del 18 giugno 2010

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$F(x,y,z) = xy - xz - yz + x + y + z, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Determinare, se esistono, i punti di massimo e minimo relativo per F.

(ii) Posto

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\},$$

trovare il massimo ed il minimo di F su K.

Esercizio 2 Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt[n]{1+x^2}}{n+|x|}\ e^{-nx}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Per quali valori di x la serie converge?

(ii) In quali sottointervalli di $\mathbb{R}$ la serie converge totalmente, oppure uniformemente?

Esercizio 3 Si consideri la funzione

$$G(x,y) = y^5 + y + x^3 + x^2 + 2x, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Verificare che in un intorno di $(0,0)$ il teorema del Dini è applicabile.

(ii) Analizzare l'insieme $Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : G(x,y) = 0\}$ nell'intorno del punto $(0,0)$, tracciandone un grafico approssimato.

(iii) Provare che esiste un'unica funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $G(x, g(x)) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(iv) Dimostrare che $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

Esercizio 4 Determinare tutte le soluzioni del sistema differenziale

$$\begin{cases} u' = u + 3v - 1 \\ v' = -2u - v + e^{2t}, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 (i) La funzione F appartiene a $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Si ha inoltre

$$F_x(x,y,z) = y - z + 1, \quad F_y(x,y,z) = x - z + 1, \quad F_z(x,y,z) = -x - y + 1.$$

Quindi il gradiente di F è nullo se e solo se

$$\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \\ -x - y + 1 = 0, \end{cases}$$

ossia se e solo se $(x,y,z) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$; in tale punto risulta

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{4}\,.$$

Calcoliamo la matrice Hessiana: si ha $F_{xx} = F_{yy} = F_{zz} = 0$, $F_{xy} = F_{yx} = 1$, $F_{xz} = F_{zx} = F_{yz} = F_{zy} + -1$, da cui

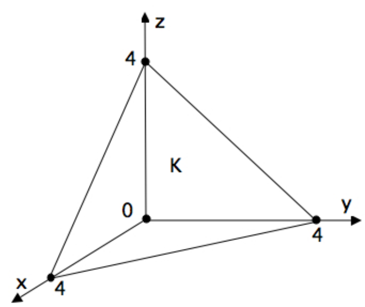
$$\mathbf{H}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo

$$\det(\mathbf{H} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1+\lambda)(-\lambda^2 + \lambda + 2),$$

risulta $\det(\mathbf{H} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ se e solo se $\lambda = -1$ (autovalore doppio) oppure $\lambda = 2$. Dunque $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ è punto di sella. Ne segue che la funzione F non ha punti di massimo né di minimo relativo.

(ii) L'insieme K è il tetraedro illustrato in figura.
Il massimo ed il minimo di F sono necessariamente assunti sul bordo, dato che F ha un solo punto stazionario che è di sella. Consideriamo le facce del tetraedro K:



$$\Sigma_1 = K \cap \{y = 0\}, \quad \Sigma_2 = K \cap \{z = 0\},$$
$$\Sigma_3 = K \cap \{x = 0\}, \quad \Sigma_4 = K \cap \{x + y + z = 4\}.$$

Si ha

$$\begin{cases} \Sigma_1 = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^2 : z \in [0,4],\ x \in [0, 4-z]\}, \\ F|_{\Sigma_1} = -xz + x + z, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma_2 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,4],\ x \in [0, 4-y]\}, \\ F|_{\Sigma_2} = xy + x + y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma_3 = \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,4],\ z \in [0, 4-y]\}, \\ F|_{\Sigma_3} = -yz + y + z, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,4],\ y \in [0, 4-x],\ z = 4 - x - y\}, \\ F|_{\Sigma_4} = xy - xz - yz + 4 = 3xy - 4x + x^2 - 4y + y^2 + 4. \end{cases}$$

Per $F_1 \equiv F|_{\Sigma_1}$ abbiamo:

$$(F_1)_x = -z + 1, \quad (F_1)_z = -x + 1,$$

quindi si trova per F il punto stazionario vincolato $(1,0,1)$, dove $F(1,0,1) = 1$.
Per $F_2 \equiv F|_{\Sigma_2}$ abbiamo:

$$(F_2)_x = y + 1, \quad (F_2)_y = x + 1,$$

quindi si trova per F il punto $(-1,-1,0)$ che non appartiene a Σ_2.
Per $F_3 \equiv F|_{\Sigma_3}$ abbiamo:

$$(F_3)_y = -z + 1, \quad (F_3)_z = -y + 1,$$

quindi si trova per F il punto stazionario vincolato $(0,1,1)$, dove $F(0,1,1) = 1$.
Per $F_4 \equiv F|_{\Sigma_4}$ abbiamo:

$$(F_4)_x = 3y - 4 + 2x, \quad (F_4)_y = 3x - 4 + 2y,$$

quindi si trova per F il punto stazionario vincolato $(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{12}{5})$, nel quale $F(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{12}{5}) = \frac{4}{5}$.
Consideriamo adesso gli spigoli di K:

$$\Gamma_1 = \Sigma_2 \cap \Sigma_3, \quad \Gamma_2 = \Sigma_1 \cap \Sigma_3, \quad \Gamma_3 = \Sigma_1 \cap \Sigma_2,$$
$$\Psi_1 = \Sigma_1 \cap \Sigma_4, \quad \Psi_2 = \Sigma_2 \cap \Sigma_4, \quad \Psi_3 = \Sigma_3 \cap \Sigma_4;$$

si ha

$$\Gamma_1 = \{(0,y,0) : y \in [0,4]\}, \quad F|_{\Gamma_1} = y,$$
$$\Gamma_2 = \{(0,0,z) : z \in [0,4]\}, \quad F|_{\Gamma_2} = z,$$
$$\Gamma_3 = \{(x,0,0) : x \in [0,4]\}, \quad F|_{\Gamma_3} = x,$$
$$\Psi_1 = \{(x,0,z) : x \in [0,4],\ z = 4 - x\}, \quad F|_{\Psi_1} = -4x + x^2 + 4,$$

$$\Psi_2 = \{(x,y,0) : x \in [0,4],\ y = 4-x\}, \quad F|_{\Psi_2} = 4x - x^2 + 4,$$
$$\Psi_3 = \{(0,y,z) : y \in [0,4],\ z = 4-y\}, \quad F|_{\Psi_1} = -4y + y^2 + 4.$$

Le derivate di $F|_{\Gamma_1}$, $F|_{\Gamma_2}$ e $F|_{\Gamma_3}$ non si annullano mai lungo i segmenti corrispondenti (salvo eventualmente negli estremi), quindi non ci sono nuovi punti stazionari vincolati per F. Invece la derivata di $F|_{\Psi_1}$, che è $-4+2x$, si annulla in $x=2$, quindi si trova per F il punto stazionario vincolato $(2,0,2)$ ove si ha $F(2,0,2)=0$. Analogamente, la derivata di $F|_{\Psi_2}$, che è $2x-4$, si annulla in $x=2$, quindi si trova per F il punto stazionario vincolato $(2,2,0)$ ove si ha $F(2,2,0)=8$. Infine, la derivata di $F|_{\Psi_3}$, che è $-4+2y$, si annulla in $y=2$, quindi si trova per F il punto stazionario vincolato $(0,2,2)$ ove si ha $F(0,2,2)=0$.
Restano ancora da considerare i quattro vertici di K, cioè $(4,0,0)$, $(0,4,0)$, $(0,0,4)$ e $(0,0,0)$: si ha

$$F(4,0,0)=4, \quad F(0,4,0)=4, \quad F(0,0,4)=4, \quad F(0,0,0)=0.$$

Tiriamo le somme: dal confronto dei valori di F nei punti trovati, ricaviamo che

$$\max_K F = F(2,2,0) = 8, \qquad \min_K F = F(0,0,0) = F(2,0,2) = F(0,2,2) = 0.$$

Esercizio 2 (i) La serie è a segni alterni: inoltre per $x>0$ il termine generale della serie (senza il fattore $(-1)^n$) è il prodotto di tre funzioni positive e decrescenti, quindi esso è decrescente ed è chiaro che è infinitesimo, grazie alla presenza dell'esponenziale. Il criterio di Leibniz ci dice allora che la serie converge puntualmente per ogni $x>0$. La serie converge evidentemente anche per $x=0$, riducendosi alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
Invece per $x<0$ la serie è indeterminata, essendo a segni alterni e con modulo del termine generale divergente.

(ii) Analizziamo la convergenza totale: Se $\delta>0$, la serie converge totalmente in $[\delta,+\infty[$; infatti, osservato che

$$\sqrt[n]{1+x^2} \le 1+x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

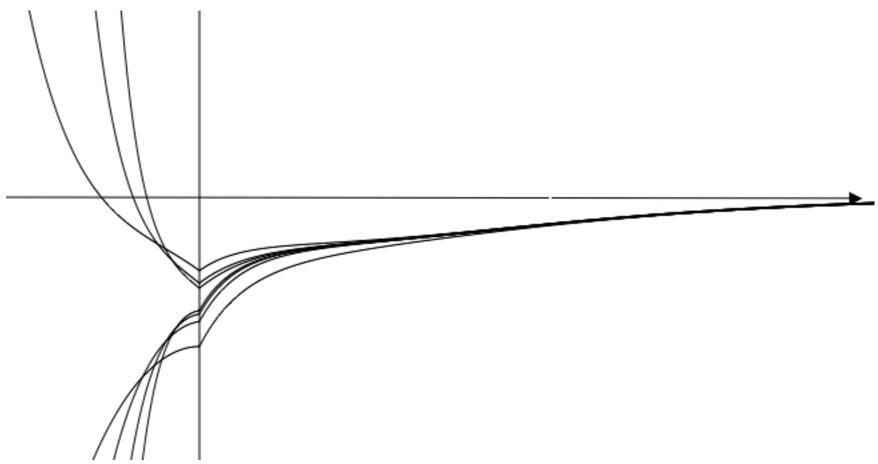
possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\ge\delta} \frac{\sqrt[n]{1+x^2}}{n+|x|}\ e^{-nx} \quad &\le \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\ge\delta}\{(1+x^2)e^{-nx}\} \le \\ &\le \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[e^{-n\delta} + \frac{1}{n^2}\sup_{t\ge 0} t^2 e^{-t}\right] < \infty.\end{aligned}$$

Non c'è convergenza totale in $[0,\infty[$, né in $]0,\infty[$, perché per $x = 0$ ci riduciamo alla serie armonica.
Analizziamo la convergenza uniforme: grazie alla stima del resto fornita dal criterio di Leibniz, si ha

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt[n]{1+x^2}}{n+|x|}\ e^{-nx}\right| \le \left|\frac{\sqrt[N]{1+x^2}}{N+|x|}\ e^{-Nx}\right| \le \frac{1}{N}\sup_{x\ge 0}(1+x^2)e^{-nx} \le \frac{C}{N}\,,$$

e dunque la serie converge uniformemente in $[0,\infty[$.



Esercizio 3 (i)-(ii) La funzione G è di classe C^∞, e si ha

$$G_x(x,y) = 3x^2+2x+2, \qquad G_y(x,y) = 5y^4+1;$$

quindi in $(0,0)$ si ha $G_x(0,0) = 2$, $G_y(0,0) = 1$ e pertanto il teorema del Dini è applicabile. Ne segue che esistono $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ e $g : [-\delta,\delta] \to [-\varepsilon,\varepsilon]$, di classe C^∞, tali che

$$|x|<\delta,\ |y|<\varepsilon, \quad G(x,y)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = g(x).$$

Tale g verifica

$$g(0) = 0, \quad g'(x) = -\frac{3x^2+2x+2}{5g(x)^4+1} \quad \forall x \in [-\delta,\delta],$$

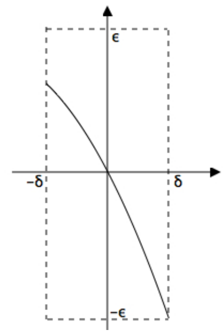
ed in particolare $g'(0) = -2$. Inoltre

$$g''(x) = -\frac{(6x+2)[5g(x)^4+1]-(3x^2+2x+2)[20g(x)^3g'(x)]}{[5g(x)^4+1]^2}\,,$$

da cui $g''(0) = -2$. Pertanto il polinomio di Taylor di grado 2 di g in 0 è

$$P_2(x) = -2x - x^2.$$

Il comportamento della funzione g in un intorno di 0 è dunque del tipo illustrato in figura.



(iii) L'esistenza di g è provata, per ora, su $[-\delta, \delta]$. D'altronde, fissato $x \in \mathbb{R}$, la funzione $y \mapsto G(x,y)$ è strettamente crescente, essendo $G_y(x,y) = 5y^4 + 1 > 0$, ed inoltre

$$\lim_{y\to+\infty} G(x,y) = +\infty, \qquad \lim_{y\to-\infty} G(x,y) = -\infty.$$

Ne segue che, in corrispondenza dell'ascissa x fissata, esiste un unico punto y_x, che battezziamo $g(x)$, tale che $G(x, y_x) = 0$. Tale g è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e corrisponde alla funzione fornita dall'uso del teorema del Dini nel punto (x, y_x), dove per costruzione la G si annulla; quindi g è di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}$.
Notiamo inoltre che $xg(x) < 0$ per ogni $x \neq 0$: infatti, quando $x > 0$ la funzione $y \mapsto G(x,y)$ è positiva per $y = 0$, quindi l'ordinata dove G si annulla deve essere negativa. Al contrario, quando $x < 0$ la funzione $y \mapsto G(x,y)$ è negativa per $y = 0$ (perché $x^3 + x^2 + 2x = x(x^2 + x + 2) = x[(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}]$, quindi l'ordinata dove G si annulla deve essere positiva.
Inoltre, essendo

$$g'(x) = -\frac{3x^2 + 2x + 2}{5g(x)^4 + 1} = -\frac{(\sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + \frac{5}{3}}{5g(x)^4 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

si ha $g'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; quindi g è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$ e pertanto ha limite per $x \to \pm\infty$. Ma, dato che $G(x, g(x)) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$g(x)^5 + g(x) = -(x^3 + x^2 + 2x) \to \begin{cases} +\infty & \text{se } x < 0 \\ -\infty & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

e dunque

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty.$$

Esercizio 4 Analizziamo dapprima il sistema omogeneo, che è a coefficienti costanti. La matrice del sistema è:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si verifica agevolmente che gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono $\lambda_1 = \sqrt{5}\,i$ e $\lambda_2 = -\sqrt{5}\,i$. Per l'autovalore λ_1 si trova, ad esempio, l'autovettore $\mathbf{u}_1 = (-(1+\sqrt{5})i, 2)$, mentre per l'autovalore λ_2 si trova, ad esempio, l'autovettore $\mathbf{u}_2 = (-(1-\sqrt{5})i, 2)$. Quindi le soluzioni del sistema omogeneo sono tutte e sole le funzioni $\mathbf{u}$ della forma

$$\mathbf{u}(t) = c_1 e^{\sqrt{5}it}\mathbf{u}_1 + c_2 e^{-\sqrt{5}it}\mathbf{u}_2\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Cerchiamo adesso una soluzione particolare $\mathbf{w}$ del sistema non omogeneo: dato che il secondo membro ha una forma particolare, invece di applicare la teoria generale conviene cercare $\mathbf{w}$ del tipo

$$\mathbf{w}(t) = \begin{pmatrix} Ae^{2t} + B \\ Ce^{2t} + D \end{pmatrix}.$$

Imponendo che questa $\mathbf{w}$ sia soluzione del sistema, si trovano le condizioni

$$\begin{cases} 2Ae^{2t} = Ae^{2t} + B + 3Ce^{2t} + 3D - 1 \\ 2Ce^{2t} = -2Ae^{2t} - 2B - Ce^{2t} - D + e^{2t}, \end{cases}$$

che equivalgono al sistema algebrico seguente:

$$\begin{cases} -A + 3C = 0 \\ B + 3D - 1 = 0 \\ 3C + 2A = 1 \\ -2B - D = 0. \end{cases}$$

Con facili calcoli si arriva allora a

$$A = \frac{1}{3}\,, \qquad B = -\frac{1}{5}\,, \qquad C = \frac{1}{9}\,, \qquad D = \frac{2}{5}\,.$$

Si conclude che l'insieme delle soluzioni del sistema differenziale dato è la famiglia delle funzioni seguenti:

$$\mathbf{u}(t) = c_1 e^{\sqrt{5}it}\mathbf{u}_1 + c_2 e^{-\sqrt{5}it}\mathbf{u}_2 + \mathbf{w}(t),$$

ove $\mathbf{u}_1 = (-(1+\sqrt{5})i, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (-(1-\sqrt{5})i, 2)$ e $\mathbf{w}(t) = (\frac{1}{3}\,e^{2t} - \frac{1}{5}, \frac{1}{9}\,e^{2t} + \frac{2}{5})$.

Prova scritta del 12 luglio 2010

Esercizio 1 Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione

$$F(x,y) = \arctan(x^2+y^2) - \frac{1}{1+x^2+y^2}, \qquad (x,y) \in D,$$

ove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq 1\}.$$

Esercizio 2 Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\, e^{-\cos^2 nx}}{n^{\frac{3}{2}} \left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Per quali valori di x la serie converge?

(ii) In quali sottointervalli di $\mathbb{R}$ la serie converge totalmente?

(iii) Dimostrare che la serie non converge uniformemente su $\mathbb{R}$.

Esercizio 3 Posto $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$, si definisca la funzione $\mathbf{G} : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ nel modo seguente:

$$\mathbf{G}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz \\ \ln(xyz) - z + 1 \end{pmatrix}, \qquad (x,y,z) \in A.$$

(i) Si verifichi che nel punto $(1,1,1) \in A$ è applicabile il teorema del Dini, e che in particolare in un intorno di tale punto è possibile esprimere le variabili (x,y) in funzione della z.

(ii) Si scriva la retta tangente al luogo $Z = \{(x,y,z) \in A : \mathbf{G}(x,y,z) = \mathbf{0}\}$ nel punto $(1,1,1)$.

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione F è di classe C^∞ su D. Cerchiamo eventuali punti stazionari interni a D. Risulta

$$F_x(x,y) = \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2} + \frac{2x}{(1+x^2+y^2)^2},$$
$$F_y(x,y) = \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2} + \frac{2y}{(1+x^2+y^2)^2},$$

e l'analisi del segno di queste due funzioni è immediata: si riconosce subito che l'unica soluzione del sistema

$$\begin{cases} F_x(x,y) = 0 \\ F_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

è il punto $(0,0)$. In tale punto risulta

$$F(0,0) = -1,$$

ed essendo interessati soltanto alla ricerca dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore di F, è inutile scoprire se $(0,0)$ sia punto di massimo relativo, di minimo relativo o di sella.
Analizziamo la funzione F sul bordo di D: dato che F è pari nella variabile y, si ha $F(x,-1) = F(x,1)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi basta analizzare il comportamento della funzione

$$F(x,1) = \arctan(1+x^2) - \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si ha anzitutto

$$\lim_{x\to\pm\infty} F(x,1) = \frac{\pi}{2},$$

inoltre

$$\frac{d}{dx}F(x,1) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2} + \frac{2x}{1+x^4}$$

ed è chiaro che tale derivata è nulla solo in $x=0$: in tale punto si ha

$$F(0,1) = \frac{\pi}{4} - 1.$$

Dal confronto dei valori significativi trovati si ricava che

$$\sup_D F = \frac{\pi}{2} = \lim_{x\to\pm\infty} F(x,1), \qquad \inf_D F = -1 = \min_D F = F(0,0).$$

Esercizio 2 (i) La serie converge puntualmente ed assolutamente in $\mathbb{R}$: infatti se $x=0$ la somma è 0, mentre se $x \neq 0$ la serie dei valori assoluti converge per confronto con la serie $\sum \frac{1}{|x|^3\, n^{3/2}}$.

(ii) Per ogni $\delta > 0$ si ha convergenza totale in $]-\infty,-\delta] \cup [\delta,+\infty[$, poiché

$$\frac{|x|\, e^{-\cos^2 nx}}{n^{\frac{3}{2}}\left(x^2+\frac{1}{n}\right)^2} \le \frac{1}{\delta^3\, n^{3/2}} \qquad \forall x \in]-\infty,-\delta] \cup [\delta,+\infty[\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Non si può avere più di così: infatti, detto $f_n(x)$ il termine generale della serie, si ha

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| \geq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{4}\, e^{-\cos^2\sqrt{n}} \geq \frac{1}{4e}\,,$$

quindi non si ha convergenza totale su $\mathbb{R}$.

(iii) Ovviamente la serie converge uniformemente in ogni insieme del tipo $]-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty[$, con $\delta>0$. Vediamo se c'è convergenza uniforme su $\mathbb{R}$: fissato $N\in\mathbb{N}^+$, si ha

$$\begin{aligned}\sup_{\mathbb{R}}\left|\sum_{n=N}^{\infty} f_n(x)\right| &\geq \left|\sum_{n=N}^{\infty} f_n\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right| = \sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{N}}\frac{e^{-\cos^2\frac{n}{\sqrt{N}}}}{n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{n}\right)^2} \geq \\ &\geq \sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{N}}\frac{e^{-1}}{n^{\frac{3}{2}}\frac{4}{N^2}} = \frac{N^{3/2}}{4e}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}};\end{aligned}$$

d'altronde

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}} \geq \int_N^{\infty}\frac{1}{x^{3/2}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{N}}\,,$$

e dunque

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{\mathbb{R}}\left|\sum_{n=N}^{\infty} f_n(x)\right| \geq \lim_{N\to\infty}\frac{N^{3/2}}{4e}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}} \geq \lim_{N\to\infty}\frac{N}{2e} = +\infty;$$

pertanto non si ha convergenza uniforme su $\mathbb{R}$.

Esercizio 3 (i) La funzione $\mathbf{G}$ è di classe C^∞ e si annulla in $(1,1,1)$. Inoltre, dette f,g le componenti scalari di $\mathbf{G}$, si ha

$$\begin{aligned}&f_x(x,y,z) = -2x-2z, \quad f_y(x,y,z)=4y, \quad f_z(x,y,z)=2z-2x,\\ &g_x(x,y,z)=1/x, \quad g_y(x,y,z)=1/y, \quad g_z(x,y,z)=-1+1/z.\end{aligned}$$

Dunque la matrice Jacobiana di $\mathbf{G}$ nel punto $(1,1,1)$ è

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essa ha rango 2, con l'unico minore $\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}$ non singolare. Pertanto il teorema del Dini è applicabile: esiste un intorno aperto $U\times V\times W$ di $(1,1,1)$

ed esistono due funzioni $\varphi : W \to U$ e $\psi : W \to V$, di classe C^∞, tali che

$$(x, y, z) \in U \times V \times W, \quad \mathbf{G}(x, y, z) = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = \varphi(z) \\ y = \psi(z), \end{cases} \quad z \in W.$$

In particolare, $\varphi(1) = 1$ e $\psi(1) = 1$.

(ii) La funzione implicita $\boldsymbol{\gamma} = (\varphi, \psi) : W \to U \times V$ ha come derivata il vettore

$$\boldsymbol{\gamma}'(z) = \begin{pmatrix} \varphi'(z) \\ \psi'(z) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_z \\ g_z \end{pmatrix},$$

ove tutte le funzioni sono calcolate in $(\varphi(z), \psi(z), z)$. In particolare

$$\boldsymbol{\gamma}'(1) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ossia $\boldsymbol{\gamma}'(1) = \mathbf{0}$. La retta tangente a Z nel punto $(1, 1, 1)$ è descritta in generale dal sistema

$$\begin{pmatrix} f_x(1,1,1) & f_y(1,1,1) \\ g_x(1,1,1) & g_y(1,1,1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_z(1,1,1) \\ g_z(1,1,1) \end{pmatrix} (z - 1) = 0$$

che nel nostro caso è dato da

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} (z - 1) = 0.$$

Dunque tale retta si esprime come

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

ed è dunque la retta verticale di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Prova scritta dell'8 settembre 2010

Esercizio 1 Si consideri la funzione $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ così definita:

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Trovare i punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali la funzione $\mathbf{F}$ è localmente invertibile con inversa di classe C^1, e scrivere l'inversa.

(ii) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di $\mathbf{F}$ nel punto $(1,1)$ e quella del piano tangente al grafico di $\mathbf{F}^{-1}$ nel punto $(0,2)$.

Esercizio 2 Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di funzioni così definita:

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\ln(e^n + x^n), \qquad x \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

(i) Stabilire se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente, oppure uniformemente.

(ii) La successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge nella norma di $C^1[0,100]$?

Esercizio 3 Determinare l'insieme delle soluzioni del sistema differenziale

$$\begin{cases} u' = u + v + 2e^t \\ v' = v + w \\ w' = -6u + 6w, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 Affinché $\mathbf{F}$ sia localmente invertibile è sufficiente che la sua matrice Jacobiana sia non singolare. Si ha

$$\mathbf{DF}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

e risulta $\det \mathbf{DF}(x,y) = 4(x^2+y^2) \neq 0$ se e solo se $(x,y) \neq (0,0)$. Pertanto la funzione $\mathbf{F}$ è localmente invertibile nell'intorno di ogni punto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Invece $\mathbf{F}$ non è localmente invertibile in alcun intorno di $(0,0)$ perché non è bigettiva: ad esempio, ciascun punto del tipo $(u,0)$ con $u > 0$ ha per controimmagini mediante $\mathbf{F}$ i due punti $(x,y) = (\pm\sqrt{u}, 0)$.

Nell'intorno di ciascun punto $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ la funzione $\mathbf{F}$ è dunque localmente invertibile, e si ha

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = u \\ 2xy = v \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - \frac{v^2}{4x^2} = v \\ y = \frac{v}{2x} \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^4 - 4ux^2 - v^2 = 0 \\ y = \frac{v}{2x} \end{cases}$$

Ne segue facilmente

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = u \\ 2xy = v \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}+u}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2}}. \end{cases}$$

ove i segni sono univocamente determinati da (x_0, y_0): precisamente, è facile rendersi conto che, quando sia x_0 che y_0 sono non nulli, risulta

$$x = \operatorname{sgn}(x_0)\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}+u}{2}}, \qquad y = \operatorname{sgn}(y_0)\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2}}.$$

Se invece uno fra x_0 e y_0, ad esempio x_0, è nullo, allora $y_0 \neq 0$: si ha allora $v_0 = 0$, $u_0 < 0$ (ove $(u_0, v_0) = \mathbf{F}(x_0, y_0)$) e le formule sopra scritte diventano

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}+u}{2}}, \qquad y = \operatorname{sgn}(y_0)\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2}}.$$

con $\operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(y_0)\operatorname{sgn}(v)$. Discorso analogo quando y_0 è nullo e $x_0 \neq 0$: in tal caso

$$x = \operatorname{sgn}(x_0)\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}+u}{2}}, \qquad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2}},$$

con $\operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(x_0)\operatorname{sgn}(v)$.
Il piano tangente al grafico di $\mathbf{F}$ in $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ è dato da

$$\mathbf{w} - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{DF}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

ove $\mathbf{w} = (u, v)$, $\mathbf{x} = (x, y)$; quando $x_0 = y_0 = 1$ si ha

$$\mathbf{F}(1,1) = (0,2), \qquad \mathbf{DF}(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

da cui l'equazione del piano tangente è

$$\begin{cases} u = 2(x-1) - 2(y-1) \\ v - 2 = 2(x-1) + 2(y-1), \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} u = 2(x-y) \\ v = 2(x+y-1). \end{cases}$$

L'equazione del piano tangente al grafico di $\mathbf{F}^{-1}$ in $\mathbf{w}_0 = (u_0, v_0)$ è

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{DF}(\mathbf{x}_0)^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0),$$

cioè, essendo $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} x - 1 = \frac{1}{4}\,u + \frac{1}{4}(v-2) \\ y - 1 = -\frac{1}{4}\,u + \frac{1}{4}(v-2), \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{4}(v+u) + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4}(v-u) + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Esercizio 2 (i) Per individuare il limite puntuale delle f_n occorre distinguere i tre casi $x \in [0, e[$, $x = e$, $x > e$. Nel primo caso,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left[\ln e + \frac{1}{n} \ln\left(1 + \left(\frac{x}{e}\right)^n\right) \right] = 1;$$

nel secondo caso si ha ovviamente

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(2e^n) = 1,$$

e nel terzo caso

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left[\ln x + \frac{1}{n} \ln\left(1 + \left(\frac{e}{x}\right)^n\right) \right] = \ln x.$$

In definitiva

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 \vee \ln x \qquad \forall x \geq 0.$$

Verifichiamo se la convergenza è uniforme: per $x \in [0, e]$ si ha

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \ln(e^n + x^n) \geq \frac{1}{n} \ln(e^n) = 1,$$

$$f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{e^n + x^n} > 0,$$

quindi la funzione $f_n(x)-1$ è non negativa e crescente. Ne segue

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[0,e]}|f_n(x)-1| = \lim_{n\to\infty}(f_n(e)-1)=0.$$

Se $x\geq e$, si ha analogamente

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\ln(e^n+x^n)\geq\frac{1}{n}\ln(x^n)=\ln x,$$

$$f_n'(x)-\frac{1}{x}=\frac{x^{n-1}}{e^n+x^n}-\frac{1}{x}\leq\frac{x^{n-1}}{x^n}-\frac{1}{x}=0,$$

quindi la funzione $f_n(x)-\ln x$ è non negativa e decrescente. Ne segue

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\geq e}|f_n(x)-\ln x| = \lim_{n\to\infty}(f_n(e)-1)=0.$$

(ii) Dato che la funzione limite delle f_n ha un punto angoloso in $x=e$, non vi può essere convergenza in C^1 in alcun intervallo contenente e: dunque non vi è convergenza della successione $\{f_n\}$ nella norma di $C^1[0,100]$.

Esercizio 3 La matrice associata al sistema omogeneo è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -6 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

ed i suoi autovalori sono 0, $4+\sqrt{3}$, $4-\sqrt{3}$. Ne segue, con conti standard, che una base di soluzioni del sistema è data da

$$\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix};\qquad \begin{pmatrix} 1\\ (3+\sqrt{3})\\ (3+\sqrt{3})^2\end{pmatrix}e^{(4+\sqrt{3})t};\qquad \begin{pmatrix} 1\\ (3-\sqrt{3})\\ (3-\sqrt{3})^2\end{pmatrix}e^{(4-\sqrt{3})t}.$$

Quindi l'integrale generale del sistema omogeneo è dato da

$$\left\{\begin{pmatrix} c_1+c_2\,e^{(4+\sqrt{3})t}+c_3e^{(4-\sqrt{3})t}\\ -c_1+c_2\,(3+\sqrt{3})e^{(4+\sqrt{3})t}+c_3\,(3-\sqrt{3})e^{(4-\sqrt{3})t}\\ c_1+c_2\,(3+\sqrt{3})^2e^{(4+\sqrt{3})t}+c_3(3-\sqrt{3})^2e^{(4-\sqrt{3})t}\end{pmatrix} : c_1,c_2,c_3\in\mathbb{C}\right\}.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare del sistema non omogeneo della forma

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^t.$$

Sostituendo nel sistema si trovano le relazioni

$$\begin{cases} a = a + b + 2 \\ b = b + c \\ c = a + c \end{cases}$$

dalle quali è immediato ricavare $a = 0$, $b = -2$, $c = 0$. Dunque l'integrale generale del sistema non omogeneo è

$$\left\{ \begin{pmatrix} c_1 + c_2\, e^{(4+\sqrt{3})t} + c_3 e^{(4-\sqrt{3})t} \\ -c_1 + c_2\,(3+\sqrt{3})e^{(4+\sqrt{3})t} + c_3\,(3-\sqrt{3})e^{(4-\sqrt{3})t} - 2e^t \\ c_1 + c_2\,(3+\sqrt{3})^2 e^{(4+\sqrt{3})t} + c_3 (3-\sqrt{3})^2 e^{(4-\sqrt{3})t} \end{pmatrix} : c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C} \right\}.$$