

Appunti di Teoria dei controlli

Paolo Acquistapace

19 agosto 2022

Indice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Controlli in dimensione finita | 1 |
| 1.1 | Introduzione | 1 |
| 1.2 | Generalità | 2 |
| 1.2.1 | Controllabilità | 2 |
| 1.2.2 | Osservabilità | 2 |
| 1.2.3 | Stabilizzabilità | 3 |
| 1.2.4 | Ottimalità | 3 |
| 1.2.5 | Esempi | 3 |
| 1.3 | Controllabilità per sistemi lineari | 5 |
| 1.4 | Osservabilità per sistemi lineari | 11 |
| 1.5 | Stabilità e stabilizzabilità per sistemi lineari | 13 |
| 1.5.1 | Sistemi dinamici equivalenti | 17 |
| 1.5.2 | Decomposizione di Kalman | 20 |
| 2 | Controlli ottimali: condizioni necessarie | 25 |
| 2.1 | Introduzione | 25 |
| 2.2 | Il teorema di Pontrjagin | 25 |
| 2.3 | Il problema di Bolza | 34 |
| 2.4 | Un modello di epidemia con vaccinazione | 39 |
| 2.4.1 | Il teorema di Carathéodory | 45 |
| 2.4.2 | Esistenza della strategia ottimale di vaccinazione | 49 |
| 2.5 | Il teorema di esistenza di Filippov-Cesari | 50 |
| 3 | Controlli in dimensione infinita | 68 |
| 3.1 | Introduzione | 68 |
| 3.2 | Semigrupperi di operatori | 69 |
| 3.2.1 | Stime asintotiche | 76 |
| 3.2.2 | Risoluzione del problema di Cauchy | 82 |
| 3.2.3 | Semigrupperi in uno spazio di Hilbert | 86 |
| 3.2.4 | Esempi | 90 |
| 3.3 | Controllo lineare-quadratico in spazi di Hilbert | 94 |
| 3.3.1 | L'equazione di Riccati | 102 |
| 3.3.2 | Unicità per l'equazione di Riccati | 106 |
| 3.3.3 | Controlli in orizzonte infinito | 113 |
| 3.3.4 | Unicità per l'equazione algebrica di Riccati | 118 |

| | | |
|-------|---|------------|
| 3.4 | Controllo lineare-convesso in spazi di Hilbert | 122 |
| 3.4.1 | Proprietà delle funzioni convesse | 124 |
| 3.4.2 | Condizioni necessarie di ottimalità | 129 |
| 3.4.3 | Stime per la funzione valore e per la coppia ottimale | 132 |
| 3.4.4 | Regolarità lipschitziana della funzione valore | 134 |
| 3.4.5 | Equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman | 136 |
| | Bibliografia | 145 |
| | Indice analitico | 146 |

Capitolo 1

Controlli in dimensione finita

1.1 Introduzione

La teoria dei controlli studia il modo di guidare un sistema fisico, o meccanico, o di altro tipo, in modo da indirizzarlo verso uno scopo prefissato. Il mezzo è quello di introdurre nel sistema un *controllo*, atto a costringere il sistema a muoversi verso quello scopo. Questa teoria è nata in ambito militare e il suo indubbio successo è illustrato dalle prestazioni molto poco eroiche di siluri, missili, droni, che attraverso sofisticati meccanismi che ne controllano la traiettoria, colpiscono i loro bersagli in luoghi e tempi prefissati.

Le applicazioni della teoria dei controlli nell'ambito delle telecomunicazioni sono altrettanto spettacolari: servizi segreti di mezzo mondo controllano con sofisticate apparecchiature informatiche le mail, gli spostamenti e le attività di migliaia di persone. Nel vasto mondo dell'economia e della finanza, un mucchio di banche e di speculatori cerca di indirizzare il mercato finanziario usando tecniche di controllo in modo da massimizzare il loro profitto, e pazienza per chi ci rimetterà. Nel campo ingegneristico, una vasta gamma di servomeccanismi ci assiste nell'impresa di guidare automobili, camion ed autobus, e una sofisticata rete di segnalazioni semaforiche ed elettriche permette il traffico ferroviario su intricate reti di binari.

Insomma, come sempre, il problema non sta in una teoria matematica, bensì nel cattivo o buon uso che se ne fa. Per la teoria dei controlli, il problema sta nella scelta del fine: un conto è voler massimizzare il proprio profitto a scapito della collettività, un altro conto è voler massimizzare il tasso di guarigione da una malattia attraverso una campagna di vaccinazioni, o voler minimizzare l'inquinamento di un lago mediante adeguate politiche industriali ed ambientali. C'è un grande bisogno di idee per formulare modelli matematici "sostenibili", volti alla risoluzione di problemi in campo ambientale, urbanistico, ecologico, biologico, medico, eccetera, costruendo così una teoria dei controlli "dal volto umano".

1.2 Generalità

L'oggetto del nostro studio è un sistema differenziale della forma

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), u(t)), & t \geq 0, \\ y(0) = x \end{cases}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Gli elementi $u \in U$ sono i *parametri di controllo*, $y(\cdot)$ è lo *stato* del sistema. In particolare, qualora esista un'applicazione $k : \mathbb{R}^n \rightarrow U$, eventualmente dipendente anche da t , tale che il sistema

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), k(y(t))), & t \geq 0, \\ y(0) = x \end{cases}$$

abbia una ben definita soluzione, si dice che il controllo $u(t) = k(y(t))$ è *closed-loop* e la funzione k è denominata *feedback*. Gli altri controlli, per contrasto, si chiamano *open-loop*.

Andiamo ora ad elencare le principali questioni matematiche che nascono nell'ambito della teoria dei controlli.

1.2.1 Controllabilità

Diremo che uno stato $z \in \mathbb{R}^n$ è *raggiungibile* dallo stato iniziale x in un tempo $T > 0$ se esiste un controllo $u : [0, T] \rightarrow U$ tale che il corrispondente stato $y(\cdot)$ soddisfi $y(0) = x$ e $y(T) = z$.

Diremo che il sistema è *controllabile* se ogni stato $z \in \mathbb{R}^n$ è raggiungibile da qualunque stato iniziale x in un tempo finito $T_{x,z} > 0$; il sistema si dice *controllabile al tempo T* se per ogni $x, z \in \mathbb{R}^n$ si ha $T_{x,z} \leq T$.

1.2.2 Osservabilità

In molte situazioni pratiche non si riesce ad osservare direttamente lo stato $y(\cdot)$, ma si arriva solo ad una osservazione indiretta tramite una funzione $h(y(\cdot))$ di esso. Si studia dunque il problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), u(t)), & t \geq 0, \\ y(0) = x \\ w = h(y) \text{ (equazione di osservazione)}. \end{cases}$$

Il sistema è *osservabile* se, noti un controllo $u(\cdot)$ ed una osservazione w , si può determinare univocamente la condizione iniziale x (e dunque ricostruire tutta la funzione $y(\cdot)$).

1.2.3 Stabilizzabilità

Sia $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^n \times U$ un punto tale che $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$. Diciamo che un'applicazione $k : \mathbb{R}^n \rightarrow U$, tale che $k(\bar{x}) = \bar{u}$, è un *feedback stabilizzante* per il sistema se \bar{x} è un punto di equilibrio *stabile* per l'equazione

$$y'(t) = f(y(t), k(y(t))), \quad t > 0,$$

ossia, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\delta, t_0 > 0$ tali che se $|x - \bar{x}|_n < \delta$, dette $y_x(t)$ e $y_{\bar{x}}(t)$ le soluzioni dell'equazione con dati iniziali x e \bar{x} , risulta $|y_x(t) - y_{\bar{x}}(t)|_n < \varepsilon$ per ogni $t > t_0$. Il sistema si dice *stabilizzabile* se esiste un feedback stabilizzante.

Una definizione analoga si ha per la *stabilizzabilità esponenziale*: il sistema è *esponenzialmente stabilizzabile* se esiste un feedback *esponenzialmente stabilizzante*, ossia tale che \bar{x} sia un punto di equilibrio *esponenzialmente stabile* per l'equazione sopra scritta. Ciò significa che esistono $\delta, \alpha, \beta > 0$ tali che, per $|x - \bar{x}|_n < \delta$, risulti $|y_x(t) - y_{\bar{x}}(t)|_n \leq \alpha e^{-\beta t} |x - \bar{x}|_n$ per ogni $t > 0$.

1.2.4 Ottimalità

Si cerca un controllo $u(\cdot)$ che ottimizzi lo stato $y(\cdot)$ rispetto ad un determinato criterio. Ad esempio:

- (a) *problema del tempo minimo*: si cerca un controllo $u(\cdot)$ che faccia trasferire lo stato $y(\cdot)$ dal valore iniziale x ad un valore prefissato z nel minor tempo possibile;
- (b) *problema di Bolza*: si cerca un controllo $u(\cdot)$ che renda minimo il *funzionale costo*, o massimo il *funzionale guadagno*

$$J(x, u) = \int_0^T g(y(t), u(t)) dt + G(y(T)),$$

ove g e G sono funzioni assegnate.

1.2.5 Esempi

Esempio 1.2.1 (Atterraggio morbido sulla Luna)

Una navicella spaziale di massa totale m si muove verticalmente al di sopra della superficie lunare, con il getto dei gas di scarico diretto verso la superficie. Siano h l'altezza della navicella sopra la superficie, u la spinta del motore, prodotta dall'espulsione dei gas: il consumo di carburante riduce la massa della navicella. Supponiamo che non vi sia atmosfera e che l'accelerazione di gravità lunare g sia costante. Detta $v(\cdot)$ la velocità della navicella, diretta verso il basso, le equazioni del moto della navicella sono allora

$$\begin{cases} h' = v \\ v' = g - \frac{u}{m} \\ m' = -ku, \end{cases}$$

ove k è una costante positiva, sotto le condizioni iniziali

$$m(0) = M_0, \quad h(0) = h_0, \quad v(0) = v_0.$$

Ci sono ulteriori vincoli sui parametri di controllo e di stato: deve essere

$$0 \leq u \leq A, \quad m \geq M,$$

ove M è la massa della navicella senza carburante, mentre A è la condizione di “tutto gas”. Il problema dell’atterraggio morbido sulla Luna consiste nel trovare un controllo $u(\cdot)$ che porti la navicella, in un dato istante $T > 0$, nella posizione $h(T) = 0$, $v(T) = 0$. Questo è un problema di controllabilità.

Ma vi è anche una naturale questione di ottimizzazione: non si fissa T , ma si cerca un atterraggio lunare in tempo minimo: questo problema è *equivalente* alla minimizzazione del consumo di carburante. Infatti, se $m(t) > 0$ in $[0, T]$, vale l’equazione

$$\frac{m'(t)}{m(t)} = -k \frac{u}{m} = k v'(t) - kg,$$

da cui, integrando fra 0 e T ,

$$m(T) = M_0 e^{k v(T) - kgT - k v_0}.$$

Si ha atterraggio morbido se e solo se $h(T) = v(T) = 0$, ossia se e solo se

$$m(T) = M_0 e^{-k v_0 - kgT}, \quad h(T) = 0.$$

Questa relazione mostra che minimizzare T equivale a minimizzare $-m(T)$, ovvero il consumo di carburante $M_0 - m(T)$.

Esempio 1.2.2 (Consumo ottimale)

In una certa attività economica si ha a disposizione un capitale $k(\cdot)$. Una parte $u(t)k(t)$ di esso è destinata agli investimenti e contribuisce ad aumentare il capitale stesso tramite la produzione, e la parte residua $(1-u(t))k(t)$ va in consumi volti a massimizzare l’*utilità*, cioè una funzione

$$J_T(k, u) = \int_0^T [(1-u(t))k(t)]^\alpha dt,$$

ove α è una costante positiva. Il tasso di variazione del capitale è determinato dalla legge

$$k'(t) = u(t)k(t),$$

con la condizione iniziale $k(0) = k_0$. Naturalmente occorre richiedere $0 \leq u(t) \leq 1$. Inoltre, non si vuole dilapidare il capitale, e quindi si impone una condizione della forma $k(T) \geq k_T$ (problema di controllabilità), e chiaramente si desidera massimizzare l’*utilità* (problema di ottimalità).

Esempio 1.2.3 (Problema del regolatore lineare)

Consideriamo il problema lineare

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t), & t \in]0, T], \\ y(0) = x, \end{cases}$$

ove $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A(t)$ e $B(t)$ sono matrici reali $n \times n$ e $n \times m$ rispettivamente, a coefficienti continui, mentre $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ è una funzione continua, o continua a tratti. Si vuole scegliere $u(\cdot)$ in modo da minimizzare il funzionale quadratico

$$J(y, u) = \int_0^T [\langle M(t)y(t), y(t) \rangle_n + \langle N(t)u(t), u(t) \rangle_m] dt + \langle P_T y(T), y(T) \rangle_n,$$

ove $M(t)$, $N(t)$, P_T sono matrici $n \times n$, $m \times m$, $n \times n$ reali simmetriche, con $M, P_T \geq 0$ e $N > 0$. In questa situazione, come vedremo, il controllo ottimale sarà funzione lineare dello stato ottimale: avremo quindi un controllo feedback.

Esempio 1.2.4 (Problemi di calcolo delle variazioni)

I problemi del calcolo delle variazioni possono essere visti come problemi di controllo: consideriamo ad esempio il problema di minimizzare il funzionale

$$\int_a^b L(t, y(t), y'(t)) dt$$

fra tutte le curve $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tali che $y(a) = A$ e $y(b) = B$, essendo $A, B \in \mathbb{R}^n$ fissati. Esso equivale al problema di controllo in cui si ha:

- il controllo $u(t) = y'(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$,
- lo stato $Y(t) = (w(t), z(t)) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, ove

$$w(t) = y(t), \quad z(t) = \int_a^t L(s, y(s), y'(s)) ds,$$

- l'equazione

$$\begin{cases} w'(t) = u(t), \\ z'(t) = L(t, w(t), u(t)), \\ z(a) = 0, \quad w(a) = A, \quad w(b) = B, \end{cases}$$

- il funzionale da minimizzare $J(Y, u) = z(b)$.

1.3 Controllabilità per sistemi lineari

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), & t \geq 0, \\ y(0) = x, \end{cases}$$

ove A, B sono matrici rispettivamente $n \times n$ e $n \times m$. La funzione $u : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^m$ è il controllo, la funzione $y : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ è lo stato. Definiamo per $T > 0$ la *matrice di controllabilità*

$$Q_T = \int_0^T e^{sA} B B^* e^{sA^*} ds, \quad (1.1)$$

ove e^{sA} è la matrice esponenziale

$$e^{sA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k A^k}{k!}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Chiaramente si ha $Q_T \geq 0$ e $Q_T = Q_T^*$.

Proposizione 1.3.1 *Se esiste $T > 0$ tale che Q_T sia non singolare, allora:*

(i) *per ogni $a, b \in \mathbb{R}^n$ il controllo*

$$\hat{u}(t) = -B^* e^{(T-t)A^*} Q_T^{-1} (e^{TA} a - b), \quad t \in [0, T],$$

porta lo stato $y(\cdot)$ da a in b al tempo T ;

(ii) *fra tutti i controlli $u(\cdot)$ che portano lo stato da a in b al tempo T , \hat{u} è quello che minimizza il funzionale $u \mapsto \int_0^T |u(s)|_m^2 ds$, ed inoltre*

$$\int_0^T |\hat{u}(s)|_m^2 ds = \langle Q_T^{-1} (e^{TA} a - b), e^{TA} a - b \rangle_m.$$

Dimostrazione È chiaro che $\hat{u} \in C([0, T], \mathbb{R}^m)$. Per lo stato \hat{y} corrispondente si ha, grazie alla formula di variazione delle costanti,

$$\hat{y}(t) = e^{tA} a + \int_0^t e^{(t-s)A} \hat{u}(s) ds,$$

e quindi

$$\hat{y}(T) = e^{TA} a - \int_0^T e^{(T-s)A} B B^* e^{(T-s)A^*} Q_T^{-1} (e^{TA} a - b) ds = e^{TA} a - Q_T Q_T^{-1} (e^{TA} a - b) = b.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \int_0^T |\hat{u}(s)|_m^2 ds &= \int_0^T |B^* e^{(T-s)A^*} Q_T^{-1} (e^{TA} a - b)|_m^2 ds = \\ &= \int_0^T \langle e^{(T-s)A} B B^* e^{(T-s)A^*} Q_T^{-1} (e^{TA} a - b), Q_T^{-1} (e^{TA} a - b) \rangle_m ds = \\ &= \langle e^{TA} a - b, Q_T^{-1} (e^{TA} a - b) \rangle_m = \langle Q_T^{-1} (e^{TA} a - b), e^{TA} a - b \rangle_m. \end{aligned}$$

Infine, se $u(\cdot)$ è un controllo che porta lo stato da a in b al tempo T , si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle u(s), \widehat{u}(s) \rangle_m ds &= - \int_0^T \langle u(s), B^* e^{(T-s)A^*} Q_T^{-1}(e^{TA}a - b) \rangle_m ds = \\
&= - \left\langle \int_0^T e^{(T-s)A} B u(s) ds, Q_T^{-1}(e^{TA}a - b) \right\rangle_m = \\
&= \langle e^{TA}a - y(T), Q_T^{-1}(e^{TA}a - b) \rangle_m = \\
&= \langle e^{TA}a - b, Q_T^{-1}(e^{TA}a - b) \rangle_m = \int_0^T |\widehat{u}(s)|_m^2 ds,
\end{aligned}$$

da cui

$$0 \leq \int_0^T |u(s) - \widehat{u}(s)|_m^2 ds = \int_0^T |u(s)|_m^2 ds - \int_0^T |\widehat{u}(s)|_m^2 ds.$$

Pertanto \widehat{u} è il controllo ottimale. \square

La proposizione 1.3.1 si può invertire:

Proposizione 1.3.2 *Se ogni stato $b \in \mathbb{R}^n$ è raggiungibile da 0 in un certo tempo $T_b > 0$, allora Q_T è non singolare per ogni $T > 0$.*

Dimostrazione Introduciamo per $T > 0$ l'operatore

$$\begin{cases} L_T : L^2(0, T, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^n \\ L_T u = \int_0^T e^{(T-s)A} B u(s) ds \quad \forall u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m). \end{cases} \quad (1.2)$$

Si ha chiaramente $L_T u = y_0(T)$, ove $y_0(\cdot)$ è lo stato associato al controllo u , tale che $y_0(0) = 0$. Osserviamo inoltre che l'immagine $R(T)$ cresce con T (rispetto all'inclusione): infatti, essendo

$$\langle L_T u, z \rangle_n = \int_0^T \langle u(s), B^* e^{(T-s)A^*} z \rangle_m ds,$$

si ha $z \in R(L_T)^\perp$ se e solo se $B^* e^{(T-s)A^*} z = 0$ per ogni $s \in [0, T]$, ossia se e solo se $B^* e^{sA^*} z = 0$ per ogni $s \in [0, T]$. È chiaro allora che

$$T' > T \implies R(L_{T'})^\perp \subseteq R(L_T)^\perp \implies R(L_T) \subseteq R(L_{T'}).$$

Inoltre, per ipotesi,

$$\bigcup_{T>0} R(L_T) = \mathbb{R}^n.$$

La funzione $T \mapsto \dim R(L_T)$ è crescente ed assume valori interi; siccome

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \dim R(L_T) = n,$$

deve esistere $\tilde{T} > 0$ tale che

$$\dim R(L_T) = n \quad \forall T > \tilde{T}.$$

Sia ora $T > 0$ e prendiamo $z \in \mathbb{R}^n$ tale che $Q_T z = 0$. Si ha allora

$$0 = \langle Q_T z, z \rangle_n = \left\langle \int_0^T e^{sA} B B^* e^{sA^*} z \, ds, z \right\rangle_n = \int_0^T |B^* e^{sA^*} z|_n^2 \, ds,$$

e dunque deve essere $B^* e^{sA^*} z = 0$ per ogni $s \in [0, T]$. Ma, essendo $s \mapsto B^* e^{sA^*}$ la somma di una serie di potenze, ossia una funzione analitica della variabile s , ciò implica

$$B^* e^{sA^*} z = 0 \quad \forall s \geq 0;$$

in particolare, si ricava $Q_{\bar{T}} z = 0$ e $R(L_{\bar{T}})^\perp = \{0\}$, ossia $z = 0$. Ne deriva che Q_T è non singolare per ogni $T > 0$. \square

Osservazione 1.3.3 Se $m \geq n$ e $R(B) = n$, ossia B ha rango massimo, allora vale la controllabilità ed il controllo che porta lo stato da a a b in tempo T è

$$u(t) = \frac{1}{T} B^+ e^{(t-T)A} (b - e^{TA} a), \quad t \in [0, T],$$

ove B^+ è una qualunque matrice $m \times n$ tale che $BB^+ = I_m$ (per costruire una tale B^+ basta scegliere $v_j \in \mathbb{R}^m$ tale che $Bv_j = e_j$, $1 \leq j \leq n$, e definire $B^+ = (v_1 | v_2 | \dots | v_n)$). La verifica è immediata.

La condizione necessaria e sufficiente per la controllabilità, espressa dalle proposizioni 1.3.1 e 1.3.2 è un po' scomoda, in quanto occorre calcolare e^{tA} e e^{tA^*} . Vedremo fra poco una condizione di più agevole verifica, che dipende solo dai dati A e B .

Esempio 1.3.4 Dall'equazione

$$\begin{cases} y''(t) = u(t) \\ y(0) = \xi_1, \quad y'(0) = \xi_2, \end{cases}$$

si ricava il sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'(t) = v(t) \\ v'(t) = u(t) \\ y(0) = \xi_1, \quad v(0) = \xi_2. \end{cases}$$

Risolvendo esplicitamente il sistema si verifica che Q_T , data da (1.1), è non singolare, e si trova che il controllo che porta (ξ_1, ξ_2) in $(0, 0)$ in tempo T è

$$\hat{u}(s) = -\frac{12}{T^3} \left(\xi_1 \frac{T}{2} + \xi_2 \frac{T^2}{3} - s \xi_2 \frac{T}{2} - s \xi_1 \right), \quad s \in [0, T],$$

mentre il minimo del funzionale $\int_0^T |u(s)|^2 \, ds$ è

$$\frac{12}{T^3} \left(\xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 T + \xi_2^2 \frac{T^3}{3} \right).$$

Una condizione equivalente alla controllabilità, ma più comoda, è la seguente:

Teorema 1.3.5 *Le seguenti condizioni sono equivalenti per il sistema lineare*

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad t \geq 0 :$$

- (i) ogni $b \in \mathbb{R}^n$ è raggiungibile da 0 in un certo tempo $T_b > 0$;
- (ii) il sistema è controllabile;
- (iii) il sistema è controllabile ad un fissato tempo $T > 0$;
- (iv) esiste $T > 0$ tale che Q_T è non singolare;
- (v) Q_T è non singolare per ogni $T > 0$;
- (vi) $R((B|AB|\dots|A^{n-1}B)) = n$ (questa matrice è $n \times nm$).

La condizione (vi) è detta *condizione del rango* o *di Kalman*.

Dimostrazione Dalle proposizioni 1.3.1 e 1.3.2 segue facilmente che le condizioni da (i) a (v) sono tutte equivalenti alla controllabilità del sistema.

Proviamo che se il sistema è controllabile, allora vale (vi). Anzitutto, risulta $R(L_T) = \mathbb{R}^n$ per ogni $T > 0$, ove L_T è l'operatore definito in (1.2): infatti è facile verificare che $z \in R(L_T)^\perp$ equivale a $B^*e^{tA^*}z = 0$ per ogni $t \in [0, T]$, da cui, per analiticità, $z = 0$.

Lemma 1.3.6 *Poniamo per $u_0, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^m$*

$$\ell(u_0, \dots, u_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B u_k;$$

allora si ha $R(\ell) = R(L_T) = \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione Sia $z \in R(\ell)^\perp$: allora per ogni $u_0, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^m$ si ha

$$0 = \langle \ell(u_0, \dots, u_{n-1}), v \rangle_n = \sum_{k=0}^{n-1} \langle u_k, B^*(A^*)^k v \rangle_m.$$

Dunque si deduce

$$B^*(A^*)^k v = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Adesso osserviamo che, detto $p(\lambda)$ il polinomio minimo della matrice A^* , per il teorema di Cayley-Hamilton si ha $p(A^*) = 0$: perciò, detto h il grado di p , esistono $c_1, \dots, c_h \in \mathbb{C}$ tali che

$$(A^*)^h = \sum_{k=0}^{h-1} c_k (A^*)^k,$$

e quindi esistono altre costanti d_0, \dots, d_{h-1} tali che

$$(A^*)^{h+1} = \sum_{k=0}^{h-1} d_k (A^*)^k.$$

Ne segue, induttivamente, che $B^*(A^*)^k v = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e pertanto

$$B^* e^{sA^*} v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} B^*(A^*)^k v = 0 \quad \forall s \geq 0.$$

Dunque $v \in R(L_T)^\perp$ e pertanto $R(L_T) \subseteq R(\ell)$.

Viceversa, sia $v \in R(L_T)^\perp$: allora

$$B^* e^{sA^*} v = 0 \quad \forall s \geq 0.$$

Derivando questa identità e calcolando per $s = 0$ si trova successivamente

$$B^*(A^*)^k v = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

e di conseguenza

$$\langle \ell(u_0, \dots, u_{n-1}), v \rangle_n = 0 \quad \forall u_0, u_1, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^m,$$

ossia $v \in R(\ell)^\perp$. Dunque $R(\ell) \subseteq R(L_T)$ ed il lemma 1.3.6 è provato. \square

Mostriamo infine che se vale (vi) allora il sistema è controllabile. Per ipotesi si ha $R((B|AB|\dots|A^{n-1}B)) = n$, e quindi esiste una matrice K , $mn \times n$, tale che

$$((B|AB|\dots|A^{n-1}B))K = I_n,$$

ovvero esistono K_1, \dots, K_n , matrici $m \times n$, tali che

$$\sum_{j=1}^n A^{j-1} B K_j = I_n.$$

Scegliamo adesso una funzione $\varphi \in C_0^{n-1}(0, T)$, tale che $\int_0^T \varphi(s) ds = 1$; poniamo

$$\psi(s) = (e^{(s-T)A} b - e^{sA} a) \varphi(s),$$

e consideriamo il controllo

$$\widehat{u}(s) = \sum_{j=1}^n k_j \psi^{(j-1)}(s), \quad s \in [0, T].$$

Allora risulta per $j = 1, \dots, n$, integrando per parti $j-1$ volte,

$$\int_0^T e^{(T-s)A} B K_j \psi^{(j-1)}(s) ds = \int_0^T e^{(T-s)A} A^{j-1} B K_j \psi(s) ds;$$

di conseguenza

$$\begin{aligned} L_T \widehat{u} &= \int_0^T e^{(T-s)A} B \widehat{u}(s) ds = \int_0^T e^{(T-s)A} (B|AB|\dots|A^{n-1}B) K \psi(s) ds = \\ &= \int_0^T e^{(T-s)A} \psi(s) ds = \int_0^T [b - e^{TA} a] \varphi(s) ds, \end{aligned}$$

e pertanto

$$y(T) = e^{TA} a + L_T \widehat{u} = e^{TA} a + \int_0^T [b - e^{TA} a] \varphi(s) ds = e^{TA} a + b - e^{TA} a = b. \quad \square$$

1.4 Osservabilità per sistemi lineari

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), & t \geq 0, \\ y(0) = x, \\ w(t) = Cy(t), & t \geq 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

ove A ($n \times n$), B ($n \times m$) e C ($p \times n$) sono matrici fissate. Diciamo che il sistema, ovvero la coppia (A, C) , è *osservabile al tempo* $T > 0$ se la funzione (della variabile $x \in \mathbb{R}^n$)

$$\tilde{w}(t) = Cy(t) = C \left[e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s) ds \right]$$

è iniettiva da \mathbb{R}^n in $L^2(0, T; \mathbb{R}^p)$; equivalentemente, il sistema è osservabile al tempo T se $w(t) = Ce^{tA}x$ è iniettiva da \mathbb{R}^n in $L^2(0, T; \mathbb{R}^p)$. Questa condizione si può esprimere, ancor più semplicemente, così: per ogni $x \neq 0$ esiste $t_x \in]0, T]$ tale che $w(t_x) \neq 0$.

Diremo poi che il sistema, o la coppia (A, C) , è *osservabile* se per ogni $x \neq 0$ esiste $T_x > 0$ tale che $w(T_x) \neq 0$.

Introduciamo la *matrice di osservabilità*

$$R_T = \int_0^T e^{sA^*} C^* C e^{sA} ds, \quad T > 0. \quad (1.4)$$

Vale allora il seguente teorema, in qualche senso “duale” del teorema 1.3.5:

Teorema 1.4.1 *Sono fatti equivalenti per il sistema (1.3):*

- (i) *il sistema è osservabile;*
- (ii) *il sistema è osservabile in un fissato tempo $T > 0$;*
- (iii) *esiste $T > 0$ tale che la matrice R_T sia non singolare;*
- (iv) *la matrice R_T è non singolare per ogni $T > 0$;*
- (v) *risulta $R((C^*|A^*C^*| \dots |(A^*)^{n-1}C)) = n$.*

Dimostrazione È molto simile a quella del teorema 1.3.5.

Se vale (ii), esiste $T > 0$ tale che per ogni $x \neq 0$ vi è $t \in]0, T]$ per il quale $Ce^{tA}x \neq 0$. Dunque

$$\langle R_T x, x \rangle_n = \int_0^T |Ce^{sA}x|_p^2 ds > 0 \quad \forall x \neq 0,$$

e pertanto R_T è non singolare: ciò prova (iii).

Viceversa, da (iii) segue che $\int_0^T |Ce^{sA}x|_p^2 ds > 0$ per ogni $x \neq 0$, e quindi esiste $t \in]0, T]$ tale che $Ce^{tA}x \neq 0$: ciò prova (ii).

Se vale (iii), allora $\ker R_T = \{0\}$. Risulta però, con dimostrazione uguale a quella del lemma 1.3.6,

$$\ker R_T = R(\ell)^\perp \quad \forall T > 0,$$

dove stavolta $\ell : \mathbb{R}^{np} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è dato da

$$\ell(u_0, u_1, \dots, u_n - 1) = \sum_{k=0}^{n-1} (A^*)^k C^* u_k;$$

dunque $R(\ell) = \mathbb{R}^n$, cioè

$$R((C^* | A^* C^* | \dots | (A^*)^{n-1} C^*)) = n,$$

da cui (v).

Viceversa, da (v) segue $\ker R_T = \{0\}$ per ogni $T > 0$, ossia R_T è non singolare per ogni $T > 0$. Dunque vale (iv), e a maggior ragione (iii); pertanto (ii)-(iii)-(iv)-(v) sono equivalenti.

Proviamo infine che (i) \iff (v). Chiaramente, (v) \implies (ii) \implies (i). Se, viceversa, vale (i), supponiamo per assurdo che (v) sia falsa: allora $R(\ell)$ è strettamente contenuto in \mathbb{R}^n , ossia esiste $z \neq 0$, $z \in R(\ell)^\perp$; quindi $Cz = CAz = \dots = CA^{n-1}z = 0$. Ma allora, utilizzando nuovamente il teorema di Cayley-Hamilton, si ricava $CA^k z = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, da cui $Ce^{sA}z = 0$ per ogni $s > 0$: ciò contraddice (i). \square

Esempio 1.4.2 Per il sistema dell'esempio 1.3.4

$$\begin{cases} y'(t) = v(t) \\ v'(t) = u(t), \\ y(0) = \xi_1, \quad v(0) = \xi_2, \end{cases} \quad t \geq 0,$$

in cui

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

scegliamo come matrice di osservabilità

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^* C^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha

$$R((C^* | A^* C^*)) = R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

e pertanto il sistema è osservabile.

1.5 Stabilità e stabilizzabilità per sistemi lineari

Richiamiamo alcuni fatti ben noti, relativi al sistema lineare

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), & t \geq 0, \\ y(0) = x, \end{cases}$$

ove A è una matrice $n \times n$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Ovviamente,

$$y(t) = e^{tA}x, \quad t \geq 0,$$

è la soluzione del sistema.

Teorema 1.5.1 *Sono fatti equivalenti per il sistema sopra scritto:*

- (i) $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$;
- (ii) $y(t) \rightarrow 0$ esponenzialmente per $t \rightarrow \infty$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$;
- (iii) $\omega(A) := \sup\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\} < 0$;
- (iv) $\int_0^\infty |y(t)|_n^2 dt < \infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione Se vale (i), oppure (iv), supponiamo per assurdo che $\omega(A) \geq 0$, osservando che $\omega(A)$ è un massimo perché ci troviamo in dimensione finita. Allora esiste un autovalore λ di A con $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. Se v è un autovettore relativo a λ , posto $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha \geq 0$, e scelto come punto iniziale $x = v$, si ha

$$y(t) = e^{tA}v = e^{\lambda t}v = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)v.$$

Dunque $y(t)$ non è infinitesima per $t \rightarrow \infty$ (assurdo), dato che

$$\begin{cases} \text{se } \beta = 0, & |y(t)|_n = e^{\alpha t}|v|_n \geq |v|_n, \\ \text{se } \beta \neq 0, & |y(t)|_n \geq \frac{e^{\alpha t}|v|_n}{2} \geq \frac{|v|_n}{2} \text{ per } |\beta t - 2k\pi| \leq \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Le stesse maggiorazioni provano che $\int_0^\infty |y(t)|_n^2 dt = \infty$, assurdo. Dunque da (i) o da (iv) segue (iii).

Se vale (iii), allora ogni autovalore λ_j di A verifica $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ la corrispondente soluzione y è combinazione lineare di $e^{\lambda_j t}$ e di $P_k(t)e^{\lambda_j t}$, con P_k polinomio di grado inferiore a n . Quindi, ogni soluzione y decade esponenzialmente per $t \rightarrow \infty$, cioè vale (ii).

Infine, ovviamente, se vale (ii) allora valgono (i) e (iv). \square

Un legame fra osservabilità e stabilità è dato dal seguente risultato:

Teorema 1.5.2 (i) *Se (A, C) è un sistema osservabile, e se esiste una matrice Q ($n \times n$) non negativa, tale che*

$$A^*Q + QA = -C^*C \quad (\text{equazione di Lyapunov}),$$

allora A è stabile.

(ii) Se A è stabile, allora per ogni matrice $R = R^*$ ($n \times n$) l'equazione di Lyapunov $A^*Q + QA = -R$ ha una ed una sola soluzione $Q = Q^*$; inoltre $R \geq 0$ implica $Q \geq 0$, mentre $R > 0$ implica $Q > 0$ e (A, \sqrt{R}) osservabile.

Dimostrazione (i) Se Q risolve l'equazione di Lyapunov, allora

$$\frac{d}{dt}e^{tA^*}Qe^{tA} = A^*e^{tA^*}Qe^{tA} + e^{tA^*}QAe^{tA} = -e^{tA^*}C^*Ce^{tA}.$$

Dunque, integrando fra 0 e T ,

$$e^{TA^*}Qe^{TA} - Q = - \int_0^T e^{tA^*}C^*Ce^{tA} dt = -R_T,$$

ove R_T è la matrice di osservabilità definita in (1.4). Pertanto

$$Q = e^{TA^*}Qe^{TA} + R_T.$$

Poiché (A, C) è osservabile, sappiamo che $R_T \geq 0$; a maggior ragione, per $x \neq 0$,

$$\langle Qx, x \rangle_n = \langle Qe^{TA}x, e^{TA}x \rangle_n + \langle R_Tx, x \rangle_n > 0.$$

Per $x \neq 0$ sia $v(t) = \langle Qy(t), y(t) \rangle_n$: allora

$$\begin{aligned} v'(t) &= \langle QAy(t), y(t) \rangle_n + \langle Qy(t), Ay(t) \rangle_n = -\langle (QA + A^*Q)y(t), y(t) \rangle_n = \\ &= -\langle C^*Cy(t), y(t) \rangle_n = -|Cy(t)|_n^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Quindi v è limitata superiormente in $[0, \infty[$ per ogni $x \neq 0$. Ne segue, essendo Q definita positiva, che anche $y(t) = e^{tA}x$ è limitata superiormente in $[0, \infty[$ per ogni $x \neq 0$: ciò significa che ogni autovalore di A ha parte reale non positiva.

Se esistesse $\lambda = i\omega \in \sigma(A)$, i casi sarebbero due:

(I) $\omega = 0$; in questo caso esiste $v \neq 0$ tale che $Av = 0$; ma allora

$$0 = \langle (A^*Q + QA)v, v \rangle_n = -\langle C^*Cv, v \rangle_n = -|Cv|_n^2$$

ed anche $A^k v = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$. Ciò implicherebbe però

$$\langle v, C^*u_0 + A^*C^*u_1 + \dots + (A^*)^{n-1}C^*u_{n-1} \rangle_n = 0 \quad \forall u_0, u_1, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^p,$$

da cui $v \perp R(C^*|A^*C^*| \dots |(AQ^*)^{n-1}C^*)$. Ciò, per il teorema 1.4.1 (v), darebbe $v = 0$, il che è assurdo.

(II) $\omega \neq 0$: in questo caso esiste $w \neq 0$ tale che $i\omega w = Aw$. Ne deduciamo che la funzione periodica $y(t) = e^{i\omega t}w$ risolve $y' = Ay$ e $y(0) = w$; quindi $y(t) = e^{tA}w$. D'altra parte

$$\frac{d}{dt}\langle Qy(t), y(t) \rangle_n = -|Cy(t)|_n^2 \leq 0,$$

e quindi, per periodicità, esiste $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che

$$\langle Qy(t), y(t) \rangle_n = \gamma \quad \forall t \geq 0.$$

Perciò $|Cy(t)|_n^2 = |Ce^{tA}w|_n^2 = 0$ per ogni $t \geq 0$, il che contraddice la controllabilità di (A, C) .

In definitiva, i casi (I) e (II) sono impossibili, e quindi gli autovalori di A hanno tutti parte reale negativa; pertanto A è stabile.

(ii) Sia A stabile e sia R una fissata matrice $n \times n$ tale che $R^* = R$. Allora le matrici

$$Q^T = \int_0^T e^{tA^*} R e^{tA} dt, \quad T > 0, \quad Q = \int_0^\infty e^{tA^*} R e^{tA} dt$$

sono ben definite e

$$\begin{aligned} A^*Q + QA &= \int_0^\infty (A^* e^{tA^*} R e^{tA} + e^{tA^*} R A e^{tA}) dt = \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} e^{tA^*} R e^{tA} dt = [e^{tA^*} R e^{tA}]_0^\infty = -R. \end{aligned}$$

Adesso supponiamo $R \geq 0$: allora esiste $C = \sqrt{R}$. Inoltre, $Q^T \geq 0$, dato che

$$\langle Q^T x, x \rangle_n = \int_0^T \langle R e^{tA} x, e^{tA} x \rangle_n dt \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Di più, da $R > 0$ segue $Q^T > 0$ per ogni $T > 0$: infatti, in tal caso C è iniettiva; perciò, dal calcolo precedente, supposto $\langle Q^T x, x \rangle_n = 0$, dedurremmo $\langle R e^{tA} x, e^{tA} x \rangle_n = |C e^{tA} x|_n^2 = 0$ per ogni $t \in [0, T]$ e dunque, per $t = 0$, $Cx = 0$, ossia $x = 0$. Quindi, se $R > 0$ la coppia (A, C) è osservabile, con matrice di osservabilità $R_T = Q^T > 0$.

Proviamo infine che Q è l'unica soluzione dell'equazione di Lyapunov. Se $\bar{Q} = \bar{Q}^*$ è un'altra soluzione, è immediato verificare che

$$\frac{d}{dt} e^{tA^*} (\bar{Q} - Q) e^{tA} = 0 \quad \forall t \geq 0;$$

quindi

$$e^{tA^*} (\bar{Q} - Q) e^{tA} = \bar{Q} - Q \quad \forall t \geq 0,$$

e per $t \rightarrow \infty$ deduciamo $\bar{Q} - Q = 0$. \square

Osservazione 1.5.3 Dal teorema precedente si ricava un facile criterio di stabilità: poiché la coppia (A, I_n) , con I_n matrice identità $n \times n$, è sempre osservabile, se esiste $Q = Q^* \geq 0$ che risolve l'equazione $A^*Q + QA = -I_n$ si ottiene che A è stabile.

Concludiamo con un altro criterio di stabilità.

Corollario 1.5.4 Se (A, C) è osservabile, e se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Cy(t) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

allora A è stabile.

Dimostrazione Fissato $\beta > 0$, la matrice

$$Q_\beta = \int_0^\infty e^{-2\beta t} e^{tA^*} C^* C e^{tA} dt$$

è ben definita e risolve l'equazione

$$(A - \beta I)^* Q_\beta + Q_\beta (A - \beta I) = -C^* C.$$

Se β è sufficientemente piccolo, la coppia $(A - \beta I, C)$ è ancora osservabile in virtù del teorema 1.4.1 (v). Quindi, ripetendo la dimostrazione del teorema 1.5.2, si trova che $A - \beta I$ ha autovalori con parte reale negativa, ossia

$$\omega(A) < \beta \quad \text{per } \beta \text{ sufficientemente piccolo.}$$

Dunque $\omega(A) \leq 0$. Si elimina però la possibilità di autovalori con parte reale nulla, ripetendo l'argomentazione già usata, e si conclude perciò che $\omega(A) < 0$, ossia la tesi. \square

Veniamo ora alla stabilizzabilità. Il sistema

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), & t \geq 0 \\ y(0) = x, \end{cases} \quad (1.5)$$

ovvero la coppia (A, B) , è *stabilizzabile* se esiste una matrice K ($m \times n$) tale che $A + BK$ sia stabile. In altre parole, la stabilizzabilità equivale all'esistenza di un controllo *feedback stabilizzante* $u(t) = Ky(t)$, tale che ogni soluzione del sistema $y' = (A + BK)y$ sia infinitesima per $t \rightarrow +\infty$.

Il sistema è *completamente stabilizzabile* se per ogni $\omega > 0$ esistono una matrice K ($m \times n$) ed una costante positiva M tali che ogni soluzione del sistema $y' = (A + BK)y$ verifichi

$$|y(t)|_n \leq M e^{-\omega t} |x|_n.$$

Si ha il seguente risultato:

Teorema 1.5.5 *Sono fatti equivalenti per il sistema (1.5):*

- (i) (A, B) è *completamente stabilizzabile*;
- (ii) (A, B) è *controllabile*;
- (iii) *per ogni polinomio $p(\lambda)$ di grado n , monico, a coefficienti reali, esiste una matrice K ($m \times n$), tale che $p(\lambda)$ coincide col polinomio caratteristico di $A + BK$.*

Per provare questo teorema ci occorrono alcuni argomenti collaterali.

1.5.1 Sistemi dinamici equivalenti

Due sistemi

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), & t \geq 0 \\ y(0) = x, \end{cases} \quad \begin{cases} z'(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}v(t), & t \geq 0 \\ z(0) = \xi \end{cases}$$

si dicono *equivalenti* se esistono due matrici non singolari P ($n \times n$) e S ($m \times m$) tali che

$$z = Py, \quad v = Su, \quad \xi = Px, \quad \tilde{A} = PAP^{-1}, \quad \tilde{B} = PBS^{-1}.$$

In particolare, le matrici A e \tilde{A} sono simili. Si noti che (A, B) è controllabile se e solo se (\tilde{A}, \tilde{B}) è controllabile: infatti le due matrici

$$(B|AB|\dots|A^{n-1}B), \quad (\tilde{B}|\tilde{A}\tilde{B}|\dots|\tilde{A}^{n-1}\tilde{B})$$

hanno lo stesso rango, perché nella seconda compaiono in più P e P^{-1} , che hanno rango n .

Nel caso speciale in cui lo spazio dei controlli è unidimensionale ($m = 1$), vale il seguente enunciato:

Proposizione 1.5.6 *Sia A una matrice $n \times n$ e sia b un vettore $n \times 1$. Supponiamo che il sistema*

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + bu(t), & t \geq 0 \\ y(0) = x, \end{cases}$$

sia controllabile. Allora esso è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \eta'(t) = \tilde{A}\eta(t) + \tilde{b}u(t), & t \geq 0 \\ \eta(0) = \eta^0, \end{cases}$$

ove

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

\tilde{A} è la matrice compagna di A , i numeri a_1, \dots, a_n sono i coefficienti del polinomio caratteristico $P_n(\cdot)$ di A ,

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n,$$

mentre $\eta^0 \in \mathbb{R}^n$ è un vettore opportuno.

Dimostrazione Osserviamo che \tilde{A} e $\tilde{b}u(\cdot)$ sono la matrice ed il termine noto del sistema differenziale $n \times n$ del primo ordine che si ottiene a partire dall'equazione differenziale di ordine n

$$\begin{cases} z^{(n)}(t) + a_1z^{(n-1)}(t) + \dots + a_nz(t) = u(t), & t \geq 0, \\ z(0) = \eta_1^0, \dots, z^{(n-1)}(0) = \eta_n^0. \end{cases}$$

Iniziamo la dimostrazione osservando che dal teorema di Cayley-Hamilton si ha

$$0 = p_A(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_n I_n,$$

e in particolare

$$A^n b = - \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^{n-k} b.$$

Poiché, per ipotesi, $R(b|Ab|\dots|A^{n-1}b) = n$, i vettori

$$v_k = A^{k-1} b, \quad k = 1, \dots, n,$$

sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di \mathbb{R}^n .

Sia $y(t)$ la soluzione del nostro sistema, con $u(\cdot)$ e x fissati. Rispetto alla base v_1, \dots, v_n si avrà

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \xi_k(t) v_k, \quad x = \sum_{k=1}^n \xi_k^0 v_k;$$

il vettore $\xi^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$ sarà la condizione iniziale per il sistema equivalente che stiamo costruendo, mentre $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$ ne sarà l'incognita. Deriviamo $y(t)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \xi'_k(t) v_k &= y'(t) = Ay(t) + bu(t) = \sum_{k=1}^n \xi_k(t) Av_k + bu(t) = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k(t) v_{k+1} - \xi_n(t) \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^{n-k} b + bu(t) = \\ &= \sum_{h=2}^n \xi_{h-1}(t) v_h - \xi_n(t) \sum_{k=1}^{n-1} a_k v_{n-k+1} + u(t) v_1 = \\ &= \sum_{h=2}^n \xi_{h-1}(t) v_h - \xi_n(t) \sum_{h=2}^n a_{n-h+1} v_h + u(t) v_1. \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{cases} \xi'_1(t) = -a_n \xi_n(t) + u(t) \\ \xi'_h(t) = \xi_{h-1}(t) - a_{n-h+1} \xi_n(t), \quad h = 2, \dots, n \\ \xi(0) = \xi^0, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \xi'(t) = \bar{A} \xi(t) + \bar{b} u(t) \\ \xi(0) = \xi^0, \end{cases}$$

ove

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I sistemi (A, b) e (\bar{A}, \bar{b}) sono equivalenti, con

$$P = (b|Ab|\dots|A^{n-1}b)^{-1},$$

e in particolare $\bar{b} = e_1 = Pb$ e $p_A(\lambda) = p_{\bar{A}}(\lambda)$.

Adesso osserviamo che $\tilde{A} = \bar{A}^t$; inoltre, poiché $p_{\bar{A}}$ ha coefficienti reali, \bar{A} e \tilde{A} hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità, e in definitiva hanno la stessa forma di Jordan. Dunque \bar{A} e \tilde{A} sono matrici simili, ossia esiste una matrice $n \times n$ invertibile Q tale che $Q\tilde{A}Q^{-1} = \bar{A}$. Per avere la tesi, però, ci occorre anche che risulti $Q\tilde{b} = \bar{b}$, cioè $Qe_n = e_1$. Ebbene, si può verificare che le due condizioni

$$Q\tilde{A}Q^{-1} = \bar{A}, \quad Qe_n = e_1 \quad (1.6)$$

caratterizzano completamente Q , il che ci permette di concludere la dimostrazione, poiché la scelta di tale Q rende i sistemi (A, b) e (\tilde{A}, \tilde{b}) equivalenti.

Proviamo che la condizione (1.6) caratterizza Q . In effetti, analizzando \tilde{A} e \bar{A} si verifica successivamente che:

- $e_{n-1} - a_1e_n = \tilde{A}e_n = Q^{-1}\bar{A}Qe_n = Q^{-1}\bar{A}e_1 = Q^{-1}e_2$, da cui

$$Qe_{n-1} = e_2 + a_1Qe_n = e_2 + a_1e_1;$$

- $e_{n-2} - a_2e_n = \tilde{A}e_{n-1} = Q^{-1}\bar{A}Qe_{n-1} = Q^{-1}\bar{A}(e_2 + a_1e_1) = Q^{-1}(e_3 + a_2e_2)$, da cui

$$Qe_{n-2} = e_3 + a_1e_2 + a_2Qe_n = e_3 + a_1e_2 + a_2e_1;$$

- similmente, per induzione, per $j = 1, 2, \dots, n-1$ troviamo

$$Qe_{n-j} = e_{j+1} + a_1e_j + a_2e_{j-1} + \dots + a_je_1 = e_{j+1} + \sum_{k=1}^j a_{j+1-k}e_k;$$

in particolare

$$Qe_1 = e_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}e_k.$$

Dunque, dalle relazioni (1.6) segue

$$Q = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Viceversa, non è difficile verificare che questa matrice Q soddisfa ovviamente $Qe_n = e_1$ ed inoltre

$$Q\tilde{A} = \bar{A}Q = \begin{pmatrix} -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & a_{n-3} & a_{n-4} & \cdots & a_1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui $Q\tilde{A}Q^{-1} = \bar{A}$. La proposizione 1.5.6 è provata. \square

1.5.2 Decomposizione di Kalman

Consideriamo un sistema *non* controllabile

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), & t \geq 0 \\ y(0) = x; \end{cases}$$

dunque

$$\dim R(B|AB|\cdots|A^{n-1}B) < n.$$

Proposizione 1.5.7 (decomposizione di Kalman) *Supponiamo che $\dim R(B|AB|\cdots|A^{n-1}B) = \ell < n$. Allora esiste una matrice P , $n \times n$, non singolare, tale che*

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad PB = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ove A_{11} è $\ell \times \ell$, A_{12} è $\ell \times (n - \ell)$, A_{22} è $(n - \ell) \times (n - \ell)$, B_1 è $\ell \times m$; inoltre il sistema (A_{11}, B_1) è controllabile.

Il senso di questa proposizione è che, nella nuova base indotta da P , il sistema si decompone in una *parte controllabile*

$$\xi_1' = A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + B_1u$$

ed una *parte incontrollabile* $\xi_2' = A_{22}\xi_2$.

Dimostrazione Poniamo

$$E_0 = R(B|AB|\cdots|A^{n-1}B) = \{Bu_1 + ABu_2 + \cdots + A^{n-1}Bu_n : u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m\} :$$

il sottospazio E_0 ha dimensione ℓ , contiene $R(B)$ ed è invariante per A in virtù del teorema di Cayley-Hamilton. Sia E_1 un sottospazio di dimensione $n - \ell$ tale che $E_0 \oplus E_1 = \mathbb{R}^n$; sia $\{v_1, \dots, v_\ell\}$ una base in E_0 e sia $\{v_{\ell+1}, \dots, v_n\}$ una base in E_1 . Se P è la matrice di transizione tra le basi $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$, avremo, posto $\tilde{A} = PAP^{-1}$, $\tilde{B} = PB$ e $\xi = Py$:

$$\tilde{A}\xi = \tilde{A} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 \\ A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}u = \begin{pmatrix} B_1u \\ B_2u \end{pmatrix}.$$

Ma E_0 è invariante per A , e dunque

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\xi_1 \\ A_{21}\xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall \xi_1 \in E_0,$$

ossia $A_{21} = 0$; inoltre $E_0 \supseteq R(B)$, da cui

$$\tilde{B}u = \begin{pmatrix} B_1u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall u \in \mathbb{R}^m,$$

ovvero $B_2 = 0$. In conclusione, essendo $\dim E_0 = \ell$, la relazione

$$\begin{aligned} E_0 &= R(B|AB|\dots|A^{n-1}B) = R(P(B|AB|\dots|A^{n-1}B)) = R(\tilde{B}|\tilde{A}\tilde{B}|\dots|\tilde{A}^{n-1}\tilde{B}) = \\ &= R \begin{pmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \dots & A_{11}^{n-1}B_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = R(B_1|A_{11}B_1|\dots|A_{11}^{n-1}B_1) \end{aligned}$$

prova che (A_{11}, B_1) è controllabile. \square

Dimostrazione del teorema 1.5.5

(i) \implies (ii) Supponiamo per assurdo che il sistema (1.5) non sia controllabile: allora

$$\dim R(B|AB|\dots|A^{n-1}B) = \ell < n,$$

e per la proposizione 1.5.7 esiste una matrice P non singolare, tale che

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad PB = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e (A_{11}, B_1) è controllabile.

Osserviamo che, se K è una matrice $m \times n$, detto p_{A+BK} il polinomio caratteristico di $A + BK$ si ha

$$\begin{aligned} p_{A+BK}(\lambda) &= \det(\lambda I_n - (A + BK)) = \det(\lambda I_n - (PAP^{-1} - PBKP^{-1})) = \\ &= \det \left(\lambda I_n - \left(\tilde{A} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} KP^{-1} \right) \right) = \quad [\text{posto } K_1 = KP^{-1}] \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda I_\ell - (A_{11} + B_1K_1) & -A_{12} \\ 0 & \lambda I_{n-\ell} - A_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \det(\lambda I_\ell - (A_{11} + B_1K_1)) \det(\lambda I_{n-\ell} - A_{22}). \end{aligned}$$

Ciò mostra che $\sigma(A_{22}) \subseteq \sigma(A + BK)$, e pertanto

$$\omega_2 := \sup\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A_{22})\} \leq \sup\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A + BK)\} =: \omega_K.$$

Applicando l'ipotesi (i) di completa stabilizzabilità, scelto $\omega > |\omega_2|$ esistono un numero $M > 0$ ed una matrice K ($m \times n$), tali che per ogni $t \geq 0$ risulti $|y(t)| \leq Me^{-\omega t}|x|_n$ per qualunque soluzione del sistema $y' = (A + BK)y$, ove $x = y(0)$. Sia allora λ_0 un

autovalore di $A + BK$ con $\operatorname{Re} \lambda_0 = \omega_K$ e sia $v_0 \in \mathbb{R}^n$ un autovettore non nullo relativo a λ_0 : la soluzione $y_0(t) = e^{\lambda_0 t} v_0$ verifica

$$|y_0(t)| = e^{\operatorname{Re} \lambda_0 t} |v_0|_n \leq M e^{-\omega t} |v_0|_n,$$

da cui $\omega_2 \leq \omega_K = \operatorname{Re} \lambda_0 \leq -\omega < -|\omega_2|$, assurdo.

(iii) \implies **(i)** Sia $\omega > 0$ e poniamo

$$p(\lambda) = (\lambda + \omega + \varepsilon)^n,$$

ove $\varepsilon > 0$, cosicché l'unica radice di p è reale e minore di $-\omega$. Per ipotesi, esiste una matrice K ($m \times n$), tale che $p_{A+BK} = p$. Quindi

$$\sup\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A + BK)\} < -\omega;$$

ne segue che (A, B) è completamente stabilizzabile.

(ii) \implies **(iii)** Per provare questa implicazione ci occorrono tre passi.

Passo 1 (caso $m = 1$) Supponiamo che il sistema

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + bu(t), & t \geq 0 \\ y(0) = x, \end{cases}$$

ove b è un vettore $n \times 1$, sia controllabile. Allora, per la proposizione 1.5.6, anche il sistema

$$\begin{cases} z'(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{b}u(t), & t \geq 0 \\ z(0) = z_0, \end{cases}$$

ove \tilde{A} è la matrice compagna di A , $\tilde{b} = e_n$ e z_0 è il trasformato di x , è controllabile, e in particolare

$$\det(\lambda I_n - \tilde{A}) = p_A(\lambda) := \lambda^n + \sum_{h=1}^n a_h \lambda^{n-h}.$$

Sia

$$p(\lambda) = \lambda^n + \sum_{h=1}^n \alpha_h \lambda^{n-h}$$

un generico polinomio di grado n , monico, a coefficienti reali. Consideriamo la matrice $1 \times n$

$$\tilde{K} = (a_n - \alpha_n, \dots, a_1 - \alpha_1);$$

si ha allora

$$\tilde{b}\tilde{K} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ a_n - \alpha_n & \cdots & a_1 - \alpha_1 \end{pmatrix},$$

e dunque

$$\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

In particolare

$$\det(\lambda I_n - (\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{K})) = p(\lambda).$$

Detta M la matrice invertibile tale che $MAM^{-1}\tilde{A}$ e $Mb = \tilde{b}$, posto $K = \tilde{K}M$ si ha

$$M^{-1}(\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{K})M = M^{-1}\tilde{A}M + M^{-1}\tilde{b}\tilde{K}M = A + BK,$$

e pertanto

$$p(\lambda) = p_{\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{K}}(\lambda) = p_{A+BK}(\lambda).$$

Ciò prova (iii) nel caso $m = 1$, e conclude il passo 1.

Passo 2 (riduzione al caso $m = 1$) Dimostriamo che se (A, B) è controllabile, allora esistono una matrice L ($m \times n$) ed un vettore $v \in \mathbb{R}^m$ tali che il sistema $(A + BL, Bv)$ (in cui lo spazio dei controlli è unidimensionale) sia controllabile.

In virtù della controllabilità, esiste $v \in \mathbb{R}^m$ tale che $Bv \neq 0$.

Lemma 1.5.8 *Esistono $u_1, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^m$ tali che, posto*

$$e_1 = Bv, \quad e_{j+1} = Ae_j + Bu_j, \quad 1 \leq j \leq n-1,$$

la famiglia $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base di \mathbb{R}^n .

Dimostrazione Ragionando per assurdo, supponiamo che, posto

$$k = \max \{h \in \{2, \dots, n\} : \exists u_1, \dots, u_{h-1} \in \mathbb{R}^m \text{ per i quali } e_1, \dots, e_h \text{ sono linearmente indipendenti}\},$$

risulti $k < n$. Sia $E_0 = \text{span}[e_1, \dots, e_n]$; per definizione di k , si ha $\dim E_0 = k$ e inoltre $Ae_k + Bu \in E_0$ per ogni $u \in \mathbb{R}^m$. Scelto $u = 0$, si ricava $Ae_k \in E_0$, e di conseguenza $Bu \in E_0$ per ogni $u \in \mathbb{R}^m$; ne segue $e_1 \in E_0$ e $Ae_j \in E_0$ per $j = 1, \dots, k$. Pertanto, E_0 è invariante per A e contiene $R(B)$. Ma allora, per la controllabilità di (A, B) deve essere $E_0 = \mathbb{R}^n$, il che è assurdo. \square

Sia dunque $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base di \mathbb{R}^n fornita dal lemma 1.5.8, e sia u_n un arbitrario elemento di \mathbb{R}^n . Poniamo

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad Le_j = u_j \text{ per } j = 1, \dots, n.$$

Allora

$$e_{j+1} = Ae_j + Bu_j = (A + BL)e_j, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

da cui

$$e_{j+1} = (A + BL)^j e_1 = (A + BL)^j Bv, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Perciò la matrice

$$(Bv|(A + BL)Bv|\cdots|(A + BL)^{n-1}BV) = (e_1|e_2|\cdots|e_n)$$

ha rango n , ossia $(A + BL, Bv)$ è controllabile. Ciò conclude il passo 2.

Passo 3 (conclusione) Sia p un polinomio monico, a coefficienti reali, di grado n . Siano L e v dati dal passo 2; allora il sistema

$$\begin{cases} y'(t) = (A + BL)y(t) + (Bv)u(t), & t \geq 0 \\ y(0) = x, \end{cases}$$

ove $u(\cdot)$ è un controllo unidimensionale, è controllabile. Dal passo 1 ricaviamo che esiste una matrice k ($1 \times n$) tale che

$$p_{A+BL+(Bv)k}(\lambda) \equiv p(\lambda).$$

La tesi di (iii) segue ponendo

$$K = L + vk,$$

e ciò conclude la dimostrazione del teorema 1.5.5. \square

Capitolo 2

Controlli ottimali: condizioni necessarie

2.1 Introduzione

Ci occuperemo dei controlli di un sistema dinamico che sono *ottimali* rispetto ad un determinato criterio. Sia dunque

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), u(t)), & t \in [0, T] \\ y(0) = x \end{cases}$$

un generico sistema dinamico; cercheremo un controllo $u(\cdot)$ che minimizzi il *funzionale costo*

$$J(x, u) = \int_0^T g(y(t), u(t)) dt + G(y(T)),$$

ove f, g, G sono funzioni continue sul loro dominio. Questo problema di controllo ottimale è in *orizzonte finito*, ma si può anche analizzare il problema in *orizzonte infinito*, vale a dire il caso di un sistema

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), u(t)), & t \geq 0 \\ y(0) = x \end{cases}$$

e di un costo

$$J(x, u) = \int_0^\infty g(y(t), u(t)) dt.$$

In questo caso occorrerà fare qualche ulteriore ipotesi su f e g affinché esista la soluzione $y(\cdot)$ in $[0, \infty[$ ed esista almeno un controllo $u(\cdot)$ che renda finito il funzionale costo.

Per questo tipo di problemi forniremo condizioni *necessarie* molto generali per l'esistenza di controlli ottimali, valide non solo in \mathbb{R}^n ma anche nel caso di dimensione infinita, ed anche condizioni *sufficienti* (solo in dimensione finita).

2.2 Il teorema di Pontrjagin

Il teorema di Pontrjagin fornisce condizioni *necessarie* per l'esistenza di (almeno) un controllo ottimale, che generalizzano il teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Per

introdurre il tema, abbiamo bisogno di alcune definizioni e considerazioni preliminari. Sia X uno spazio di Banach (di dimensione finita o infinita). Sia F un sottoinsieme di X e sia \bar{x} un punto della chiusura \bar{F} di F .

Definizione 2.2.1 Il cono normale a F in \bar{x} è il sottoinsieme del duale X^* definito da

$$N(F, \bar{x}) = \{\varphi \in X^* : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \varphi(x - \bar{x}) \leq \varepsilon \|x - \bar{x}\|_X \quad \forall x \in F \cap B(\bar{x}, \delta)\},$$

ove $B(\bar{x}, \delta) = \{x \in X; \|x - \bar{x}\|_X < \delta\}$.

Se $F = \{\bar{x}\}$, si ottiene $N(F, \bar{x}) = X^*$; se \bar{x} è punto d'accumulazione per F , possiamo scrivere

$$N(F, \bar{x}) = \left\{ \varphi \in X^* : \limsup_{x \rightarrow \bar{x}, x \in F \setminus \{\bar{x}\}} \frac{\varphi(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|_X} \leq 0 \right\}.$$

Definizione 2.2.2 Il cono tangente a F in \bar{x} è il sottoinsieme di X definito da

$$\begin{aligned} T(F, \bar{x}) &= \{u \in X : \exists \{u_n\} \subset X, \exists \{t_n\} \subset \mathbb{R} : u_n \rightarrow u, t_n \rightarrow 0^+, \bar{x} + t_n u_n \in F\} = \\ &= \{u \in X : \forall \delta > 0 \exists t \in]0, \delta[, \exists v \in B(u, \delta) : \bar{x} + tv \in F\}. \end{aligned}$$

Il legame fra cono normale e cono tangente è illustrato dalla proposizione che segue.

Proposizione 2.2.3 Risulta per $F \subseteq X$ e per $\bar{x} \in \bar{F}$

$$N(F, \bar{x}) \subseteq \{\varphi \in X^* : \varphi(u) \leq 0 \quad \forall u \in T(F, \bar{x})\}.$$

Dimostrazione Sia $\varphi \in N(F, \bar{x})$ e sia $u \in T(F, \bar{x})$. Scelte $\{u_n\}$ e $\{t_n\}$ secondo la definizione 2.2.2, si ha

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t_n u_n)}{t_n \|u_n\|_X} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u_n)}{\|u_n\|_X} \leq 0.$$

Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\varphi(u_n) \leq \varepsilon \|u_n\|_X \quad \forall n \geq \nu,$$

e per $n \rightarrow \infty$

$$\varphi(u) \leq \varepsilon \|u\|_X \quad \forall u \in T(F, \bar{x}).$$

Siccome ε è arbitrario, si deduce infine

$$\varphi(u) \leq 0 \quad \forall u \in T(F, \bar{x}). \quad \square$$

Proposizione 2.2.4 (teorema di Fermat) Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile secondo Fréchet in un punto $\bar{x} \in F$. Allora

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) = \min_F f &\implies -f'(\bar{x}) \in N(F, \bar{x}); \\ f(\bar{x}) = \max_F f &\implies f'(\bar{x}) \in N(F, \bar{x}). \end{aligned}$$

Dimostrazione Dalla formula di Taylor centrata in \bar{x} segue per $x \in F$

$$f(x) = f(\bar{x}) + [f'(\bar{x})](x - \bar{x}) + o(\|x - \bar{x}\|_X) \quad \text{per } x \rightarrow \bar{x};$$

quindi

$$-[f'(\bar{x})](x - \bar{x}) = f(\bar{x}) - f(x) + o(\|x - \bar{x}\|_X).$$

Pertanto, se \bar{x} è punto di minimo per f su F , si ricava

$$-[f'(\bar{x})](x - \bar{x}) \leq o(\|x - \bar{x}\|_X) \quad \text{per } x \rightarrow \bar{x},$$

da cui

$$\limsup_{x \rightarrow \bar{x}, x \in F \setminus \{\bar{x}\}} \frac{-[f'(\bar{x})](x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|_X} \leq 0.$$

Se invece \bar{x} è punto di massimo per f su F , si ha

$$[f'(\bar{x})](x - \bar{x}) = f(x) - f(\bar{x}) + o(\|x - \bar{x}\|_X) \leq o(\|x - \bar{x}\|_X) \quad \text{per } x \rightarrow \bar{x},$$

da cui

$$\limsup_{x \rightarrow \bar{x}, x \in F \setminus \{\bar{x}\}} \frac{[f'(\bar{x})](x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|_X} \leq 0. \quad \square$$

Osservazione 2.2.5 Le nozioni di cono tangente e di cono normale sono *locali*: in altre parole, se $\bar{x} \in \bar{F} \cap \bar{G}$, ed esiste un intorno V di \bar{x} tale che $F \cap V = G \cap V$, allora $N(F, \bar{x}) = N(G, \bar{x})$. La verifica è immediata per definizione.

Proposizione 2.2.6 Siano X, Y spazi di Banach. Se $F \subseteq X$, $G \subseteq Y$, $\bar{x} \in \bar{F}$ e $\bar{y} \in \bar{G}$, allora

$$N(F \times G, (\bar{x}, \bar{y})) = N(F, \bar{x}) \times N(G, \bar{y}).$$

Dimostrazione Sia $\psi \in N(F \times G, (\bar{x}, \bar{y}))$: allora sarà $\psi \in (X \times Y)^* = X^* \times Y^*$, ossia $\psi = (\varphi, \eta)$ con $\varphi \in X^*$ e $\eta \in Y^*$, e

$$\limsup_{(x,y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}), (x,y) \in (F \times G) \setminus \{(\bar{x}, \bar{y})\}} \frac{\varphi(x - \bar{x}) + \eta(y - \bar{y})}{\sqrt{\|x - \bar{x}\|_X^2 + \|y - \bar{y}\|_Y^2}} \leq 0.$$

Quindi

$$\limsup_{x \rightarrow \bar{x}, x \in F \setminus \{\bar{x}\}} \frac{\varphi(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|_X} \leq 0, \quad \limsup_{y \rightarrow \bar{y}, y \in G \setminus \{\bar{y}\}} \frac{\eta(y - \bar{y})}{\|y - \bar{y}\|_Y} \leq 0,$$

e pertanto $\psi = (\varphi, \eta) \in N(F, \bar{x}) \times N(G, \bar{y})$.

Viceversa, siano $\varphi \in N(F, \bar{x})$ e $\eta \in N(G, \bar{y})$: posto $\psi = (\varphi, \eta)$ si ha

$$\begin{aligned} & \limsup_{(x,y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}), (x,y) \in (F \times G) \setminus \{(\bar{x}, \bar{y})\}} \frac{\varphi(x - \bar{x}) + \eta(y - \bar{y})}{\sqrt{\|x - \bar{x}\|_X^2 + \|y - \bar{y}\|_Y^2}} \leq \\ & \leq \limsup_{x \rightarrow \bar{x}, x \in F \setminus \{\bar{x}\}} \frac{\varphi(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|_X} + \limsup_{y \rightarrow \bar{y}, y \in G \setminus \{\bar{y}\}} \frac{\eta(y - \bar{y})}{\|y - \bar{y}\|_Y} \leq 0, \end{aligned}$$

e dunque $\psi = (\varphi, \eta) \in N(F \times G, (\bar{x}, \bar{y}))$. \square

Proposizione 2.2.7 Siano $F, G \subseteq X$ con $F \subseteq G$, e sia $\bar{x} \in F$; allora $N(F, \bar{x}) \supseteq N(G, \bar{x})$. Inoltre, se $F = \bigcup_{i=1}^k F_i$ e $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^k F_i$, allora $N(F, \bar{x}) = \bigcap_{i=1}^k N(F_i, \bar{x})$.

Dimostrazione Il primo enunciato è evidente per definizione. Da ciò segue l'inclusione \subseteq del secondo enunciato; l'altra è conseguenza della definizione. \square

Dopo queste proprietà elementari, andiamo ad analizzare come cambia il cono normale per trasformazioni differenziabili. Qui interviene massicciamente la teoria delle applicazioni invertibili e quella, collegata, della risoluzione di equazioni non lineari.

Teorema 2.2.8 (di Kantorovich) Siano X, Y spazi di Banach, sia $W \subseteq X$ un aperto, sia $f : W \rightarrow Y$ un'applicazione continua. Sia poi $x_0 \in W$, sia $B(x_0, r) \subseteq W$ e sia infine $A : B(x_0, r) \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ tale che:

- (i) per ogni $x \in B(x_0, r)$ esista un'applicazione $B(x) : Y \rightarrow X$, inversa destra di $A(x)$, per la quale risulta $\|B(x)u\|_X \leq \beta \|u\|_Y$ per ogni $u \in Y$, con $\beta > 0$ indipendente da x ;
- (ii) per ogni $x, w \in B(x_0, r)$ si abbia $\|f(w) - f(x) - A(x)(w - x)\|_Y \leq \alpha \|w - x\|_X$, con $0 < \alpha < \frac{1}{\beta}$ indipendente da x, w .

Allora, se $\|f(x_0)\|_Y < \frac{1}{\beta} (1 - \alpha\beta)r$, esiste $\bar{x} \in B(x_0, r)$ tale che $f(\bar{x}) = 0$; inoltre, tale \bar{x} viene selezionato col metodo di Newton, vale a dire la successione di punto iniziale x_0 , data da

$$x_{n+1} = x_n - B(x_n)f(x_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

è ben definita, converge a \bar{x} e verifica

$$\|x_n - \bar{x}\|_X \leq r(\alpha\beta)^n, \quad \|x_n - \bar{x}\|_X \leq \frac{\beta}{1 - \alpha\beta} \|f(x_0)\|_Y < r \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione Proviamo per induzione le relazioni

$$\{x_n\} \subset B(x_0, r), \quad \|x_{n+1} - x_n\|_X \leq \beta(\alpha\beta)^n \|f(x_0)\|_Y, \quad \|f(x_n)\|_Y \leq (\alpha\beta)^n \|f(x_0)\|_Y.$$

Per $n = 0$ è tutto ovvio. Se le tre condizioni valgono per $0 \leq n < N$, allora si ha

$$\begin{aligned} \|x_N - x_0\|_X &\leq \sum_{n=0}^{N-1} \|x_{n+1} - x_n\|_X = \sum_{n=0}^{N-1} \|B(x_n)f(x_n)\|_X \leq \\ &\leq \beta \sum_{n=0}^{N-1} \|f(x_n)\|_Y \leq \beta \sum_{n=0}^{N-1} (\alpha\beta)^n \|f(x_0)\|_Y \leq \frac{\beta}{1 - \alpha\beta} \|f(x_0)\|_Y < r; \end{aligned}$$

inoltre, essendo, per definizione di $B(x_{N-1})$, $f(x_{N-1}) + A(x_{N-1})(x_N - x_{N-1}) = 0$, si ha anche

$$\begin{aligned} \|f(x_N)\|_Y &= \|f(x_N) - f(x_{N-1}) - A(x_{N-1})(x_N - x_{N-1})\|_Y \leq \\ &\leq \alpha \|x_N - x_{N-1}\|_X \leq \alpha\beta \|f(x_{N-1})\|_Y \leq (\alpha\beta)^N \|f(x_0)\|_Y, \end{aligned}$$

ed infine

$$\|x_{N+1} - x_N\|_X \leq \beta \|f(x_N)\|_Y \leq \beta(\alpha\beta)^N \|f(x_0)\|_Y.$$

Le tre condizioni sono dimostrate. Essendo $\alpha\beta < 1$, la successione $\{x_n\}$ è di Cauchy in X e quindi ha limite \bar{x} ; si ha

$$\|\bar{x} - x_0\|_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_X \leq \frac{\beta}{1 - \alpha\beta} \|f(x_0)\|_Y < r,$$

e per continuità

$$f(x_n) \rightarrow 0 = f(\bar{x}).$$

Finalmente, proviamo le due ultime proprietà:

$$\begin{aligned} \|x_n - \bar{x}\|_X &= \lim_{p \rightarrow \infty} \|x_n - x_p\|_X \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{p-1} \|x_{k+1} - x_k\|_X \leq \\ &\leq \|f(x_0)\|_Y \beta \sum_{k=n}^{\infty} (\alpha\beta)^k = \frac{\beta(\alpha\beta)^n}{1 - \alpha\beta} \|f(x_0)\|_Y < r(\alpha\beta)^n, \end{aligned}$$

ed anche

$$\|x_n - \bar{x}\|_X \leq \frac{\beta(\alpha\beta)^n}{1 - \alpha\beta} \|f(x_0)\|_Y \leq \frac{\beta}{1 - \alpha\beta} \|f(x_0)\|_Y < r. \quad \square$$

Quello che segue è un teorema di invertibilità locale in spazi di Banach.

Teorema 2.2.9 (di Lyusternik-Graves) *Siano X, Y spazi di Banach, sia $W \subseteq X$ un aperto, sia $g : W \rightarrow Y$ un'applicazione differenziabile secondo Fréchet in $B(\bar{x}, r_0) \subseteq W$, con $g'(x)$ continua in \bar{x} e $g'(\bar{x})$ surgettiva. Allora esistono $\rho \in]0, \frac{r_0}{2}[$, $\sigma > 0$ e $c > 0$ tali che per ogni $w \in B(\bar{x}, \rho)$ e per ogni $y \in B(g(\bar{x}), \sigma)$ vi è un $x \in B(\bar{x}, \frac{r_0}{2})$ per il quale*

$$g(x) = y, \quad \|x - w\|_X \leq c \|y - g(w)\|_Y.$$

Dimostrazione Faremo uso del teorema di Kantorovich. Proviamo anzitutto il seguente enunciato:

esiste $\beta > 0$ tale che, posto $A = g'(\bar{x})$, per ogni $y \in Y$ vi è un $w \in X$ per cui $Aw = y$ e $\|w\|_X \leq \beta \|y\|_Y$.

Detti $B = \{x \in X : \|x\|_X < 1\}$ e $S_\delta = \{y \in Y : \|y\|_Y < \delta\}$, essendo A un'applicazione aperta esiste $\delta > 0$ tale che $S_\delta \subseteq A(B)$. Se $y = 0$, allora $w = 0$ verifica l'enunciato sopra scritto; se $y \neq 0$, sia $t = \frac{\delta}{2\|y\|_Y}$: allora $ty \in S_\delta$ e quindi esiste $z \in B$ tale che $Az = ty$. Dunque, posto $w = \frac{z}{t}$, si ha $w \in X$, $Aw = y$ e $\|w\|_X \leq \frac{1}{t} = \frac{2}{\delta} \|y\|_Y$. Ne segue che l'enunciato sopra scritto vale con $\beta = \frac{2}{\delta}$.

Si noti che l'applicazione $y \mapsto w$ definisce un'inversa destra $h : Y \rightarrow X$ di $A = g'(\bar{x})$, tale che $\|h(y)\|_X \leq \beta \|y\|_Y$ per ogni $y \in Y$.

Ciò premesso, sia $\alpha \in]0, \frac{1}{\beta}[$ e sia $r \in]0, \frac{r_0}{2}[$ tale che

$$\|g(w) - g(x) - g'(x)(w - x)\|_Y \leq \alpha \|w - x\|_X \quad \forall w, x \in B(\bar{x}, 2r) :$$

tale r esiste per la continuità di $g'(x)$ in \bar{x} . Scegliamo adesso $\sigma, \tau > 0$ con

$$\sigma + \tau < \frac{1}{\beta}(1 - \alpha\beta)r;$$

per continuità di g , esiste $\rho \in]0, r]$ tale che $g(w) \in B(g(\bar{x}), \tau)$ per $w \in B(g(\bar{x}), \sigma)$, Poniamo

$$f : B(\bar{x}, r) \rightarrow Y, \quad f(x) = g(x) - y,$$

e mostriamo che f verifica le ipotesi del teorema 2.2.8 di Kantorovich. Ovviamente f è continua, e

$$\|f(w)\|_Y = \|g(w) - g(\bar{x}) + g(\bar{x}) - y\|_Y < \tau + \sigma < \frac{1}{\beta}(1 - \alpha\beta)r.$$

Inoltre, per ogni $x, x' \in B(w, r)$,

$$\|f(x') - f(x) - g'(\bar{x})(x' - x)\|_Y = \|g(x') - g(x) - g'(\bar{x})(x' - x)\|_Y < \alpha\|x' - x\|_X,$$

in quanto

$$\|x' - \bar{x}\|_X \leq \|x' - w\|_X + \|w - \bar{x}\|_X < r + \rho \leq 2r,$$

e similmente $\|x - \bar{x}\|_X < 2r$.

Dunque, per il teorema di Kantorovich esiste $x \in B(w, r)$ tale che $f(x) = 0$, ossia $g(x) = y$, ed inoltre $\|x - w\|_X \leq \frac{\beta}{1 - \alpha\beta}\|f(w)\|_Y < r$, vale a dire

$$\|x - w\|_X \leq \frac{\beta}{1 - \alpha\beta}\|y - g(w)\|_Y.$$

Per l'arbitrarietà di $w \in B(\bar{x}, \rho)$ e $y \in B(g(\bar{x}), \sigma)$ si ha la tesi con $c = \frac{\beta}{1 - \alpha\beta}$, \square

Vediamo con i prossimi risultati, come promesso, come cambia il cono normale per trasformazioni differenziabili.

Proposizione 2.2.10 *Siano X, Y spazi di Banach, sia $W \subseteq X$ un aperto, e sia $g : W \rightarrow Y$ un'applicazione differenziabile secondo Fréchet nel punto $\bar{x} \in W$. Sia B un sottoinsieme di W contenente \bar{x} e sia $C \subseteq Y$.*

(i) *Se $B \subseteq g^{-1}(C)$, allora $N(C, g(\bar{x})) \subseteq [g'(\bar{x})^*]^{-1}(N(B, \bar{x}))$.*

(ii) *Se $B = g^{-1}(C)$ e g è differenziabile secondo Fréchet in $B(\bar{x}, r_0) \subseteq W$, con $g'(x)$ continua in \bar{x} e $g'(\bar{x})$ surgettiva, allora $N(C, g(\bar{x})) = [g'(\bar{x})^*]^{-1}(N(B, \bar{x}))$.*

Dimostrazione (i) Sia $\varphi \in N(C, g(\bar{x}))$: dunque

$$\varphi(y - g(\bar{x})) \leq \omega(\|y - g(\bar{x})\|_Y) \quad \forall y \in C,$$

ove $\frac{\omega(t)}{t} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow 0^+$. Poiché g è differenziabile secondo Fréchet nel punto \bar{x} , si ha

$$g(x) - g(\bar{x}) = [g'(\bar{x})](x - \bar{x}) + \vartheta(x - \bar{x}) \quad \forall x \in B,$$

con $\frac{\|\vartheta(z)\|_Y}{\|z\|_X} \rightarrow 0$ per $z \rightarrow 0$ in X . Sia $x \in B$: allora $g(x) \in C$, e dunque

$$\begin{aligned} [g'(\bar{x})^* \varphi](x - \bar{x}) &= \varphi([g'(\bar{x})](x - \bar{x})) = \varphi(g(x) - g(\bar{x}) - \vartheta(x - \bar{x})) = \\ &= \varphi(g(x) - g(\bar{x})) + \varphi(\vartheta(x - \bar{x})) \leq \omega(\|y - g(\bar{x})\|_Y) + \omega_1(\|x - \bar{x}\|_X), \end{aligned}$$

con $\frac{\omega_1(t)}{t} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow 0^+$. Dato che per x vicino a \bar{x} risulta

$$\|g(x) - g(\bar{x})\|_Y \leq [\|g'(\bar{x})\|_{\mathcal{L}(X,Y)} + 1] \|x - \bar{x}\|_X,$$

si vede immediatamente che esiste $K > 0$ per cui

$$\frac{[g'(\bar{x})^* \varphi](x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|_X} \leq \frac{\omega(K\|x - \bar{x}\|_X)}{\|x - \bar{x}\|_X} + \frac{\omega_1(\|x - \bar{x}\|_X)}{\|x - \bar{x}\|_X},$$

da cui

$$\limsup_{x \rightarrow \bar{x}, x \in B \setminus \{\bar{x}\}} \frac{[g'(\bar{x})^* \varphi](x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|_X} \leq 0.$$

Perciò $\varphi \in [g'(\bar{x})^*]^{-1}(N(B, \bar{x}))$, e (i) è provata.

(ii) Dobbiamo solo provare l'inclusione $N(C, g(\bar{x})) \supseteq [g'(\bar{x})^*]^{-1}(N(B, \bar{x}))$. Anzitutto notiamo che, per il teorema 2.2.9 di Lyusternik-Graves, esistono $c > 0$, $\rho \in]0, \frac{r_0}{2}]$ e $r > 0$ tali che, per ogni $w \in B(\bar{x}, \rho)$ e per ogni $y \in B(g(\bar{x}), r)$ vi è almeno un $x \in B(\bar{x}, \frac{r_0}{2})$ per il quale

$$g(x) = y, \quad \|x - w\|_X \leq c\|y - g(w)\|_Y.$$

Scelto $w = \bar{x}$, per ciascun $y \in B(g(\bar{x}), r)$ denotiamo con x_y uno qualunque degli elementi x per i quali valgono queste relazioni. Dunque

$$x_y \in B \cap B\left(\bar{x}, \frac{r_0}{2}\right), \quad g(x_y) = y, \quad \|x_y - w\|_X \leq c\|y - g(w)\|_Y.$$

Sia allora $\varphi \in [g'(\bar{x})^*]^{-1}(N(B, \bar{x}))$, vale a dire $g'(\bar{x})^* \varphi \in N(B, \bar{x})$: ciò significa

$$\varphi(g'(\bar{x})(x - \bar{x})) = [g'(\bar{x})^* \varphi](x - \bar{x}) \leq \omega(\|x - \bar{x}\|_X) \quad \forall x \in B,$$

con $\frac{\omega(t)}{t} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow 0^+$. Utilizzando la differenziabilità secondo Fréchet di g in \bar{x} , si ha per $y \in C \cap B(g(\bar{x}), r)$

$$\begin{aligned} \varphi(y - g(\bar{x})) &= \varphi(g(x_y) - g(\bar{x})) = \varphi(g'(\bar{x})(x_y - \bar{x}) + \vartheta(x_y - \bar{x})) \leq \\ &\leq \omega_1(\|x_y - \bar{x}\|_X) \leq \omega_1(2c\|y - g(\bar{x})\|_Y) =: \omega_2(\|y - g(\bar{x})\|_Y), \end{aligned}$$

con $\frac{\omega_2(t)}{t} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow 0^*$. Ciò prova che $\varphi \in N(C \cap B(g(\bar{x}), r), g(\bar{x}))$. D'altra parte, risulta

$$N(C \cap B(g(\bar{x}), r), g(\bar{x})) = N(C, g(\bar{x}))$$

in virtù dell'osservazione 2.2.5. Ne segue la tesi. \square

Teorema 2.2.11 (di Lyusternik) *Siano X, Y spazi di Banach, sia $W \subseteq X$ un aperto, sia $g : W \rightarrow Y$ un'applicazione differenziabile secondo Fréchet in un punto $\bar{x} \in W$. Posto $\bar{y} = g(\bar{x})$ e $S = \{x \in W : g(x) = \bar{y}\}$, risulta*

$$N(S, \bar{x}) = [g'(\bar{x})^*](Y^*).$$

Dimostrazione Scegliamo $C = \{\bar{y}\} = g(S)$, cosicché $S = g^{-1}(\bar{y})$. Dalla proposizione 2.2.10 (i) si ha

$$[g'(\bar{x})^*](Y^*) = [g'(\bar{x})^*](N(\{\bar{y}\}, \bar{y})) \subseteq N(S, \bar{x}).$$

Viceversa, sia $\varphi \in N(S, \bar{x})$. Osserviamo che $T(S, \bar{x}) = \ker g'(\bar{x})$: infatti, per definizione di S e di cono tangente,

$$u \in T(S, \bar{x}) \iff \exists t_n \rightarrow 0^+, \exists u_n \rightarrow u \text{ in } X, \text{ con } g(\bar{x} + t_n u_n) = \bar{y};$$

ma

$$g(\bar{x} + t_n u_n) = g(\bar{x}) + [g'(\bar{x})]t_n u_n + o(t_n u_n) \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

e pertanto

$$u \in T(S, \bar{x}) \iff [g'(\bar{x})]t_n u_n = o(t_n u_n) \quad \text{per } n \rightarrow \infty \iff g'(\bar{x}) = 0.$$

Ciò detto, ricordando la proposizione 2.2.3, si ha

$$\varphi(u) \leq 0 \quad \forall u \in \ker g'(\bar{x}) = T(S; \bar{x}),$$

e scambiando u con $-u$, si trova $\varphi(u) = 0$ per ogni $u \in \ker g'(\bar{x})$. \square

Proseguiamo la dimostrazione utilizzando un lemma di analisi funzionale.

Lemma 2.2.12 *Siano X, Y spazi di Banach e sia $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ un operatore surgettivo. Se $\psi \in X^*$ e se $\psi x = 0$ per ogni $x \in \ker A$, allora esiste $T \in Y^*$ tale che*

$$\psi x = T(Ax) \quad \forall x \in X,$$

vale a dire si ha $\psi = A^*T$.

Dimostrazione Sia $y \in Y$ e siano $x, x' \in X$ tali che $Ax = Ax' = y$ (tali x, x' esistono per surgettività). Allora, per ipotesi, $\psi x = \psi x'$, cioè ψ è costante su $A^{-1}(y)$. Poniamo allora

$$Ty = \psi x \quad \forall x \in A^{-1}(y).$$

Questa è una buona definizione e T è un funzionale lineare. Proviamo che $T \in Y^*$. Se $G \subseteq \mathbb{R}$ è un aperto, si ha

$$\begin{aligned} T^{-1}(G) &= \{y \in Y : Ty \in G\} = \{Ax : x \in X, \psi x \in G\} = \\ &= A\{x \in X : \psi x \in G\} = A\psi^{-1}(G). \end{aligned}$$

Dato che ψ è continua, $\psi^{-1}(G)$ è un aperto; per il teorema dell'applicazione aperta, $A\psi^{-1}(G)$ è un aperto. Dunque $T \in Y^*$ e $\psi x = T(Ax)$ per ogni $x \in X$. \square

Concludiamo la dimostrazione del teorema di Lyusternik. Applichiamo il lemma 2.2.12 al nostro $\varphi \in N(S, \bar{x})$: essendo $g'(\bar{x})$ surgettiva, possiamo dedurre che esiste $T \in Y^*$ tale che

$$\varphi = g'(\bar{x})^*T.$$

Ciò prova che $\varphi \in [g'(\bar{x})^*](Y^*)$. \square

Osservazione 2.2.13 La completezza degli spazi X e Y è stata in effetti utilizzata solamente per dimostrare gli enunciati dal teorema di Kantorovich in poi. La parte precedente, cioè quella riguardante le proprietà del cono normale e del cono tangente, si può ripetere tale e quale nel caso di spazi normati.

Veniamo finalmente al teorema di Pontrjagin, che riguarda l'ottimizzazione di un funzionale sotto un vincolo di uguaglianza ed uno di disuguaglianza.

Teorema 2.2.14 (di Pontrjagin) *Siano X, Y spazi di Banach, sia $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale, siano $\phi : X \rightarrow Y$ e $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ i vincoli. Supponiamo J, ϕ, g differenziabili secondo Fréchet. Posto*

$$K = \{x \in X : \phi(x) = 0, g(x) \in [a, b]\},$$

sia $\bar{x} \in K$ e supponiamo che l'applicazione $\psi : X \rightarrow Y \times \mathbb{R}$, data da

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$$

abbia differenziale continuo nel punto \bar{x} , e che soddisfi

$$R(\psi'(\bar{x})) = Y \times \mathbb{R} \text{ (condizione di qualificazione).}$$

Se \bar{x} è punto di massimo o di minimo relativo per J su K , allora esistono $\varphi \in Y^*$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (i "moltiplicatori") tali che

$$J'(\bar{x}) + \phi'(\bar{x})^* \varphi + g'(\bar{x})^* \lambda = 0 \in X^*.$$

Dimostrazione Cominciamo con l'osservare che

$$K = \{x \in X : \psi(x) \in \{0\} \times [a, b]\}.$$

Supponiamo che \bar{x} sia punto di minimo per J in K . Per la proposizione 2.2.4 si ha

$$-J'(\bar{x}) \in N(K, \bar{x}).$$

In virtù delle ipotesi fatte su ψ' , utilizzando la proposizione 2.2.10 (ii), possiamo scrivere

$$\begin{aligned} N(K, \bar{x}) &= \psi'(\bar{x})(N(\{0\} \times [a, b], \psi(\bar{x}))) = \\ &= \psi'(\bar{x})(N(\{0\} \times [a, b], (0, g(\bar{x})))) = \\ &= \psi'(\bar{x})(N(\{0\}, 0) \times N([a, b], g(\bar{x}))) = \\ &= \psi'(\bar{x})(Y^* \times N([a, b], g(\bar{x}))). \end{aligned}$$

D'altra parte, per facile conseguenza della definizione,

$$N([a, b], g(\bar{x})) = \begin{cases}] - \infty, 0] & \text{se } g(\bar{x}) = a \\ \{0\} & \text{se } g(\bar{x}) \in]a, b[\\ [0, \infty[& \text{se } g(\bar{x}) = b, \end{cases}$$

Quindi la condizione $-J'(\bar{x}) \in N(K, \bar{x})$ significa che esiste $(\varphi, \lambda) \in Y^* \times \mathbb{R}$ tale che

$$-J'(\bar{x}) = \psi(\bar{x})^*(\varphi, \lambda), \quad \text{con} \quad \begin{cases} \lambda \leq 0 & \text{se } g(\bar{x}) = a \\ \lambda = 0 & \text{se } g(\bar{x}) \in [a, b] \\ \lambda \geq 0 & \text{se } g(\bar{x}) = b, \end{cases}$$

ossia

$$0 = J'(\bar{x}) + \phi'(\bar{x})^* \varphi + g'(\bar{x})^* \lambda. \quad \square$$

Nei problemi concreti si tratterà di esplicitare questa condizione astratta, cercando di dedurre proprietà specifiche del controllo e dello stato ottimale, i quali sono descritti dal punto \bar{x} .

2.3 Il problema di Bolza

Applicheremo i risultati del paragrafo precedente alla risoluzione del *problema di Bolza*: minimizzare il funzionale

$$J_0(x, u) = \int_0^T g(y(t), u(t)) dt + G(y(T)),$$

sotto il vincolo

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), u(t)), & t \in [0, T], \\ y(0) = x, \end{cases}$$

supponendo $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ funzioni differenziabili con continuità.

A causa della presenza del termine $G(y(T))$, scegliamo gli spazi di Banach

$$X = C([0, T], \mathbb{R}^n) \times C([0, T], \mathbb{R}^m), \quad Y = C([0, T], \mathbb{R}^m),$$

e poniamo

$$\begin{aligned} J(y, u) &= \int_0^T g(y(t), u(t)) dt + G(y(T)), \\ [\Phi(y, u)](t) &= y(t) - x - \int_0^t f(y(s), u(s)) ds, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

La funzione Φ traduce il vincolo differenziale: esso vale per una coppia $(y(\cdot), u(\cdot))$ se e solo se $\Phi(y(t), u(t)) = 0$ per ogni $t \in [0, T]$. Rispetto al problema astratto, sono assenti i vincoli di disuguaglianza.

Calcoliamo le derivate di J e Φ :

$$\begin{aligned} [J'(y_0, u_0)](h, k) &= \int_0^T [\langle g_y(y_0(t), u_0(t)), h(t) \rangle_n + \langle g_u(y_0(t), u_0(t)), k(t) \rangle_m] dt + \\ &+ \langle DG(y(T)), h(T) \rangle_n, \end{aligned}$$

$$[[\Phi'(y_0, u_0)](h, k)](t) = h(t) - \int_0^t [f_y(y_0(s), u_0(s)) \cdot h(s) + f_u(y_0(s), u_0(s)) \cdot k(s)] ds, \quad t \in [0, T];$$

nell'ultima formula il simbolo \cdot denota il prodotto di matrice per vettore.

Vediamo se l'applicazione $\Phi'(y_0, u_0) : X \rightarrow Y$ è surgettiva: fissata $\ell \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$, occorre trovare $(h, k) \in C([0, T], \mathbb{R}^n) \times C([0, T], \mathbb{R}^m)$ tale che, per ogni $t \in [0, T]$, risulti

$$h(t) - \int_0^t [f_y(y_0(s), u_0(s)) \cdot h(s) + f_u(y_0(s), u_0(s)) \cdot k(s)] ds = \ell(t).$$

Questa è un'equazione integrale lineare di Volterra. È addirittura sufficiente prendere $k = 0$ e risolverla rispetto a h : si tratta di un'equazione del tipo

$$h(t) - [Kh](t) = \ell(t), \quad t \in [0, T],$$

ove

$$[Kh](t) = \int_0^t A(s) \cdot h(s) ds, \quad A \in C([0, T], \mathbb{R}^{n^2}).$$

Si verifica facilmente che

$$|[Kh](t)|_n \leq \|A\|_\infty t \|h\|_\infty,$$

e induttivamente

$$|[K^j h](t)|_n \leq \frac{\|A\|_\infty^j t^j}{j!} \|h\|_\infty,$$

per cui

$$\|K^j\|_{\mathcal{L}(C([0, T], \mathbb{R}^n))} \leq \frac{\|A\|_\infty^j T^j}{j!} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Dunque si può scrivere

$$h(t) = [(1 - K)^{-1} \ell](t) = \sum_{j=0}^{\infty} [K^j \ell](t),$$

nel senso che questa funzione è ben definita, risolve l'equazione integrale e verifica

$$\|h\|_\infty \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|A\|_\infty^j T^j}{j!} \|\ell\|_\infty.$$

Pertanto $\Phi'(y_0, u_0)$ è surgettiva.

Se (y_0, u_0) è una coppia ottimale, o anche soltanto un punto di massimo o minimo relativo per J sotto il vincolo $\Phi(y_0, u_0) = 0$, in virtù del teorema di Pontrjagin 2.2.14 esiste un elemento $\mu \in [C([0, T], \mathbb{R}^n)]^*$ tale che

$$J'(y_0, u_0) + \Phi'(y_0, u_0)^* \mu = 0 \in [C([0, T], \mathbb{R}^n) \times C([0, T], \mathbb{R}^m)]^*. \quad (2.1)$$

Digressione: il duale di $C([0, T], \mathbb{R}^n)$

Cominciamo con il duale di $C[0, T]$: esso è costituito dalle misure (con segno) μ , associate a funzioni $\varphi : [0, T+ \rightarrow \mathbb{R}$, che sono differenze di funzioni monotone crescenti e continue a sinistra, salvo al più nel punto T : per tali misure si ha, più precisamente,

$$\mu([c, d[) = \varphi(d^-) - \varphi(c) \quad \forall [c, d[\subset [0, T].$$

la dualità si esprime mediante la formula

$$\mu(h) = \int_{[0, T]} h(s) d\mu(s) \quad \forall h \in C[0, T],$$

e se $h \in C^1[0, T]$ vale la formula di integrazione per parti

$$\int_{[c, d]} h(s) d\mu(s) = \varphi(d)h(d) - \varphi(c)h(c) - \int_c^d h'(s)\varphi(s) ds \quad \forall [c, d] \subseteq [0, T].$$

Infatti, per il teorema di Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{[c, d]} h(s) d\mu(s) &= \int_{[c, d]} [h(s) - h(c)] d\mu(s) + h(c)[\varphi(d) - \varphi(c)] = \\ &= \int_{[c, d]} \int_c^s h'(r) dr d\mu(s) + h(c)[\varphi(d) - \varphi(c)] = \\ &= \int_c^d \int_{[r, d]} d\mu(s) h'(r) dr + h(c)[\varphi(d) - \varphi(c)] = \\ &= \int_c^d [\varphi(d) - \varphi(r)] h'(r) dr + h(c)[\varphi(d) - \varphi(c)] = \\ &= \varphi(d)[h(d) - h(c)] - \int_c^d \varphi(r)h'(r) dr + h(c)[\varphi(d) - \varphi(c)] = \\ &= [\varphi(d)h(d) - \varphi(c)h(c)] - \int_c^d \varphi(r)h'(r) dr. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il duale di $C([0, T], \mathbb{R}^n)$. poiché per ogni coppia (A, B) di spazi di Banach vale

$$(A \times B)^* = A^* \times B^*,$$

lo spazio $[C([0, T], \mathbb{R}^n)]^*$ è costituito da n -ple di misure con segno μ , associate a n -ple di funzioni φ , differenze di funzioni crescenti e continue a sinistra salvo al più nel punto T . Si ha perciò

$$\mu([c, d[) = (\varphi_1(d^-) - \varphi_1(c), \dots, \varphi_n(d^-) - \varphi_n(c)) \quad \forall \mu \in [C([0, T], \mathbb{R}^n)]^*,$$

e ciò conclude la digressione.

Torniamo all'equazione (2.1) e andiamo a calcolare il termine $[\Phi'(y_0, u_0)^* \mu](h, k)$ per $(h, k) \in C([0, T], \mathbb{R}^n) \times C([0, T], \mathbb{R}^m)$. Si ha, integrando per parti,

$$\begin{aligned} [\Phi'(y_0, u_0)^* \mu](h, k) &= \mu(\Phi'(y_0, u_0)(h, k)) = \int_{[0, T]} [\Phi'(y_0, u_0)(h, k)](t) d\mu(t) = \\ &= \int_{[0, T]} \left\langle h(t) - \int_0^t [f_y(y_0(s), u_0(s)) \cdot h(s) + f_u(y_0(s), u_0(s)) \cdot k(s)] ds, d\mu(t) \right\rangle_n = \\ &= \int_{[0, T]} \langle h(t), d\mu(t) \rangle_n - \\ &\quad - \int_0^T \langle f_y(y_0(s), u_0(s)) \cdot h(s) + f_u(y_0(s), u_0(s)) \cdot k(s), \varphi(T) - \varphi(s) \rangle_n ds. \end{aligned}$$

Dunque l'equazione (2.1) diventa

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle g_y(y_0(s), u_0(s)), h(s) \rangle_n + \langle g_u(y_0(s), u_0(s)), k(s) \rangle_m ds + \langle DG(y_0(T)), h(T) \rangle_n + \\ &\quad + \int_{[0, T]} \langle h(t), d\mu(t) \rangle_n - \\ &\quad - \int_0^T \langle f_y(y_0(s), u_0(s)) \cdot h(s) + f_u(y_0(s), u_0(s)) \cdot k(s), \varphi(T) - \varphi(s) \rangle_n ds = 0 \end{aligned}$$

per ogni $(h, k) \in C([0, T], \mathbb{R}^n) \times C([0, T], \mathbb{R}^m)$. Posto $\psi(s) = \varphi(T) - \varphi(s)$, abbiamo equivalentemente

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle g_y(y_0(s), u_0(s)) - \psi(s) \cdot f_y(y_0(s), u_0(s)), h(s) \rangle_n ds + \\ &\quad + \langle g_u(y_0(s), u_0(s)) - \psi(s) \cdot f_u(y_0(s), u_0(s)), k(s) \rangle_m ds + \\ &\quad + \langle DG(y_0(T)), h(T) \rangle_n + \int_{[0, T]} \langle h(t), d\mu(t) \rangle_n = 0 \end{aligned}$$

per ogni $(h, k) \in C([0, T], \mathbb{R}^n) \times C([0, T], \mathbb{R}^m)$.

Sfruttiamo adesso l'arbitrarietà di h e k . Scegliendo $h \equiv 0$, troviamo

$$\int_0^T \langle g_u(y_0(s), u_0(s)) - \psi(s) \cdot f_u(y_0(s), u_0(s)), k(s) \rangle_m ds = 0 \quad \forall k \in C([0, T], \mathbb{R}^m),$$

e per il primo dei lemmi fondamentali del calcolo delle variazioni (in $L^1(0, T)$) si ottiene

$$g_u(y_0(s), u_0(s)) - \psi(s) \cdot f_u(y_0(s), u_0(s)) = 0 \quad \text{q.o. in } [0, T].$$

Scegliendo invece $h \in C_0^1([0, T], \mathbb{R}^n)$, ricaviamo

$$\int_0^T \langle g_y(y_0(s), u_0(s)) - \psi(s) \cdot f_y(y_0(s), u_0(s)), h(s) \rangle_n ds + \int_{[0, T]} \langle h(t), d\mu(t) \rangle_n = 0;$$

dunque, essendo

$$\int_{[0,T]} \langle h(t), d\mu(t) \rangle_n = - \int_0^T \langle h'(t), \varphi(t) \rangle_n dt,$$

deduciamo, per ogni $h \in C_0^1([0, T], \mathbb{R}^n)$,

$$\int_0^T \langle g_y(y_0(s), u_0(s)) - \psi(s) \cdot f_y(y_0(s), u_0(s)), h(s) \rangle_n - \langle \varphi(s), h'(s) \rangle_n ds = 0,$$

da cui, per definizione di derivata distribuzionale,

$$\exists \psi'(s) = -\varphi'(s) = -\psi(s) \cdot f_y(y_0(s), u_0(s)) + g_y(y_0(s), u_0(s)) \quad \text{q.o. in } [0, T].$$

Il secondo membro di questa relazione è una funzione misurabile e limitata, quindi ψ è una funzione assolutamente continua in $[0, T]$, e per definizione

$$\psi(T) = \psi(T^-) = \varphi(T) - \varphi(T^-).$$

Scegliamo infine, per un fissato $v \in \mathbb{R}^n$ e per $k \in \mathbb{N}^+$,

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t \leq T - \frac{1}{k} \\ (k(T-t) + 1)v & \text{se } t - \frac{1}{k} < t \leq T. \end{cases}$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} \int_{T-\frac{1}{k}}^T \langle g_y(y_0(s), u_0(s)) - \psi(s) \cdot f_y(y_0(s), u_0(s)), h(s) \rangle_n ds + \\ + \langle DG(y_0(T)), v \rangle_n + \int_{[T-\frac{1}{k}, T]} \langle h(t), d\mu(t) \rangle_n = 0; \end{aligned}$$

per $k \rightarrow \infty$ il primo addendo tende a 0 per convergenza dominata: infatti $|h(t)|_n \leq |v|_n$ per ogni $t \in [0, T]$. L'ultimo addendo, integrando per parti, vale

$$\int_{[T-\frac{1}{k}, T]} \langle h(t), d\mu(t) \rangle_n = \langle \varphi(T), v \rangle_n - k \int_{T-\frac{1}{k}}^T \langle v, \varphi(t) \rangle_n dt,$$

da cui, per $k \rightarrow \infty$, la relazione precedente diventa

$$\langle DG(y_0(T)), v \rangle_n + \langle \varphi(T) - \varphi(T^-), v \rangle_n = 0,$$

ossia, per l'arbitrarietà di v , deve valere la condizione

$$DG(y_0(T)) = -[\varphi(T) - \varphi(T^-)] = -\psi(T).$$

Si ottiene in definitiva il seguente sistema di condizioni necessarie per l'esistenza di una coppia ottimale (y_0, u_0) :

$$\begin{cases} g_u(y_0(s), u_0(s)) - \psi(s) \cdot f_u(y_0(s), u_0(s)) = 0 & \text{q.o. in } [0, T] \\ \psi'(s) = -\psi(s) \cdot f_y(y_0(s), u_0(s)) + g_y(y_0(s), u_0(s)) & \text{q.o. in } [0, T] \\ DG(y_0(T)) + \psi(T) = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

In molti casi concreti, queste condizioni riescono a selezionare un'unica (candidata) coppia ottimale. Naturalmente, però, l'effettiva esistenza della coppia ottimale va dimostrata separatamente.

2.4 Un modello di epidemia con vaccinazione

Analizziamo un problema descritto (ma non completamente risolto) in [9]. In una popolazione, durante un intervallo limitato di tempo nel quale è trascurabile il numero di nascite e di decessi, si sviluppa un'epidemia con tasso di contagio β e tasso di guarigione μ . Dividiamo la popolazione in tre sottogruppi: i *suscettibili*, vale a dire coloro che sono soggetti a contagio, gli *infetti*, cioè i malati, e i *rimossi*, ossia gli individui guariti, e dunque non più attaccabili dalla malattia. Se denotiamo con $I(t)$, $S(t)$ e $R(t)$ le percentuali all'istante t di infetti, di suscettibili e di rimossi rispetto al totale della popolazione, avremo

$$I(t) + S(t) + R(t) = 1, \quad I(t) \geq 0, \quad S(t) \geq 0, \quad R(t) \geq 0,$$

e potremo scrivere il sistema differenziale

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \mu I(t) \\ R'(t) = \mu I(t), \end{cases} \quad t \in [0, T],$$

con le condizioni iniziali $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$ e $R(0) = R_0$, ove naturalmente $S_0 + I_0 + R_0 = 1$ e $S_0 \geq 0$, $I_0 \geq 0$, $R_0 \geq 0$.

Dato che $R(t) = 1 - S(t) - I(t)$, la terza equazione è conseguenza delle altre due, e in definitiva il sistema differenziale è

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \mu I(t) \\ S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \end{cases} \quad t \in [0, T], \quad (2.3)$$

con $S_0 \geq 0$, $I_0 \geq 0$ e $S_0 + I_0 \leq 1$.

Supponendo di avere a disposizione un vaccino efficace, e volendo intraprendere una campagna di immunizzazione della popolazione suscettibile che permetta di trasferire immediatamente ogni individuo suscettibile alla classe dei rimossi, è chiaro che il sistema più efficace sarebbe quello di vaccinare immediatamente tutti i suscettibili. Ma in pratica questa strategia richiederebbe enormi risorse materiali e finanziarie. Quindi si vuole adottare una strategia che minimizzi simultaneamente gli infetti e i costi dell'operazione. Detto allora $u(t) \in [0, 1]$ il tasso di immunizzazione tramite vaccinazione, si cercherà di minimizzare il funzionale

$$J(u) = \int_0^T \left[I(t) + \frac{A}{2} u(t)^2 \right] dt, \quad (2.4)$$

ove A è una costante positiva, sotto il vincolo differenziale

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) - u(t)S(t) \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \mu I(t) \\ S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \end{cases} \quad t \in [0, T], \quad (2.5)$$

che differisce da (2.3) per la presenza del termine $-u(t)S(t)$, che misura l'effetto della vaccinazione.

Alcune proprietà qualitative delle funzioni $S(t)$ e $I(t)$ si ricavano dalla risoluzione delle due equazioni:

$$I(t) = I_0 e^{\int_0^t [\beta S(\tau) - \mu] d\tau}, \quad S(t) = S_0 e^{-\int_0^t [\beta I(\tau) + u(\tau)] d\tau} :$$

- poiché $I_0 \geq 0$ e $S_0 \geq 0$, si ha $I(t) \geq 0$ e $S(t) \geq 0$ in $[0, T]$;
- poiché $I' + S' = -uS - \mu I \leq 0$, si ha $I(t) + S(t) \leq I_0 + S_0 \leq 1$;
- poiché $0 \leq u(t) \leq 1$ e $I(t) \geq 0$, la funzione $S(t)$ è decrescente;
- se $S_0 \leq \frac{\mu}{\beta}$, siccome $S(t)$ decresce, si ha $S(t) \leq \frac{\mu}{\beta}$ in $[0, T]$;
- se $S_0 > \frac{\mu}{\beta}$, $I(t)$ cresce fintanto che $S(t) \geq \frac{\mu}{\beta}$, e poi decresce.

Il numero $\frac{\beta}{\mu}$, è chiamato *numero riproduttivo di base* o anche *valore di soglia critica*, e riveste un ruolo chiave in questo genere di modelli: sostanzialmente ci dice se la malattia è sufficientemente virulenta da riuscire a diffondersi nella popolazione, diventando endemica, o se invece il numero di contagi diminuisce da subito, riducendone la pericolosità.

Scegliamo gli spazi di Banach in cui ambientare il teorema di Pontrjagin. Abbiamo visto che, nelle ipotesi fatte,

$$S(t) \geq 0, \quad I(t) \geq 0, \quad 0 \leq S(t) + I(t) \leq 1, \quad 0 \leq u(t) \leq 1;$$

ma mentre le condizioni su S e I sono implicate dal sistema, il vincolo sul controllo, pur avendo pienamente senso trattandosi di una percentuale, dal punto di vista matematico va imposto a priori.

Poiché gli spazi di Hilbert sono i più comodi per lavorare, scegliamo per le variabili di stato (S, I) lo spazio $[L^2(0, T)]^2$ e per la variabile di controllo u lo spazio $L^2(0, T)$. Abbiamo allora, scrivendo il sistema in forma integrale:

$$J : [L^2(0, T)]^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad J(S, I, u) = \int_0^T \left[I(t) + \frac{A}{2} u(t)^2 \right] dt,$$

$$[\Phi(S, I, u)](t) = \begin{pmatrix} S(t) - S_0 + \int_0^t [\beta S(\tau) I(\tau) + u(\tau) S(\tau)] d\tau \\ I(t) - I_0 - \int_0^t [\beta S(\tau) I(\tau) - \mu I(\tau)] d\tau \\ u(t) \end{pmatrix},$$

$$K = \{(S, I, u) \in [L^2(0, T)]^3 : \Phi(S; I, u) \in \{0\} \times \{0\} \times H\}, \text{ ove}$$

$$H = \{u \in L^2(0, T) : 0 \leq u(t) \leq 1 \text{ q.o. in } [0, 1]\}. \quad (2.6)$$

Calcoliamo i differenziali di J e Φ : per ogni $(\sigma, j, v) \in [L^2(0, T)]^3$ si ha

$$\langle J'(S, I, u), (\sigma, j, v) \rangle_{[L^2(0, T)]^3} = \int_0^T [j(t) + A u(t)v(t)] dt,$$

$$\begin{aligned}
& [[\Phi'(S, I, u)](\sigma, j, v)](t) = \\
& = \begin{pmatrix} \sigma(t) + \int_0^t [[\beta I(\tau) + u(\tau)]\sigma(\tau) + \beta S(\tau)j(\tau) + S(\tau)v(\tau)] d\tau \\ j(t) - \int_0^t [[\beta I(\tau)\sigma(\tau) + [\beta S(\tau) - \mu]j(\tau)] d\tau \\ v(t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Verifichiamo che $\Phi'(S, I, u) : [L^2(0, T)]^3 \rightarrow [L^2(0, T)]^3$ è surgettivo: si noti che $\Phi'(S, I, u)$ è della forma $I + K$, ove K è un operatore integrale con nucleo in $[L^2(0, T)]^3$, dunque K è compatto; dal teorema dell'alternativa di Fredholm segue che $\Phi'(S, I, u)$ è surgettivo se e solo se è iniettivo. Questo accade se e solo se il sistema

$$\begin{cases} \sigma(t) + \int_0^t [[\beta I(\tau) + u(\tau)]\sigma(\tau) + \beta S(\tau)j(\tau) + S(\tau)v(\tau)] d\tau = 0 \\ j(t) - \int_0^t [[\beta I(\tau)\sigma(\tau) + [\beta S(\tau) - \mu]j(\tau)] d\tau = 0 \\ v(t) = 0 \end{cases}$$

ha solo la soluzione nulla. Ma ciò è vero perché questo sistema equivale ad un sistema differenziale *lineare* in σ e j , con le condizioni $\sigma(0) = 0$ e $j(0) = 0$.

Il problema che stiamo esaminando non è un problema di Bolza, né rientra nelle ipotesi in cui ci siamo messi per dimostrare il teorema di Pontrjagin, a causa della presenza del vincolo $0 \leq u(t) \leq 1$, che non possiamo leggere come una condizione scalare del tipo $g(S, I, u) \in [a, b]$: essa è invece una condizione puntuale, che si traduce dicendo che $u \in H$, ove, come sappiamo, $H = \{v \in L^2(0, T); 0 \leq v \leq 1 \text{ q.o.}\}$; si noti che H è convesso e chiuso in $L^2(0, T)$.

Cionondimeno possiamo ripercorrere la dimostrazione del teorema di Pontrjagin sotto le nostre attuali ipotesi: il punto di partenza è che, se $(\bar{S}, \bar{I}, \bar{u})$ è un punto di minimo vincolato per J su K , allora, per la proposizione 2.2.4,

$$-J'(\bar{S}, \bar{I}, \bar{u}) \in N(K, (\bar{S}, \bar{I}, \bar{u})) = N(\Phi^{-1}(\{0\} \times \{0\} \times H), (\bar{S}, \bar{I}, \bar{u}));$$

per la proposizione 2.2.10 (ii),

$$N(\Phi^{-1}(\{0\} \times \{0\} \times H), (\bar{S}, \bar{I}, \bar{u})) = \Phi'(\bar{S}, \bar{I}, \bar{u})^*(N(\{0\} \times \{0\} \times H, \Phi(\bar{S}, \bar{I}, \bar{u})));$$

infine, per la proposizione 2.2.6,

$$N(\Phi^{-1}(\{0\} \times \{0\} \times H), (\bar{S}, \bar{I}, \bar{u})) = \Phi'(\bar{S}, \bar{I}, \bar{u})^*(L^2(0, T) \times L^2(0, T) \times N(H, \bar{u})).$$

Dunque nel punto di minimo vincolato $(\bar{S}, \bar{I}, \bar{u})$ vale la condizione

$$-J'(\bar{S}, \bar{I}, \bar{u}) \in \Phi'(\bar{S}, \bar{I}, \bar{u})^*(L^2(0, T) \times L^2(0, T) \times N(H, \bar{u})).$$

D'altronde, per la proposizione 2.2.3,

$$u \in N(H, \bar{u}) \implies \int_0^T u(t)v(t) dt \leq 0 \quad \forall v \in T(H, \bar{u}),$$

ed inoltre

$$T(H, \bar{u}) = \{v \in L^2(0, T) : \exists \{v_n\} \subset L^2(0, T), \exists \{t_n\} \subset \mathbb{R} : v_n \rightarrow v \text{ in } L^2(0, T), \\ t_n \rightarrow 0^+, 0 \leq \bar{u}(t) + t_n v_n(t) \leq 1 \text{ q.o. in } [0, T]\}.$$

Se $v \in T(H, \bar{u})$, si può supporre, passando a sottosuccessioni, che $v_n(t) \rightarrow v(t)$ puntualmente q.o. in $[0, T]$. Allora sull'insieme

$$E_1 = \{t \in [0, T] : \bar{u}(t) = 1\}$$

deve essere

$$v_n(t) \leq 0 \quad \text{q.o. in } E_1,$$

e quindi $v(t) \leq 0$ q.o. in E_1 ; sull'insieme

$$E_0 = \{t \in [0, T] : \bar{u}(t) = 0\}$$

deve essere

$$v_n(t) \geq 0 \quad \text{q.o. in } E_0,$$

e quindi $v(t) \geq 0$ q.o. in E_0 ; infine sull'insieme

$$E = \{t \in [0, T] : 0 < \bar{u}(t) < 1\}$$

sarà $v_n(t)$ arbitraria per n sufficientemente grande, e quindi $v(t)$ sarà arbitraria in E . Dunque

$$v \in T(H, \bar{u}) \iff v \in L^2(0, T), \quad v \leq 0 \text{ q.o. in } E_1, \quad v \geq 0 \text{ q.o. in } E_0.$$

Perciò, se $u \in N(H, \bar{u})$ possiamo scrivere per ogni $v \in T(H, \bar{u})$:

$$0 \geq \int_0^T u(t)v(t) dt = \int_{E_1} u(t)v(t) dt + \int_E u(t)v(t) dt + \int_{E_0} u(t)v(t) dt,$$

e scegliendo v nulla in $E_0 \cup E_1$ deduciamo, utilizzando v e $-v$,

$$0 = \int_E u(t)v(t) dt \quad \forall v \in L^2(E),$$

da cui $u = 0$ q.o. in E . Scegliendo poi v nulla in E_1 e non negativa in E_0 , ricaviamo

$$0 \geq \int_{E_0} u(t)v(t) dt \quad \forall v \geq 0, v \in L^2(E_0),$$

da cui $u \leq 0$ q.o. in E_0 . Infine, scegliendo v nulla in E_0 e non positiva in E_1 , otteniamo

$$0 \geq \int_{E_1} u(t)v(t) dt \quad \forall v \leq 0, v \in L^2(E_1),$$

da cui $u \geq 0$ q.o. in E_1 . In definitiva

$$u \in N(H, \bar{u}) \implies u \in M,$$

ove

$$M = \{v \in L^2(0, T) : v = 0 \text{ q.o. in } E, v \leq 0 \text{ q.o. in } E_0, v \geq 0 \text{ q.o. in } E_1\}.$$

Pertanto si conclude che

$$-J'(\bar{S}, \bar{I}, \bar{u}) \in \Phi'(\bar{S}, \bar{I}, \bar{u})^*(L^2(0, T) \times L^2(0, T) \times M);$$

allora applicando il toerema di Pontrjagin 2.2.14, troviamo tre moltiplicatori $\Lambda_1 \in L^2(0, T)$, $\Lambda_2 \in L^2(0, T)$ e $m \in M$ tali che

$$J'(\bar{S}, \bar{I}, \bar{u}) + \Phi'(\bar{S}, \bar{I}, \bar{u})^*(\Lambda_1, \Lambda_2, m) = 0 \in [L^2(0, T)]^3,$$

cioè, per ogni $(\sigma, j, v) \in [L^2(0, T)]^3$,

$$\langle J'(\bar{S}, \bar{I}, \bar{u}), (\sigma, j, v) \rangle_{[L^2(0, T)]^3} + \langle (\Lambda_1, \Lambda_2, m), [\Phi'(\bar{S}, \bar{I}, \bar{u})](\sigma, j, v) \rangle_{[L^2(0, T)]^3} = 0.$$

Volendo scrivere esplicitamente queste condizioni si arriva, dopo noiosi calcoli, alla relazione seguente:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\{ [j(t) + A\bar{u}(t)v(t)] + \right. \\ & \quad + \Lambda_1(t) \left[\sigma(t) + \int_0^t [[\beta\bar{I}(\tau) + \bar{u}(\tau)]\sigma(\tau) + \beta\bar{S}(\tau)j(\tau) + \bar{S}(\tau)v(\tau)] d\tau \right] + \\ & \quad \left. + \Lambda_2(t) \left[j(t) - \int_0^t [\beta\bar{I}(\tau)\sigma(\tau) + [\beta\bar{S}(\tau) - \mu]j(\tau)] d\tau \right] + m(t)v(t) \right\} dt = 0, \end{aligned}$$

ovvero, con l'uso del teorema di Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\{ \sigma(\tau) \left[\Lambda_1(\tau) + [\beta\bar{I}(\tau) + \bar{u}(\tau)] \int_\tau^t \Lambda_1(t) dt - \beta\bar{I}(\tau) \int_\tau^t \Lambda_2(t) dt \right] + \right. \\ & \quad + j(\tau) \left[1 + \beta\bar{S}(\tau) \int_\tau^t \Lambda_1(t) dt + \Lambda_2(\tau) - [\beta\bar{S}(\tau) - \mu] \int_\tau^t \Lambda_2(t) dt \right] + \\ & \quad \left. + v(\tau) \left[A\bar{u}(\tau) + \bar{S}(\tau) \int_\tau^t \Lambda_1(t) dt + m(\tau) \right] \right\} d\tau = 0. \end{aligned}$$

Ponendo

$$\lambda_1(\tau) = - \int_\tau^T \Lambda_1(t) dt, \quad \lambda_2(\tau) = - \int_\tau^T \Lambda_2(t) dt,$$

per l'arbitrarietà di (σ, j, v) si ricava il sistema

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) - [\beta\bar{I}(t) + \bar{u}(t)]\lambda_1(t) + \beta\bar{I}(t)\lambda_2(t) = 0 & \text{q.o. in } [0, T] \\ \lambda_2'(t) - \beta\bar{S}(t)\lambda_1(t) + [\beta\bar{S}(t) - \mu]\lambda_2(t) + 1 = 0 & \text{q.o. in } [0, T] \\ A\bar{u}(t) - \bar{S}(t)\lambda_1(t) + m(t) = 0 & \text{q.o. in } [0, T]. \end{cases}$$

Dunque λ_1 e λ_2 sono soluzioni del sistema retrogrado

$$\begin{cases} (\lambda_1'(t) \ \lambda_2'(t)) = -(\lambda_1(t) \ \lambda_2(t)) \cdot \begin{pmatrix} -[\beta\bar{I}(t) + \bar{u}(t)] & -\beta\bar{S}(t) \\ \beta\bar{I}(t) & \beta\bar{S}(t) - \mu \end{pmatrix} + (0 \ 1) \\ (\lambda_1(T) \ \lambda_2(T)) = (0 \ 0), \end{cases}$$

mentre, tenuto conto del fatto che $m \in M$, la relazione

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{A} [\bar{S}(t)\lambda_1(t) - m(t)]$$

implica

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\bar{S}(t)\lambda_1(t) - m(t)}{A} \leq \frac{\bar{S}(t)\lambda_1(t)}{A} \quad \text{q.o. in } E_1, \\ 0 &= \frac{\bar{S}(t)\lambda_1(t) - m(t)}{A} \geq \frac{\bar{S}(t)\lambda_1(t)}{A} \quad \text{q.o. in } E_0, \\ \bar{u}(t) &= \frac{\bar{S}(t)\lambda_1(t)}{A} \quad \text{q.o. in } E, \end{aligned}$$

da cui

$$\bar{u}(t) = \min \left\{ \max \left\{ \frac{\bar{S}(t)\lambda_1(t)}{A}, 0 \right\}, 1 \right\} \quad \text{q.o. in } [0, T].$$

In particolare, se esiste il controllo ottimale, esso è continuo in $[0, T]$, perché \bar{S} è continua e $\lambda_1' \in L^2(0, T)$.

Si noti che nel nostro esempio

$$g(S, I, u) = I + \frac{A}{2} u^2, \quad f(S, I, U) = \begin{pmatrix} -\beta IS - uS \\ \beta IS - \mu I \end{pmatrix},$$

e dunque, scrivendo $y = (S, I)$,

$$\begin{aligned} g_y(S, I, u) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & g_u(S, I, u) &= Au, \\ f_y(S, I, u) &= \begin{pmatrix} -\beta I - u & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \mu \end{pmatrix}, & f_u(S, I, u) &= \begin{pmatrix} -S \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si riconosce allora che le condizioni necessarie di ottimalità sono in questo caso, posto $\psi(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t))$,

$$\begin{cases} \psi'(t) = -\psi(t) \cdot f_y(\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{u}(t)) - g_y(\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{u}(t)) \\ g_u(\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{u}(t)) + \psi(t) \cdot f_u(\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{u}(t)) + m(t) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Sono le stesse equazioni trovate nel caso del problema di Bolza, con una differenza di segno per g_y e g_u e con il moltiplicatore $m(t)$ in più, che nel problema di Bolza non compariva, non essendovi vincoli sul controllo. Ma il segno del moltiplicatore è irrilevante (bastava denominarlo $-\psi$ anziché ψ), e quindi le equazioni sono le stesse.

In conclusione, se il controllo ottimale esiste, esso è continuo. Quindi, risolvendo il sistema nelle incognite S, I , lo stato ottimale (\bar{S}, \bar{I}) è continuo, anzi di classe C^1 .

Ma esiste il controllo ottimale? Prima di fissare una successione minimizzante $\{(I_n, u_n)\}$, cioè tale che $J(I_n, u_n) \rightarrow \inf J$, e di sperare che essa converga ad una candidata coppia ottimale, occorre sapere che, dato un controllo u , esiste lo stato (S, I) corrispondente: in altre parole occorre saper risolvere un problema di Cauchy 2-dimensionale della forma

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(0) = x, \end{cases}$$

in cui $F(t, y(t)) := f(y(t), u(t))$ è una funzione misurabile nelle prima variabile e continua nella seconda. Qui il teorema di esistenza di Cauchy-Lipschitz non è applicabile.

2.4.1 Il teorema di Carathéodory

Fortunatamente, esiste il seguente teorema, dovuto a Carathéodory, che non solo risolve questo punto ma è anche il punto di partenza per la dimostrazione del teorema di Filippov-Cesari, che garantirà l'esistenza della coppia ottimale per una vasta classe di problemi finito-dimensionali.

Teorema 2.4.1 (di Carathéodory) *Sia $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione tale che:*

- (a) $f(\cdot, y)$ è misurabile per ogni $y \in \mathbb{R}^n$;
- (b) $f(x, \cdot)$ è continua per ogni $x \in [a, b]$;
- (c) esistono $S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ sommabile, $\varphi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continua, positiva e non sommabile in $[0, \infty[$, tali che

$$|f(x, y)|_n \leq \frac{S(x)}{\varphi(|y|)} \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Allora per ogni $\xi \in [a, b]$ e per ogni $\eta \in \mathbb{R}^n$ esiste una funzione $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, assolutamente continua, tale che

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \text{q.o. in } [a, b] \\ y(\xi) = \eta. \end{cases}$$

Se, inoltre, esistono $M \in L^1(a, b)$ e $\omega :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continua, tali che

$$|f(x, y + z) - f(x, y)|_n \leq M(x) \omega(|z|_n) \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

e se risulta $\int_0^1 \frac{dt}{\omega(t)} = \infty$, allora la soluzione del problema di Cauchy è unica.

Dimostrazione Proviamo anzitutto che

$$y(\cdot) \in C[a, b] \implies f(\cdot, y(\cdot)) \text{ misurabile in } [a, b].$$

Infatti, se $y \in C[a, b]$ esiste una successione $\{y_k\}$ di funzioni costanti a tratti in $[a, b]$, tale che $y_k(r) \rightarrow y(r)$ puntualmente in $[a, b]$. Sarà

$$y_k(r) = \sum_{j=1}^{m_k} c_{jk} I_{J_{jk}}(r),$$

ove $c_{jk} \in \mathbb{R}$ e gli J_{jk} sono intervalli adiacenti la cui unione è $[a, b]$. Allora possiamo scrivere

$$f(x, y_k(x)) = \sum_{j=1}^{m_k} f(x, c_{jk}) I_{J_{jk}}(x),$$

e siccome le funzioni $f(\cdot, c_{jk})$ sono misurabili, tale è anche $f(\cdot, y_k(\cdot))$; dunque anche $f(\cdot, y(\cdot))$, limite puntuale delle $f(\cdot, y_k(\cdot))$, è misurabile.

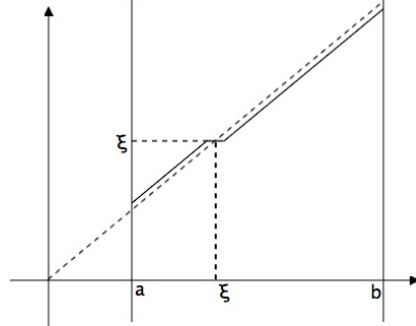
Ciò premesso, supponiamo dapprima $\varphi \equiv 1$, cosicché $|f(x, y)|_n \leq S(x)$ in $[a, b] \times \mathbb{R}^n$. Allora, in particolare,

$$y(\cdot) \in C[0, T] \implies f(\cdot, y(\cdot)) \in L^1(a, b).$$

Fissato $\xi \in [a, b]$, poniamo per ogni $k \in \mathbb{N}^+$:

$$u_k(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{k} & \text{se } a \leq x \leq \xi - \frac{1}{k} \\ \xi & \text{se } \xi - \frac{1}{k} \leq x \leq \xi + \frac{1}{k} \\ x - \frac{1}{k} & \text{se } \xi + \frac{1}{k} \leq x \leq b, \end{cases}$$

con ovvie modifiche quando $\xi = a$ oppure $\xi = b$.



Proviamo ora che per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ esiste un'unica funzione $g_k \in C[a, b]$ tale che

$$g_k(x) = \eta + \int_{\xi}^{u_k(x)} f(t, g_k(t)) dt, \quad x \in [a, b].$$

L'equazione è soddisfatta in $[\xi - \frac{1}{k}, \xi + \frac{1}{k}]$ dalla funzione $g_k(x) \equiv \eta$, come è immediato verificare. Supponiamo che per qualche $h \in \mathbb{N}^+$ la g_k sia definita in $[\xi - \frac{h}{k}, \xi + \frac{h}{k}]$, e risolva l'equazione in tale intervallo; allora in particolare g_k è necessariamente continua in questo intervallo, essendo la funzione integrale di un'integranda sommabile. Ma se $x \in [\xi - \frac{h+1}{k}, \xi + \frac{h+1}{k}]$ si ha $u_k(x) \in [\xi - \frac{h}{k}, \xi + \frac{h}{k}]$, e quindi il secondo membro dell'equazione è ben definito in $[\xi - \frac{h+1}{k}, \xi + \frac{h+1}{k}]$: ne segue che $g_k(x)$ risulta ben definita e continua in $[\xi - \frac{h+1}{k}, \xi + \frac{h+1}{k}]$. Per induzione su h , possiamo concludere che g_k è ben definita e continua in $[a, b]$.

Mostriamo adesso che la successione $\{g_k\}$ verifica le ipotesi del teorema di Ascoli-Arzelà. Le g_k sono equilimitate:

$$|g_k(x)|_n \leq |\eta|_n + \left| \int_{\xi}^{u_k(x)} f(t, g_k(t)) dt \right|_n \leq |\eta|_n + \int_a^b S(x) dx \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Le g_k sono anche equicontinue: sia infatti $\varepsilon > 0$ e sia $\delta > 0$ tale che

$$|\beta - \alpha| < \delta \implies \left| \int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Allora, essendo $|u_k(x) - u_k(x')| \leq |x - x'|$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $x, x' \in [a, b]$, si ha per $|\beta - \alpha| < \delta$

$$|g_k(\beta) - g_k(\alpha)|_n = \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t, g_k(t)) dt \right|_n \leq \left| \int_{u_k(\alpha)}^{u_k(\beta)} S(t) dt \right| < \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Pertanto, possiamo estrarre dalla successione $\{g_k\}$ una sottosuccessione $\{g_{k_n}\}$ tale che g_{k_n} converga uniformemente in $[a, b]$ ad una funzione $g \in C[a, b]$. Osservato che risulta $|u_k(x) - x| \leq \frac{1}{k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $x \in [a, b]$, passando al limite nell'equazione di g_k si ha, per convergenza dominata,

$$g(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(t, g(t)) dt \quad \forall x \in [a, b],$$

ossia g è assolutamente continua e risolve il problema di Cauchy.

Eliminiamo adesso l'ipotesi $\varphi \equiv 1$. Poiché $\varphi \notin L^1(0, \infty)$, e d'altra parte $\varphi \in L^1(0, A)$ per ogni $A > 0$, esiste $N > |\eta|_n + 1$ tale che

$$\int_{|\eta|_n+1}^N \varphi(t) dt > \int_a^b S(x) dx.$$

Poniamo

$$g_N(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } x \in [a, b], |y|_n \leq N \\ f\left(x, \frac{Ny}{|y|_n}\right) & \text{se } x \in [a, b], |y|_n > N. \end{cases}$$

È chiaro che g_N soddisfa le stesse ipotesi di f ; inoltre $g_N(x, y)$ coincide con un valore assunto da f in $[a, b] \times \{|y|_n \leq N\}$, per cui

$$|g_N(x, y)|_n \leq S(x) \cdot \sup_{0 \leq t \leq N} \frac{1}{\varphi(t)} =: S_N(x) \in L^1(a, b).$$

Per quanto già provato, esiste una soluzione assolutamente continua $y(x)$ di

$$\begin{cases} y'(x) = g_N(x, y(x)) & \text{q.o. in } [a, b] \\ y(\xi) = \eta. \end{cases}$$

Dimostriamo che risulta $|y(x)|_n \leq N$ in $[a, b]$: ciò implicherà che

$$y'(x) = g_N(x, y(x)) = f(x, y(x)) \quad \text{q.o. in } [a, b],$$

e dunque y risolverà il nostro problema.

Supponiamo per assurdo che $\sup_{a \leq x \leq b} |y(x)|_n > N$: sarà ad esempio

$$\sup_{\xi \leq x \leq b} |y(x)|_n > N$$

(il discorso è del tutto analogo nel caso $\sup_{a \leq x \leq \xi} |y(x)|_n > N$). Poniamo

$$\beta = \inf\{x \in]\xi, b] : |y(x)|_n = N\}, \quad \alpha = \sup\{x \in [\xi, \beta[: |y(x)|_n = |\eta|_n + 1\}.$$

Allora, essendo $|\eta|_n + 1 < N$, deve essere per definizione di α e β

$$|\eta|_n + 1 = |y(\alpha)|_n < |y(x)|_n < |y(\beta)|_n = N \quad \forall x \in]\alpha, \beta[,$$

cosicché

$$g_N(x, y(x)) = f(x, y(x)) \quad \text{in }]\alpha, \beta[.$$

Dunque

$$\langle y(x), y'(x) \rangle_n = \langle y(x), f(x, y(x)) \rangle_n \leq \frac{|y(x)|_n S(x)}{\varphi(|y(x)|_n)} \quad \text{q.o. in }]\alpha, \beta[,$$

ovvero

$$\varphi(|y(x)|_n) \frac{\langle y(x), y'(x) \rangle_n}{|y(x)|_n} \leq S(x) \quad \text{q.o. in }]\alpha, \beta[.$$

Integrando in $]\alpha, \beta]$, e utilizzando il cambiamento di variabile $t = |y(x)|_n$, si trova

$$\int_{|\eta|_n+1}^N \varphi(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(|y(x)|_n) \frac{\langle y(x), y'(x) \rangle_n}{|y(x)|_n} dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx \leq \int_a^b S(x) dx,$$

il che è assurdo per la scelta di N .

Proviamo l'unicità. Siano y_1 e y_2 due soluzioni distinte: allora, supponendo per esempio che $\sup_{\xi < x \leq b} |y_1(x) - y_2(x)|_n > 0$, poniamo

$$\gamma = \sup\{x \in [\xi, b] : y_1(\tau) = y_2(\tau) \quad \forall \tau \in [\xi, x]\}.$$

Esiste una successione $\{\gamma_k\} \subset]\xi, b]$ tale che $\gamma_k \searrow \gamma$ per $k \rightarrow \infty$ e

$$y_1(\gamma_k) \neq y_2(\gamma_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Fissiamo k : esiste un intervallo $I_k =]\alpha_k, \beta_k[$, contenente γ_k , tale che $\gamma \leq \alpha_k < \beta_k \leq b$, con $y_1(\alpha_k) = y_2(\alpha_k)$, mentre $|y_1 - y_2|_n > 0$ in I_k . Si ha allora per q.o. $x \in I_k$

$$\begin{aligned} \langle y_1(x) - y_2(x), y_1'(x) - y_2'(x) \rangle_n &= \langle y_1(x) - y_2(x), f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)) \rangle_n \leq \\ &\leq |y_1(x) - y_2(x)|_n M(x) \omega(|y_1(x) - y_2(x)|_n), \end{aligned}$$

da cui, per q.o. $x \in I_k$,

$$\frac{\frac{d}{dx}|y_1(x) - y_2(x)|_n}{\omega(|y_1(x) - y_2(x)|_n)} = \frac{\langle y_1(x) - y_2(x), y_1'(x) - y_2'(x) \rangle_n}{|y_1(x) - y_2(x)|_n \omega(|y_1(x) - y_2(x)|_n)} \leq M(x);$$

integrando su I_k si ottiene

$$\int_0^{|\beta_k - \alpha_k|_n} \frac{dt}{\omega(t)} = \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{\frac{d}{dx}|y_1(x) - y_2(x)|_n}{\omega(|y_1(x) - y_2(x)|_n)} dx \leq \int_{\alpha_k}^{\beta_k} M(x) dx \leq \int_a^b M(x) dx,$$

il che è assurdo, essendo $\frac{1}{\omega}$ non sommabile in ogni intorno destro di 0. Perciò deve essere $\gamma = b$, ossia $y_1 = y_2$ in $[\xi, b]$. Similmente si ricava $y_1 = y_2$ in $[a, \xi]$. \square

Osservazione 2.4.2 Del teorema 2.4.1 esiste anche una versione locale, per la quale si rimanda al capitolo 9 di [6]

2.4.2 Esistenza della strategia ottimale di vaccinazione

Utilizzando il teorema 2.4.1, proviamo il seguente risultato preliminare:

Teorema 2.4.3 *Sia H definito da (2.6). Per ogni $u \in H$ esiste un'unica coppia (S, I) di funzioni assolutamente continue in $[0, T]$ che risolve il problema di Cauchy (2.5) q.o. in $[0, T]$, ove $I_0 \geq 0$, $S_0 \geq 0$, $I_0 + S_0 \leq 1$.*

Dimostrazione Notiamo che

$$f(t, S, I) = \begin{pmatrix} -\beta SI - u(t)S \\ \beta SI - \mu I \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T], (S, I) \in \mathbb{R}^2$$

è misurabile in t per ogni $(S, I) \in \mathbb{R}^2$ e di classe C^1 in (S, I) per ogni $t \in [0, T]$; però le ipotesi del teorema 2.4.1 non sembrano valere, dato che riusciamo soltanto ad avere

$$\begin{aligned} |f(t, S, I)|_2 &\leq [2\beta|I| + |u(t)| + \mu] \cdot [|S| + |I|], \\ |f(t, S, I) - f(t, \tilde{S}, \tilde{I})|_2 &\leq [2\beta|I| + |u(t)| + 2\beta|\tilde{S}| + \mu] \cdot [|S - \tilde{S}| + |I - \tilde{I}|]. \end{aligned}$$

Sia allora $\vartheta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ una funzione tale che $0 \leq \theta(S, I) \leq 1$, $\theta(S, I) \equiv 1$ in $\{(S, I) : |S| \leq 1, |I| \leq 1\}$ e $\theta(S, I) \equiv 0$ in $\{(S, I) : |S| \leq 2, |I| \leq 2\}^c$. Posto $\tilde{f}(t, S, I) = f(t, s, I)\theta(S, I)$, la funzione \tilde{f} verifica le ipotesi del teorema 2.4.1, essendo di classe C^1 a supporto compatto. Quindi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \left(\begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix} \right)' = \tilde{f}(t, S, I) & \text{q.o. in } [0, T] \\ \left(\begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix} \right)(0) = \begin{pmatrix} S_0 \\ I_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

ha soluzione unica (\bar{S}, \bar{I}) . Per questa soluzione si ha

$$\begin{aligned} \bar{I}(t) &= I_0 e^{\int_0^t [\beta\bar{S}(\tau) - \mu]\theta(\bar{S}(\tau), \bar{I}(\tau)) d\tau} \geq 0, \\ \bar{S}(t) &= S_0 e^{-\int_0^t [\beta\bar{I}(\tau) + \bar{u}(\tau)]\theta(\bar{S}(\tau), \bar{I}(\tau)) d\tau} \in [0, S_0], \\ \bar{I}'(t) + \bar{S}'(t) &= -[\bar{u}(t)\bar{S}(t) + \mu\bar{u}(t)]\theta(\bar{S}(t), \bar{I}(t)) \leq 0, \end{aligned}$$

da cui

$$0 \leq \bar{I}(t) + \bar{S}(t) \leq I_0 + S_0 \leq 1 \quad \forall t \in [0, T].$$

Perciò

$$\tilde{f}(t, \bar{S}(t), \bar{I}(t)) = f(t, \bar{S}(t), \bar{I}(t)) \quad \forall t \in [0, T],$$

cosicché (\bar{S}, \bar{I}) è soluzione del problema (2.5).

Se (\tilde{S}, \tilde{I}) è un'altra soluzione del problema (2.5), allora

$$0 \leq \tilde{S}(t) + \tilde{I}(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, T],$$

da cui

$$f(t, \tilde{S}(t), \tilde{I}(t)) = \tilde{f}(\tilde{S}(t), \tilde{I}(t)) \quad \forall t \in [0, T];$$

dunque (\tilde{S}, \tilde{I}) e (\bar{S}, \bar{I}) risolvono entrambe il problema di Cauchy con secondo membro \tilde{f} . Ne segue $(\tilde{S}, \tilde{I}) = (\bar{S}, \bar{I})$, e questo conclude la dimostrazione. \square

Abbiamo così verificato che per ogni controllo $u \in H$ esiste un unico stato (S, I) associato a u . A questo punto, inoltre, possiamo risolvere univocamente, ancora in virtù del teorema 2.4.1, il sistema lineare

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) = [\beta I(t) + u(t)]\lambda_1(t) - \beta I(t)\lambda_2(t) \\ \lambda_2'(t) = \beta S(t)\lambda_1(t) - [\beta S(t) - \mu]\lambda_2(t) - 1 \\ \lambda_1(T) = \lambda_2(T) = 0, \end{cases} \quad t \in [0, T].$$

Possiamo finalmente provare l'esistenza di un unico controllo ottimale per il problema dell'epidemia con vaccinazione.

Teorema 2.4.4 *Esiste un'unica coppia ottimale $((\bar{S}, \bar{I}), \bar{u})$ per il problema di minimizzazione del funzionale (2.4) sotto il vincolo differenziale (2.5).*

Dimostrazione Sia $\{u_n\} \subset H$ una successione di controlli, sia $\{(S_n, I_n)\}$ la corrispondente successione di stati, e supponiamo che

$$J(I_n, u_n) = \int_0^T \left[I_n(t) + \frac{A}{2} u_n(t)^2 \right] dt \rightarrow \inf_K J \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

La successione $\{u_n\}$ è limitata in $L^2(0, T)$: poiché H è un convesso chiuso, dunque debolmente chiuso, in $L^2(0, T)$, esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\} \subseteq \{u_n\}$ debolmente convergente in $L^2(0, \pi)$ a una funzione $\bar{u} \in H$. Pertanto

$$\frac{A}{2} \int_0^T \bar{u}^2(t) dt \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{A}{2} \int_0^T u_{n_k}^2(t) dt.$$

D'altra parte, $\{S_{n_k}\}$ e $\{I_{n_k}\}$ sono successioni equilimitate (essendo $0 \leq S_{n_k} + I_{n_k} \leq 1$) ed equicontinue (perché S'_{n_k} e I'_{n_k} sono limitate). Quindi, per il teorema di Ascoli-Arzelà, a meno di ulteriori sottosuccessioni si ha $S_{n_k} \rightarrow \bar{S}$ e $I_{n_k} \rightarrow \bar{I}$ uniformemente, e in particolare $\int_0^T I_{n_k}(t) dt \rightarrow \int_0^T \bar{I}(t) dt$. Ne segue

$$J(\bar{S}, \bar{u}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T I_{n_k}(t) dt + \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{A}{2} \int_0^T u_{n_k}(t)^2 dt = \lim_{n \rightarrow \infty} J(I_n, u_n) = \inf J,$$

e dunque $((\bar{S}, \bar{I}), \bar{u})$ è ottimale. L'unicità segue dal fatto che vi è un'unica soluzione delle equazioni (2.7) che forniscono le condizioni necessarie di Pontrjagin. \square

2.5 Il teorema di esistenza di Filippov-Cesari

Quando abbiamo a che fare con problemi di controllo più complicati, ci occorre un risultato più generale di esistenza ed unicità del controllo ottimale. Esporremo i teoremi di

Filippov e di Cesari, i quali, pur non essendo esaustivi, sono di fondamentale importanza per una vasta classe di problemi finito-dimensionali, che andiamo ora a descrivere. Vogliamo minimizzare il funzionale

$$J(y_0, u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), u(t)) dt + \phi(e) \quad (2.8)$$

nella classe delle funzioni $u : [t_0, t_1] \rightarrow U$ sommabili in un certo intervallo $[t_0, t_1]$, dipendente da u , sotto la condizione

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), u(t)), & t \in [t_0, t_1] \\ y(t_0) = y_0, & e = (t_0, t_1, y_0, y(t_1)) \in S. \end{cases} \quad (2.9)$$

L'intervallo $[t_0, t_1]$ si considera parte della definizione del controllo u (è il suo dominio). Dunque, sono dati gli insiemi $U \subseteq \mathbb{R}^m$ (valori dei controlli), e $S \subseteq \mathbb{R}^{2n+2}$ (stati e tempi iniziali e finali), nonché le funzioni L, f, ϕ ; il controllo è (y_0, u) , lo stato è definito dall'equazione differenziale ma è anche vincolato dalla condizione $e \in S$, mentre il controllo è anch'esso vincolato dalle condizioni $u(t) \in U$ per ogni $t \in [t_0, t_1]$ ed $e \in S$. Le ipotesi di base sono le seguenti:

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad L : \mathbb{R}^{n+1} \times U \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi : S \rightarrow \mathbb{R} \text{ sono funzioni continue;} \quad (2.10)$$

$$|f(t, y, u)|_n \leq C_1[1 + |y|_n + |u|] \quad \forall (t, y, u) \in \mathbb{R}^{n+1} \times U; \quad (2.11)$$

$$|f(t, y, u) - f(t, \bar{y}, u)|_n \leq C_2[1 + |u|]|y - \bar{y}|_n \quad \forall (t, y, u), (t, \bar{y}, u) \in \mathbb{R}^{n+1} \times U. \quad (2.12)$$

Osserviamo subito che se U è un insieme limitato, allora in (2.11) e in (2.12) si può omettere la dipendenza da $|u|$.

Lo stato y è univocamente determinato, in virtù del teorema 2.4.1 e dell'ipotesi (2.12). Esso si scrive implicitamente in forma integrale:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s), u(s)) ds, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (2.13)$$

Di conseguenza, è valida la stima

$$|y(t) - y_0|_n \leq C \int_{t_0}^t [1 + |y_0|_n + |u(s)|] ds \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (2.14)$$

Infatti, per (2.11),

$$\begin{aligned} 0 \leq |y(t) - y_0|_n &= \left| \int_{t_0}^t f(s, y(s), u(s)) ds \right|_n \leq \\ &\leq C_1 \int_{t_0}^t [1 + |y(s) - y_0|_n + |y_0|_n + |u(s)|] ds = \\ &= C_1 \int_{t_0}^t |y(s) - y_0|_n ds + C_1 \int_{t_0}^t [1 + |y_0|_n + |u(s)|] ds; \end{aligned}$$

utilizzando il classico lemma di Grönwall, si ricava la tesi con

$$C = e^{C_1(t_1-t_0)} - 1 + C_1. \quad \square$$

Introduciamo i seguenti insiemi:

$$\mathcal{F} = \{(y_0, u) : y_0 \in \mathbb{R}^n, u \in L^1(t_0, t_1; U) \text{ per un opportuno } [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}, \\ y \text{ verifica (2.13), } e = (t_0, t_1, y_0, y(t_1)) \in S\} \quad (2.15)$$

(\mathcal{F} è la classe dei controlli ammissibili),

$$F(t, y) = \{f(t, y, u) : u \in U\}, \quad (t, y) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (2.16)$$

$$\tilde{F}(t, y) = \{(z, w) \in \mathbb{R}^{n+1} : z = f(t, y, u), w \geq L(t, y, u), u \in U\}, \quad (t, y) \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (2.17)$$

Valgono allora i seguenti teoremi:

Teorema 2.5.1 (di Filippov) *Nelle ipotesi (2.10), (2.11), (2.12), supponiamo che $L \equiv 0$, ed inoltre che:*

- (i) \mathcal{F} sia non vuoto;
- (ii) U sia compatto;
- (iii) S sia compatto;
- (iv) $F(t, y)$ sia convesso (e, ovviamente, chiuso) per ogni $(t, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Allora esiste $(y_0^*, u^*) \in \mathcal{F}$ tale che

$$J(y_0^*, u^*) = \min_{(y_0, u) \in \mathcal{F}} J(y_0, u).$$

Teorema 2.5.2 (di Cesàri) *Nelle ipotesi (2.10), (2.11), (2.12), supponiamo inoltre che:*

- (i) \mathcal{F} sia non vuoto;
- (ii) U sia chiuso;
- (iii) S sia compatto;
- (iv) $\tilde{F}(t, y)$ sia convesso (e, ovviamente, chiuso) per ogni $(t, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$;
- (v) esista una funzione continua $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, tale che

$$L(t, y, u) \geq g(u) \quad \forall (t, y, u) \in \mathbb{R}^{n+1} \times U, \quad \lim_{|u| \rightarrow \infty, u \in U} \frac{g(u)}{|u|} = +\infty.$$

Allora esiste $(y_0^*, u^*) \in \mathcal{F}$ tale che

$$J(y_0^*, u^*) = \min_{(y_0, u) \in \mathcal{F}} J(y_0, u).$$

Osservazioni 2.5.3 (1) Nei due teoremi l'ipotesi (iv) può essere sostituita da

(iv)' U è convesso, $f(t, y, u) = \alpha(t, y) + \beta(t, y)u$ e $u \mapsto L(t, y, u)$ è convessa,

perché da (iv)' segue che $F(t, y)$ e $\tilde{F}(t, y)$ sono convessi.

(2) Nei due teoremi l'ipotesi (iii) può essere sostituita da

(iii)' esiste $\mu_1 > \inf_{\mathcal{F}} J$ ed esiste un compatto $S' \subseteq S$, in modo che valga la seguente implicazione:

$$e \in S, \quad \exists u \in U \text{ tale che } J(y_0, u) \leq \mu_1 \quad \implies \quad e \in S'.$$

Infatti, ai fini della minimizzazione di J si può riformulare il problema prendendo S' in luogo di S .

(3) Nel teorema di Cesari, se U è compatto la condizione (v) si riduce ad una limitazione inferiore per L della forma

$$L(t, y, u) \geq K \quad \forall (t, y, u) \in \mathbb{R}^{n+1} \times U;$$

infatti g non ha vincoli all'infinito ma è continua sul compatto U , dunque è uniformemente limitata.

In particolare, se nel teorema di Cesari 2.5.2 assumiamo U compatto e $L \equiv 0$, sono automaticamente verificate le ipotesi del teorema di Filippov 2.5.1. Perciò, se dimostriamo il teorema 2.5.2 risulterà provato anche il teorema 2.5.1.

(4) Nel teorema di Cesari, in conseguenza di (v), esiste $b > 0$ tale che

$$g(u) \geq -b \quad \forall u \in U. \quad (2.18)$$

Infatti $g(u) \geq M|u|$ se $|u| > R_0$, mentre sul compatto $U \cap \overline{B(0, R_0)}$ la g è continua e dunque inferiormente limitata.

(5) Poiché S è compatto, esiste $[T_0, T_1]$ tale che $[t_0, t_1] \subseteq [T_0, T_1]$ per ogni $(t_0, t_1, y_0, y_1) \in S$. Fissato un elemento $u_0 \in U$, possiamo estendere ogni controllo $u : [t_0, t_1] \rightarrow U$ a tutto l'intervallo $[T_0, T_1]$ ponendo $u(t) = u_0$ per ogni $t \in [T_0, T_1] \setminus [t_0, t_1]$. Di conseguenza, anche lo stato y è definito dalla formula (2.13) in tutto $[T_0, T_1]$, e possiamo estendere la relazione (2.14) a $[T_0, T_1]$:

$$|y(t) - y_0|_n \leq C \int_{t_0}^t [1 + |y_0|_n + |u(s)|] ds \quad t \in [T_0, T_1]. \quad (2.19)$$

(6) Se U è compatto, esistono $M_1, M_2 \geq 0$ tali che

$$|y(t)|_n \leq M_1 \quad \forall t \in [T_0, T_1], \quad \forall (y_0, u) \in \mathcal{F}, \quad (2.20)$$

$$|y(t) - y(s)|_n \leq M_2|t - s| \quad \forall t, s \in [T_0, T_1], \quad \forall (y_0, u) \in \mathcal{F}. \quad (2.21)$$

Infatti, essendo S compatto, vale $|y_0|_n \leq M_0$ per ogni $(y_0, u) \in \mathcal{F}$; per la compattezza di U , si ha $|u(t)| \leq B$ per ogni $(y_0, u) \in \mathcal{F}$. Da (2.19) e (2.11) segue allora

$$|y(t)|_n \leq |y(t) - y_0|_n + |y_0|_n \leq C_1(T_1 - T_0)[1 + M_0 + B] + M_0 =: M_1,$$

$$\begin{aligned}
|y(t) - y(s)|_n &= \left| \int_s^t f(\tau, y(\tau), u(\tau)) d\tau \right|_n \leq \\
&\leq \left| \int_s^t C_1[1 + M_1 + B] d\tau \right| \leq C_1[1 + M_1 + B]|t - s| =: M_2|t - s|.
\end{aligned}$$

Prima di dimostrare il teorema di Cesari, vediamo qualche esempio e controesempio.

Esempio 2.5.4 Come caso particolare del teorema 2.5.1, fissiamo t_0 e y_0 , imponendo solamente la condizione finale $(t_1, y(t_1)) \in S_1$, con $S_1 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Dunque

$$S = \{e = (t_0, t_1, y_0, y_1) : (t_1, y_1) \in S_1\}.$$

Si ha allora

$$(y_0, u) \in \mathcal{F} \iff \exists t_1 \geq t_0 \text{ tale che } (t_1, y(t_1)) \in S_1.$$

Poniamo

$$J(u) = t_1 - t_0;$$

minimizzare J equivale a portare $(t, y(t))$ in S_1 in tempo minimo. Possiamo allora enunciare:

Corollario 2.5.5 (problema del tempo minimo) *Supponiamo verificate le ipotesi (2.10), (2.11), (2.12) e (i), (ii), (iv) del teorema 2.5.1; se inoltre S_1 è chiuso, allora esiste $u^* : [t_0, t_1] \rightarrow U$ tale che $J(u^*) = \min J$.*

Dimostrazione Si ha $\phi(e) = t_1 - t_0$. Sia $u : [t_0, \tau] \rightarrow U$ un controllo ammissibile, che esiste per (i). Sia $\mu_1 = \tau - t_0 = J(u)$; se $\mu_1 = \inf J$, la tesi è provata. Supponiamo dunque $\mu_1 > \inf J$. Dall'osservazione 2.5.3 (6) segue

$$|y(t)|_n \leq M_1 \quad \forall t \in [t_0, \tau].$$

Poniamo

$$S' = \{(t_0, t_1, y_0, y_1) : t_1 \in [t_0, \tau], |y_1|_n \leq M_1, (t_1, y_1) \in S_1\};$$

allora S' è incluso in S , è compatto, e verifica la condizione dell'osservazione 2.5.3 (2): infatti, se $e \in S$ ed esiste $\bar{u} : [t_0, \theta] \rightarrow U$ tale che $J(\bar{u}) \leq \mu_1$, ciò significa che, detto \bar{y} lo stato corrispondente a \bar{u} , deve essere $(\theta, \bar{y}(\theta)) \in S_1$, con

$$J(\bar{u}) = \theta - t_0 \leq \mu_1 = \tau - t_0.$$

Dunque $\theta \in [t_0, \tau]$, $|\bar{y}(\theta)|_n \leq M_1$ e $(\theta, \bar{y}(\theta)) \in S_1$, vale a dire $e \in S'$. Pertanto il teorema 2.5.1 implica l'esistenza di un controllo ottimale $u^* : [t_0, t^*] \rightarrow U$, tale che per lo stato corrispondente y^* si abbia $(t^*, y^*(t^*)) \in S_1$, e risulti $J(u^*) = t^* - t_0 = \min J$. \square

Controesempio 2.5.6 Il teorema di Filippov è in generale falso quando S non è compatto. Infatti, siano $n = m = 1$, $U = [-1, 1]$, $t_0 = 0$, $y_0 = 0$; consideriamo

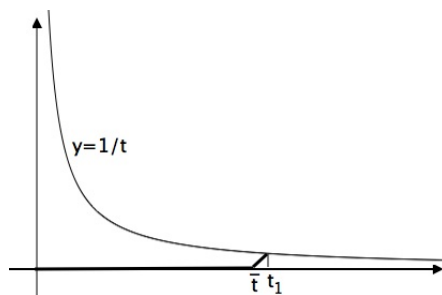
$$\begin{aligned}
f(t, y, u) &= u, \quad S = \left\{ (0, 0, t, y) : y = \frac{1}{t}, t > 0 \right\}, \\
J(u) &= y(t_1), \quad t_1 = \inf \left\{ t > 0 : y(t) = \frac{1}{t} \right\}.
\end{aligned}$$

L'insieme S non è compatto. Proviamo che $\inf J = 0$: fissato $\bar{t} > 0$, definendo

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 0 & \text{in } [0, \bar{t}[\\ 1 & \text{in } [\bar{t}, \infty[, \end{cases}$$

lo stato corrispondente è

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} 0 & \text{in } [0, \bar{t}] \\ t - \bar{t} & \text{in }]\bar{t}, t_1[, \end{cases}$$



e pertanto si ha

$$\frac{1}{t} \geq t - \bar{t} \iff t^2 - t\bar{t} - 1 \geq 0 \iff t \leq \frac{\bar{t} + \sqrt{\bar{t}^2 + 4}}{2},$$

da cui $t_1 = \frac{\bar{t} + \sqrt{\bar{t}^2 + 4}}{2}$ e

$$J(\bar{u}) = \bar{y}(t_1) = \frac{1}{t_1} = \frac{2}{\bar{t} + \sqrt{\bar{t}^2 + 4}} < \varepsilon$$

purché \bar{t} sia maggiore di un opportuno T_ε . D'altra parte, è ovvio che per qualunque controllo u si ha

$$J(u) = y(t_1) = \frac{1}{t_1} > 0,$$

cosicché $\inf J = 0$.

Si noti che S non verifica la condizione dell'osservazione 2.5.3 (2): infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ la successione di controlli $\{u_n\}$, ove $u_n = I_{[n, \infty[}$, è tale che lo stato y_n corrispondente verifica $J(y_n) < \varepsilon$ definitivamente, ma $e_n = (0, t_n, 0, y_n(t_n))$ non appartiene ad alcun compatto contenuto in S , visto che $t_n > n \rightarrow \infty$.

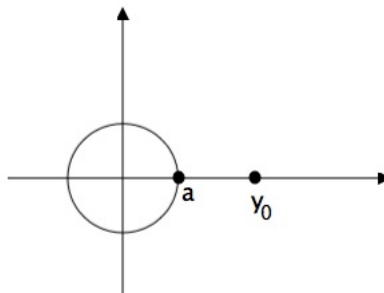
Controesempio 2.5.7 Il teorema di Filippov è in generale falso quando $F(t, y)$ non è convesso per qualche (t, y) . Infatti, siano $n = 2$, $m = 1$, $U = [-1, 1]$, $t_0 = 0$, $y_0 = (1, 0)$, $C = \{(y_1, y_2) : y_1^2 + y_2^2 = a^2\}$, con $0 < a < 1$, e

$$f(t, y, u) = \begin{pmatrix} -y_2^2 + u^2 \\ u \end{pmatrix};$$

poniamo

$$S = \{(0, t_1, y_0, y_1) : y_1 \in C\},$$

$$J(u) = t_1 = \inf\{t > 0 : y(t) \in C\}.$$



Questo è nuovamente un problema di tempo minimo: S è chiuso, ma si può verificare che esiste un compatto $S' \subset S$, dotato della proprietà dell'osservazione 2.5.3 (2). Tuttavia, l'insieme

$$F(t, y) = \{(-y_2^2 + u^2, u) : u \in [-1, 1]\}$$

non è convesso, essendo un arco di parabola. Il sistema, naturalmente, è

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_2(t)^2 + u(t)^2 \\ y_2'(t) = u(t), \end{cases} \quad t \in [0, t_1]. \quad (2.22)$$

Proveremo che:

(i) $t_1 \geq 1 - a$ per ogni controllo u ,

(ii) $\inf J = 1 - a$,

(iii) in realtà $t_1 > 1 - a$ per ogni controllo u .

Proviamo (i): dal sistema (2.22) si ha

$$y_1(t) \leq -1 + \int_0^t u(s)^2 ds \leq -1 + t \leq -a \quad \forall t \in [0, 1 - a];$$

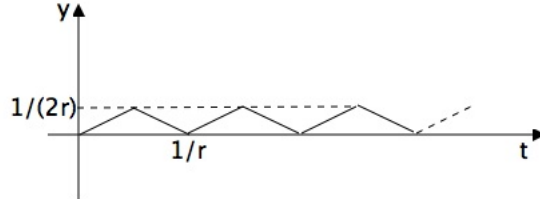
pertanto deve essere $t_1 \geq 1 - a$.

Proviamo (ii): per $r \in \mathbb{N}^+$ sia

$$u_r(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in \left[\frac{2j-2}{2r}, \frac{2j-1}{2r} \right[\\ -1 & \text{se } t \in \left[\frac{2j-1}{2r}, \frac{2j}{2r} \right[\end{cases}, \quad j \in \mathbb{N}^+.$$

Detto y_r lo stato corrispondente, si ha

$$y_{2r}(t) = \int_0^t u_r(s) ds,$$



il cui grafico è a lato, mentre

$$y_{1r}(t) = -1 + \int_0^t [-y_{2r}(s) + u(s)^2] ds = -1 + t - \int_0^t y_{2r}(s)^2 ds.$$

Poniamo $T_{1r} = J(u_r)$ e proviamo che $t_{1r} \rightarrow 1 - a$ per $r \rightarrow \infty$. Sappiamo da (i) che $1 - a \leq t_{1r}$. Poi, risulta

$$0 \leq y_{2r}(t) \leq \frac{1}{2r} \quad \forall t \geq 0,$$

da cui

$$y_{1r}(t) = -1 + t - \int_0^t y_{2r}(s) ds \rightarrow -1 + t \quad \text{per } r \rightarrow \infty;$$

inoltre, scelto $t = 1$ e fissato $\varepsilon \in]0, a[$, si ha

$$\begin{cases} y_{1r}(1) > -\varepsilon > -a \\ |y_{2r}(t)| \leq \frac{1}{2r} \end{cases} \quad \text{per } r \text{ grande,}$$

il che implica che il punto $(y_{1r}(t), y_{2r}(t))$ è interno a C per r grande. Dunque

$$1 - a \leq t_{1r} < 1 \quad \text{per } r \text{ grande.}$$

D'altronde, per $r \rightarrow \infty$,

$$y_{1r}(t_{1r}) = -1 + t_{1r} - \int_0^{t_{1r}} y_{2r}(s)^2 ds = -1 + t_{1r} \left[1 + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right],$$

ed essendo $y_{1r}(t_{1r})^2 + y_{2r}(t_{1r})^2 = a^2$, si ricava

$$\lim_{r \rightarrow \infty} y_{1r}(t_{1r})^2 = a^2.$$

Ma $y_{1r}(t_{1r}) \leq -1 + t_{1r} < 0$ per r sufficientemente grande, e dunque $y_{1r}(t_{1r}) \rightarrow -a$ per $r \rightarrow \infty$. Perciò

$$\lim_{r \rightarrow \infty} t_{1r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1 + y_{1r}(t_{1r})}{1 + O\left(\frac{1}{r^2}\right)} = 1 - a.$$

Ciò prova che $\inf J = 1 - a$.

Proviamo (iii). Sia u un controllo ammissibile. Se $u = 1$ q.o. in $[0, 1 - a]$, allora per lo stato corrispondente y si ha

$$\begin{cases} y_1(t) = -1 + \int_0^t (-s^2 + 1) ds = -1 + t - \frac{t^3}{3} \\ y_2(t) = t, \end{cases} \quad t \in [0, 1 - a],$$

e se fosse $a^2 = y_1(1 - a)^2 + y_2(1 - a)^2$, ricaveremmo

$$a^2 = \left(-1 + (1 - a) - \frac{(1 - a)^3}{3} \right)^2 + (1 - a)^2,$$

e dopo qualche calcolo

$$0 = \frac{(1 - a)^6}{9} + (1 - a)^2 - \frac{2}{3}(1 - a)^3,$$

il che è impossibile se $0 < a < 1$ (la funzione a secondo membro è nulla per $a = 1$ ed ha derivata negativa in $[0, 1]$).

Se invece esiste $E \subset [0, 1 - a]$, di misura positiva, tale che $u < 1$ q.o. in E , allora

$$y_1(t) \leq -1 + \int_0^t u(s)^2 ds < -1 + t \leq -a \quad \forall t \in [0, 1 - a];$$

dunque è impossibile che $(y_1(t), y_2(t)) \in C$ per alcun $t \leq 1 - a$. Ciò prova (iii).

Controesempio 2.5.8 Il teorema di Cesari è falso senza la limitazione dal basso espressa dalla condizione (v). Siano $n = m = 1$, $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, $t_1 = 1$, $y_1 = 0$: dunque $S = \{(0, 1, 1, 0)\}$. Poniamo $f(t, x, u) = u$, $L(t, x, u) = tu^2$. Stiamo cercando, fra i controlli che portano lo stato da $y_0 = 1$ a $y_1 = 0$ in tempo unitario, quello che minimizza

$$J(u) = \int_0^1 s u(s)^2 ds.$$

Proviamo che $\inf J = 0$ ma che $J(u) > 0$ per ogni $u \in \mathcal{F}$. Notiamo che $u = 0$ q.o. non è un controllo ammissibile, perché lo stato corrispondente è $y(t) \equiv 1$, che non si annulla per $t = t_1 = 1$; quindi si ha $J(u) > 0$ per ogni controllo ammissibile.

Per $r \in \mathbb{N}^+$ sia $u_r(t) = -\frac{1}{r} t^{\frac{1}{r}-1}$; allora $y_r(t) = 1 - t^{\frac{1}{r}}$ e

$$J(u_r) = \int_0^1 \frac{s}{r^2} s^{\frac{2}{r}-2} ds = \frac{1}{r^2} \left[\frac{s^{\frac{2}{r}}}{\frac{2}{r}} \right]_0^1 = \frac{1}{2r} \rightarrow 0 \quad \text{per } r \rightarrow \infty.$$

Perciò $\inf J = 0$, ed il minimo non esiste.

Dimostrazione del teorema 2.5.2 Per l'osservazione 2.5.3(5), tutti i controlli e gli stati sono definiti in $[T_0, T_1]$. Nei lemmi che seguono sono sottintese le ipotesi del teorema 2.5.2.

Lemma 2.5.9 *Sia $\nu > 0$.*

(i) *Per ogni $\eta > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$A \subseteq [T_0, T_1], \quad m(A) < \delta, \quad u \in L^1(T_0, T_1; U), \quad \int_{T_0}^{T_1} g(u(t)) dt \leq \nu \implies \int_A |u(t)| dt \leq \eta;$$

(ii) *esiste $M \geq 0$ tale che*

$$u \in L^1(T_0, T_1; U), \quad \int_{T_0}^{T_1} g(u(t)) dt \leq \nu \implies \int_{T_0}^{T_1} |u(t)| dt \leq M.$$

Dimostrazione (i) Sia $b > 0$ tale che $g(u) \geq -b$ per ogni $u \in U$ (osservazione 2.5.3(4)). Per l'ipotesi (v), per ogni $B > 0$ esiste $\vartheta_B > 0$ tale che

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \vartheta_B = 0, \quad |u| \leq \vartheta_B g(u) \quad \forall u \in U \text{ con } |u| > B.$$

Fissato $\eta > 0$, scegliamo B grande, in modo che $(\nu + b(T_1 - T_0))\vartheta_B \leq \frac{\eta}{2}$, e scegliamo $\delta > 0$ piccolo, in modo che $B\delta \leq \frac{\eta}{2}$. Posto

$$A_1 = \{t \in A : |u(t)| \leq B\},$$

se $A \subseteq [T_0, T_1]$ ha misura minore di δ otteniamo, grazie all'ipotesi (i) del lemma,

$$\begin{aligned} \int_A |u(t)| dt &= \int_{A_1} |u(t)| dt + \int_{A \setminus A_1} |u(t)| dt \leq B m(A_1) + \vartheta_B \int_{A \setminus A_1} g(u(t)) dt \leq \\ &\leq B\delta + \vartheta_B \left[\int_{T_0}^{T_1} g(u(t)) dt - \int_{[T_0, T_1] \setminus (A \setminus A_1)} g(u(t)) dt \right] \leq \\ &\leq B\delta + \vartheta_B \int_{T_0}^{T_1} g(u(t)) dt + b \vartheta_B (T_1 - T_0) \leq \\ &\leq B\delta + \vartheta_B \nu + b \vartheta_B (T_1 - T_0) \leq \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta. \end{aligned}$$

(ii) Posto $A_2 = \{t \in [T_0, T_1] : |u(t)| \leq B\}$ si ha, grazie all'ipotesi (v) e alla (ii) del lemma,

$$\begin{aligned}
\int_{T_0}^{T_1} |u(t)| dt &= \int_{A_2} |u(t)| dt + \int_{[T_0, T_1] \setminus A_2} |u(t)| dt \leq \\
&\leq B(T_1 - T_0) + \vartheta_B \int_{[T_0, T_1] \setminus A_2} g(u(t)) dt = \\
&= B(T_1 - T_0) + \vartheta_B \int_{T_0}^{T_1} g(u(t)) dt - \vartheta_B \int_{A_2} g(u(t)) dt \leq \\
&\leq B(T_1 - T_0) + \vartheta_B \nu + b \vartheta_B (T_1 - T_0) =: M. \quad \square
\end{aligned}$$

Lemma 2.5.10 *Esiste una successione $\{(y_{0j}, u_j)\} \subset \mathcal{F}$, tale che*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} J(y_{0j}, u_j) = \inf_{\mathcal{F}} J, \quad y_j \rightarrow y^* \text{ uniformemente in } [T_0, T_1],$$

ove $y^* \in AC([T_0, T_1], \mathbb{R}^n)$ e y_j è lo stato corrispondente a u_j .

Dimostrazione Sia $\{(y_{0j}, u_j)\}$ un'arbitraria successione minimizzante; allora, essendo $J(y_{0j}, u_j) \rightarrow \inf_{\mathcal{F}} J$, esiste $\gamma > 0$ per cui risulta $J(y_{0j}, u_j) \leq \gamma$ per ogni $j \in \mathbb{N}^+$. Inoltre, dato che ϕ è continua sul compatto S , esiste $N \geq 0$ tale che $|\phi(e)| \leq N$ per ogni $e \in S$. Dunque, se $u_j : [t_{0j}, t_{1j}] \rightarrow U$, e se $e_j = (t_{0j}, y_{0j}, t_{1j}, y_j(t_{1j}))$, si ha

$$\int_{t_{0j}}^{t_{1j}} g(u_j(t)) dt \leq \int_{t_{0j}}^{t_{1j}} L(t, y_j(t), u_j(t)) dt \leq \gamma + N \quad \forall j \in \mathbb{N}^+;$$

di conseguenza, ricordando l'osservazione 2.5.3(5),

$$\int_{T_0}^{T_1} g(u_j(t)) dt \leq (T_1 - T_0)|g(u_0)| + \gamma + N =: \nu,$$

ove u_0 è stato definito nell'osservazione 2.5.3(5) (si noti che se $[t_{0j}, t_{1j}] = [T_0, T_1]$ allora il termine $|g(u_0)|$ non compare, quindi la costante ν va bene in tutti i casi). Poniamo

$$\begin{aligned}
X_{e, \nu} &= \{y(\cdot) : \exists (y_0, u) \in \mathcal{F} : e = (t_0, y_0, t_1, y(t_1)) \in S, \\
&\int_{T_0}^{T_1} g(u(t)) dt \leq \nu, y \text{ è lo stato corrispondente a } u\}, \tag{2.23}
\end{aligned}$$

e mostriamo che $X_{e, \nu}$ è una famiglia equilimitata ed equi-assolutamente continua di funzioni da $[T_0, T_1]$ in \mathbb{R}^n . L'equi-assoluta continuità significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $A = \bigcup_{k=1}^m I_k$, con $I_k = [s_k, t_k]$ sottointervalli privi di punti interni comuni, e $m(A) < \delta$, allora risulta $\sum_{k=1}^m |y(t_k) - y(s_k)| < \varepsilon$ per ogni $y \in X_{e, \nu}$.

Infatti, per ogni $y \in X_{e, \nu}$ si ha, dal lemma 2.5.9(ii) e da (2.14),

$$\begin{aligned}
\int_{T_0}^{T_1} g(u(t)) dt \leq \nu &\implies \int_{T_0}^{T_1} |u(t)| dt \leq M \implies \\
&\implies |y(t)|_n \leq |y_0|_n + c_1 \int_{T_0}^{T_1} [1 + |y_0|_n + |u(s)|] ds \leq \\
&\leq |y_0|_n + c_1(T_1 - T_0)[1 + |y_0|_n] + c_1 M \leq M_1
\end{aligned}$$

con M_1 indipendente da $|y_0|_n$, grazie alla compattezza di S . Ciò implica l'equilimitatezza di $X_{e,\nu}$.

Proviamo l'equi-assoluta continuità. Sia $\varepsilon > 0$. Se $[s, t] \subseteq [T_0, T_1]$, si ha per ogni $y \in X_{e,\nu}$

$$\begin{aligned} |y(t) - y(s)|_n &= \left| \int_s^t f(\tau, y(\tau), u(\tau)) d\tau \right|_n \leq \\ &\leq c_1 \int_s^t [1 + |y_0|_n + |u(\tau)|] d\tau \leq \\ &\leq c_1[1 + M_1](t - s) + c_1 \int_s^t |u(\tau)| d\tau =: \bar{c} \left[(t - s) + \int_s^t |u(\tau)| d\tau \right]. \end{aligned}$$

Poniamo $\eta = \frac{\varepsilon}{2\bar{c}}$ e sia δ il numero fornito dal lemma 2.5.9(i) in corrispondenza di η e ν : eventualmente possiamo rimpicciolire δ in modo che $\bar{c}\delta < \frac{\varepsilon}{2}$. Allora, se $A = \bigcup_{k=1}^m I_k$, con gli $I_k = [s_k, t_k]$ sottointervalli privi di punti interni comuni, e $m(A) < \delta$, dal lemma 2.5.9(i) segue per ogni $y \in X_{e,\nu}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m |y(t_k) - y(s_k)|_n &\leq \bar{c} \sum_{k=1}^m (t_k - s_k) + \bar{c} \sum_{k=1}^m \int_{s_k}^{t_k} |u(t)| dt = \\ &= \bar{c} \left[m(A) + \int_A |u(t)| dt \right] \leq \bar{c}\delta + \bar{c}\eta < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ciò prova l'equi-assoluta continuità di $X_{e,\nu}$.

Per il teorema di Ascoli-Arzelà, la successione $\{(y_{0j}, u_j)\} \subseteq X_{e,\nu}$ ha una sottosuccessione uniformemente convergente in $[T_0, T_1]$ ad una funzione y^* , la quale risulta a sua volta, grazie alla stima precedente, assolutamente continua in $[T_0, T_1]$. \square

Lemma 2.5.11 *Possiamo scegliere la successione minimizzante del lemma 2.5.10 in modo che, posto*

$$Z_j(t) = \int_{T_0}^t L(s, y_j(s), u_j(s)) ds, \quad t \in [T_0, T_1], \quad (2.24)$$

risulti $Z_j(t) \rightarrow Z^*(t)$ per ogni $t \in [T_0, T_1]$, con $t \mapsto Z^*(t) + b(t - T_0)$ monotona crescente.

Dimostrazione Si ha dal lemma 2.5.10

$$0 \leq \int_{t_{0j}}^{t_{1j}} L(t, y_j(t), u_j(t)) dt + b(t_{1j} - t_{0j}) \leq \gamma + N + b(T_1 - T_0) =: \Gamma_1,$$

ove γ e N sono le costanti introdotte nella dimostrazione del lemma 2.5.10. Ricordando che $|y_j(t)|_n \leq M_1$ (come si è visto in quella dimostrazione, tale stima vale per ogni $y \in X_{e,\nu}$), risulta per continuità di L

$$0 \leq L(t, y_j(t), u_0) + b \leq B \quad \forall t \in [T_0, T_1] \setminus [t_{0j}, t_{1j}], \quad \forall j \in \mathbb{N}^+,$$

e dunque esiste $B_0 > 0$ tale che

$$0 \leq \int_{T_0}^t L(s, y_j(s), u_j(s)) ds + b(t - T_0) \leq B_0 \quad \forall t \in [T_0, T_1], \forall j \in \mathbb{N}^+.$$

Poniamo $\psi_j(t) = Z_j(t) + b(t - T_0)$: ψ_j è crescente e $0 \leq \psi_j(t) \leq B_0$ per ogni $t \in [T_0, T_1]$. Proveremo che esiste una sottosuccessione $\{\psi_{j_k}\} \subseteq \{\psi_j\}$ tale che $\psi_{j_k}(t) \rightarrow \psi^*(t)$ puntualmente in $[T_0, T_1]$: ne seguirà, come vedremo, che $Z^*(t) = \psi^*(t) - b(t - T_0)$ è la funzione cercata.

Proveremo questa affermazione in 4 passi successivi.

1. Si estrae $\{\psi_{j_k}\} \subseteq \{\psi_j\}$ tale che

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_{j_k}(t) =: \psi(t) \quad \forall t \in \mathbb{Q} \cap [T_0, T_1] :$$

questo si fa in modo standard con l'usuale procedimento diagonale.

2. Si definisce per $t \in [T_0, T_1] \setminus \mathbb{Q}$

$$\psi(t) := \liminf_{s \in \mathbb{Q}, s \rightarrow t^+} \psi(s),$$

ed anche, qualora $T_1 \notin \mathbb{Q}$,

$$\psi(T_1) := \sup_{t \in [T_0, T_1[} \psi(t),$$

In questo modo, la funzione $\psi : [T_0, T_1] \rightarrow [0, B_0]$ è crescente.

3. Se $t_0 \in [T_0, T_1]$ è punto di continuità per ψ , si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_{j_k}(t_0) = \psi(t_0).$$

Infatti, sia $\varepsilon > 0$: esistono $s, \sigma \in \mathbb{Q}$, con $\sigma < t_0 < s$, tali che $\psi(s) - \psi(\sigma) < \varepsilon$. Dalla relazione $\psi_{j_k}(\sigma) \leq \psi_{j_k}(t_0) \leq \psi_{j_k}(s)$, per $k \rightarrow \infty$ si trova

$$\psi(\sigma) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \psi_{j_k}(t_0) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \psi_{j_k}(t_0) \leq \psi(s),$$

e per monotonia

$$\psi(\sigma) \leq \psi(t_0) \leq \psi(s).$$

Ne segue, per l'arbitrarietà di ε , che $\psi(t_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_{j_k}(t_0)$.

4. Nell'insieme E dei punti di discontinuità di ψ , che è al più numerabile, esiste un'ulteriore sottosuccessione, denominata ancora $\{\psi_{j_k}\}$, tale che

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_{j_k}(t) =: \psi^*(t) \quad \forall t \in E.$$

Questo si ottiene nuovamente per diagonalizzazione.

Concludiamo la dimostrazione del lemma 2.5.11. Siano $t \in E$ e $s, \sigma \in \mathbb{Q} \cap [T_0, T_1]$, con $\sigma < t < s$. Dalla monotonia delle ψ_{j_k} , per $k \rightarrow \infty$ si ottiene

$$\psi(\sigma) \leq \psi^*(t) \leq \psi(s) \quad \forall \sigma, s \in \mathbb{Q} \cap [T_0, T_1] \text{ con } \sigma < t < s.$$

Poiché ψ è crescente,

$$\limsup_{\sigma \in \mathbb{Q}, \sigma \rightarrow t^-} \psi(\sigma) \leq \psi^*(t) \leq \liminf_{s \in \mathbb{Q}, s \rightarrow t^+} \psi(s) = \psi(t).$$

Inoltre, per ogni $t' < t$, scelto $\theta \in \mathbb{Q} \cap [T_0, T_1]$ con $t' < \theta < t$, abbiamo

$$\psi(t') \leq \liminf_{s \in \mathbb{Q}, s \rightarrow t'^-} \psi(s) \leq \psi(\theta) \leq \limsup_{\sigma \in \mathbb{Q}, \sigma \rightarrow t^-} \psi(\sigma) \leq \psi^*(t),$$

da cui per $t' \rightarrow t^-$

$$\lim_{t' \rightarrow t^-} \psi(t') \leq \psi^*(t) \leq \psi(t) \quad \forall t \in E.$$

Estendiamo ψ^* a $[T_0, T_1]$ ponendo $\psi^*(t) = \psi(t)$ per ogni $t \in [T_0, T_1] \setminus E$. Allora ψ^* è monotona crescente e vale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_{j_k}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} [Z_{j_k}(t) + b(t - T_0)] = \psi^*(t) \quad \forall t \in [T_0, T_1],$$

e posto $Z^*(t) = \psi^*(t) - b(t - T_0)$ si ha la tesi. \square

Adesso consideriamo, per un fissato $(t, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e per $q > 0$, gli insiemi

$$\mathcal{C}_q(t, y) = \bigcup_{|s-t|+|y'-y|_n < q} \tilde{F}(s, y'), \quad C_q(t, y) = \text{co}(\mathcal{C}_q(t, y)),$$

ove $\text{co}(W)$ è l'*inviluppo convesso* di W , vale a dire l'intersezione di tutti i convessi che contengono W .

Lemma 2.5.12 *Risulta*

$$\tilde{F}(t, y) = \bigcap_{q>0} \overline{C_q(t, y)} \quad \forall (t, y) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Dimostrazione L'inclusione \subseteq è evidente, essendo $\tilde{F}(t, y)$ convesso per ipotesi.

Proviamo \supseteq . Poniamo $\bar{z} = (z, w)$ per $z \in \mathbb{R}^n$ e $w \in \mathbb{R}$. Sia $\bar{z} \in \bigcap_{q>0} \overline{C_q(t, y)}$: scegliendo $q = \frac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}^+$, si costruisce una successione $\{\bar{z}_j\}$, con $\bar{z}_j \in C_{1/j}(t, y)$, tale che $\bar{z}_j \rightarrow \bar{z}$. Ricordando che ogni punto di $C_q(t, y)$, sottoinsieme di \mathbb{R}^{n+1} , è combinazione convessa di al più $n+2$ punti di $\mathcal{C}_q(t, y)$, possiamo scrivere

$$\bar{z}_j = (z_j, w_j) = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_{ij} \bar{z}_{ij}, \quad 0 \leq \lambda_{ij}, \quad \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_{ij} = 1, \quad \bar{z}_{ij} \in \tilde{F}(t_{ij}, y_{ij}),$$

con $|t_{ij} - t| + |y_{ij} - y|_n < \frac{1}{j}$ ed inoltre

$$\bar{z}_{ij} = (z_{ij}, w_{ij}), \quad z_{ij} = f(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}), \quad w_{ij} \geq L(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}), \quad u_{ij} \in U.$$

Passando ad opportune sottosuccessioni, per $j \rightarrow \infty$ si ha

$$\lambda_{ij} \rightarrow \lambda_i, \quad 0 \leq i \leq n+1,$$

con $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i = 1$;

$$u_{ij} \rightarrow u_i \quad \text{oppure} \quad |u_{ij}| \rightarrow +\infty, \quad 0 \leq i \leq n+1,$$

e possiamo supporre che

$$u_{ij} \rightarrow u_i, \quad 0 \leq i \leq \ell; \quad |u_{ij}| \rightarrow +\infty, \quad \ell+1 \leq i \leq n+1,$$

con $u_i \in U$ per $0 \leq i \leq \ell$. A priori, naturalmente, potrebbe essere $\ell = -1$, ossia $|u_{ij}| \rightarrow +\infty$ per $0 \leq i \leq n+1$.

Proveremo invece che $0 \leq \ell \leq n+1$, e che per il nostro $\bar{z} = (z, w)$ si ha

$$(a) \quad z = \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i f(t, y, u_i), \quad (b) \quad w \geq \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i L(t, y, u_i).$$

Infatti,

$$w_j = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_{ij} w_{ij} \geq \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_{ij} L(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) \geq \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_{ij} g(u_{ij}); \quad (2.25)$$

ora, per $j \rightarrow \infty$ si ha $w_j \rightarrow w$ e $\lambda_{ij} \rightarrow \lambda_i$, nonché, per $\ell+1 \leq i \leq n+1$, $|u_{ij}| \rightarrow \infty$ e, di conseguenza, $g(u_{ij}) \rightarrow \infty$. Ciò implica a sua volta $\lambda_{ij} \rightarrow 0$, ossia $\lambda_i = 0$, per $\ell+1 \leq i \leq n+1$. Ne segue $\ell \geq 0$ (altrimenti avremmo $\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i = 0$). Otteniamo allora, dato che $\lambda_{ij} g(u_{ij}) \geq 0$ per $\ell+1 \leq i \leq n+1$,

$$w_j \geq \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_{ij} L(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}),$$

e passando al limite per $j \rightarrow \infty$ si ottiene

$$w \geq \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i L(t, y, u_i),$$

che è la (b). Poi,

$$z_j = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_{ij} f(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) \rightarrow z \quad \text{per } j \rightarrow \infty.$$

Ma per $\ell+1 \leq i \leq n+1$, fissato $\varepsilon > 0$, si ha

$$0 \leq \frac{|f(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij})|}{L(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij})} \leq \frac{c[1 + |y_{ij}|_n + |u_{ij}|]}{g(u_{ij})} \leq \varepsilon \quad \text{per } j \geq j_\varepsilon,$$

da cui segue per $j \geq j_\varepsilon$, ricordando (2.25),

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=\ell+1}^{n+1} \lambda_{ij} f(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) \right| &\leq \varepsilon \sum_{i=\ell+1}^{n+1} \lambda_{ij} L(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) \leq \\ &\leq \varepsilon \left[w_j - \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_{ij} L(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) \right] \leq \varepsilon w_j \leq \varepsilon K, \end{aligned}$$

e dunque

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=\ell+1}^{n+1} \lambda_{ij} f(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) \right| = 0.$$

Pertanto

$$z = \lim_{j \rightarrow \infty} z_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_{ij} f(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) = \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i f(t, y, u_i),$$

che è la (a).

Dalla (b) ricaviamo che esistono $v_0, v_1, \dots, v_n \geq 0$ tali che

$$w = \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i [L(t, y, u_i) + v_i].$$

Allora, ponendo

$$\tilde{z}_i = (f(t, y, u_i), L(t, y, u_i) + v_i) \in \tilde{F}(t, y),$$

dalla (a) segue

$$\bar{z} = \left(\sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i f(t, y, u_i), \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i [L(t, y, u_i) + v_i] \right) = \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i \tilde{z}_i,$$

ossia $z \in \text{co}(\tilde{F}(t, y))$; per l'ipotesi (iv) del teorema 2.5.2 si conclude che $z \in \tilde{F}(t, y)$. \square

Lemma 2.5.13 *Sia $\{(y_{0j}, u_j)\}$ la successione minimizzante del lemma 2.5.10, e sia*

$$Z_j(t) = \int_0^t L(s, y_j(s), u_j(s)) ds.$$

Posto

$$\bar{z}_j(t) = (y_j(t), Z_j(t)), \quad \bar{z}^*(t) = (y^*(t), Z^*(t)),$$

nei punti di derivabilità di \bar{z}^* risulta

$$(\bar{z}^*)'(t) \in \tilde{F}(t, y^*(t)),$$

ove y^* è definito nel lemma 2.5.10 e Z^* è definita nel lemma 2.5.11.

Dimostrazione Ricordiamo che $y^* \in AC([T_0, T_1], \mathbb{R}^n)$ e che $Z^*(t) + b(t - T_0)$ è monotona crescente: quindi $(\bar{z}^*)'(t)$ esiste quasi ovunque in $[T_0, T_1]$. Sia t un punto di derivabilità per \bar{z}^* : anzitutto si ha, per definizione,

$$\bar{z}'_j(s) = (f(s, y_j(s), u_j(s)), L(s, y_j(s), u_j(s))) \quad \text{q.o. in } [T_0, T_1].$$

Fissato $q > 0$, esistono $\delta > 0$ e $j_0 \in \mathbb{N}$ tali che, per $|s - t| < \delta$ e $j \geq j_0$ si ha

$$|s - t| + |y_j(s) - y^*(t)| < \frac{1}{q},$$

ove si è usata l'equi-assoluta continuità delle y_j . Dunque

$$\bar{z}'_j(s) \in \tilde{F}(s, y_j(s)) \subseteq \mathcal{C}_q(t, y^*(t)) \quad \text{per } |s - t| < \delta \text{ e } j \geq j_0.$$

Se ne deduce

$$\frac{\bar{z}_j(t+h) - \bar{z}_j(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \bar{z}'_j(s) ds \in \overline{\mathcal{C}_q(t, y^*(t))} \quad \text{per } |h| < \delta \text{ e } j \geq j_0,$$

e quindi, per $j \rightarrow \infty$

$$\frac{\bar{z}^*(t+h) - \bar{z}^*(t)}{h} \in \overline{\mathcal{C}_q(t, y^*(t))} \quad \text{per } |h| < \delta.$$

Infine, per $|h| \rightarrow 0$,

$$(\bar{z}^*)'(t) \in \overline{\mathcal{C}_q(t, y^*(t))},$$

Per l'arbitrarietà di q e per il lemma 2.5.12, si conclude che

$$(\bar{z}^*)'(t) \in \tilde{F}(t, y^*(t)). \quad \square$$

Lemma 2.5.14 *Esistono $u^* \in L^1(T_0, T_1; U)$ e $v^* : [T_0, T_1] \rightarrow \mathbb{R}$, misurabile e non negativa, tali che*

$$\begin{cases} (y^*)'(t) = f(t, y^*(t), u^*(t)) \\ (Z^*)'(t) = L(t, y^*(t), u^*(t)) + v^*(t) \end{cases} \quad \text{q.o. in } [T_0, T_1],$$

ove y^* è la funzione definita nel lemma 2.5.10 e Z^* è la funzione definita nel lemma 2.5.11.

Dimostrazione Poniamo $U' = U \times [0, \infty[$. Per $\bar{u} = (u, v) \in U'$ sia

$$\bar{f}(t, y, \bar{u}) = (f(t, y, u), L(t, y, u) + v), \quad (t, y) \in [T_0, T_1] \times \mathbb{R}^n.$$

Osserviamo che da (2.17) segue

$$\tilde{F}(t, y^*(t)) = [\bar{f}(t, y^*(t), \cdot)](U').$$

Adesso applichiamo un *lemma di selezione*:

Lemma 2.5.15 (di selezione) *Sia $D \subseteq \mathbb{R}^{p+m}$ un insieme non vuoto; poniamo per $z \in \mathbb{R}^p$*

$$D^z = \{u \in \mathbb{R}^m : (z, u) \in D\}, \quad \Delta = \{z \in \mathbb{R}^p : D^z \neq \emptyset\}.$$

Se D è compatto esiste $u : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$, misurabile, tale che

$$(z, u(z)) \in D \quad \text{per q.o. } z \in \Delta.$$

Dimostreremo questo lemma alla fine della dimostrazione del lemma 2.5.14. Assumiamo, dunque, che il lemma di selezione sia vero.

Consideriamo la funzione $\bar{z}^*(t) = (y^*(t), Z^*(t))$, che è stata introdotta nel lemma 2.5.13. La sua derivata $(\bar{z}^*)'(t)$, che esiste q.o., è misurabile in $[T_0, T_1]$. In conseguenza del teorema di Lusin, esiste un sottoinsieme σ -compatto Δ di $[T_0, T_1]$, tale che $m([T_0, T_1] \setminus \Delta) = 0$ e $(\bar{z}^*)'|_{\Delta}$ è continua. Poniamo

$$D = \{(t, \bar{u}) \in \Delta \times U' : (\bar{z}^*)'(t) = \bar{f}(t, \bar{z}^*(t), \bar{u})\};$$

D è σ -compatto e per il lemma 2.5.13 si ha $(\bar{z}^*)'(t) \in \tilde{F}(t, y^*(t))$ per q.o. $t \in [T_0, T_1]$, da cui

$$D^t = \{\bar{u} \in U' : (t, \bar{u}) \in D\} \neq \emptyset \quad \text{per q.o. } t \in [T_0, T_1].$$

Per il lemma 2.5.15 di selezione, esiste $\bar{u}^* : \Delta \rightarrow U'$ misurabile, tale che $(t, \bar{u}^*(t)) \in D$ per q.o. $t \in \Delta$, cioè per q.o. $t \in [T_0, T_1]$. Pertanto, posto $(u^*(t), v^*(t)) = \bar{u}^*(t)$, si ha

$$\begin{cases} (y^*)'(t) = f(t, y^*(t), u^*(t)) \\ (Z^*)'(t) = L(t, y^*(t), u^*(t)) + v^*(t) \end{cases} \quad \text{q.o. in } [T_0, T_1],$$

con $u^*(t) \in U$ e $v^*(t) \geq 0$. Resta da provare che $u^* \in L^1(T_0, T_1; \mathbb{R}^m)$.

Per la monotonia di $\psi^* = Z^* + b(\cdot - T_0)$ stabilita nel lemma 2.5.11, e per il teorema di derivazione di Lebesgue, risulta

$$\psi^*(T_1) - \psi^*(T_0) \geq \int_{T_0}^{T_1} L(t, y^*(t), u^*(t)) dt + b(T_1 - T_0) \geq \int_{T_0}^{T_1} g(u^*(t)) dt + b(T_1 - T_0).$$

Perciò $g(u^*(\cdot))$ è sommabile e, per il lemma 2.5.9 (ii), anche u^* è sommabile. \square

Dimostrazione del lemma 2.5.15 Supponiamo dapprima che D sia compatto: allora anche Δ è compatto, essendo $\Delta = \pi(D)$ con $\pi(z, u) = z$ per ogni $(z, u) \in \mathbb{R}^{p+m}$. In questo caso, proveremo la tesi per induzione su m .

Se $m = 1$, ponendo $u(z) := \min D^z$, la u è semicontinua inferiormente su Δ e quindi è misurabile; inoltre, naturalmente, $(z, u(z)) \in D$ per ogni $z \in \Delta$.

Se la tesi è vera per $m - 1$, sia $\tilde{D} = \Pi(D)$, ove $\Pi(z, u) = (z, u_1, \dots, u_{m-1})$ per ogni $(z, u) \in \mathbb{R}^{p+m}$. Per ipotesi induttiva, esistono $u_1(\cdot), \dots, u_{m-1}(\cdot)$ misurabili su Δ , tali che $(z, u_1(z), \dots, u_{m-1}(z)) \in \tilde{D}$ per q.o. $z \in \Delta$. Sia

$$u_m(z) = \min\{v \in \mathbb{R} : (z, u_1(z), \dots, u_{m-1}(z), v) \in D\}, \quad z \in \Delta.$$

Per il teorema di Lusin, vi è un insieme σ -compatto K , contenuto in Δ , tale che $m(\Delta \setminus K) = 0$ e le restrizioni a K di u_1, \dots, u_{m-1} sono continue. Dunque u_m è semicontinua inferiormente in K , per cui u_m è misurabile e $(z, u_1(z), \dots, u_m(z)) \in D$ per q.o. $z \in \Delta$. Ciò prova il passo induttivo e quindi la tesi nel caso in cui D è compatto.

Se $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$, con $D_i \subseteq D_{i+1}$ e D_i compatto, posto $\Delta_i = \Pi(D_i)$ vi è una funzione $u_i : \Delta_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che $(z, u_i(z)) \in D$ per q.o. $z \in \Delta_i$. Definiamo

$$u(z) = u_i(z) \quad \text{se } z \in \Delta_i \setminus \Delta_{i-1}, \quad i \in \mathbb{N}^+.$$

Allora $u : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$ è misurabile e $(z, u(z)) \in D$ per q.o. $z \in \Delta$. \square

Andiamo a concludere la dimostrazione del teorema 2.5.2 di Cesari. Sia $(y_{0j}, u_j) \subset \mathcal{F}$ la successione minimizzante analizzata nei lemmi 2.5.10 e 2.5.11, e poniamo $e_j = (t_{0j}, t_{1j}, y_{0j}, y_j(t_{1j}))$: si ha, per definizione di Z_j (lemma 2.5.13),

$$\inf_{\mathcal{F}} J = \lim_{j \rightarrow \infty} J(y_{0j}, u_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} [Z_j(t_{1j}) - Z_j(t_{0j}) + \phi(e_j)].$$

Dobbiamo provare che $J(y_0^*, u^*) \leq \inf_{\mathcal{F}} J$. Passando a sottosuccessioni, poiché le y_j sono equi-assolutamente continue, come segue dalla dimostrazione del lemma 2.5.10, possiamo supporre che

$$e_j \rightarrow e^* = (t_0^*, t_1^*, y_0^*, y^*(t_1^*)), \quad \text{con } t_0^* \leq t_1^*.$$

Per la continuità di ϕ , abbiamo anche $\phi(e_j) \rightarrow \phi(e^*)$.

Sarà $t_0^* < t_1^*$, oppure $t_0^* = t_1^*$. Nel primo caso, siano t_0, t_1 tali che $t_0^* < t_0 < t_1 < t_1^*$; per la monotonia di $\psi_j = Z_j + b(\cdot - T_0)$, si ha per j sufficientemente grande

$$\psi_j(t_{1j}) - \psi_j(t_{0j}) \geq \psi_j(t_1) - \psi_j(t_0),$$

e sottraendo ad entrambi i membri la quantità $b(t_{1j} - t_{0j})$, per $j \rightarrow \infty$ otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} [Z_j(t_{1j}) - Z_j(t_{0j})] &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} [\psi_j(t_1) - \psi_j(t_0) - b(t_{1j} - t_{0j})] = \\ &= \psi^*(t_1) - \psi^*(t_0) - b(t_1^* - t_0^*) \geq \int_{t_0}^{t_1} (\psi^*)'(t) dt - b(t_1 - t_0) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, y^*(t), u^*(t)) dt. \end{aligned}$$

Se adesso $t_1 \rightarrow t_1^*$ e $t_0 \rightarrow t_0^*$, ricaviamo

$$\inf_{\mathcal{F}} J = \lim_{j \rightarrow \infty} [Z_j(t_{1j}) - Z_j(t_{0j}) + \phi(e_j)] \geq \int_{t_0^*}^{t_1^*} L(t, y^*(t), u^*(t)) dt + \phi(e^*),$$

ovvero, posto $y_0^* = y^*(t_0^*)$,

$$\inf_{\mathcal{F}} J \geq J(y_0^*, u^*).$$

Se invece $t_0^* = t_1^*$, si ha direttamente

$$\lim_{j \rightarrow \infty} [Z_j(t_{1j}) - Z_j(t_{0j})] = \lim_{j \rightarrow \infty} [\psi_j(t_{1j}) - \psi_j(t_{0j}) - b(t_{1j} - t_{0j})] \geq 0;$$

dunque

$$\inf_{\mathcal{F}} J \geq \lim_{j \rightarrow \infty} [Z_j(t_{1j}) - Z_j(t_{0j}) + \phi(e_j)] \geq \phi(e^*) = J(y_0^*, u^*).$$

Ciò conclude finalmente la dimostrazione del teorema 2.5.2. \square

Capitolo 3

Controlli in dimensione infinita

3.1 Introduzione

Studiare un problema di controllo in dimensione infinita significa analizzare un problema in cui sia gli stati, sia i controlli, sono elementi di spazi di Banach, o più spesso spazi di Hilbert. Le equazioni differenziali coinvolte rimangono equazioni ordinarie, ma a valori in uno spazio di Hilbert. Questa situazione permette di modellizzare, come vedremo, svariati problemi di controllo governati da equazioni alle derivate parziali, allargando di molto la portata delle applicazioni di questa teoria. Considereremo nel seguito il *problema lineare-quadratico* in orizzonte finito, che consiste nel minimizzare il funzionale

$$J(u) = \int_0^T [\langle My(t), y(t) \rangle_X + \langle Nu(t), u(t) \rangle_U] dt + \langle P_0 y(T), y(T) \rangle_X, \quad (3.1)$$

ove $0 < T < \infty$, al variare di $u \in L^2(0, T; U)$, con $y(\cdot)$ dato da

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), & t \in]0, T] \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Le ipotesi sono le seguenti:

- X e U sono spazi di Hilbert separabili (lo spazio degli stati e lo spazio dei controlli);
- $y_0 \in X$, $B \in \mathcal{L}(U, X)$, $M \in \mathcal{L}(X)$ con $M = M^* \geq 0$, $N \in \mathcal{L}(U)$ con $N = N^* \geq \delta I$, ove $\delta > 0$ e $I : U \rightarrow U$ è l'identità;
- $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ è un operatore lineare chiuso (ossia il cui grafico G è chiuso in $X \times X$), non necessariamente continuo, che si suppone essere *generatore infinitesimale di un semigruppato fortemente continuo* in X .

Occorre dunque uno studio preliminare dei fatti essenziali della teoria dei semigruppato.

3.2 Semigruppri di operatori

Sia X uno spazio di Banach e sia

$$\mathcal{L}(X) = \left\{ T : X \rightarrow X : T \text{ è lineare e } \|T\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_X < \infty \right\}$$

lo spazio degli operatori lineari e limitati da X in X , che è di Banach con la norma sopra indicata.

Cominciamo con l'osservare che se $A \in \mathcal{L}(X)$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0 \in X \end{cases}$$

ha l'unica soluzione

$$y(t) = e^{tA}y_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k y_0,$$

e si ha

$$\|y(t)\|_X \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^k \|y_0\|_X = e^{|t| \cdot \|A\|_{\mathcal{L}(X)}} \|y_0\|_X \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall y_0 \in X.$$

La famiglia $\{e^{tA}\}_{t \in \mathbb{R}}$ è un gruppo di operatori lineari e limitati, ossia $e^{tA} \in \mathcal{L}(X)$ e $e^{(t+s)A} = e^{tA} \circ e^{sA}$ per ogni $t, s \in \mathbb{R}$. Inoltre $t \mapsto e^{tA}$ è un'applicazione di classe C^1 da \mathbb{R} in $\mathcal{L}(X)$, con

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ma non tutti i gruppi di operatori hanno quest'ultima proprietà.

Esempio 3.2.1 [traslazioni in $L^p(\mathbb{R})$] Sia $p \in [1, \infty]$. Per $f \in L^p(\mathbb{R})$ poniamo

$$[G(t)f](x) = f(x+t) \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

La famiglia $\mathcal{G} = \{G(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ è un gruppo di operatori lineari e limitati su $L^p(\mathbb{R})$: infatti per ogni $f \in L^p(\mathbb{R})$ vale

$$\|G(t)f\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

e quindi

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

è immediato poi verificare che $G(t+s) = G(t)G(s)$ per ogni $s, t \in \mathbb{R}$. Risulta inoltre

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|G(t)f - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0$$

in virtù della continuità delle traslazioni in $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$; invece per $p = \infty$ si ha, con $f = I_{[0,1]}$,

$$\|G(t)I_{[0,1]} - I_{[0,1]}\|_{L^p(\mathbb{R})} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dunque il gruppo \mathcal{G} ha la proprietà seguente: se $1 \leq p < \infty$, per ogni $f \in L^p(\mathbb{R})$ risulta $G(t)f \rightarrow f$ in $L^p(\mathbb{R})$ per $t \rightarrow 0$; se $p = \infty$, invece, questa proprietà non vale. Si noti che basta verificare questi fatti per $t = 0$, grazie alla proprietà di gruppo. Tuttavia, l'applicazione $t \mapsto G(t)$ non è continua da \mathbb{R} in $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))$: infatti, fissato $n \in \mathbb{N}^+$ e scelta

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left[\frac{2k-2}{2n}, \frac{2k-1}{2n} \right], \quad k = 1, \dots, n \\ -1 & \text{se } x \in \left[\frac{2k-1}{2n}, \frac{2k}{2n} \right], \quad k = 1, \dots, n \\ 0 & \text{se } x \notin [0, 1[, \end{cases}$$

risulta

$$\begin{aligned} \left\| G\left(\frac{1}{n}\right) - I \right\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))} &\geq \frac{\|G\left(\frac{1}{n}\right)f_n - f_n\|_{L^p(\mathbb{R})}}{\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R})}} = \\ &= \left[\frac{\int_{-1/n}^1 |f_n(x+1/n) - f_n(x)|^p dx}{\int_0^1 |f_n(x)|^p dx} \right]^{\frac{1}{p}} \geq 2. \end{aligned}$$

Esempio 3.2.2 [traslazioni in $L^p(0, \infty)$ e in $L^p(0, T)$] Se $X = L^p(0, \infty)$, possiamo considerare solamente traslazioni a destra: dunque la famiglia $\mathcal{G} = \{G(t)\}_{t \geq 0}$, data da

$$[G(t)f](x) = f(x+t) \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \quad \forall f \in L^p(0, \infty)$$

è un semigruppato e non un gruppo; per $1 \leq p < \infty$ l'applicazione $t \mapsto G(t)f$ è continua da $[0, \infty[$ in $L^p(0, \infty)$ per ogni fissata $f \in L^p(0, \infty)$, mentre questa proprietà non vale per $p = \infty$.

Similmente, in $L^p(0, T)$ la famiglia $\mathcal{G} = \{G(t)\}_{t \geq 0}$, ove

$$[G(t)f](x) = \begin{cases} f(x+t) & \text{se } 0 \leq x+t \leq T, \text{ ossia } x \in [0, T-t] \\ 0 & \text{se } x+t > T, \text{ ossia } x > T-t, \end{cases}$$

è un semigruppato tale che, per $1 \leq p < \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|G(t)f - f\|_{L^p(0, T)} = 0 \quad \forall f \in L^p(0, T),$$

mentre questo fatto non vale per $p = \infty$.

Gli esempi precedenti motivano la seguente

Definizione 3.2.3 Una famiglia di operatori $\mathcal{G} = \{G(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$, ove X è uno spazio di Banach, è detta semigruppato fortemente continuo se verifica:

- (i) $G(t+s) = G(t)G(s)$ per ogni $t, s \geq 0$;
- (ii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|G(t)x - x\|_X = 0$ per ogni $x \in X$.

Sia \mathcal{G} un semigruppoo fortemente continuo in X . Per $h > 0$ è ben definito l'operatore

$$\frac{G(h) - I}{h} \in \mathcal{L}(X).$$

Nel caso particolare in cui $G(t) = e^{tA}$, con $A \in \mathcal{L}(X)$, si ha per $h \rightarrow 0$

$$\frac{e^{hA} - I}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{h!} A^k \rightarrow A \quad \text{in } \mathcal{L}(X);$$

in particolare, per $h \rightarrow 0$,

$$\frac{e^{hA}x - x}{h} \rightarrow Ax \quad \text{in } X \quad \forall x \in X.$$

Questo non accade per il semigruppoo delle traslazioni, nel qual caso

$$\left[\frac{G(h)f - f}{h} \right] (x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

in generale per $f \in L^p(\mathbb{R})$ l'espressione sopra scritta non converge né in $L^p(\mathbb{R})$, né puntualmente.

Definizione 3.2.4 Sia \mathcal{G} un semigruppoo fortemente continuo in X . Il generatore infinitesimale di \mathcal{G} è l'operatore lineare $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$, in generale non limitato, dato da

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ x \in X : \exists \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(h)x - x}{h} \right\} \\ Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(h)x - x}{h} \quad \forall x \in D(A). \end{cases}$$

È evidente che $D(A)$ è un sottospazio di X .

Proposizione 3.2.5 Sia \mathcal{G} un semigruppoo fortemente continuo in X e sia A il suo generatore infinitesimale. Allora $D(A)$ è denso in X .

Dimostrazione Fissato $a \geq 0$, poniamo

$$R_{a,t}x = \frac{1}{t} \int_a^{a+t} G(s)x \, ds, \quad t \geq 0, \quad x \in X.$$

Questo è un *integrale di Bochner*: per questa nozione si rimanda al paragrafo 3.1, capitolo 3, di [1]. Per continuità si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} R_{a,t}x = G(a)x \quad \forall a \geq 0, \quad \forall x \in X.$$

In particolare, quando $a = 0$ si ha $R_{0,t}x \rightarrow x$ in X per $t \rightarrow 0^+$. Basta allora mostrare che $R_{a,t}x \in D(A)$ per ogni $t > 0$. Ed infatti,

$$\begin{aligned} \frac{G(h) - I}{h} R_{a,t}x &= \frac{1}{h} [G(h) - I] \frac{1}{t} \int_a^{a+t} G(s)x ds = \\ &= \frac{1}{t} \left[\frac{1}{h} \int_a^{a+t} G(s+h)x ds - \frac{1}{h} \int_a^{a+t} G(s)x ds \right] = \\ &= \frac{1}{t} \left[\frac{1}{h} \int_{a+h}^{a+h+t} G(\sigma)x d\sigma - \frac{1}{h} \int_a^{a+t} G(\sigma)x d\sigma \right] = \\ &= \frac{1}{t} \left[\frac{1}{h} \int_{a+t}^{a+t+h} G(\sigma)x d\sigma - \frac{1}{h} \int_a^{a+h} G(\sigma)x d\sigma \right], \end{aligned}$$

da cui, per $h \rightarrow 0^+$,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(h) - I}{h} R_{a,t}x = \frac{1}{t} [G(a+t) - G(a)]x.$$

Dunque, $R_{a,t}x \in D(A)$ e $AR_{a,t}x = \frac{1}{t} [G(t) - I]G(a)x$ per ogni $a \geq 0$ e per ogni $x \in X$. Si noti che per $a = 0$ si ha

$$R_{0,t}x \rightarrow x, \quad AR_{0,t}x \rightarrow \frac{1}{t} [G(t) - I]x \quad \text{in } X \quad \forall x \in X. \quad \square$$

Osservazione 3.2.6 Se $G(t) = e^{tA}$ con $A \in \mathcal{L}(X)$, allora A è il generatore infinitesimale di $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$, con $D(A) = X$. Infatti per ogni $x \in X$ risulta

$$\left\| \frac{e^{hA} - I}{h} x - Ax \right\|_X \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!} \|A^n x\|_X \leq h \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^{n-2}}{n!} \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^n \|x\|_X \leq Ch \quad \forall h > 0.$$

Viceversa, sia $\{G(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ un gruppo di operatori tali che $t \mapsto G(t)$ sia continua da \mathbb{R} in $\mathcal{L}(X)$. Allora esiste un unico $A \in \mathcal{L}(X)$ tale che $G(t) = e^{tA}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Infatti, posto

$$V(r) = \int_0^r G(s) ds \in \mathcal{L}(X),$$

si ha

$$\frac{1}{r} V(r) \rightarrow I_X \quad \text{in } \mathcal{L}(X) \quad \text{per } r \rightarrow 0,$$

quindi esiste $t_0 > 0$ tale che $\left[\frac{V(r)}{r} \right]^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ per $0 < |r| \leq t_0$. Di conseguenza $V(r)^{-1} = \frac{1}{r} \left[\frac{V(r)}{r} \right]^{-1}$ esiste in $\mathcal{L}(X)$ per $0 < |r| \leq t_0$, e pertanto possiamo scrivere, per $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} G(t) &= V(t_0)^{-1} V(t_0) G(t) = V(t_0)^{-1} \int_0^{t_0} G(s+t) ds = \\ &= V(t_0)^{-1} \int_t^{t+t_0} G(\sigma) d\sigma = V(t_0)^{-1} [V(t+t_0) - V(t)]. \end{aligned}$$

Essendo $V(t)$ derivabile in $\mathcal{L}(X)$, tale è $G(t)$, con

$$G'(t) = V(t_0)^{-1}[G(t+t_0) - G(t)] = V(t_0)^{-1}[G(t_0) - I]G(t), \quad t \geq 0.$$

Pertanto, scelto $t = 0$,

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(h) - I}{h} = G'(0) = V(t_0)^{-1}[G(t_0) - I],$$

vale a dire il generatore infinitesimale di $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ è $A = V(t_0)^{-1}[G(t_0) - I] \in \mathcal{L}(X)$.
Dunque, in particolare,

$$\begin{cases} G'(t) = AG(t), & t \geq 0, \\ G(0) = I_X, \end{cases}$$

e dunque, per unicità, $G(t) = e^{tA}$.

Se A è il generatore infinitesimale di un semigruppoo fortemente continuo \mathcal{G} , allora il sottospazio $D(A)$ è invariante per A . Infatti:

Proposizione 3.2.7 *Sia \mathcal{G} un semigruppoo fortemente continuo in X e sia A il suo generatore infinitesimale. Allora se $x \in D(A)$ si ha $G(t)x \in D(A)$ e*

$$AG(t)x = G(t)Ax \quad \forall t \geq 0.$$

Dimostrazione Se $x \in D(A)$ risulta per $h \rightarrow 0^+$

$$\frac{G(h) - I}{h} x = \frac{G(t+h) - G(t)}{h} x = G(t) \frac{G(h) - I}{h} x \rightarrow G(t)Ax,$$

da cui la tesi. \square

I semigruppooi fortemente continui sono localmente limitati:

Proposizione 3.2.8 *Sia \mathcal{G} un semigruppoo fortemente continuo in X . Per ogni $T > 0$ esiste $B_T > 0$ tale che*

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq B_T \quad \forall t \in [0, T].$$

Dimostrazione Se $x \in X$, sappiamo che $t \mapsto G(t)x$ è una funzione continua su $[0, T]$ a valori in X ; dunque $t \mapsto \|G(t)x\|_X$ è una funzione continua su $[0, T]$ a valori in \mathbb{R} . Perciò

$$\|G(t)x\|_X \leq B_{Tx} \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall x \in X,$$

con B_{Tx} costante positiva opportuna. Per il teorema di Banach-Steinhaus, esiste $B_T > 0$ tale che

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq B_T \quad \forall t \in [0, T]. \quad \square$$

I semigruppooi fortemente continui sono puntualmente derivabili su $D(A)$:

Proposizione 3.2.9 *Sia \mathcal{G} un semigruppoo fortemente continuo in X e sia A il suo generatore infinitesimale. Allora*

$$\exists \frac{d}{dt} G(t)x = AG(t)x = G(t)Ax \quad \forall x \in D(A), \quad \forall t \geq 0.$$

Dimostrazione Sia $t_0 \geq 0$. Per $h > 0$ e $x \in D(A)$, per la proposizione 3.2.7 si ha

$$\frac{G(t_0 + h) - G(t_0)}{h} x = \frac{G(h) - I}{h} G(t_0)x \rightarrow AG(t_0)x = G(t_0)Ax \quad \text{per } h \rightarrow 0^+.$$

Dunque

$$\exists \left[\frac{d^+}{dt^+} G(t)x \right]_{t=t_0} = AG(t_0)x = G(t_0)Ax.$$

Sia ora $t_0 > 0$. Per $h \in]0, t_0]$ e $x \in D(A)$ si ha

$$\begin{aligned} & \frac{G(t_0 - h) - G(t_0)}{-h} x - G(t_0)Ax = \\ & = G(t_0 - h) \left[\frac{G(t) - I}{h} x - Ax \right] + [G(t_0 - h) - G(t_0)]Ax; \end{aligned}$$

per la proposizione 3.2.8 e la forte continuità di \mathcal{G} si ottiene per $h \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{G(t_0 - h) - G(t_0)}{-h} x - G(t_0)Ax \right\|_X \leq \\ & \leq B_{t_0} \left\| \frac{G(h) - I}{h} x - Ax \right\|_X + \|[G(t_0 - h) - G(t_0)]Ax\|_X \rightarrow 0, \end{aligned}$$

ossia

$$\exists \left[\frac{d^-}{dt^-} G(t)x \right]_{t=t_0} = AG(t_0)x = G(t_0)Ax. \quad \square$$

Il generatore di un semigruppò non è in generale limitato; tuttavia:

Proposizione 3.2.10 *Sia \mathcal{G} un semigruppò fortemente continuo in X e sia A il suo generatore infinitesimale. Allora A è un operatore chiuso.*

Dimostrazione Siano $x, y \in X$ tali che vi sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ per cui $x_n \rightarrow x$ e $Ax_n \rightarrow y$ in X per $n \rightarrow \infty$. Per la proposizione 3.2.9,

$$G(t)x_n - x_n = \int_0^t \frac{d}{ds} G(s)x_n ds = \int_0^t G(s)Ax_n ds,$$

da cui

$$\frac{G(t)x_n - x_n}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t G(s)Ax_n ds.$$

Per $n \rightarrow \infty$, grazie alla convergenza dominata del secondo membro, otteniamo

$$\frac{G(t)x - x}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t G(s)y ds,$$

e per $t \rightarrow 0^+$ ricaviamo $x \in D(A)$ e $Ax = y$. \square

Esempi 3.2.11 (1) Siano $X = L^p(\mathbb{R})$, $[G(t)f](x) = f(x+t)$. Se $1 \leq p \leq \infty$, \mathcal{G} è un gruppo fortemente continuo (esempio 3.2.1). Il suo generatore è

$$\begin{cases} D(A) = W^{1,p}(\mathbb{R}) \\ Af = f' \quad \forall f \in D(A), \end{cases}$$

ove $W^{1,p}(\mathbb{R})$ è lo spazio di Sobolev

$$W^{1,p}(\mathbb{R}) = \{f \in AC(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}) : f' \in L^p(\mathbb{R})\}.$$

Infatti, se $f \in D(A)$ deve esistere

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\cdot + t) - f(\cdot)}{t} = g \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}).$$

Allora se $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} u(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \frac{u(\xi - t) - u(\xi)}{t} d\xi;$$

ora, se $t \rightarrow 0$ il primo membro tende a $\int_{\mathbb{R}} g(x)u(x) dx$, mentre il secondo membro tende a $-\int_{\mathbb{R}} f(x)u'(x) dx$. Ne segue

$$-\int_{\mathbb{R}} f(x)u'(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)u(x) dx \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Ciò implica che esiste la derivata debole di f in $L^p(\mathbb{R})$, e che $f' = g$. Perciò $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ e $Af = f'$. Viceversa, se $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ allora è chiaro che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\cdot + t) - f(\cdot)}{t} = f' \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}),$$

e quindi $f \in D(A)$ e $Af = f'$.

(2) Se $X = L^p(0, \infty)$ e $[G(t)f](x) = f(x+t)$ (esempio 3.2.2), vale lo stesso risultato:

$$\begin{cases} D(A) = W^{1,p}(0, \infty) \\ Af = f' \quad \forall f \in D(A). \end{cases}$$

(3) Se $X = L^p(0, T)$ e

$$[G(t)f](x) = \begin{cases} f(x+t) & \text{se } x \in [0, T-t] \\ 0 & \text{se } x \in]T-t, T], \end{cases}$$

il generatore infinitesimale di \mathcal{G} è

$$\begin{cases} D(A) = \{f \in W^{1,p}(0, T) : f(0) = 0\} \\ Af = f' \quad \forall f \in D(A). \end{cases}$$

Infatti, se $f \in D(A)$, posto $g = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(t)f - f}{t}$, si ha per ogni $u \in C^\infty[0, T]$

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{G(t)f(x) - f(x)}{t} u(x) dx &= \int_0^{T-t} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} u(x) dx - \frac{1}{t} \int_{T-t}^T f(x)u(x) dx = \\ &= \int_t^T \frac{f(\xi)u(\xi-t)}{t} d\xi - \frac{1}{t} \int_0^T f(\xi)u(\xi) d\xi = \\ &= \int_t^T f(\xi) \frac{u(\xi-t) - u(\xi)}{t} d\xi - \frac{1}{t} \int_0^t f(\xi)u(\xi) d\xi; \end{aligned}$$

dunque, per $t \rightarrow 0^+$ si ottiene

$$\int_0^T g(x)u(x) dx = - \int_0^T f(x)u'(x) dx - f(0)u(0) \quad \forall u \in C^\infty[0, T].$$

Se ora scegliamo $u \in C_0^\infty[0, T]$, deduciamo subito che esiste la derivata debole di f in $L^p(0, T)$ e che $f' = g$; dunque la relazione precedente si riduce a $f(0)u(0) = 0$. Siccome $u \in C^\infty[0, T]$ è arbitraria, si conclude che $f(0) = 0$. Il viceversa è facile.

3.2.1 Stime asintotiche

Sia $\mathcal{G} = \{G(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupp fortemente continuo nello spazio di Banach X .

Definizione 3.2.12 *Il tipo di \mathcal{G} , ovvero la sua soglia di crescita, è il numero (finito o pari a $-\infty$)*

$$\omega_0 = \inf_{t > 0} \left\{ \frac{\ln \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} \right\}.$$

Equivalentemente:

Proposizione 3.2.13 *Sia ω_0 il tipo del semigrupp \mathcal{G} . Risulta*

$$\omega_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t}.$$

Dimostrazione Per definizione di ω_0 basta provare che

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} \leq \omega_0.$$

Sia $\varepsilon > 0$ e sia $t_\varepsilon > 0$ tale che

$$\frac{\ln \|G(t_\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t_\varepsilon} < \omega_0 + \varepsilon.$$

Poniamo, per $t > 0$,

$$t = nt_\varepsilon + r,$$

ove $n = \left\lfloor \frac{t}{t_\varepsilon} \right\rfloor$ è la parte intera di $\frac{t}{t_\varepsilon}$ e $r = t - nt_\varepsilon \in [0, t_\varepsilon[$. Per la proposizione 3.2.8,

$$\begin{aligned} \frac{\ln \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} &= \frac{\ln \|G(t_\varepsilon)^n G(r)\|_{\mathcal{L}(X)}}{nt_\varepsilon + r} \leq \\ &\leq \frac{n \ln \|G(t_\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(X)} + \ln \|G(r)\|_{\mathcal{L}(X)}}{nt_\varepsilon + r} = \frac{\ln \|G(t_\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(X)} + \frac{1}{n} \ln B_{t_\varepsilon}}{t_\varepsilon + \frac{r}{n}}, \end{aligned}$$

e per $t \rightarrow \infty$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} \leq \frac{\ln \|G(t_\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t_\varepsilon} \leq \omega_0 + \varepsilon,$$

da cui la tesi. \square

Osservazione 3.2.14 Un semigruppoo \mathcal{G} tale che $\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ per ogni $t \geq 0$ si dice *contrattivo*, oppure *semigruppoo di contrazioni*.

Esempi 3.2.15 (1) I semigruppoo di traslazioni sono semigruppoo contrattivi ed in particolare si ha:

- per $X = L^p(\mathbb{R})$ oppure $X = L^p(0, \infty)$, risulta $\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$ per ogni $t \geq 0$, e dunque $\omega_0 = 0$;
- per $X = L^p(0, T)$ risulta $\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$ per ogni $t \geq T$, e dunque $\omega_0 = -\infty$.

(2) Sia $X = \mathbb{C}^2$ e poniamo

$$G(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ossia} \quad G(t) \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + tw \\ w \end{pmatrix};$$

si verifica che \mathcal{G} è un gruppo, ovviamente continuo, in $\mathcal{L}(X)$, e che il suo generatore infinitesimale è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Risulta

$$\begin{aligned} \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}^2 &= \sup_{(z,w) \in \mathbb{C}^2} \frac{|z + tw|^2 + |w|^2}{|z|^2 + |w|^2} \leq \\ &\leq \sup_{(z,w) \in \mathbb{C}^2} \frac{|z|^2 + (1+t^2)|w|^2 + 2t \operatorname{Re} z \bar{w}}{|z|^2 + |w|^2} \leq 1 + t^2 + t, \end{aligned}$$

e d'altra parte

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}^2 \geq \frac{\|G(t) \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}\|_X^2}{\|\begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}\|_X^2} = \frac{(1+t)^2 + 1}{2} = 1 + \frac{t^2}{2} + t.$$

Ciò mostra che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} = 0,$$

e dunque $\omega_0 = 0$, benché $\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ non sia limitata superiormente. In particolare, l'estremo inferiore ω_0 non è in generale un minimo.

(3) Sia $X = L^1(\mathbb{R})$, e poniamo

$$[G(t)f](x) = \begin{cases} 2f(x+t) & \text{se } x \in [-t, 0] \\ f(x+t) & \text{se } x \notin [-t, 0]. \end{cases}$$

Si verifica (un po' faticosamente) che \mathcal{G} è un semigruppoo fortemente continuo. Inoltre, ovviamente,

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 2 \quad \forall t \geq 0,$$

visto che $\|G(t)I_{[0,t]}\|_X = 2$. Dunque $\omega_0 = 0$.

Proposizione 3.2.16 *Sia \mathcal{G} un semigruppoo fortemente continuo in X e sia ω_0 il tipo di \mathcal{G} . Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $H_\varepsilon > 1$ tale che*

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq H_\varepsilon e^{t(\omega_0 + \varepsilon)} \quad \forall t \geq 0.$$

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$. Per la proposizione 3.2.13 esiste $t_\varepsilon > 0$ tale che

$$\frac{\ln \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} < \omega_0 + \varepsilon \quad \forall t \geq t_\varepsilon;$$

quindi

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq H_\varepsilon e^{t(\omega_0 + \varepsilon)} \quad \forall t \geq t_\varepsilon.$$

D'altronde, per la proposizione 3.2.8,

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq B_{t_\varepsilon} \quad \forall t \in [0, t_\varepsilon];$$

scelto allora $H_\varepsilon > 1$ tale che

$$H_\varepsilon e^{t(\omega_0 + \varepsilon)} \geq B_{t_\varepsilon} \quad \forall t \in [0, t_\varepsilon],$$

otteniamo la tesi. \square

Dunque, tutti i semigruppoo fortemente continui hanno crescita al più esponenziale. Poniamo allora, per $H \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{G}(H, \omega) = \{ \mathcal{G} = \{G(t)\}_{t \geq 0} : \mathcal{G} \text{ è un semigruppoo fortemente continuo in } X, \\ \text{con } \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq H e^{\omega t} \forall t \geq 0 \}.$$

La proposizione che segue mette in relazione la crescita esponenziale di \mathcal{G} con lo spettro del suo generatore.

Proposizione 3.2.17 *Sia $\mathcal{G} \in \mathbf{G}(H, \omega)$ e sia A il generatore infinitesimale di \mathcal{G} . Allora:*

(i) $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > \omega\}$,

(ii) $R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)x dt$ per ogni $x \in X$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} \lambda > \omega$.

Ricordiamo che $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ e che $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$.

Dimostrazione Sia $z \in X$ e sia $\operatorname{Re} \lambda > 0$. L'equazione

$$\lambda x - Ax = z$$

ha l'unica soluzione

$$x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)z dt :$$

infatti

$$\begin{aligned} \frac{G(h) - I}{h} x &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} [G(t+h) - G(t)]z dt = \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda(t+h)} G(t+h)z dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)z dt = \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda s} G(s)z ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} G(s)z ds = \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} G(s)z ds - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} G(s)z ds, \end{aligned}$$

e pertanto, per $h \rightarrow 0^+$ si ricava $x \in D(A)$ e

$$Ax = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s} G(s)z ds - G(0)z = \lambda x - z.$$

Se poi $x' \in D(A)$ è un altro elemento tale che $\lambda x' - Ax' = z$, allora integrando per parti si trova

$$\begin{aligned} x &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)z dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)[\lambda x' - Ax'] dt = \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)x' dt - [e^{-\lambda t} G(t)x']_0^\infty - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)x' dt = x', \end{aligned}$$

e ciò prova che l'equazione $\lambda x - Ax = z$ ha una ed una sola soluzione: dunque $\lambda \in \rho(A)$ e $R(\lambda, A)z = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)z dt$. \square

Veniamo ora al risultato più importante della teoria dei semigrupperi.

Teorema 3.2.18 (di Hille-Yosida) *Siano $H \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$. Sia poi $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ un operatore lineare chiuso. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) $\rho(A) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > \omega\}$ e

$$\|[R(\lambda, A)]^k\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{H}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ con } \operatorname{Re} \lambda > \omega;$$

(b) A è il generatore infinitesimale di un semigruppero $\mathcal{G} \in \mathbf{G}(H, \omega)$.

Dimostrazione (\Leftarrow) Utilizzando la proposizione 3.2.17, si ha per ogni $x \in X$

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)x dt \quad \forall x \in X, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ con } \operatorname{Re} \lambda > \omega.$$

Possiamo derivare $k - 1$ volte rispetto a λ questa identità, grazie al teorema della convergenza dominata, ottenendo

$$(-1)^{k-1} (k-1)! [R(\lambda, A)]^k x = (-1)^k \int_0^\infty t^{k-1} e^{-\lambda t} G(t)x d\lambda,$$

da cui, con $k - 1$ integrazioni per parti,

$$\|[R(\lambda, A)]^k x\|_X \leq \frac{H}{(k-1)!} \int_0^\infty t^{k-1} e^{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)t} \|x\|_X d\lambda \leq \frac{H}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^k} \|x\|_X.$$

(\Rightarrow) Poniamo per $n \in \mathbb{N}$, $n > \omega$,

$$J_n = nR(n, A), \quad A_n = AJ_n = nAR(n, A) = n^2R(n, A) - nI :$$

gli operatori J_n e A_n sono lineari e limitati; gli A_n si chiamano *approssimanti di Yosida*. A giustificazione del loro nome, mostriamo che si ha per $n \rightarrow \infty$

$$J_n x \rightarrow x \quad \text{in } X \quad \forall x \in X, \quad (3.3)$$

$$A_n x \rightarrow Ax \quad \text{in } X \quad \forall x \in D(A), \quad (3.4)$$

e di conseguenza

$$D(A^k) \text{ è denso in } X \quad \forall k \in \mathbb{N}^+. \quad (3.5)$$

Proviamo (3.3): se $x \in D(A)$ si ha

$$J_n x - x = nR(n, A)x - x = AR(n, A)x = R(n, A)Ax \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

dato che $\|R(n, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{H}{n-\omega}$. Poiché $\|J_n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{nH}{n-\omega} \leq C$ per ogni $n > \omega$, e $D(A)$ è denso in X , si ricava subito che $J_n x \rightarrow x$ per ogni $x \in X$.

Proviamo (3.4): Se $x \in D(A)$, per (3.3) otteniamo

$$A_n x - Ax = [nR(n, a) - I]Ax \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Proviamo (3.5): per ogni $x \in X$ si ha $J_n^k x \in D(A^k)$; quindi basta mostrare che $J_n^k x \rightarrow x$ per $n \rightarrow \infty$. Per $k = 1$ la tesi segue da (3.3); se la tesi vale per $k - 1$, si ha, grazie alla limitatezza uniforme degli J_n^k rispetto a n ed all'ipotesi induttiva,

$$J_n^k x - x = J_n^{k-1}(J_n x - x) + J_n^{k-1}x - x \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

e ciò prova il passo induttivo e quindi (3.5).

Consideriamo il semigruppoo $\{e^{tA_n}\}_{t \geq 0}$: essendo $A_n = n^2R(n, A) - nI$, si ha

$$e^{tA_n} = e^{-nt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{2k} t^k}{k!} R^k(n, A),$$

da cui

$$\|e^{tA_n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{-nt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{2k} t^k}{k!} \|R^k(n, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq H e^{-nt} e^{\frac{n^2 t}{n-\omega}} = H e^{\frac{n\omega t}{n-\omega}} \quad \forall t \geq 0, \forall n > \omega.$$

Inoltre

$$e^{tA_n} x \rightarrow G(t)x \quad \forall x \in X, \quad \text{uniformemente in ogni } [0, T], \quad T > 0. \quad (3.6)$$

Infatti, supposto $x \in D(A)$, possiamo scrivere per $m, n \geq \nu$, visto che A_n e A_m commutano fra loro,

$$\begin{aligned} e^{tA_n} x - e^{tA_m} x &= \int_0^t \frac{d}{ds} e^{(t-s)A_n} e^{sA_m} x \, ds = \\ &= \int_0^t [-A_n e^{(t-s)A_n} e^{sA_m} x + e^{(t-s)A_n} e^{sA_m} A_m] x \, ds = \\ &= \int_0^t e^{(t-s)A_n} e^{sA_m} [A_m - A_n] x \, ds, \end{aligned}$$

da cui, fissato $\varepsilon > 0$,

$$\|e^{tA_n} x - e^{tA_m} x\|_X \leq t H^2 e^{(\omega-\varepsilon)t} \|A_n x - A_m x\|_X \quad \forall n, m \geq \nu_\varepsilon, \quad \forall t \in [0, T];$$

poiché $x \in D(A)$, si ha $A_n x \rightarrow Ax$ e dunque

$$\|e^{tA_n} x - e^{tA_m} x\|_X \leq c_T \varepsilon \quad \forall n, m \geq \nu_\varepsilon, \quad \forall t \in [0, T].$$

Perciò esiste $G(t)x := \lim_{n \rightarrow \infty} e^{tA_n} x$, per $x \in D(A)$; ma grazie all'uniforme limitatezza dei semigruppini e^{tA_n} e alla densità di $D(A)$ in X , tale limite, ossia $G(t)x$, esiste per ogni $x \in X$ ed è uniforme per $t \in [0, T]$. Si ricava allora che \mathcal{G} è a sua volta un semigruppino fortemente continuo, con

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|e^{tA_n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq H e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0.$$

Proviamo che A è il generatore infinitesimale di \mathcal{G} . Detto $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ il generatore infinitesimale di \mathcal{G} , se $x \in D(A)$ e $T > 0$ si ha, per quanto già visto,

$$\begin{aligned} e^{tA_n} x &\rightarrow G(t)x \quad \text{uniformemente in } [0, T], \\ \frac{d}{dt} e^{tA_n} x &= A_n e^{tA_n} x = e^{tA_n} A_n x \rightarrow G(t)Ax \quad \text{uniformemente in } [0, T]. \end{aligned}$$

Dunque

$$\exists \frac{d}{dt} G(t)x = G(t)Ax \quad \forall x \in D(A), \quad \forall t \geq 0,$$

e in particolare, per $t \rightarrow 0^+$,

$$\frac{G(t)x - x}{t} \rightarrow Ax,$$

ossia, per definizione di generatore infinitesimale, $x \in D(B)$ e $Bx = Ax$.
Viceversa, sia $x \in D(B)$ e, per $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, sia $z = \lambda x - Bx$; per quanto provato, essendo $R(\lambda, A)z \in D(A)$, si ha $R(\lambda, A)z \in D(B)$ e

$$(\lambda I - B)R(\lambda, A)z = (\lambda I - A)R(\lambda, A)z = z.$$

Ne segue, essendo $R(\lambda, B)(\lambda I - B) = I_{D(B)}$,

$$\begin{aligned} x &= R(\lambda, B)z = R(\lambda, B)(\lambda I - B)R(\lambda, A)z = R(\lambda, A)z \in D(A), \\ Ax &= AR(\lambda, A)z = -z + \lambda R(\lambda, A)z = -\lambda x + Bx + \lambda x = Bx. \end{aligned}$$

Perciò $x \in D(A)$ e $Ax = Bx$: In definitiva, $A = B$ e A è il generatore infinitesimale di \mathcal{G} . \square

Osservazioni 3.2.19 (1) Nel provare (a) \implies (b) abbiamo usato l'ipotesi solo per $\lambda = n > \omega$. Dunque in (a) è sufficiente supporre che $\rho(A) \supseteq]\omega, +\infty[$ e che la stima per $[R(\lambda, A)]^k$ valga solo per $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > \omega$.

(2) Se $H = 1$, ossia il semigruppato \mathcal{G} appartiene a $\mathbf{G}(1, \omega)$, per verificare (a) è sufficiente che la stima per $[R(\lambda, A)]^k$ valga per $k = 1$: le altre seguono di conseguenza.

3.2.2 Risoluzione del problema di Cauchy

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t), & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.7)$$

quando A è il generatore infinitesimale di un semigruppato fortemente continuo \mathcal{G} , $y_0 \in X$ e $f \in L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$. Diamo anzitutto la definizione di due tipi di soluzione.

Definizione 3.2.20 Siano $y_0 \in D(A)$ e $f \in L^p(0, T; X)$. Diciamo che $y : [0, T] \rightarrow X$ è soluzione stretta del problema (3.7) se

$$y \in W^{1,p}(0, T; X) \cap L^p(0, T; D(A)),$$

e se valgono l'equazione differenziale in $[0, T]$ e la condizione iniziale $y(0) = y_0$.

Definizione 3.2.21 Siano $y_0 \in X$ e $f \in L^p(0, T; X)$. Diciamo che $y : [0, T] \rightarrow X$ è soluzione forte del problema (3.7) se

$$y \in L^p(0, T; X),$$

ed esiste una successione $\{y_k\} \subset W^{1,p}(0, T; X) \cap L^p(0, T; D(A))$ tale che, per $k \rightarrow \infty$,

$$y_k \rightarrow y \text{ in } L^p(0, T; X), \quad y'_k - Ay_k \rightarrow f \text{ in } L^p(0, T; X), \quad y_k(0) \rightarrow y_0 \text{ in } X.$$

Ricordiamo che

$$W^{1,p}(0, T; X) = \{u \in L^p(0, T; X) : \exists u'(t) \text{ q.o. in } X, u' \in L^p(0, T; X)\}.$$

Diamo due teoremi di esistenza e unicit .

Teorema 3.2.22 *Per ogni $y_0 \in X$ e $f \in L^p(0, T; X)$ esiste un'unica soluzione forte y del problema (3.7), data da*

$$y(t) = G(t)y_0 + \int_0^t G(t-s)f(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Dimostrazione Per $k > \omega$ siano

$$y_{0k} = kR(k, A)y_0, \quad f_k(t) = kR(k, A)f(t), \quad t \in [0, T].$$

Allora $y_{0k} \in D(A)$ e $f_k \in L^p(0, T; D(A))$. Quindi, posto

$$y_k(t) = G(t)y_{0k} + \int_0^t G(t-s)f_k(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

possiamo derivare questa funzione rispetto a t , ottenendo

$$y'_k = Ay_k(t) + f_k(t), \quad t \in [0, T];$$

dunque, per $k \rightarrow \infty$

$$y'_k(t) - Ay_k(t) = f_k(t) \rightarrow f(t) \quad \text{in } L^p(0, T; X), \quad y_k(0) = y_{0k} \rightarrow y_0 \quad \text{in } X.$$

Inoltre

$$y_k(t) \rightarrow G(t)y_0 + \int_0^t G(t-s)f(s) ds =: y(t) \quad \text{in } C([0, T], X) :$$

infatti

$$\begin{aligned} \|y_k(t) - y(t)\|_X &= \left\| G(t)(y_{0k} - y_0) + \int_0^t G(t-s)[f_k(s) - f(s)] ds \right\|_X \leq \\ &\leq H e^{\omega t} \|y_{0k} - y_0\|_X + H \left[\int_0^t e^{\omega p'(t-s)} ds \right]^{\frac{1}{p'}} \left[\int_0^t \|f_k(s) - f(s)\|_X^p ds \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq H \max\{e^{\omega T}, 1\} \|y_{0k} - y_0\|_X + H \max\left\{T, \frac{e^{\omega p' T} - 1}{\omega p'}\right\} \|f_k - f\|_{L^p(0, T; X)} \end{aligned}$$

e dunque $\|y_k(t) - y(t)\|_X \rightarrow 0$ uniformemente in $[0, T]$. Essendo $\{y_k\} \subset W^{1,p}(0, T; X) \subset C([0, T], X)$, si ottiene $y \in C([0, T], X) \subset L^p(0, T; X)$. Ci  prova che y   soluzione forte del problema (3.7).

Proviamo che y   l'unica soluzione. Sia $t \in [0, T]$: se z   un'altra soluzione, e se $z_k \rightarrow z$ in $L^p(0, T; X)$, $z'_k - Az_k \rightarrow f$ in $L^p(0, T; X)$ e $z_k(0) \rightarrow y_0$ in X , allora posto $f_k = z'_k - Az_k$ si ha per $s \in [0, t]$

$$\frac{d}{ds}[G(t-s)z_k(s)] = -AG(t-s)z_k(s) + G(t-s)[Az_k + f_k] = G(t-s)f_k(s).$$

Integrando in $[0, t]$,

$$z_k(t) - G(t)z_k(0) = \int_0^t G(t-s)f_k(s) ds,$$

e per $k \rightarrow \infty$

$$z(t) = G(t)y_0 + \int_0^t G(t-s)f(s) ds = y(t). \quad \square$$

Teorema 3.2.23 *Consideriamo il problema di Cauchy (3.7).*

(i) *Se $y_0 \in D(A)$ e $f \in L^p(0, T; D(A))$, allora esiste un'unica soluzione stretta y di (3.7), data da*

$$y(t) = G(t)y_0 + \int_0^t G(t-s)f(s) ds, \quad t \in [0, T];$$

inoltre $y \in C([0, T], D(A))$.

(ii) *Se $y_0 \in D(A)$ e $f \in W^{1,p}(0, T; X)$, allora esiste un'unica soluzione stretta y di (3.7), data dalla formula precedente; inoltre $y \in C^1([0, T], X) \cap C([0, T], D(A))$.*

Dimostrazione Proviamo (i). Dato che $Af \in L^p(0, T; X)$ e $Ay_0 \in X$, per il teorema 3.2.22 esiste un'unica soluzione forte v del problema

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + Af(t), & t \in [0, T], \\ v(0) = Ay_0, \end{cases}$$

data da

$$v(t) = G(t)Ay_0 + \int_0^t G(t-s)Af(s) ds = AG(t)y_0 + \int_0^t AG(t-s)f(s) ds.$$

Ci occorre adesso questo lemma:

Lemma 3.2.24 *Se $h \in L^1(0, T; X)$ e $h(t) \in D(A)$ per ogni $t \in [0, T]$, allora per ogni $t \in [0, T]$ si ha*

$$\int_0^t h(s) ds \in D(A) \quad e \quad A \int_0^t h(s) ds = \int_0^t Ah(s) ds.$$

Dimostrazione Si ha per $n \rightarrow \infty$, grazie alla convergenza dominata,

$$\begin{aligned} J_n \int_0^t h(s) ds &= nR(n, A) \int_0^t h(s) ds \rightarrow \int_0^t h(s) ds, \\ AJ_n \int_0^t h(s) ds &= A_n \int_0^t h(s) ds = \int_0^t A_n h(s) ds \rightarrow \int_0^t Ah(s) ds, \end{aligned}$$

da cui, essendo A un operatore chiuso, la tesi. \square

Per il lemma 3.2.24 possiamo scrivere

$$v(t) = A \left[G(t)y_0 + \int_0^t G(t-s)f(s) ds \right] = Ay(t),$$

e dunque $y \in L^p(0, T; D(A))$.

Siano adesso y_n e v_n le soluzioni dei problemi

$$\begin{cases} y_n'(t) = A_n y_n(t) + f(t), & t \in [0, T], \\ y_n(0) = y_0, \end{cases} \quad \begin{cases} v_n'(t) = A_n v_n(t) + A_n f(t), & t \in [0, T], \\ v_n(0) = A_n y_0, \end{cases}$$

in cui l'operatore A_n è limitato; dunque $y_n, v_n \in C^1([0, T], X)$ e si ha

$$y_n(t) = e^{tA_n} y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_n} f(s) ds, \quad v_n(t) = e^{tA_n} A_n y_0 + \int_0^t A_n e^{(t-s)A_n} f(s) ds = A_n y_n(t).$$

Dato che $e^{tA_n} x \rightarrow G(t)x$ uniformemente in $[0, T]$ per ogni $x \in X$, quando $n \rightarrow \infty$ si ricava

$$\begin{aligned} y_n(t) &\rightarrow y(t) \quad \text{uniformemente in } [0, T] \text{ e } y(0) = y_0, \\ A_n y_n(t) &= v_n(t) \rightarrow v(t) \quad \text{uniformemente in } [0, T], \end{aligned}$$

e dunque $y(t) \in D(A)$ e $Ay(t) = v(t)$ per ogni $t \in [0, T]$; inoltre

$$y_n'(t) = A_n y_n(t) + f(t) \rightarrow Ay(t) + f(t) \quad \text{in } [0, T],$$

da cui

$$\exists y'(t) = Ay(t) + f(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

perciò $y \in W^{1,p}(0, T; X) \cap C([0, T], D(A))$ e y è soluzione stretta di (3.7).

Proviamo (ii). Essendo $f' \in L^p(0, T; X)$ e $A_n y_0 + f(0) \in X$, esiste un'unica soluzione forte z del problema

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) + f'(t), & t \in [0, T], \\ z(0) = Ay_0 + f(0), \end{cases}$$

data da

$$z(t) = G(t)[Ay_0 + f(0)] + \int_0^t G(t-s)f'(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Siano y_n e z_n le soluzioni dei problemi

$$\begin{cases} y_n'(t) = A_n y_n(t) + f(t), & t \in [0, T], \\ y_n(0) = y_0, \end{cases} \quad \begin{cases} z_n'(t) = A_n z_n(t) + f'(t), & t \in [0, T], \\ z_n(0) = A_n y_0 + f(0), \end{cases}$$

che appartengono rispettivamente a $C^1([0, T], X)$ e $W^{1,p}(0, T; X)$, e sono date da

$$\begin{aligned} y_n(t) &= e^{tA_n} y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_n} f(s) ds, \\ z_n(t) &= e^{tA_n} [A_n y_0 + f(0)] + \int_0^t e^{(t-s)A_n} f'(s) ds. \end{aligned}$$

Integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} z_n(t) &= e^{tA_n}[A_n y_0 + f(0)] + [e^{(t-s)A_n} f(s)]_0^t + A_n \int_0^t e^{(t-s)A_n} f(s) ds \\ &= A_n \left[e^{tA_n} y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_n} f(s) ds \right] + f(t) = A_n y_n(t) + f(t) = y_n'(t). \end{aligned}$$

Si ha allora per $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} y_n(t) &\rightarrow y(t) = G(t)y_0 + \int_0^t G(t-s)f(s) ds \quad \text{uniformemente in } [0, T] \text{ e } y(0) = y_0, \\ y_n'(t) &= z_n(t) \rightarrow z(t) \quad \text{uniformemente in } [0, T], \end{aligned}$$

e dunque $y \in C^1([0, T], X)$ e $y'(t) = z(t)$ per ogni $t \in [0, T]$; inoltre

$$A_n y_n(t) = y_n'(t) - f(t) \rightarrow z(t) - f(t) \quad \text{uniformemente in } [0, T],$$

cosicché $y \in C([0, T], D(A))$ con $Ay(t) = z(t) - f(t) = y'(t) - f(t)$. Pertanto y è soluzione stretta di (3.7). L'unicità della soluzione stretta segue da quella della soluzione forte, dato che ovviamente ogni soluzione stretta è soluzione forte. \square

3.2.3 Semigruppì in uno spazio di Hilbert

Quando X è uno spazio di Hilbert, alcuni specifici risultati della teoria dei semigruppì hanno una formulazione più forte.

Teorema 3.2.25 (di Datko) *Sia X uno spazio di Hilbert complesso, e sia A il generatore infinitesimale di un semigruppò fortemente continuo \mathcal{G} . Sono fatti equivalenti:*

- (i) $\mathcal{G} \in \mathbf{G}(H, \omega)$ con $H \geq 1$, $\omega < 0$;
- (ii) $\int_0^\infty \|G(t)x\|_X^2 dt < \infty$ per ogni $x \in X$;
- (iii) esiste $P \in \mathcal{L}(X)$, $P = P^* \geq 0$, che risolve l'equazione di Lyapunov

$$\langle Px, Ay \rangle_X + \langle Ax, Py \rangle_X = -\langle x, y \rangle_X \quad \forall x, y \in D(A).$$

Dimostrazione (i) \implies (ii) È evidente.

(ii) \implies (iii) Proviamo anzitutto che esiste $K > 0$ per cui

$$\left[\int_0^\infty \|G(t)x\|_X^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq K \|x\|_X \quad \forall x \in X. \quad (3.8)$$

A questo scopo definiamo per $T > 0$ l'operatore $\Gamma_T : X \rightarrow L^2(0, \infty; X)$ dato da

$$(\Gamma_T x)(t) = G(t)x \cdot I_{[0, T]}(t), \quad t \geq 0.$$

Si ha $\Gamma_T \in \mathcal{L}(X, L^2(0, \infty; X))$: infatti, posto $K_x = [\int_0^\infty \|G(t)x\|_X^2 dt]^{1/2}$, risulta

$$\|\Gamma_T x\|_{L^2(0, \infty; X)} = \left[\int_0^T \|G(t)x\|_X^2 dt \right]^{1/2} \leq K_x \quad \forall T > 0,$$

ed inoltre

$$\sup_{T>0} \|\Gamma_T x\|_{L^2(0, \infty; X)} \leq K_x \quad \forall x \in X.$$

Per il teorema di Banach-Steinhaus esiste $K \in]0, \infty[$ tale che

$$\sup_{T>0} \|\Gamma_T\|_{\mathcal{L}(X, L^2(0, \infty; X))} \leq K,$$

ossia

$$\frac{1}{\|x\|_X} \left[\int_0^\infty \|G(t)x\|_X^2 dt \right]^{1/2} = \sup_{T>0} \frac{1}{\|x\|_X} \left[\int_0^T \|G(t)x\|_X^2 dt \right]^{1/2} \leq K \quad \forall x \in X \setminus \{0\},$$

il che prova la nostra affermazione.

Ciò premesso, per $x, y \in X$ e $\lambda > 0$ siano

$$\phi(x, y) = \int_0^\infty \langle G(t)x, G(t)y \rangle_X dt, \quad \phi_\lambda(x, y) = \int_0^\lambda \langle G(t)x, G(t)y \rangle_X dt.$$

Le applicazioni ϕ e ϕ_λ sono forme sesquilineari e continue su $X \times X$. Per ogni fissato $y \in X$ l'applicazione $x \mapsto \phi(x, y)$ è lineare e continua da X in \mathbb{C} , con

$$\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|\phi(x, y)|}{\|x\|_X} \leq K \|y\|_X;$$

quindi, per il teorema di Riesz, esiste un unico elemento $z_y \in X$ tale che

$$\phi(x, y) = \langle x, z_y \rangle_X \quad \forall x \in X, \quad \|z_y\|_X = \|\phi(\cdot, y)\|_{\mathcal{L}(X, \mathbb{C})}.$$

D'altra parte, essendo ϕ antilineare rispetto a y , la dipendenza di z_y da y risulta lineare; perciò esiste un operatore $P : X \rightarrow X$, lineare, tale che $z_y = Py$ per ogni $y \in X$. Inoltre P è limitato perché $\|Py\|_X \leq K \|y\|_X$, è non negativo perché $\phi(y, y) \geq 0$, ed è autoaggiunto perché ϕ è una forma hermitiana. Per definizione si ha

$$\langle Px, y \rangle_X = \langle x, Py \rangle_X = \phi(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

In modo analogo, per ogni $\lambda > 0$ si trova un operatore $P_\lambda \in \mathcal{L}(X)$, con $P_\lambda = P_\lambda^* \geq 0$, tale che

$$\langle P_\lambda x, y \rangle_X = \langle x, P_\lambda y \rangle_X = \phi_\lambda(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Dalla definizione segue che, per ogni $x, y \in X$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \phi_\lambda(x, y) = \phi(x, y),$$

e dunque, per $\lambda \rightarrow \infty$,

$$P_\lambda x \rightarrow Px \quad \text{in } X \quad \forall x \in X.$$

Se adesso $x, y \in D(A)$, si trova

$$\begin{aligned} & \langle P_\lambda Ax, y \rangle_X + \langle P_\lambda x, Ay \rangle_X = \\ &= \int_0^\lambda [\langle G(t)Ax, G(t)y \rangle_X + \langle G(t)x, G(t)Ay \rangle_X] dt = \\ &= \int_0^\lambda \frac{d}{dt} \langle G(t)x, G(t)y \rangle_X dt = \langle G(\lambda)x, G(\lambda)y \rangle_X - \langle x, y \rangle_X. \end{aligned}$$

Dunque

$$\langle G(\lambda)x, G(\lambda)y \rangle_X = \langle Ax, P_\lambda y \rangle_X + \langle P_\lambda x, Ay \rangle_X + \langle x, y \rangle_X \quad \forall x, y \in D(A),$$

e per $\lambda \rightarrow \infty$

$$\exists \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle G(\lambda)x, G(\lambda)y \rangle_X = \langle Ax, Py \rangle_X + \langle Px, Ay \rangle_X + \langle x, y \rangle_X \quad \forall x, y \in D(A).$$

Ma se questo limite esiste, osservato che $\langle G(\cdot)x, G(\cdot)y \rangle_X \in L^1(0, \infty)$, esso deve essere nullo. Ne segue la tesi.

(iii) \implies (ii) Sia $x \in D(A)$. Utilizziamo la funzione quadratica $\langle Px, x \rangle_X$ come funzione di Lyapunov per l'equazione differenziale $y'(t) = Ay(t)$. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle PG(t)x, G(t)x \rangle_X &= \langle PAG(t)x, G(t)x \rangle_X + \langle PG(t)x, AG(t)x \rangle_X = \\ &= \langle AG(t)x, PG(t)x \rangle_X + \langle PG(t)x, AG(t)x \rangle_X = -\|G(t)x\|_X^2, \end{aligned}$$

e integrando su $[0, T]$

$$\langle PG(T)x, G(T)x \rangle_X - \langle Px, x \rangle_X = - \int_0^T \|G(t)x\|_X^2 dt,$$

da cui

$$\int_0^T \|G(t)x\|_X^2 dt \leq \langle Px, x \rangle_X \quad \forall x \in D(A).$$

Per densità ricaviamo la stessa relazione per ogni $x \in X$, e infine quando $T \rightarrow +\infty$ si ottiene

$$\int_0^\infty \|G(t)x\|_X^2 dt \leq \langle Px, x \rangle_X \quad \forall x \in X,$$

che in particolare dà (ii).

(ii) \implies (i) Sappiamo che esistono $H_1 \geq 1$ e $\omega_1 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq H_1 e^{\omega_1 t} \quad \forall t \geq 0.$$

Se $\omega_1 < 0$, abbiamo finito; supponiamo dunque $\omega_1 \geq 0$.

Nel caso in cui $\omega_1 = 0$, risulta $\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq H_1$: allora per ogni $z \in X$ si ha

$$t\|G(t)z\|_X^2 = \int_0^t \|G(t)z\|_X^2 ds \leq \int_0^t \|G(s)\|_{\mathcal{L}(X)}^2 \|G(t-s)z\|_X^2 ds \leq H_1^2 \int_0^t \|G(r)z\|_X^2 dr,$$

e dunque, ricordando (3.8),

$$\|G(t)z\|_X^2 \leq \frac{H_1^2 K^2}{t} \|z\|_X^2 \quad \forall z \in X, \quad \forall t > 0.$$

Ne segue

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{H_1 K}{\sqrt{t}} < 1 \quad \text{per } t \text{ grande,}$$

e pertanto il tipo di \mathcal{G} è

$$\omega_0 = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \ln \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} < 0.$$

Ne segue (i) quando $\omega_1 = 0$.

Se invece $\omega_1 > 0$, si procede in modo simile: per $z \in X$

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{-2\omega_1 t}}{2\omega_1} \|G(t)z\|_X^2 &= \int_0^t e^{-2\omega_1 s} \|G(t)z\|_X^2 ds \leq \\ &\leq \int_0^t e^{-2\omega_1 s} \|G(s)\|_{\mathcal{L}(X)}^2 \|G(t-s)z\|_X^2 ds \leq \\ &\leq H_1^2 \int_0^t \|G(r)z\|_X^2 dr \leq H_1^2 K^2 \|z\|_X^2, \end{aligned}$$

da cui

$$\|G(t)z\|_X^2 \leq \frac{2\omega_1 H_1^2 K^2}{1 - e^{-2\omega_1 t}} \|z\|_X^2 \quad \forall t > 0,$$

e dunque

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}^2 \leq \frac{2\omega_1 H_1^2 K^2}{1 - e^{-2\omega_1 t}} \quad \forall t > 0.$$

Possiamo allora scrivere

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}^2 \leq \begin{cases} H_1^2 K^2 e^{2\omega_1} & \text{se } t \in [0, 1] \\ \frac{2\omega_1 H_1^2 K^2}{1 - e^{-2\omega_1}} & \text{se } t > 1. \end{cases}$$

Ciò mostra che il semigruppoo \mathcal{G} è uniformemente limitato. Ci siamo così ricondotti al caso precedente in cui $\omega_1 = 0$. Ne segue la tesi. \square

Anche in relazione al teorema di Hille-Yosida, nel caso hilbertiano abbiamo una caratterizzazione più facile.

Teorema 3.2.26 *Sia X uno spazio di Hilbert complesso e sia $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ un operatore lineare chiuso. Sono fatti equivalenti:*

(i) $\overline{D(A)} = X$, $\rho(A) \supseteq]0, \infty[$ e $\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle_X \leq 0$ per ogni $x \in D(A)$,

(ii) A è generatore infinitesimale di un semigruppoo \mathcal{G} contrattivo, ossia $\mathcal{G} \in \mathbf{G}(1, 0)$.

Osservazione 3.2.27 Si dice che A è *dissipativo* nello spazio di Hilbert X quando $\operatorname{Re}\langle Ax, x \rangle_X \leq 0$ per ogni $x \in D(A)$; si dice che A è *massimale dissipativo* quando in più $1 \in \rho(A)$ (il che implica $\overline{D(A)} = X$ e $\rho(A) \supseteq]0, \infty[$). Dunque gli operatori massimali dissipativi sono i generatori di semigruppı contrattivi.

Dimostrazione del teorema 3.2.26 (\Leftarrow) Dato che A genera un semigruppı fortemente continuo, si ha $\overline{D(A)} = X$ e $\rho(A) \supseteq]0, \infty[$. Sia $x \in D(A)$: dal fatto che $\mathcal{G} \in \mathbf{G}(1, 0)$ segue

$$\operatorname{Re}\langle Ax, x \rangle_X = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \operatorname{Re} [\langle G(h)x, x \rangle_X - \|x\|_X^2] \leq 0.$$

(\Rightarrow) Sia $\lambda > 0$ e poniamo $R(\lambda, A)x = y \in X$. Allora $\lambda y - Ay = x$ e dunque

$$\lambda \|y\|_X^2 - \langle Ay, y \rangle_X = \langle x, y \rangle_X,$$

da cui

$$(\operatorname{Re} \lambda) \|y\|_X^2 \leq \operatorname{Re} \langle Ay, y \rangle_X + \|x\|_X \|y\|_X,$$

che implica

$$\|y\|_X = \|R(\lambda, A)x\|_X \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda} \|x\|_X.$$

Dal teorema di Hille-Yosida e dall'osservazione 3.2.19(1) segue che A è generatore infinitesimale di un semigruppı fortemente continuo $\mathcal{G} \in \mathbf{G}(1, 0)$. \square

3.2.4 Esempi

Esempio 3.2.28 Consideriamo, in un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontiera localmente lipschitziana, il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace:

$$\begin{cases} \Delta u = f \in L^2(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Un primo risultato di esistenza e unicit  per questo problema si ha in forma debole: si introduce la forma bilineare

$$(u, v) \mapsto \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle_n dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega), \quad (3.9)$$

e si osserva che, in virt  della disuguaglianza di Poincar 

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \gamma \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

la forma (3.9)   un prodotto scalare su $H_0^1(\Omega)$ equivalente a quello naturale, che   quello indotto da $H^1(\Omega)$, vale a dire

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Quindi, applicando il teorema di Riesz, per ogni $T \in H^{-1}(\Omega) := [H_0^1(\Omega)]'$ (il duale di $H_0^1(\Omega)$) esiste un'unica $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_n dx = \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

La f del nostro problema sta in $L^2(\Omega)$, quindi scegliendo

$$\langle T, \varphi \rangle = - \int_{\Omega} f \varphi dx$$

si ottiene che esiste un'unica $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_n dx = - \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

In particolare, scelta $\varphi = u$, si ricava

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)},$$

e dunque, per la disuguaglianza di Poincaré,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Inoltre, una tecnica tipica della teoria delle equazioni ellittiche (il cosiddetto metodo dei rapporti incrementali) consente di stabilire, utilizzando il fatto che $f \in L^2(\Omega)$ e non solo $f \in H^{-1}(\Omega)$, che in effetti $u \in H^2(\Omega)$ e che

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Possiamo allora rappresentare astrattamente il problema (3.2.28), definendo

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ Au = \Delta u \quad \forall u \in D(A). \end{cases}$$

Dunque il problema (3.2.28) si esprime semplicemente scrivendo che $u \in D(A)$ e che $Au = f$. Osserviamo che risulta per ogni $u \in D(A)$

$$\operatorname{Re} \langle Au, u \rangle_{L^2(\Omega)} = \operatorname{Re} \int_{\Omega} \Delta u u dx = \operatorname{Re} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} u d\sigma - \int_{\Omega} |u|^2 dx = 0 - \int_{\Omega} |u|^2 dx \leq 0.$$

Inoltre, si ha $\overline{D(A)} = L^2(\Omega)$ ed infine $\rho(A) \supset [0, \infty[$, poiché per ogni $\lambda \geq 0$ il problema

$$\begin{cases} \lambda u - \Delta u = f \in L^2(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

ha soluzione unica: questo si vede con lo stesso procedimento utilizzato nel caso (i) \implies (ii) della dimostrazione del teorema 3.2.26.

Dunque, per il teorema 3.2.26, A è generatore infinitesimale di un semigruppato contrattivo.

Esempio 3.2.29 Consideriamo, nelle stesse ipotesi sull'aperto A , il problema di Neumann per l'equazione di Laplace:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

ove $f \in L^2(\Omega)$ e n è il versore normale esterno a Ω . Vi è una teoria parallela al caso del problema di Dirichlet, che dà gli stessi risultati: l'operatore

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ u \in H^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ su } \partial\Omega \right\} \\ Au = \Delta u \quad \forall u \in D(A) \end{cases}$$

è generatore infinitesimale di un semigruppò $\mathcal{G} \in \mathbf{G}(1, 0)$; l'unica differenza è che in questo caso $0 \notin \rho(A)$, dato che ogni costante risolve il problema di Neumann sopra scritto.

Esempio 3.2.30 Consideriamo l'equazione delle onde in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ connesso e limitato, con frontiera regolare:

$$\begin{cases} y_{tt}(t, x) - \Delta y(t, x) = f(t, x), & (t, x) \in]0, T] \times \Omega \\ y(t, x) = 0, & (t, x) \in]0, T] \times \partial\Omega \\ y(0, x) = y_0, \quad y_t(0, x) = y_1(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Anche questo problema di Cauchy-Dirichlet si può ridurre ad una equazione astratta dello stesso tipo degli esempi precedenti. Poniamo $v = y_t$: allora l'equazione $y_{tt} - \Delta y = f$ diventa

$$\begin{cases} y_t = v \\ v_t = \Delta y + f, \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix},$$

con le condizioni $\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$ e $y(t, \cdot)|_{\partial\Omega} = 0$. Introducendo l'operatore

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ Au = \Delta u \quad \forall u \in D(A), \end{cases}$$

il problema di Cauchy-Dirichlet si riscrive come problema di Cauchy astratto:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}, & t \in]0, T] \\ \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Analizziamo le proprietà spettrali di $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A & 0 \end{pmatrix}$ scegliendo nel modo più naturale lo spazio X , vale a dire ponendo $X = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$: si ha allora $D(\mathcal{A}) = D(A) \times L^2(\Omega)$.

L'equazione $\lambda \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} - \mathcal{A} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ equivale a

$$\begin{cases} \lambda y - v = f \\ \lambda v - Ay = g, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} v = \lambda y - f \\ \lambda^2 v - Ay = g + \lambda f. \end{cases}$$

Per $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $\lambda^2 \geq 0$ e quindi $\lambda^2 \in \rho(A)$. Ne segue

$$R(\lambda, \mathcal{A}) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\lambda^2, A)(g + \lambda f) \\ \lambda R(\lambda^2, A)(g + \lambda f) - f \end{pmatrix},$$

ovvero, semplificando,

$$R(\lambda, \mathcal{A}) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ A & \lambda \end{pmatrix} R(\lambda^2, A) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Il problema è che questo operatore si stima piuttosto male: si ha

$$\left\| R(\lambda, \mathcal{A}) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_X \leq c \left[1 + \frac{1}{|\lambda|} \right] \left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_X,$$

ed il teorema di Hille-Yosida non è applicabile. Si noti anche che la forma quadratica

$$\left\langle \mathcal{A} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_X = \left\langle \begin{pmatrix} v \\ Ay \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_X = \int_{\Omega} [v y + \Delta y v] dx$$

non ha segno determinato.

Consideriamo invece lo spazio $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, con il prodotto scalare

$$\left\langle \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \right\rangle_X = \int_{\Omega} [\langle \nabla y, \nabla z \rangle_n + v w] dx.$$

Per l'operatore

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}) = D(A) \times H_0^1(\Omega) \\ \mathcal{A} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A}), \end{cases}$$

vale la relazione

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{A} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_X &= \left\langle \begin{pmatrix} v \\ Ay \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_X = \int_{\Omega} [\langle \nabla v, \nabla y \rangle_n + \Delta y v] dx = \\ &= \int_{\Omega} \langle \nabla v, \nabla y \rangle_n dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial n} v d\sigma - \int_{\Omega} \langle \nabla v, \nabla y \rangle_n dx = 0. \end{aligned}$$

Perciò, sia \mathcal{A} che $-\mathcal{A}$ sono massimali dissipativi, e pertanto \mathcal{A} genera un gruppo (e non soltanto un semigrupp) fortemente continuo e contrattivo nello spazio $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

3.3 Controllo lineare-quadratico in spazi di Hilbert

Torniamo al nostro problema originale: minimizzare il funzionale

$$J(x, u) = \int_0^T [\langle My(t), y(t) \rangle_X + \langle Nu(t), u(t) \rangle_U] dt + \langle P_0 y(T), y(T) \rangle_X$$

tra le $u \in L^2(0, T; X)$, con $u(\cdot)$ e $y(\cdot)$ vincolate dalla relazione

$$y(t) = G(t)x + \int_0^t G(t-s)Bu(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

dove:

- X, U sono spazi di Hilbert reali e separabili,
- $B \in \mathcal{L}(U, X)$,
- M e P_0 sono operatori limitati, autoaggiunti e non negativi su X ,
- N è un operatore limitato, autoaggiunto e coercivo su U , cioè esiste $\delta > 0$ per cui $\langle Nu, u \rangle_U \geq \delta \|u\|_U^2$ per ogni $u \in U$,
- $x \in X$,
- $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ è il generatore infinitesimale di un semigruppò \mathcal{G} fortemente continuo.

Il funzionale quadratico J è strettamente convesso e coercivo: quindi è immediato verificare che per ogni $x \in X$ esiste un'unica coppia ottimale (y^*, u^*) . Sia infatti $\{u_n\} \subset L^2(0, T; U)$ una successione minimizzante, ossia tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(x, u_n) = \inf J \geq 0.$$

Per la coercività di N , la successione $\{u_n\}$ è limitata in $L^2(0, T; U)$. Dunque esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tale che

$$u_{n_k} \rightharpoonup u^* \quad \text{in } L^2(0, T; U).$$

Ma allora, in $L^2(0, T; X)$,

$$y_{n_k}(t) = G(t)x + \int_0^t G(t-s)Bu_{n_k}(s) ds \rightharpoonup G(t)x + \int_0^t G(t-s)Bu^*(s) ds = y^*(t),$$

ed anche

$$y_{n_k}(T) = G(T)x + \int_0^T G(T-s)u_{n_k}(s) ds \rightharpoonup y^*(T) \quad \text{in } X.$$

Ora è immediato verificare che il funzionale J è semicontinuo inferiormente in $L^2(0, T; U)$ rispetto alla convergenza debole: dunque si ricava

$$J(x, u^*) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(x, u_{n_k}) = \inf J,$$

cosicché (y^*, u^*) è una coppia ottimale. La stretta convessità di J ci dice poi che tale coppia ottimale è unica.

Vogliamo ora caratterizzare (y^*, u^*) . Il teorema di Pontrjagin ci dà molte informazioni: le condizioni necessarie ottenute per il problema di Bolza in \mathbb{R}^n valgono anche in questo caso più generale. Ricordando il sistema (2.2), nella nostra attuale situazione si ottiene:

$$\begin{cases} 2Nu^* - B^*\psi = 0 \\ \psi' = -\psi A + 2My^* \\ \psi(T) + 2P_0y^*(T) = 0, \end{cases}$$

ove $\psi \in X^*$ è il moltiplicatore incognito. Ponendo per comodità $p = -\frac{\psi}{2}$, il sistema diventa

$$\begin{cases} u^*(t) = -N^{-1}B^*p(t), & t \in [0, T] \\ p'(t) = -A^*p(t) + My^*(t), & t \in [0, T] \\ p(T) = P_0y^*(T). \end{cases} \quad (3.10)$$

Il moltiplicatore p si chiama *co-stato* e risolve un problema di Cauchy all'indietro. Immergiamo il nostro problema in una famiglia più generale: per $s \in [0, T]$ consideriamo il funzionale

$$J_s(x, u) = \int_s^T [\langle My(t), y(t) \rangle_X + \langle Nu(t), u(t) \rangle_U] dt + \langle P_0y(T), y(T) \rangle_X, \quad (3.11)$$

da minimizzare fra le $u \in L^2(s, T; U)$ tali che

$$y(t) = G(t-s)x + \int_s^t G(t-r)Bu(r) dr, \quad t \in [s, T]. \quad (3.12)$$

La *funzione valore* di questo problema è

$$V(s, x) = \inf \left\{ J_s(x, u) : u \in L^2(s, T; U), y(t) = G(t-s)x + \int_s^t G(t-r)Bu(r) dr \right\}.$$

Indicheremo la coppia ottimale ed il relativo co-stato con

$$(y_{s,x}^*(\cdot), u_{s,x}^*(\cdot)), \quad p_{s,x}^*(\cdot),$$

cosicché si ha

$$\begin{cases} (p_{s,x}^*)'(t) = -A^*p_{s,x}^*(t) + My_{s,x}^*, & t \in [0, T[, \\ p_{s,x}^*(T) = P_0y_{s,x}^*(T), \\ u_{s,x}^*(t) = -N^{-1}B^*p_{s,x}^*(t), & t \in]0, T[, \\ y_{s,x}^*(t) = G(t-s)x + \int_s^t G(t-r)Bu_{s,x}^*(r) dr, & t \in [0, T]; \end{cases} \quad (3.13)$$

in particolare

$$V(s, x) = \int_s^T [\langle My_{s,x}^*(t), y_{s,x}^*(t) \rangle_X + \langle Nu_{s,x}^*(t), u_{s,x}^*(t) \rangle_U] dt + \langle P_0 y_{s,x}^*(T), y_{s,x}^*(T) \rangle_X.$$

Mostriamo adesso che lo stato, il controllo e il co-stato ottimali non sono soltanto elementi di L^2 ma sono funzioni continue.

Proposizione 3.3.1 *Risulta*

$$x \mapsto u_{s,x}^* \in \mathcal{L}(X, C([s, T], U)), \quad x \mapsto y_{s,x}^*, \quad x \mapsto p_{s,x}^* \in \mathcal{L}(X, C([s, T], X)),$$

ed in particolare esiste $L_T \geq 0$ tale che

$$\|y_{s,x}^*\|_X + \|u_{s,x}^*\|_U + \|p_{s,x}^*\|_X \leq L_T \|x\|_X \quad \forall x \in X, \quad \forall s \in [0, T[, \quad \forall t \in [s, T].$$

Dimostrazione Scelta una qualunque coppia (y, u) verificante (3.12), vogliamo inserire l'espressione di y nel funzionale $J_s(x, u)$. A questo scopo poniamo

$$[L_s u](t) = \int_s^t G(t-r)Bu(r) dr, \quad L_{sT} u = \int_s^T G(T-r)Bu(r) dr;$$

si ha $L_s : L^2(s, t; U) \rightarrow L^2(s, T; X)$, $L_{sT} : L^2(s, T; U) \rightarrow X$, e questi operatori sono lineari e continui, con

$$\begin{aligned} \|L_s\|_{\mathcal{L}(L^2(s,T;U), L^2(s,T;X))} &\leq \frac{He^{\omega(T-s)}}{2\omega} \|B\|_{\mathcal{L}(U,X)}, \\ \|L_{sT}\|_{\mathcal{L}(L^2(s,T;U), X)} &\leq \frac{He^{\omega(T-s)}}{2\omega} \|B\|_{\mathcal{L}(U,X)}, \end{aligned}$$

mentre $L_s^* : L^2(s, T; X) \rightarrow L^2(s, T; U)$, $L_{sT}^* : X \rightarrow L^2(s, T; U)$ con

$$\begin{aligned} [L_s^* v](t) &= \int_t^T B^* G(r-t)^* v(r) dr \quad \forall v \in L^2(s, T; X), & t \in [s, T]. \\ [L_{sT}^* y](t) &= B^* G(T-t)^* y \quad \forall y \in X, \end{aligned}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} J_s(x, u) &= \\ &= \int_s^T [\langle M[G(t-s)x + [L_s u](t)], G(t-s)x + [L_s u](t) \rangle_X + \langle Nu(t), u(t) \rangle_U] dt + \\ &\quad + \langle P_0 [G(T-s)x + L_{sT} u], G(T-s)x + L_{sT} u \rangle_X = \\ &= \int_s^T \langle G(t-s)^* M G(t-s)x, x \rangle_X dt + \langle G(T-s)^* P_0 G(T-s)x, x \rangle_X + \\ &\quad + 2 \int_s^T \langle [L_s^* M G(\cdot - s)x](t) + [L_{sT}^* P_0 G(T-s)x](t), u(t) \rangle_U dt + \\ &\quad + \int_s^T [\langle [L_s^* M L_s u](t), u(t) \rangle_U + \langle Nu(t), u(t) \rangle_U + \langle [L_{sT}^* P_0 L_{sT} u](t), u(t) \rangle_U] dt. \end{aligned}$$

Il funzionale $J_s(x, \cdot)$ è minimo quando $u = u_{s,x}^*$: dunque $\frac{\partial J_s}{\partial u}(x, u)$ è nullo per $u = u_{s,x}^*$. Si ha quindi

$$2 [L_s^* M L_s + N + L_{sT}^* P_0 L_{sT}] u_{s,x}^* + 2 [L_s^* M G(\cdot - s)x + L_{sT}^* P_0 G(T - s)x] = 0 \quad \text{in } [s, T].$$

L'operatore $L := L_s^* M L_s + N + L_{sT}^* P_0 L_{sT}$ è autoaggiunto e coercivo da $\underline{L^2}(s, T; U)$ in sé, con $\langle Lu, u \rangle_{L^2(s, T; U)} \geq \delta \|u\|_{L^2(s, T; U)}^2$. Quindi L è iniettivo e, siccome $R(L) \oplus \ker L = L^2(s, T; U)$, ha immagine densa. Ma è immediato verificare che la coercività implica $R(L) = \overline{R(L)}$, e dunque L è bigettivo, con $\|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(s, T; U))} \leq \frac{1}{\delta}$. Ne segue

$$u_{s,x}^*(\cdot) = -L^{-1}(L_s^* M G(\cdot - s)x + L_{sT}^* P_0 G(T - s)x),$$

cioè $x \mapsto u_{s,x}^*$ è lineare. Poi, essendo $y_{s,x}^*$ lineare rispetto a x e $u_{s,x}^*$, anche $x \mapsto y_{s,x}^*$ è lineare. Infine, essendo $p_{s,x}^*$ lineare rispetto a $y_{s,x}^*$, anche $x \mapsto p_{s,x}^*$ è lineare.

Proviamo le stime puntuali: anzitutto

$$\begin{aligned} \|u_{s,x}^*\|_{L^2(s, T; U)} &\leq \frac{1}{\delta} \left[\|L_s^*\|_{\mathcal{L}(L^2(s, T; X), L^2(s, T; U))} \|M\|_{\mathcal{L}(X)} \|G(\cdot - s)x\|_{L^2(s, T; X)} + \right. \\ &\quad \left. + \|L_{sT}^*\|_{\mathcal{L}(X, L^2(s, T; U))} \|P_0\|_{\mathcal{L}(X)} \|G(T - s)x\|_X \right] \leq \\ &\leq C_{T1} \|x\|_X \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Dunque

$$\|y_{s,x}^*(t)\|_X \leq H e^{\omega T} \|x\|_X + \|L_s\|_{\mathcal{L}(L^2(s, T; U), L^2(s, T; X))} \|u_{s,x}^*\|_{L^2(s, T; U)} \leq c_{T2} \|x\|_X \quad \forall x \in X,$$

ed infine, essendo

$$p_{s,x}^*(t) = G(T - t)^* P_0 y_{s,x}^*(T) + \int_t^T G(r - t)^* M y_{s,x}^*(r) dr,$$

troviamo

$$\begin{aligned} \|p_{s,x}^*(t)\|_X &\leq H e^{\omega T} \|P_0\|_{\mathcal{L}(X)} \|y_{s,x}^*(T)\|_X + \int_t^T H e^{\omega(r-t)} \|M\|_{\mathcal{L}(X)} \|y_{s,x}^*(r)\|_X dr \leq \\ &\leq C_{T3} \|x\|_X \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Ciò prova le stime. Il fatto che $y_{s,x}^*$ e $p_{s,x}^*$ siano funzioni continue segue dalla continuità forte del semigrupp \mathcal{G} e dalla loro espressione esplicita; la continuità di $u_{s,x}^*$ segue da quella di $p_{s,x}^*$ tramite la seconda delle (3.13). \square

Corollario 3.3.2 *Per ogni $s \in [0, T[$ esiste $Q(s) \in \mathcal{L}(X)$, autoaggiunto e positivo, tale che*

$$V(s, x) = \langle Q(s)x, x \rangle_X \quad \forall x \in X.$$

Dimostrazione Dalla proposizione 3.3.1 si deduce immediatamente che la funzione valore $V(s, x) = J_s(x, u_{s,x}^*)$ è quadratica rispetto a $y_{s,x}^*$ e $u_{s,x}^*$, funzioni che sono lineari rispetto a x ; ne segue che $V(s, x)$ è quadratica rispetto a x , nonché positiva. Ne segue la tesi per un opportuno operatore $Q(s) \in \mathcal{L}(X)$, autoaggiunto e positivo, la cui forma esplicita verrà ottenuta fra poco (proposizione 3.3.8). \square

Vogliamo adesso ricavare le proprietà dell'operatore di Riccati $Q(s)$, che è fondamentale per esprimere il controllo ottimale in forma feedback.

Proposizione 3.3.3 (principio di ottimalità di Bellman) *Se $x \in X$ e $s \in [0, T[$, allora $u_{0,x}^*|_{[s,T]} \equiv u_{s,y_{0,x}^*(s)}^*$ e $y_{0,x}^*|_{[s,T]} \equiv y_{s,y_{0,x}^*(s)}^*$; in altre parole, $u_{0,x}^*$ e $y_{0,x}^*$ sono la coppia ottimale anche in $[s, T]$ rispetto al valore iniziale $y_{0,x}^*(s)$.*

Dimostrazione Fissiamo un controllo $\hat{u} \in L^2(s, T; U)$ e denotiamo con \hat{y} lo stato corrispondente al valore $y_{0,x}^*(s)$, ossia la funzione $y_{s,y_{0,x}^*(s)}^*$: dunque

$$\begin{cases} \hat{y}'(t) = A\hat{y}(t) + B\hat{u}(t), & t \in]s, T] \\ \hat{y}(s) = y_{0,x}^*(s). \end{cases}$$

Poniamo

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u_{0,x}^*(t) & \text{se } t \in [0, s] \\ \hat{u}(t) & \text{se } t \in]s, T], \end{cases} \quad \bar{y}(t) = \begin{cases} y_{0,x}^*(t) & \text{se } t \in [0, s] \\ \hat{y}(t) & \text{se } t \in]s, T]. \end{cases}$$

È chiaro che risulta

$$\begin{cases} \bar{y}'(t) = A\bar{y}(t) + B\bar{u}(t), & t \in]0, T] \\ \bar{y}(0) = x. \end{cases}$$

Dunque, per minimalità di $u_{0,x}^*$,

$$J(x, u_{0,x}^*) \leq J(x, \bar{u}).$$

Sottraendo ad entrambi i membri la quantità

$$\int_0^s [\langle My_{0,x}^*(t), y_{0,x}^*(t) \rangle_X + \langle Nu_{0,x}^*(t), u_{0,x}^*(t) \rangle_U] dt,$$

si ottiene

$$J_s(y_{0,x}^*(s), u_{0,x}^*|_{[s,T]}) \leq J_s(y_{0,x}^*(s), \hat{u}) :$$

per l'arbitrarietà di \hat{u} , $u_{0,x}^*|_{[s,T]}$ è ottimale in $[s, T]$ per il valore iniziale $y_{0,x}^*(s)$; pertanto lo stato ottimale $y_{0,x}^*$ coincide in $[s, T]$ con $y_{s,y_{0,x}^*(s)}^*$. \square

Corollario 3.3.4 *Per $0 \leq s \leq t < T$ e $x \in X$ si ha*

$$V(s, x) = \int_s^t [\langle My_{s,x}^*(r), y_{s,x}^*(r) \rangle_X + \langle Nu_{s,x}^*(r), u_{s,x}^*(r) \rangle_U] dr + V(t, y_{s,x}^*(t)).$$

Dimostrazione Riscriviamo la relazione $V(s, x) = J_s(x, u_{s,x}^*)$ spezzando l'integrale all'istante t : si ottiene

$$V(s, x) = \int_s^t [\langle My_{s,x}^*(r), y_{s,x}^*(r) \rangle_X + \langle Nu_{s,x}^*(r), u_{s,x}^*(r) \rangle_U] dr + J_t(y_{s,x}^*(t), u_{s,x}^*|_{[t,T]});$$

per il principio di ottimalità di Bellman, l'ultimo termine coincide con $V(t, y_{s,x}^*(t))$. \square

Corollario 3.3.5 Per $0 \leq s \leq t < T$ e $x \in X$ si ha

$$V(s, x) = \inf \left\{ \int_s^t [\langle My(r), y(r) \rangle_X + \langle Nu(r), u(r) \rangle_U] dr + V(t, y(t)) : \right. \\ \left. u \in L^2(s, t; U), y'(r) = Ay(r) + Bu(r) \text{ in }]s, t], y(s) = x \right\};$$

in particolare, il controllo $u_{s,x}^*$, che è ottimale in $[s, T]$, è anche ottimale in $[s, t]$ per ogni $t \in]s, T[$, nel senso che la sua restrizione $u_{s,x}^*|_{[s,t]}$ rende l'estremo inferiore un minimo.

Dimostrazione Indicando con K il secondo membro, essendo $u_{s,x}^*$ un particolare elemento di $L^2(s, t, U)$, dal corollario 3.3.4 segue che

$$V(s, x) \geq K.$$

D'altra parte, sia $\hat{u} \in L^2(s, t; U)$ e sia \hat{y} lo stato tale che

$$\begin{cases} \hat{y}'(r) = A\hat{y}(r) + B\hat{u}(r), & r \in]s, t] \\ \hat{y}(s) = x; \end{cases}$$

poniamo poi, per ogni $u \in L^2(t, T; U)$,

$$\bar{u}(r) = \begin{cases} \hat{u}(r) & \text{se } r \in [s, t] \\ u(r) & \text{se } r \in]t, T], \end{cases} \quad \bar{y}(r) = \begin{cases} \hat{y}(r) & \text{se } r \in [s, t] \\ y(r) & \text{se } r \in]t, T], \end{cases}$$

ove y risolve

$$\begin{cases} y'(r) = Ay(r) + Bu(r), & r \in]t, T] \\ y(t) = \hat{y}(t). \end{cases}$$

Allora (\bar{y}, \bar{u}) verifica (3.12) e si ha

$$\begin{aligned} V(s, x) &\leq \int_s^T [\langle M\bar{y}(r), \bar{y}(r) \rangle_X + \langle N\bar{u}(r), \bar{u}(r) \rangle_U] dt + \langle P_0\bar{y}(T), \bar{y}(T) \rangle_X = \\ &= \int_s^t [\langle M\hat{y}(r), \hat{y}(r) \rangle_X + \langle N\hat{u}(r), \hat{u}(r) \rangle_U] dt + \\ &\quad + \int_t^T [\langle My(r), y(r) \rangle_X + \langle Nu(r), u(r) \rangle_U] dt + \langle P_0y(T), y(T) \rangle_X = \\ &= \int_s^t [\langle M\hat{y}(r), \hat{y}(r) \rangle_X + \langle N\hat{u}(r), \hat{u}(r) \rangle_U] dt + J_t(\hat{y}(t), u). \end{aligned}$$

Passando all'estremo inferiore per $u \in L^2(t, T; U)$, si ottiene

$$V(s, x) \leq \int_s^t [\langle M\hat{y}(r), \hat{y}(r) \rangle_X + \langle N\hat{u}(r), \hat{u}(r) \rangle_U] dt + V(t, \hat{y}(t)),$$

da cui, per l'arbitrarietà di \widehat{u} ,

$$V(s, x) \leq K.$$

Infine, scegliendo $u = u_{s,x}^*$, l'estremo inferiore K diventa un minimo in virtù del corollario 3.3.4. \square

Possiamo ora rappresentare il controllo ottimale $u_{s,x}^*$ in forma feedback.

Proposizione 3.3.6 *Per $0 \leq s \leq t < T$ e $x \in X$ si ha*

$$u_{s,x}^*(t) = -N^{-1}B^*Q(t)y_{s,x}^*(t),$$

ove $Q(t)$ è l'operatore definito nel corollario 3.3.2.

Dimostrazione Se (\tilde{y}, \tilde{u}) è la coppia ottimale del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \left\{ \int_s^t \left[\langle My(r), y(r) \rangle_X + \langle Nu(r), u(r) \rangle_U \right] dr + \langle Q(t)y(t), y(t) \rangle_X \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} y' = Ay + Bu \quad \text{in }]s, t[\\ y(s) = x \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

allora, per le condizioni necessarie di ottimalità (3.13), fra controllo \tilde{u} , stato \tilde{y} e co-stato \tilde{p} intercorrono le seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{p}'(t) = -A^*\tilde{p}(t) - M\tilde{y}(t), \quad t \in]s, t[, \\ \tilde{p}(t) = Q(t)\tilde{y}(t), \end{array} \right.$$

$$\tilde{u}(r) = -N^{-1}B^*\tilde{p}(r), \quad r \in]s, t[,$$

$$\tilde{y}(r) = G(r-s)x + \int_s^r G(r-\sigma)B\tilde{u}(\sigma) d\sigma, \quad r \in]s, t[.$$

Ma la coppia ottimale del problema (3.14) è proprio $(y_{s,x}^*, u_{s,x}^*)$: infatti, per i corollari 3.3.4 e 3.3.5,

$$\begin{aligned} & \int_s^t \left[\langle My_{s,x}^*(r), y_{s,x}^*(r) \rangle_X + \langle Nu_{s,x}^*(r), u_{s,x}^*(r) \rangle_U \right] dr + V(t, y_{s,x}^*(t)) = \\ & = V(t, x) \leq \int_s^t \left[\langle My(r), y(r) \rangle_X + \langle Nu(r), u(r) \rangle_U \right] dr + V(t, y(t)) \end{aligned}$$

per ogni (y, u) con $u \in L^2(s, t; U)$ e $y' = Ay + Bu$ in $]s, t[$, $y(s) = x$. Grazie alla continuità di $u_{s,x}^*$, dalle equazioni di ottimalità sopra scritte segue in particolare, per $s \rightarrow t^-$,

$$u_{s,x}^*(t) = -N^{-1}B^*p_{s,x}^*(t) = -N^{-1}B^*Q(t)y_{s,x}^*(t). \quad \square$$

Corollario 3.3.7 (Closed-loop equation) *Per $0 \leq s \leq T$ e $x \in X$ si ha*

$$\left\{ \begin{array}{l} (y_{s,x}^*)'(t) = Ay_{s,x}^*(t) - BN^{-1}B^*Q(t)y_{s,x}^*(t), \quad t \in]s, T[, \\ y_{s,x}^*(s) = x, \end{array} \right.$$

Dimostrazione È evidente, visto che $u_{s,x}^* = -N^{-1}B^*Q(t)y_{s,x}^*$. \square

Il significato della closed-loop equation e della formula feedback per $u_{s,x}^*$ è che ad ogni istante $t \in [s, T]$, per ogni $x \in X$, i valori del controllo e dello stato ottimale sono determinati solo da x e t , ossia non vi è memoria del passato né predizione del futuro. Però, nell'equazione compare l'operatore $Q(t)$, ossia la funzione valore $V(t, x)$, che nella sua definizione, al contrario, coinvolge i valori futuri del controllo. Quindi è importante mostrare che $V(t, x)$ è soluzione di un'equazione differenziale ordinaria, che si può cercare di risolvere direttamente. Tale equazione è l'*equazione di Riccati*, che discuteremo nel prossimo paragrafo.

Vogliamo ora ottenere una formula esplicita per l'operatore di Riccati $Q(\cdot)$, introdotto nel corollario 3.3.2.

Proposizione 3.3.8 *L'operatore di Riccati $Q(\cdot)$ è dato dalla formula*

$$Q(s)x = \int_s^T G(t-s)^* M y_{s,x}^*(t) dt + G(T-s)^* P_0 y_{s,x}^*(T), \quad s \in [0, T]. \quad (3.15)$$

Dimostrazione Fissato $x \in X$, partiamo dalle relazioni già note

$$\begin{aligned} \langle Q(s)x, x \rangle_X &= V(s, x) = J_s(x, u_{s,x}^*) = \\ &= \int_s^T [\langle M y_{s,x}^*(t), y_{s,x}^*(t) \rangle_X + \langle N u_{s,x}^*(t), u_{s,x}^*(t) \rangle_U] dt + \langle P_0 y_{s,x}^*(T), y_{s,x}^*(T) \rangle_X. \end{aligned}$$

Nel membro destro del prodotto scalare sostituiamo al posto di $y_{s,x}^*$ la sua espressione fornita dall'ultima delle (3.13): si ottiene

$$\begin{aligned} \langle Q(s)x, x \rangle_X &= \\ &= \int_s^T \left\langle M y_{s,x}^*(t), G(t-s)x + \int_s^t G(t-\sigma) B u_{s,x}^*(\sigma) d\sigma \right\rangle_X dt + \\ &+ \int_s^T \langle N u_{s,x}^*(t), u_{s,x}^*(t) \rangle_U dt + \left\langle P_0 y_{s,x}^*(T), G(T-s)x + \int_s^T G(T-\sigma) B u_{s,x}^*(\sigma) d\sigma \right\rangle_X. \end{aligned}$$

Ora inseriamo nella parte sinistra del termine contenente $\langle N u_{s,x}^*(t), u_{s,x}^*(t) \rangle_U$ l'espressione feedback $u_{s,x}^* = -N^{-1}B^*Q(t)y_{s,x}^*$ fornita dalla proposizione 3.3.6, portando inoltre al primo membro gli addendi del secondo membro che contengono $y_{s,x}^*$ ma non $u_{s,x}^*$:

$$\begin{aligned} \langle Q(s)x, x \rangle_X - \int_s^T \langle G(t-s)^* M y_{s,x}^*(t), x \rangle_X dt - \langle G(T-s)^* P_0 y_{s,x}^*(T), x \rangle_X &= \\ = \int_s^T \int_s^t \langle G(t-\sigma)^* M y_{s,x}^*(t), B u_{s,x}^*(\sigma) \rangle_X d\sigma dt + \int_s^T \langle G(T-\sigma)^* P_0 y_{s,x}^*(T), B u_{s,x}^*(\sigma) \rangle_X d\sigma. \end{aligned}$$

Adesso sfruttiamo il principio di ottimalità di Bellman (proposizione 3.3.3) e scriviamo $y_{s,x}^*(t) = y_{\sigma, y_{s,x}^*(\sigma)}^*(t)$ per $t \in [\sigma, T]$: indicando con

$$Z(s)x = Q(s)x - \int_s^T G(t-s)^* M y_{s,x}^*(t) dt - G(T-s)^* P_0 y_{s,x}^*(T)$$

l'operatore che compare a primo membro, e che vogliamo provare essere nullo, ed applicando il teorema di Fubini, si ottiene per ogni $s \in [0, T]$

$$\begin{aligned}\langle Z(s)x, x \rangle_X &= \int_s^T \int_\sigma^T \langle G(t - \sigma)^* M y_{\sigma, y_{s,x}^*}^*(t), B u_{s,x}^*(\sigma) \rangle dt d\sigma + \\ &+ \int_s^T \langle G(T - \sigma)^* P_0 y_{\sigma, y_{s,x}^*}^*(\sigma), B u_{s,x}^*(\sigma) \rangle_X d\sigma = \\ &= \int_s^T \langle Z(\sigma) y_{s,x}^*(\sigma), B u_{s,x}^*(\sigma) \rangle_X d\sigma.\end{aligned}$$

Ne segue, ricordando la proposizione 3.3.1,

$$\|Z(s)\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \langle Z(s)x, x \rangle_X \leq \|B\|_{\mathcal{L}(U,X)} (L_T)^2 \int_s^T \|Z(\sigma)\|_{\mathcal{L}(X)} d\sigma, \quad s \in [0, T].$$

Da qui, posto $C = \|B\|_{\mathcal{L}(U,X)} (L_T)^2$ e $g(r) = \sup_{s \in [r, T]} \|Z(s)\|_{\mathcal{L}(X)}$ per $r \in [0, T[$, segue

$$g(s) \leq C(T - s)g(s),$$

e ciò implica, per $T - r < 1/C$, che $g(s) = 0$ per $s \in [r, T]$. Allora si può sostituire l'integrale su $[s, T]$ con l'integrale su $[s, r]$, e ripetendo l'argomentazione si trova, con un numero finito di passi, $g(s) = 0$ per $s \in [0, T]$. Questo implica $Z(s) = 0$ in $[0, T]$, e la tesi è provata. \square

3.3.1 L'equazione di Riccati

Dimostriamo anzitutto che la funzione valore $V(t, x)$ è lipschitziana rispetto a t quando $x \in D(A)$.

Lemma 3.3.9 *Esiste $L'_T \geq 0$ tale che*

$$|V(t, x) - V(s, x)| \leq L'_T [\|x\|_X + \|Ax\|_X] \|x\|_X |t - s| \quad \forall t, s \in [0, T], \quad \forall x \in D(A).$$

Dimostrazione Per prima cosa osserviamo che la relazione $V(t, x) = J_t(x, u_{t,x}^*)$ e le stime puntuali della proposizione 3.3.1 mostrano che

$$\langle Q(t)x, x \rangle_X = V(t, x) \leq c_T \|x\|_X^2 \quad \forall x \in X.$$

Dunque l'operatore autoaggiunto e non negativo $Q(t)$ verifica

$$\|Q(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c_T.$$

Ne segue

$$\begin{aligned}|V(t, x) - V(t, z)| &= |\langle Q(t)x, x \rangle_X - \langle Q(t)z, z \rangle_X| \leq \\ &\leq |\langle Q(t)(x - z), x \rangle_X + \langle Q(t)z, x - z \rangle_X| \leq \\ &\leq c_T [\|x\|_X + \|z\|_X] \|x - z\|_X \quad \forall x, z \in X, \quad \forall t \in [0, T].\end{aligned}$$

Dunque, per $t, s \in [0, T]$ con $t > s$, dal corollario 3.3.4 si ha

$$\begin{aligned} V(s, x) - V(t, x) &= \\ &= \int_s^t \left[\langle My_{s,x}^*(r), y_{s,x}^*(r) \rangle_X + \langle Nu_{s,x}^*(r), u_{s,x}^*(r) \rangle_U \right] dr + V(t, y_{s,x}^*(t)) - V(t, x), \end{aligned}$$

da cui

$$|V(s, x) - V(t, x)| \leq L_T^2 [\|M\|_{\mathcal{L}(X)} + \|N\|_{\mathcal{L}(U)}] \|x\|_X^2 |t - s| + c_T(1 + L_T) \|x\|_X \|y_{s,x}^*(t) - x\|_X.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \|y_{s,x}^*(t) - x\|_X &\leq \|G(t-s)x - x\|_X + \|[L_s(u_{s,x}^*)](t)\|_X \leq \\ &\leq \left\| \int_0^{t-s} G(\sigma) A x d\sigma \right\|_X + \left\| \int_s^t G(t-\sigma) B u_{s,x}^*(\sigma) d\sigma \right\|_X \leq \\ &\leq [H e^{\omega T} \|A\|_X + H e^{\omega T} \|B\|_{\mathcal{L}(U,X)} L_T \|x\|_X] |t - s|, \end{aligned}$$

da cui la tesi. \square

Proposizione 3.3.10 (equazione di Riccati) *Se $x \in D(A)$, allora la funzione valore $V(t, x)$ è derivabile rispetto a t q.o. in $[0, T]$; inoltre per ogni $x, y \in D(A)$ vale*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, x) &= \frac{d}{dt} \langle Q(t)x, y \rangle_X = \\ &= -\langle Q(t)x, Ay \rangle_X - \langle Ax, Q(t)y \rangle_X + \langle N^{-1}B^*Q(t)x, B^*Q(t)y \rangle_U - \langle Mx, y \rangle_X \end{aligned} \quad (3.16)$$

per q.o. $t \in [0, T]$, con $Q(T) = P_0$.

Dimostrazione La condizione $V(T, x) = \langle Q(T)x, x \rangle_X = \langle P_0x, x \rangle_x$ è evidente, per definizione di funzione valore. La derivabilità q.o. di $t \mapsto V(t, x)$ per $x \in D(A)$ segue dalla sua lipschitzianità (lemma 3.3.9). Se $\tau \in]0, t[$, per il principio di ottimalità di Bellman, $u_{\tau,x}^*$ è ottimale anche in $[t, T]$ rispetto allo stato iniziale $y_{\tau,x}^*(t)$; quindi, il corollario 3.3.4, con x, s e t rimpiazzati da $y_{\tau,x}^*(t)$, t e $T - \varepsilon$, fornisce quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} \langle Q(t)y_{\tau,x}^*(t), y_{\tau,x}^*(t) \rangle_X &= V(t, y_{\tau,x}^*(t)) = \\ &= \int_t^T \left[\langle My_{\tau,x}^*(r), y_{\tau,x}^*(r) \rangle_X + \langle Nu_{\tau,x}^*(r), u_{\tau,x}^*(r) \rangle_U \right] ds + \langle P_0 y_{\tau,x}^*(T), y_{\tau,x}^*(T) \rangle_X. \end{aligned}$$

Se τ è un punto di derivabilità di $t \mapsto V(t, x)$ possiamo scrivere, analizzando la formula precedente,

$$\exists \left[\frac{d}{dt} \langle Q(t)y_{\tau,x}^*(t), y_{\tau,x}^*(t) \rangle_X \right]_{t=\tau} = -\langle Mx, x \rangle_X - \langle Nu_{\tau,x}^*(\tau), u_{\tau,x}^*(\tau) \rangle_U;$$

d'altra parte a primo membro si ha

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[\langle Q(\tau+h)y_{\tau,x}^*(\tau+h), y_{\tau,x}^*(\tau+h) \rangle_X - \langle Q(\tau)x, x \rangle_X \right] &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[\langle Q(\tau+h) [y_{\tau,x}^*(\tau+h) - x], y_{\tau,x}^*(\tau+h) \rangle_X + \right. \\ &\quad \left. + \langle Q(\tau+h)x, [y_{\tau,x}^*(\tau+h) - x] \rangle_X + \langle [Q(\tau+h) - Q(\tau)]x, x \rangle_X \right]. \end{aligned}$$

Poiché per $h \rightarrow 0^+$

$$\frac{1}{h}[y_{\tau,x}^*(\tau+h) - x] = \frac{1}{h} \left[G(h)x - x + \int_{\tau}^{\tau+h} G(\tau+h-s)Bu_{\tau,x}^*(s) ds \right] \rightarrow Ax + Bu_{\tau,x}^*(\tau),$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[\langle Q(\tau+h)y_{\tau,x}^*(\tau+h), y_{\tau,x}^*(\tau+h) \rangle_X - \langle Q(\tau)x, x \rangle_X \right] = \\ = \langle Q(\tau)[Ax + Bu_{\tau,x}^*(\tau)], x \rangle_X + \langle Q(\tau)x, Ax + Bu_{\tau,x}^*(\tau) \rangle_X + \left[\frac{d}{dt} \langle Q(t)x, x \rangle_X \right]_{t=\tau}. \end{aligned}$$

Perciò, ricordando la formula feedback della proposizione 3.3.6,

$$u_{\tau,x}^*(t) = -N^{-1}B^*Q(t)y_{\tau,x}^*(t),$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} \langle Q(t)x, x \rangle_X \right]_{t=\tau} + \langle Q(\tau)x, Ax \rangle_X + \langle Ax, Q(\tau)x \rangle_X - 2 \langle N^{-1}B^*Q(\tau)x, B^*Q(\tau)x \rangle_U = \\ = - \langle Mx, x \rangle_X - \langle N^{-1}B^*Q(\tau)x, B^*Q(\tau)x \rangle_U, \end{aligned}$$

da cui, per q.o. $\tau \in [0, T[$ e per ogni $x \in D(A)$,

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} \langle Q(t)x, x \rangle_X \right]_{t=\tau} + \langle Q(\tau)x, Ax \rangle_X + \langle Ax, Q(\tau)x \rangle_X - \\ - \langle N^{-1}B^*Q(\tau)x, B^*Q(\tau)x \rangle_U + \langle Mx, x \rangle_X = 0. \end{aligned}$$

Usiamo adesso la polarizzazione, cioè scriviamo questa formula per $x \pm y$, con $x, y \in D(A)$. Allora, per differenza,

$$\begin{aligned} \exists \frac{d}{d\tau} \langle Q(\tau)x, y \rangle_X = \frac{1}{4} \left[\frac{d}{d\tau} \langle Q(\tau)(x+y), x+y \rangle_X - \frac{d}{d\tau} \langle Q(\tau)(x-y), x-y \rangle_X \right] = \\ = \frac{1}{4} \left[- \langle Q(\tau)(x+y), A(x+y) \rangle_X - \langle A(x+y), Q(\tau)(x+y) \rangle_X + \right. \\ \left. + \langle N^{-1}B^*Q(\tau)(x+y), B^*Q(\tau)(x+y) \rangle_U - \langle M(x+y), x+y \rangle_X + \right. \\ \left. + \langle Q(\tau)(x-y), A(x-y) \rangle_X + \langle A(x-y), Q(\tau)(x-y) \rangle_X - \right. \\ \left. - \langle N^{-1}B^*Q(\tau)(x-y), B^*Q(\tau)(x-y) \rangle_U + \langle M(x-y), x-y \rangle_X \right] = \\ = - \langle Q(\tau)x, Ay \rangle_X - \langle Ax, Q(\tau)y \rangle_X + \langle N^{-1}B^*Q(\tau)x, B^*Q(\tau)y \rangle_U - \langle Mx, y \rangle_X, \end{aligned}$$

che è la tesi. \square

Osservazione 3.3.11 Formalmente, l'operatore Q risolve

$$\begin{cases} Q' = -A^*Q - QA + QBN^{-1}B^*Q - M \\ Q(T) = P_0, \end{cases}$$

che è un problema di Cauchy retrogrado. Si noti che l'operatore

$$\mathcal{A}Q = A^*Q + QA$$

è generatore infinitesimale di un semigruppò $\overline{\mathcal{G}}$ fortemente continuo nello spazio

$$\Sigma(X) = \{Q \in \mathcal{L}(X) : Q = Q^*\},$$

vale a dire

$$\overline{\mathcal{G}}(t)Q = G(t)^*QG(t), \quad t \geq 0;$$

il dominio di \mathcal{A} è

$$D(\mathcal{A}) = \{Q \in \Sigma(X) : |\langle Qx, Ay \rangle_X + \langle Ax, Qy \rangle_X| \leq c\|x\|_X\|y\|_X \quad \forall x, y \in D(A)\}.$$

Osservazione 3.3.12 Vi è un metodo euristico per dedurre la forma dell'equazione di Riccati: se (y^*, u^*) è la coppia ottimale in $[0, T]$, cerchiamo un operatore $Q(t)$ tale che il co-stato ottimale p^* abbia la forma feedback $p^*(t) = Q(t)y^*(t)$. Sostituendo nell'equazione risolta da p^* , ossia la (3.10), si trova

$$Q'y^* + Q(y^*)' = -A^*Qy^* - My^*,$$

e ricordando l'equazione di stato,

$$Q'y^* + QAy^* + QBu^* = -A^*Qy^* - My^*;$$

infine, dalla formula feedback di u^* ,

$$Q'y^* + QAy^* + A^*Qy^* - QBN^{-1}B^*Qy^* + My^* = 0.$$

Essendo x arbitrario, di riflesso è arbitraria anche y^* , e quindi si ottiene una equazione per Q della forma richiesta.

Osservazione 3.3.13 Posto $P(t) = Q(T - t)$, l'operatore $P(t)$ risolve il problema di Cauchy (in avanti)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle P(t)x, y \rangle_X &= \\ &= \langle P(t)x, Ay \rangle_X + \langle Ax, P(t)y \rangle_X - \langle N^{-1}B^*P(t)x, B^*P(t)y \rangle_U + \langle Mx, y \rangle_X \end{aligned} \quad (3.17)$$

per ogni $x, y \in D(A)$, per q.o. $t \in [0, T]$, con $P(0) = P_0$.

Da questa osservazione segue:

Proposizione 3.3.14 Sia $P(t)$ soluzione dell'equazione (3.17), nel caso $P_0 = 0$. Allora $t \mapsto \langle P(t)x, x \rangle_X$ è crescente per ogni $x \in X$.

Dimostrazione Sia $0 \leq \tau < t < T$. Essendo $P_0 = 0$ si ha

$$J_\tau(x, u) \geq J_t(x, u) \quad \forall u \in L^2(\tau, T; U).$$

Pertanto, se u^* è ottimale rispetto a x in $[\tau, T]$,

$$\langle Q(\tau)x, x \rangle_X = V(\tau, x) = J_\tau(x, u^*) \geq J_t(x, u^*) = V(t, x) = \langle Q(t)x, x \rangle_X,$$

ossia

$$Q(\tau) \geq Q(t) \quad \text{se } \tau \leq t,$$

che implica subito la tesi. \square

Utilizzando $P(t) = Q(T-t)$ in luogo di $Q(t)$, la funzione valore del problema di controllo è

$$V(s, x) = \inf J_s(x, u) = \langle P(T-s)x, x \rangle_X,$$

e il controllo ottimale è

$$u_{s,x}^*(t) = -N^{-1}B^*P(T-t)y_{s,x}^*(t).$$

3.3.2 Unicità per l'equazione di Riccati

Cominciamo con un'osservazione importante, anche se collaterale. Utilizzando il semigrupp $Q \mapsto \bar{G}(t)Q = G(t)^*QG(t)$, l'equazione di Riccati (3.17) si scrive nella forma mild seguente:

$$P'(t)x = G(t)^*P_0G(t)x + \int_0^t G(t-s)^* \left[M - P(s)BN^{-1}B^*P(s) \right] G(t-s)x ds \quad (3.18)$$

per ogni $x \in D(A)$. Poniamo

$$C_s([0, T], \Sigma(X)) = \{Q : [0, T] \rightarrow \Sigma(X) : t \mapsto Q(t)x \in C([0, T], X) \quad \forall x \in X\}.$$

Proposizione 3.3.15 *Sia $P \in C_s([0, T], \Sigma(X))$. Sono fatti equivalenti:*

- (i) P è soluzione mild dell'equazione di Riccati (3.18) per ogni $x \in D(A)$;
- (ii) $\langle P(t)x, y \rangle_X$ è derivabile q.o. in $[0, T]$ e verifica l'equazione differenziale di Riccati (3.17) per ogni $x, y \in D(A)$.

Dimostrazione (\implies) Se $x, y \in D(A)$ e P è soluzione mild, possiamo scrivere

$$\langle P(t)x, y \rangle_X = \langle P_0G(t)x, G(t)y \rangle_X + \int_0^t \langle [M - P(s)BN^{-1}B^*P(s)]G(t-s)x, G(t-s)y \rangle_X ds;$$

quindi possiamo derivare, e otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle P(t)x, y \rangle_X &= \langle P_0G(t)Ax, G(t)y \rangle_X + \langle P_0G(t)x, G(t)Ay \rangle_X + \\
&+ \langle [M - P(t)BN^{-1}B^*P(t)]x, y \rangle_X + \\
&+ \int_0^t \langle [M - P(s)BN^{-1}B^*P(s)]G(t-s)Ax, G(t-s)y \rangle_X ds + \\
&+ \int_0^t \langle [M - P(s)BN^{-1}B^*P(s)]G(t-s)x, G(t-s)Ay \rangle_X ds = \\
&= \langle Ax, G(t)^*P_0G(t)y \rangle_X + \langle G(t)^*P_0G(t)x, Ay \rangle_X + \\
&+ \langle Mx, y \rangle_X - \langle N^{-1}B^*P(t)x, B^*P(t)y \rangle_U + \\
&+ \left\langle Ax, \int_0^t G(t-s)^*[M - P(s)BN^{-1}B^*P(s)]G(t-s)y ds \right\rangle_X + \\
&+ \left\langle \int_0^t G(t-s)^*[M - P(s)BN^{-1}B^*P(s)]G(t-s)x ds, Ay \right\rangle_X = \\
&= \langle Ax, P(t)y \rangle_X + \langle P(t)x, Ay \rangle_X + \langle Mx, y \rangle_X - \langle N^{-1}B^*P(t)x, B^*P(t)y \rangle_U;
\end{aligned}$$

dunque vale (3.17).

(\Leftarrow) Viceversa, se P risolve l'equazione differenziale (3.17), allora per ogni $x, y \in D(A)$ la funzione $s \mapsto \langle P(t-s)G(s)x, G(s)y \rangle_X$ risulta derivabile, e si ha

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\langle P(t-s)G(s)x, G(s)y \rangle_X &= \\
&= -\langle P(t-s)G(s)x, AG(s)y \rangle_X - \langle AG(s)x, P(t-s)G(s)y \rangle_X + \\
&+ \langle N^{-1}B^*P(t-s)G(s)x, B^*P(t-s)G(s)y \rangle_U - \langle MG(s)x, G(s)y \rangle_X + \\
&+ \langle P(t-s)AG(s)x, G(s)y \rangle_X + \langle P(t-s)G(s)x, AG(s)y \rangle_X = \\
&= -\langle MG(s)x, G(s)y \rangle_X + \langle N^{-1}B^*P(t-s)G(s)x, B^*P(t-s)G(s)y \rangle_U.
\end{aligned}$$

Integrando in $[0, t]$,

$$\begin{aligned}
\langle P_0G(t)x, G(t)y \rangle_X - \langle P(t)x, y \rangle_X &= \\
&= - \int_0^t \langle MG(s)x, G(s)y \rangle_X ds + \int_0^t \langle N^{-1}B^*P(t-s)G(s)x, B^*P(t-s)G(s)y \rangle_U ds,
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\langle P(t)x, y \rangle_X &= \langle G(t)^*P_0G(t)x, y \rangle_X + \\
&+ \int_0^t \langle G(s)^*[M - P(t-s)BN^{-1}B^*P(t-s)]G(s)x, y \rangle_X ds.
\end{aligned}$$

Per densità, la stessa relazione vale per ogni $x \in D(A)$ e per ogni $y \in X$, e per l'arbitrarietà di y si ottiene che P è soluzione mild di (3.18). \square

Stabiliamo adesso un lemma fondamentale per il seguito.

Lemma 3.3.16 *Sia $\sigma \in [0, T[$, sia $K \in C_s([\sigma, T], \mathcal{L}(X))$. Allora per ogni $x \in X$ l'equazione integrale*

$$y(t) = G(t - \sigma)x + \int_{\sigma}^t G(t - s)K(s)y(s) ds, \quad t \in [\sigma, T], \quad (3.19)$$

ha un'unica soluzione $y \in C([\sigma, T], X)$. Tale soluzione dipende linearmente da x , e verrà perciò denominata

$$y(t) := U(t, \sigma)x.$$

L'operatore $U(t, \sigma)$ così definito si chiama operatore di evoluzione e verifica:

$$\begin{cases} U(t, \sigma) = U(t, \tau)U(\tau, \sigma) \quad \forall \tau \in [\sigma, t], \\ U(\sigma, \sigma) = I_X; \end{cases} \quad \|U(t, \sigma)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2H e^{\alpha(t-\sigma)} \quad \forall t \geq \sigma,$$

ed inoltre, per ogni $g \in C([\sigma, T], X)$ la soluzione dell'equazione

$$z(t) = G(t - \sigma)x + \int_{\sigma}^t G(t - s) [K(s)z(s) + g(s)] ds$$

è la funzione

$$z(t) = U(t, \sigma)x + \int_{\sigma}^t U(t, s)g(s) ds, \quad t \in [\sigma, T].$$

Dimostrazione Lo spazio $C_s([\sigma, T], X)$ è di Banach con la norma

$$\|K\| = \sup_{t \in [0, T]} \|K(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \quad \forall K \in C_s([\sigma, T], X);$$

tale estremo superiore è finito in virtù del teorema di Banach-Steinhaus.

Introduciamo nello spazio $C_s([\sigma, T], X)$ una nuova norma: per $\alpha > 0$ poniamo

$$\|g\|_{\alpha} = \sup_{t \in [0, T]} e^{-\alpha(t-\sigma)} \|g(t)\|_X;$$

chiaramente

$$\|g\|_{\alpha} \leq \sup_{t \in [\sigma, T]} \|g(t)\|_X \leq e^{\alpha(T-\sigma)} \|g\|_{\alpha}.$$

Detto L l'operatore integrale

$$[Ly](t) = \int_{\sigma}^t G(t - s)K(s)y(s) ds \quad \forall y \in C_s([\sigma, T], X),$$

si ha $L \in \mathcal{L}(C_s([\sigma, T], X))$ e inoltre per $t \in [\sigma, T]$ risulta, supposto $\alpha > \omega$,

$$\begin{aligned} e^{-\alpha(t-\sigma)} \|Ly(t)\|_X &= \left\| \int_{\sigma}^t e^{-\alpha(t-s)} G(t-s)K(s)e^{-\alpha(s-\sigma)} y(s) ds \right\|_X \leq \\ &\leq H \int_0^t e^{-(\alpha-\omega)(t-s)} \|K\|_{C([\sigma, T], \mathcal{L}(X))} \|y\|_{\alpha} ds \leq \frac{H \|K\|_{C([\sigma, T], \mathcal{L}(X))}}{\alpha - \omega} \|y\|_{\alpha}, \end{aligned}$$

per cui, se α è sufficientemente grande,

$$\|Ly\|_\alpha \leq \frac{1}{2}\|y\|_\alpha \quad \forall y \in C_s([\sigma, T], X).$$

Poniamo allora

$$[\mathbb{L}(y)](t) = G(t - \sigma)x + [Ly](t) \quad \forall y \in C_s([\sigma, T], X) :$$

l'operatore \mathbb{L} è una contrazione da $C_s([\sigma, T], X)$ in sé, essendo

$$\|\mathbb{L}(y) - \mathbb{L}(z)\|_\alpha \leq \|L(y - z)\|_\alpha \leq \frac{1}{2}\|y - z\|_\alpha \quad \forall y, z \in C_s([\sigma, T], X).$$

Quindi esiste un'unica $y \in C_s([\sigma, T], X)$ tale che

$$y(t) = [\mathbb{L}(y)](t) \quad \forall t \in [\sigma, T].$$

La dipendenza lineare di tale $y(\cdot)$ da x è immediata. Notiamo poi che

$$\|y(t)\|_X = \|G(t - \sigma)x + Ly(t)\|_X \leq He^{\omega(t-\sigma)}\|x\|_X + \|Ly(t)\|_X,$$

da cui

$$e^{-\alpha(t-\sigma)}\|y(t)\|_X \leq He^{-(\alpha-\omega)(t-\sigma)}\|x\|_X + e^{-\alpha(t-\sigma)}\|Ly(t)\|_X,$$

e pertanto

$$\|y\|_\alpha \leq H\|x\|_X + \|Ly\|_\alpha \leq H\|x\|_X + \frac{1}{2}\|y\|_\alpha,$$

ovvero

$$\|y\|_\alpha \leq 2H\|x\|_X;$$

si conclude dunque che

$$\|y(t)\|_X \leq 2He^{\alpha(t-\sigma)}\|x\|_X \quad \forall t \in [\sigma, T].$$

Ciò prova la stima per $U(t, \sigma)$ in $\mathcal{L}(X)$. La relazione $U(t, \tau)U(\tau, \sigma) = U(t, \sigma)$ è facile conseguenza dell'unicità, mentre ovviamente $U(\sigma, \sigma)x = x$.

Consideriamo infine la funzione

$$z(t) = U(t, \sigma)x + \int_\sigma^t U(t, s)g(s) ds,$$

ove $g \in C_s([\sigma, T], X)$: partendo dalla relazione (3.19) che definisce $U(t, \sigma)x$, cioè

$$U(t, \sigma)x = G(t - \sigma)x + \int_\sigma^t G(t - s)K(s)U(s, \sigma)x ds,$$

si ricava:

$$\begin{aligned}
z(t) &= U(t, \sigma)x + \int_{\sigma}^t U(t, s)g(s) ds = \\
&= G(t - \sigma)x + \int_{\sigma}^t G(t - s)K(s)U(s, \sigma)x ds + \\
&\quad + \int_{\sigma}^t \left[G(t - s)g(s) + \int_s^t G(t - r)K(r)U(r, s)g(s) dr \right] ds = \\
&= G(t - \sigma)x + \int_{\sigma}^t G(t - s)g(s) ds + \\
&\quad + \int_{\sigma}^t G(t - s)K(s)U(s, \sigma)x ds + \int_{\sigma}^t G(t - r)K(r) \int_{\sigma}^r U(r, s)g(s) ds dr = \\
&= G(t - \sigma)x + \int_{\sigma}^t G(t - s)g(s) ds + \\
&\quad + \int_{\sigma}^t G(t - r)K(r) \left[U(r, \sigma)x + \int_{\sigma}^r U(r, s)g(s) ds \right] dr = \\
&= G(t - \sigma)x + \int_{\sigma}^t G(t - s)g(s) ds + \int_{\sigma}^t G(t - r)K(r)z(r) dr.
\end{aligned}$$

Perciò z risolve in $C_s([\sigma, T], X)$ l'equazione

$$z(t) = G(t - \sigma)x + \int_{\sigma}^t G(t - s) \left[g(s) + K(s)z(s) \right] ds.$$

Ma questa equazione ha soluzione unica, poiché se z_1 e z_2 sono soluzioni di essa, allora $w = z_1 - z_2$ risolve

$$w(t) = \int_{\sigma}^t G(t - s)K(s)w(s) ds,$$

ossia

$$w(t) = U(t, \sigma)0 = 0.$$

Ne segue l'ultima affermazione del lemma. \square

Veniamo adesso all'enunciato chiave ai fini dell'unicità della soluzione dell'equazione differenziale di Riccati.

Proposizione 3.3.17 *Sia $R : [0, T] \rightarrow \Sigma(X)$ una soluzione dell'equazione differenziale di Riccati (3.16), con $R(T) = P_0$. Allora, per ogni $x \in X$, per ogni $u \in L^2(s, T; U)$, detto y lo stato corrispondente al valore iniziale $y(s) = x$, si ha*

$$\langle R(s)x, x \rangle_X = J_s(x, u) - \int_s^T \left\| N^{\frac{1}{2}} \left[u(t) + N^{-1}B^*R(t)y(t) \right] \right\|_U^2 dt. \quad (3.20)$$

Dimostrazione Supponiamo dapprima $u \in C^1([s, T], U)$. Allora $y \in C^1([s, T], X)$ e si ha, aggiungendo e togliendo, alla fine, la quantità $\|N^{\frac{1}{2}}u(t)\|_U^2$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle R(t)y(t), y(t) \rangle_X &= \frac{d}{dt} \langle R(t)z, z \rangle_X|_{z=y(t)} + \langle y'(t), R(t)y(t) \rangle_X + \langle R(t)y(t), y'(t) \rangle_X = \\ &= -\langle R(t)y(t), Ay(t) \rangle_X - \langle Ay(t), R(t)y(t) \rangle_X + \langle N^{-1}B^*R(t)y(t), B^*R(t)y(t) \rangle_U - \\ &\quad - \langle My(t), y(t) \rangle_X + \langle Ay(t), R(t)y(t) \rangle_X + \langle Bu(t), R(t)y(t) \rangle_X + \\ &\quad + \langle R(t)y(t), Ay(t) \rangle_X + \langle R(t)y(t), Bu(t) \rangle_X = \\ &= -\|M^{\frac{1}{2}}y(t)\|_X^2 - \|N^{\frac{1}{2}}u(t)\|_U^2 + \left\| N^{\frac{1}{2}} \left[u(t) + N^{-1}B^*R(t)y(t) \right] \right\|_U^2. \end{aligned}$$

Integrando su $[s, T]$, si ottiene

$$\begin{aligned} \langle P_0y(T), y(T) \rangle_X + \int_s^T \left[\langle My(t), y(t) \rangle_X + \langle Nu(t), u(t) \rangle_U \right] dt - \\ - \int_s^T \left\| N^{\frac{1}{2}} \left[u(t) + N^{-1}B^*R(t)y(t) \right] \right\|_U^2 dt = \langle R(s)x, x \rangle_X, \end{aligned}$$

cioè la tesi per $u \in C^1([s, T], U)$. Un facile argomento di densità fornisce la tesi. \square

Corollario 3.3.18 (unicità) *Sia $R : [0, T] \rightarrow \Sigma(X)$ una soluzione in $[0, T]$ dell'equazione differenziale di Riccati (3.16), con $R(T) = P_0$. Allora $R(t) \equiv Q(t)$, ove Q è l'operatore definito nel corollario 3.3.2.*

Dimostrazione Fissato $s \in [0, T[$, dalla proposizione 3.3.17, e in particolare dalla (3.20), ricaviamo

$$\langle R(s)x, x \rangle_X \leq J_s(x, u) \quad \forall u \in L^2(s, T; U).$$

Ma scegliendo la soluzione \bar{y} dell'equazione

$$\bar{y}(t) = G(t-s)x - \int_s^t G(t-r)BN^{-1}B^*R(r)\bar{y}(r) dr$$

ed il controllo

$$\bar{u}(t) = -N^{-1}B^*R(t)\bar{y}(t),$$

dalla (3.20) segue subito che

$$\langle R(s)x, x \rangle_X = J_s(x, \bar{u}) \leq J_s(x, u) \quad \forall u \in L^2(s, T; U).$$

Dunque \bar{u} deve coincidere con il controllo ottimale $u_{s,x}^*$. Ne segue

$$\langle R(s)x, x \rangle_X = V(s, x) = \langle Q(s)x, x \rangle_X \quad \forall s \in [0, T[,$$

ossia, per polarizzazione e continuità,

$$R(s) = Q(s) \quad \forall s \in [0, T]. \quad \square$$

Corollario 3.3.19 Per ogni $P_0 \in \Sigma(X)$, $P_0 \geq 0$, esiste un'unica soluzione $P(t) \geq 0$ dell'equazione di Riccati in avanti (3.17), con $P(0) = P_0$.

Dimostrazione Per il corollario 3.3.18, fissato $T > 0$ vi è un unico operatore $Q_T \in \Sigma(X)$, $Q_T \geq 0$, tale che $\langle Q_T(s)x, x \rangle_X = V(s, x)$ (la funzione valore del funzionale J_s) in $[0, T]$, e Q_T risolve univocamente in $[0, T[$ l'equazione di Riccati retrograda (3.16). Di conseguenza, $P(t) := Q_T(T - t)$ risolve univocamente in $]0, T]$ l'equazione di Riccati in avanti (3.17).

Se ora $T_1 > T$, allora $P_1(t) = Q_{T_1}(T_1 - t)$ risolve (3.17) in $[0, T_1]$ e quindi in $[0, T]$, con lo stesso dato P_0 per $t = 0$. Quindi $P_1(t) = P(t)$ in $[0, T]$, e dunque $P(t)$ è estendibile a $[0, T_1]$, e questa estensione risolve univocamente (3.17) in $[0, T_1]$. Per l'arbitrarietà di T_1 , $P(t)$ è ben definita in $[0, \infty[$ ed è l'unica soluzione dell'equazione di Riccati in avanti (3.17) con la condizione $P(0) = P_0$. \square

Corollario 3.3.20 Sia $P(t)$ l'unica soluzione dell'equazione di Riccati in avanti (3.17), con $P(0) = P_0$. Per ogni $T > 0$, per ogni $s \in [0, T[$, per ogni $x \in X$ si ha

$$\begin{aligned} \langle P(T - s)x, x \rangle_X &= \inf J_s(x, u) = \\ &= \int_s^T \left[\langle My_{s,x}^*(r), y_{s,x}^*(r) \rangle_X + \langle Nu_{s,x}^*(r), u_{s,x}^*(r) \rangle_U \right] dr + \langle P_0 y_{s,x}^*(T), y_{s,x}^*(T) \rangle_X. \end{aligned}$$

Dimostrazione Conseguenza immediata del corollario 3.3.2 e della definizione $P(t) = Q_T(T - t)$ per $t \in [0, T]$. \square

Concludiamo il paragrafo con una importante proprietà di monotonia delle soluzioni dell'equazione differenziale di Riccati.

Proposizione 3.3.21 Siano $Q_1, Q_2 \in \Sigma(X)$ operatori non negativi, entrambi soluzioni dell'equazione (3.17) con "termine noto" M sostituito da M_1 e M_2 rispettivamente, e valore iniziale P_0 sostituito da P_1 e P_2 rispettivamente. Se risulta

$$P_1 \leq P_2, \quad M_1 \leq M_2,$$

allora si ha

$$Q_1(t) \leq Q_2(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Dimostrazione Consideriamo per cominciare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \left(A^* - \frac{1}{2}[Q_1(t) + Q_2(t)]BN^{-1}B^* \right) y(t), & t > s, \\ y(s) = y_0. \end{cases}$$

Questo problema, scritto in forma integrale, diventa

$$y(t) = G(t - s)^* y_0 - \frac{1}{2} \int_s^t G(t - \sigma)^* [Q_1(\sigma) + Q_2(\sigma)] BN^{-1} B^* y(\sigma) d\sigma, \quad t \geq s,$$

ove $G(t)$ è il semigruppato generato da A , ed ha un'unica soluzione della forma

$$y(t) = U(t, s)y_0, \quad t \geq s,$$

come abbiamo visto nel lemma 3.3.16.

Ciò premesso, poniamo $Q = Q_2 - Q_1$: è facile verificare che, scrivendo formalmente, per comodità, l'equazione di Riccati nel modo già fatto nell'osservazione 3.3.11, l'operatore Q risolve

$$Q'(t) = A^*Q(t) + Q(t)A - Q_2(t)BN^{-1}B^*Q_2(t) + Q_1(t)BN^{-1}B^*Q_1(t) + M_2 - M_1.$$

Aggiungendo e togliendo opportuni termini, tale equazione si può riscrivere nel modo seguente:

$$\begin{aligned} Q'(t) = & \left(A^* - \frac{1}{2}(Q_1(t) + Q_2(t))BN^{-1}B^* \right) Q(t) + \\ & + Q(t) \left(A - \frac{1}{2}BN^{-1}B^*(Q_1(t) + Q_2(t)) \right) + M_2 - M_1. \end{aligned}$$

Si verifica senza difficoltà che la forma mild di questa equazione si scrive tramite l'operatore di evoluzione $U(t, s)$ nel modo seguente:

$$Q(t) = U(t, 0)(P_2 - P_1)U(t, 0)^* + \int_0^t U(t, s)(M_2 - M_1)U(t, s)^* ds.$$

Ne segue immediatamente, per ogni $x \in X$,

$$\begin{aligned} \langle Q(t)x, x \rangle_X &= \langle (P_2 - P_1)U(t, 0)^*x, U(t, 0)^*x \rangle_X + \\ &+ \int_0^t \langle (M_2 - M_1)U(t, s)^*x, U(t, s)^*x \rangle_X ds \geq 0, \end{aligned}$$

cosicché $Q_2(t) \geq Q_1(t)$ per ogni $t \geq 0$. \square

3.3.3 Controlli in orizzonte infinito

Consideriamo il problema lineare-quadratico in orizzonte infinito: vogliamo minimizzare il funzionale

$$J(x, u) = \int_0^\infty \left[\langle My(t), y(t) \rangle_X + \langle Nu(t), u(t) \rangle_U \right] dt, \quad (3.21)$$

ove $x \in X$ e $u \in \mathcal{U}_x$, la classe dei *controlli ammissibili*

$$\mathcal{U}_x = \{u \in L^2(0, \infty; U) : J(x, u) < \infty\}, \quad (3.22)$$

mentre y è la soluzione mild del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), & t > 0, \\ y(0) = x. \end{cases} \quad (3.23)$$

Ricordiamo che $M \in \Sigma(X)$, $M \geq 0$, $N \in \Sigma(U)$, $N \geq \delta I > 0$, $B \in \mathcal{L}(U, X)$ ed A è il generatore di un semigruppoo fortemente continuo \mathcal{G} . Si noti che se $\mathcal{G} \in \mathbf{G}(H, \omega)$ con $\omega > 0$, allora il controllo $u \equiv 0$ non è ammissibile, perché $M^{\frac{1}{2}}y(t) = M^{\frac{1}{2}}G(t)x$ non appartiene, in generale, a $L^2(0, \infty; X)$.

Teorema 3.3.22 *Se $x \in X$ e $\mathcal{U}_x \neq \emptyset$, allora esiste un unico controllo ottimale u^* per $J(x, \cdot)$.*

Dimostrazione Per ipotesi, il funzionale assume valori finiti, è coercivo e strettamente convesso: quindi esiste una successione minimizzante $\{u_n\} \subseteq \mathcal{U}_x$, la quale è limitata in $L^2(0, \infty; U)$ e dunque possiede una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ debolmente convergente a una $u^* \in L^2(0, \infty; U)$. Di conseguenza gli stati

$$y_{n_k}(t) = G(t)x + \int_0^t G(t-s)Bu_{n_k}(s) ds$$

convergono puntualmente alla funzione

$$y^*(t) = G(t)x + \int_0^t G(t-s)Bu^*(s) ds.$$

Per il lemma di Fatou, applicato a $\|M^{\frac{1}{2}}y_{n_k}(s)\|_X^2$, e per la semicontinuità inferiore della norma rispetto alla convergenza debole in L^2 , applicata a $\|N^{\frac{1}{2}}u_{n_k}(s)\|_U$, si ottiene

$$\begin{aligned} J(x, u^*) &= \int_0^\infty \left[\|M^{\frac{1}{2}}y^*(t)\|_X^2 + \|N^{\frac{1}{2}}u^*(t)\|_U^2 \right] dt \leq \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \|M^{\frac{1}{2}}y_{n_k}(t)\|_X^2 dt + \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \|N^{\frac{1}{2}}u_{n_k}(t)\|_U^2 dt \leq \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left[\|M^{\frac{1}{2}}y_{n_k}(t)\|_X^2 + \|N^{\frac{1}{2}}u_{n_k}(t)\|_U^2 \right] dt = \liminf_{k \rightarrow \infty} J(x, u_{n_k}) = \\ &= \inf_{u \in \mathcal{U}_x} J(x, u). \end{aligned}$$

Quindi u^* è un controllo ottimale. L'unicità di u^* segue dalla stretta convessità di $J(x, \cdot)$. \square

Il risultato che segue riassume la sostanza della teoria, cioè la caratterizzazione del controllo ottimale in forma feedback per mezzo di un opportuno operatore di Riccati.

Teorema 3.3.23 *I seguenti fatti sono equivalenti:*

(i) *per ogni $x \in X$ esiste $\bar{u}_x \in \mathcal{U}_x$;*

(ii) *esiste $\bar{P} \in \Sigma(X)$, $\bar{P} \geq 0$, tale che:*

(a) *\bar{P} risolve l'equazione algebrica di Riccati*

$$\langle Ax, \bar{P}y \rangle_X + \langle \bar{P}x, Ay \rangle_X - \langle N^{-1}B^*\bar{P}x, B^*\bar{P}y \rangle_U + \langle Mx, y \rangle_X = 0 \quad \forall x, y \in D(A); \quad (3.24)$$

(b) *\bar{P} è la soluzione minimale, ossia risulta $\bar{P} \leq P$ per ogni $P \in \Sigma(X)$, $P \geq 0$, che risolve tale equazione.*

In tal caso, la coppia ottimale (y^, u^*) per $J(x, \cdot)$, con $y^*(0) = x$, verifica*

$$u^*(t) = -N^{-1}B^*\bar{P}y^*(t) \quad \forall t \geq 0, \quad \langle \bar{P}x, x \rangle_X = J(x, u^*). \quad (3.25)$$

Dimostrazione Supponiamo che valga (i). Sia $P(\cdot)$ la soluzione in $[0, \infty[$ dell'equazione differenziale di Riccati in avanti (3.17) con dato iniziale nullo:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle P(t)x, y \rangle_X = \langle P(t)x, Ay \rangle_X + \langle Ax, P(t)y \rangle_X - \\ \quad - \langle N^{-1}B^*P(t)x, B^*P(t)y \rangle_U + \langle Mx, y \rangle_X & \forall x, y \in D(A) \\ P(0) = 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

Come sappiamo dal corollario 3.3.19, la soluzione $P(\cdot)$ esiste unica e $t \mapsto \langle P(t)x, x \rangle_X$ è crescente per ogni $x \in X$; inoltre, essendo $P_0 = 0$, si ha, scegliendo $T > t$,

$$\langle P(t)x, x \rangle_X = J_{T-t}(x, u_{T-t,x}^*) \leq J_{T-t}(x, \bar{u}_x) \leq J(x, \bar{u}_x) < \infty \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in X,$$

e dunque

$$\exists \lim_{t \rightarrow \infty} \langle P(t)x, x \rangle_X \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X.$$

Per polarizzazione,

$$\exists \lim_{t \rightarrow \infty} \langle P(t)x, y \rangle_X \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in X.$$

Perciò esiste $\bar{P} \in \Sigma(X)$, $\bar{P} \geq 0$, tale che $P(t)x \rightarrow \bar{P}x$ per $t \rightarrow \infty$, per ogni $x \in X$. Ma essendo

$$\|[\bar{P} - P(t)]^{\frac{1}{2}}x\|_X^2 = \langle [\bar{P} - P(t)]x, x \rangle_X \searrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow \infty,$$

tenuto conto che

$$\|[\bar{P} - P(t)]^{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|\bar{P} - P(t)\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{2}} \leq \|\bar{P}\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

si ottiene

$$\|[\bar{P} - P(t)]x\|_X \leq \|\bar{P}\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{2}} \|[\bar{P} - P(t)]^{\frac{1}{2}}x\|_X^2 \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow \infty,$$

ossia

$$P(t)x \rightarrow \bar{P}x \quad \text{in } X \quad \forall x \in X \quad \text{per } t \rightarrow +\infty. \quad (3.27)$$

Adesso passiamo al limite per $t \rightarrow \infty$ nell'equazione (3.26). Per ogni $x, y \in D(A)$ il secondo membro tende a

$$\langle \bar{P}x, Ay \rangle_X + \langle Ax, \bar{P}y \rangle_X - \langle N^{-1}B^*\bar{P}x, B^*\bar{P}y \rangle_U + \langle Mx, y \rangle_X;$$

quindi ha limite anche il primo membro, che è la derivata della funzione scalare $t \mapsto \langle P(t)x, y \rangle_X$: se il suo limite per $t \rightarrow +\infty$ fosse un numero $\lambda_{x,y} \neq 0$, avremmo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle P(t)x, y \rangle_X = \pm\infty,$$

a seconda del segno di $\lambda_{x,y}$. Ma ciò è impossibile, perché $\langle P(t)x, y \rangle_X$ tende ad un limite finito. Ne segue $\lambda_{x,y} = 0$ e pertanto \bar{P} risolve l'equazione algebrica di Riccati. Ciò prova (a).

Proviamo la minimalità di \bar{P} . Se \tilde{P} è un'altra soluzione dell'equazione (3.24), allora \tilde{P}

è una soluzione stazionaria dell'equazione differenziale (3.17), con dato iniziale $\tilde{P} \geq 0$. Dalla proposizione 3.3.21 segue allora $P(t) \leq \tilde{P}$ per ogni $t \geq 0$; al limite per $t \rightarrow \infty$, ricordando (3.27), segue che $\bar{P} \leq \tilde{P}$. Dunque vale (b), e (ii) è provata.

Supponiamo ora che valga (ii). Per $T > 0$ introduciamo il funzionale

$$J^T(x, u) = \int_0^T \left[\langle My(s), y(s) \rangle_X + \langle Nu(s), u(s) \rangle_U \right] ds, \quad (3.28)$$

e sia (y_T, u_T) la coppia ottimale per $J^T(x, \cdot)$: essa esiste unica, perché J^T è un funzionale del tipo (3.11). Utilizziamo il seguente

Lemma 3.3.24 *Sia \bar{y} la soluzione dell'equazione integrale*

$$\bar{y}(t) = G(t)x - \int_0^t G(t-s)BN^{-1}B^*\bar{P}\bar{y}(s) ds, \quad t \geq 0,$$

e sia \bar{u} data da

$$\bar{u}(t) = -N^{-1}B^*\bar{P}\bar{y}(t), \quad t \geq 0.$$

Allora per ogni $t \geq 0$ si ha, quando $T \rightarrow \infty$,

$$y_T(\cdot) \rightarrow \bar{y} \text{ in } C([0, t], X), \quad u_T(\cdot) \rightarrow \bar{u} \text{ in } C([0, t], U).$$

Dimostrazione Dato che la coppia (y_T, u_T) è ottimale per J^T , ricordando la proposizione 3.3.6 ed il corollario 3.3.7 si ha

$$\begin{aligned} u_T(r) &= -N^{-1}B^*Q_T(r)y_T(r) = -N^{-1}B^*P(T-r)y_T(r), \\ y_T(r) &= G(r)x - \int_0^r G(r-s)BN^{-1}B^*P(T-s)y_T(s) ds, \end{aligned} \quad r \in [0, T].$$

Dunque, fissato $t \in]0, T[$, in $[0, t]$ la funzione $z_T = y_T - \bar{y}$ risolve

$$\begin{aligned} z_T(r) &= - \int_0^r G(r-s)BN^{-1}B^*P(T-s)z_T(s) ds - \\ &\quad - \int_0^r G(r-s)BN^{-1}B^*[P(T-s) - \bar{P}]\bar{y}(s) ds. \end{aligned}$$

Si tratta di un'equazione integrale del tipo analizzato nel lemma 3.3.16, con

$$x = 0, \quad K(r) = -BN^{-1}B^*P(T-r), \quad g(r) = -BN^{-1}B^*[P(T-r) - \bar{P}]\bar{y}(r).$$

Quindi possiamo scrivere

$$z_T(r) = - \int_0^r U_T(r, s)BN^{-1}B^*[P(T-s) - \bar{P}]\bar{y}(s) ds,$$

ove $U_T(r, s) \in \mathcal{L}(X)$ e

$$\|U_T(r, s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2H e^{\alpha(r-s)} \quad \forall r \geq s \geq 0,$$

con $\alpha > 2H\|B\|_{\mathcal{L}(U,X)}^2\|\bar{P}\|_{\mathcal{L}(X)}\|N^{-1}\|_{\mathcal{L}(U)} + \omega$. Allora si ha per $r \in [0, t]$

$$\|z_T(r)\|_X \leq \int_0^r 2H e^{\alpha(r-s)}\|B\|_{\mathcal{L}(U,X)}^2\|N^{-1}\|_{\mathcal{L}(U)}\|[P(T-s) - \bar{P}]\bar{y}(s)\|_X ds;$$

per $T \rightarrow \infty$ l'integrando converge puntualmente a 0 ed è dominato in $[0, t]$ da una funzione sommabile della forma $C\|\bar{y}(s)\|_X$ (si ricordi che $\bar{y} \in C([0, t], X)$). Perciò $z_T \rightarrow 0$ uniformemente in $[0, t]$ per $T \rightarrow \infty$, ossia $y_T \rightarrow \bar{y}$ in $C([0, t], X)$ per $T \rightarrow \infty$. Per quanto riguarda u_T , si ha

$$u_T(r) - \bar{u}(r) = -N^{-1}B^*P(T-r)[y_T(r) - \bar{y}(r)] + N^{-1}B^*[\bar{P} - P(T-r)]\bar{y}(r),$$

e il primo termine è uniformemente convergente, essendo

$$\|N^{-1}B^*P(T-r)[y_T(r) - \bar{y}(r)]\|_U \leq \|N^{-1}\|_{\mathcal{L}(U)}\|B\|_{\mathcal{L}(U,X)} \sup_{s \geq 0} \|P(s)\| \|y_T - \bar{y}\|_{C([0,t],X)}.$$

L'analisi del secondo termine è più delicata. Sia $\varepsilon > 0$. Per uniforme continuità, esiste $p_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left\| \bar{y}(t) - \bar{y}\left(\frac{kt}{p_\varepsilon}\right) \right\|_X \leq \varepsilon \quad \forall r \in \left[\frac{kt}{p_\varepsilon}, \frac{(k+1)t}{p_\varepsilon} \right], \quad k = 0, 1, \dots, p_\varepsilon - 1.$$

Inoltre, grazie a (3.27), esiste $T_\varepsilon > t$ tale che

$$\left\| [\bar{P} - P(T-r)]\bar{y}\left(\frac{kt}{p_\varepsilon}\right) \right\|_X < \varepsilon \quad \text{per } T-r \geq T_\varepsilon.$$

Ne segue, per ogni $r \in \left[\frac{kt}{p_\varepsilon}, \frac{(k+1)t}{p_\varepsilon} \right]$,

$$\begin{aligned} \|[\bar{P} - P(T-r)] \bar{y}(r)\|_X &\leq \\ &\leq \|\bar{P}\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| \bar{y}(r) - \bar{y}\left(\frac{kt}{p_\varepsilon}\right) \right\|_X + \left\| [\bar{P} - P(T-r)]\bar{y}\left(\frac{kt}{p_\varepsilon}\right) \right\|_X \leq \\ &\leq \|\bar{P}\|_{\mathcal{L}(X)} \varepsilon + \varepsilon \quad \text{se } T-r \geq T_\varepsilon. \end{aligned}$$

Si conclude allora che

$$\|[\bar{P} - P(T-r)] \bar{y}(r)\|_X \leq [\|\bar{P}\|_{\mathcal{L}(X)} + 1] \varepsilon \quad \forall r \in [0, t], \quad \forall T \geq T_\varepsilon + t,$$

e ciò implica che il secondo termine tende a 0 uniformemente per $T \rightarrow \infty$. Il lemma è provato. \square

Torniamo alla dimostrazione della seconda implicazione del teorema 3.3.23. Sia $x \in X$: vogliamo provare che $\mathcal{U}_x \neq \emptyset$. Sia (y_T, u_T) , con $y_T(0) = x$, la coppia ottimale per il funzionale J^T introdotto in (3.28). Dal corollario 3.3.20, tenuto conto che $P_0 = 0$, segue che

$$\langle P(T)x, x \rangle_X = \int_0^T \left[\langle M y_T(s), y_T(s) \rangle_X + \langle N u_T(s), u_T(s) \rangle_Y \right] ds.$$

Per $T > t > 0$ si ricava

$$\langle P(T)x, x \rangle_X \geq \int_0^t \left[\langle My_T(s), y_T(s) \rangle_X + \langle Nu_T(s), u_T(s) \rangle_Y \right] ds;$$

per $T \rightarrow +\infty$ si ottiene, in virtù del lemma 3.3.24,

$$\langle \bar{P}x, x \rangle_X \geq \int_0^t \left[\langle M\bar{y}(s), \bar{y}(s) \rangle_X + \langle N\bar{u}(s), \bar{u}(s) \rangle_Y \right] ds,$$

ed infine, per $t \rightarrow +\infty$,

$$\langle \bar{P}x, x \rangle_X \geq \int_0^\infty \left[\langle M\bar{y}(s), \bar{y}(s) \rangle_X + \langle N\bar{u}(s), \bar{u}(s) \rangle_Y \right] ds = J(x, \bar{u}). \quad (3.29)$$

Ne segue $J(x, \bar{u}) < \infty$, ovvero $\bar{u} \in \mathcal{U}_x$. Ciò prova (i).

Resta da mostrare che, assumendo (i) e (ii), valgono le relazioni (3.25). Sia (y^*, u^*) la coppia ottimale per il funzionale J dato da (3.21), con $y^*(0) = x$. Per ogni $T \geq 0$ si ha, grazie al corollario 3.3.20,

$$\langle P(T)x, x \rangle = \inf J^T(x, \cdot) \leq J^T(x, u^*) \leq J(x, u^*),$$

e per $T \rightarrow \infty$

$$\langle \bar{P}x, x \rangle_X \leq J(x, u^*). \quad (3.30)$$

Viceversa, dalla (3.29) si ha subito

$$\langle \bar{P}x, x \rangle_X \geq J(x, \bar{u}) \geq J(x, u^*).$$

Concludiamo che

$$\langle \bar{P}x, x \rangle_X = J(x, \bar{u}) = J(x, u^*),$$

e, per unicità, $\bar{u} = u^*$ e $\bar{y} = y^*$, da cui $u^*(t) = -N^{-1}B^*\bar{P}y^*(t)$ per ogni $t \geq 0$. Ciò conclude la dimostrazione. \square

3.3.4 Unicità per l'equazione algebrica di Riccati

Sotto quali condizioni l'equazione algebrica di Riccati (3.24) ha soluzione unica? Sotto particolari ipotesi legate alla stabilizzabilità di (A, B) .

Definizione 3.3.25 *La coppia (A, B) è esponenzialmente stabilizzabile se esiste $K \in \mathcal{L}(X, U)$ (il feedback stabilizzante) tale che l'operatore*

$$\begin{cases} D(A_K) = D(A) \\ A_K y = Ay + BKy \quad \forall y \in D(A) \end{cases}$$

sia generatore infinitesimale di un semigrupp fortemente continuo esponenzialmente stabile.

Definizione 3.3.26 Sia $C \in \mathcal{L}(X, Y)$, ove Y è un altro spazio di Hilbert. La coppia (A, C) è esponenzialmente rilevabile (in inglese, detectable) se (A^*, C^*) è una coppia esponenzialmente stabilizzabile.

Dunque, se (A, C) è esponenzialmente rilevabile allora esiste un feedback $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ tale che $A^* + C^*L$ sia generatore infinitesimale di un semigruppoo fortemente continuo esponenzialmente stabile: lo stesso vale allora per $A + L^*C$.

Teorema 3.3.27 (i) Se (A, B) è esponenzialmente stabilizzabile con feedback $K \in \mathcal{L}(X, U)$, allora l'equazione algebrica di Riccati (3.24) ha almeno una soluzione $P \in \Sigma(X)$ non negativa.

(ii) Se $M = C^*C$, con $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ e (A, C) esponenzialmente rilevabile, allora l'equazione algebrica di Riccati (3.24) ha al più una soluzione $P \in \Sigma(X)$ non negativa; inoltre se P è una tale soluzione, allora (A, B) è esponenzialmente stabilizzabile con feedback $K = -N^{-1}B^*P$.

Si osservi che, nelle ipotesi della parte (ii) di questo teorema, l'equazione algebrica di Riccati potrebbe non avere alcuna soluzione: in tal caso, però, per il teorema 3.3.23 avremmo necessariamente $\mathcal{U}_x = \emptyset$ per ogni $x \in X$, quindi il problema avrebbe poco interesse.

Dimostrazione (i) Dall'ipotesi segue che $\mathcal{U}_x \neq \emptyset$ per ogni $x \in X$: infatti, basta risolvere l'equazione $y'(t) = (A + BK)y(t)$ con il dato iniziale $y(0) = x$, che fornisce $y(t) = G_K(t)x$ (ove G_k è il semigruppoo generato da $A + BK$), e poi scegliere il controllo $u(t) = -Ky(t)$; a questo punto la tesi segue dal teorema 3.3.23.

(ii) Anzitutto, enunciamo un lemma.

Lemma 3.3.28 Sia $R \in \Sigma(X)$, $R \geq 0$, e sia $K \in \mathcal{L}(X, U)$. Supponiamo che R e K soddisfino l'equazione

$$\langle (A + BK)x, Ry \rangle_X + \langle Rx, (A + BK)y \rangle_X + \langle NKx, Ky \rangle_U + \langle Cx, Cy \rangle_U = 0 \quad (3.31)$$

per ogni $x, y \in D(A)$; allora valgono i seguenti fatti:

- (i) se (A, C) è esponenzialmente rilevabile, allora (A, B) è esponenzialmente stabilizzabile con feedback K ;
- (ii) se (A, C) è esponenzialmente rilevabile e $P \in \Sigma(X)$, $P \geq 0$, è soluzione non negativa dell'equazione algebrica di Riccati (3.24) con $M = C^*C$, allora si ha $P \leq R$.

Dimostrazione Tra poco.

Concludiamo la dimostrazione della (ii) del teorema 3.3.27. Sia $P \in \Sigma(X)$ una soluzione della (3.24) con $M = C^*C$, e poniamo $K = -N^{-1}B^*P$. Per $x, y \in D(A)$ si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Ax, Py \rangle_X + \langle Px, Ay \rangle_X - \langle N^{-1}B^*Px, B^*Py \rangle_U + \langle C^*Cx, y \rangle_X = \\ &= \langle Ax, Py \rangle_X + \langle Px, Ay \rangle_X - 2\langle N^{-1}B^*Px, B^*Py \rangle_U + \langle Kx, NKy \rangle_U + \langle Cx, Cy \rangle_X = \\ &= \langle Ax, Py \rangle_X + \langle Px, Ay \rangle_X + \langle BKx, Py \rangle_X + \langle Px, BKy \rangle_X + \langle NKx, Ky \rangle_U + \\ &\quad + \langle Cx, Cy \rangle_X = \\ &= \langle (A + BK)x, Py \rangle_X + \langle Px, (A + BK)y \rangle_X + \langle NKx, Ky \rangle_U + \langle Cx, Cy \rangle_X; \end{aligned}$$

quindi P e K verificano (3.31). Essendo (A, C) esponenzialmente rilevabile il lemma 3.3.28 (i) ci dice che $A + BK$ è esponenzialmente stabile, mentre da (ii) segue che se P_1 è un'altra soluzione della (3.24) con $M = C^*C$, allora $P_1 \leq P$. Ma possiamo ripetere questo ragionamento scambiando i ruoli di P e P_1 (e scegliendo stavolta $K = -N^{-1}B^*P_1$); dunque ricaviamo $P = P_1$. Ciò conclude la dimostrazione del teorema 3.3.27. \square

Dimostrazione del lemma 3.3.28 (i) Sia \mathcal{G}_K il semigruppato generato da $A + BK$: esso esiste, perché per $\lambda \in \mathbb{C}$ l'equazione

$$\lambda u - Au - BKu = f \in X$$

equivale, se $\operatorname{Re} \lambda > 0$, a

$$u = R(\lambda, A)[f - BKu],$$

da cui

$$\|u\|_X \leq \frac{H}{\operatorname{Re} \lambda - \omega} \|f\|_X + \frac{H\|B\|\|K\|}{\operatorname{Re} \lambda - \omega} \|u\|_X.$$

Poniamo $\omega_1 = \omega + 2H\|B\|\|K\|$: se $\operatorname{Re} \lambda > \omega_1$ possiamo scrivere

$$\|u\|_X \leq \frac{H}{\operatorname{Re} \lambda - \omega} \|f\|_X + \frac{1}{2} \|u\|_X,$$

cioè

$$\|u\|_X \leq \frac{2H}{\operatorname{Re} \lambda - \omega} \|f\|_X \leq \frac{2H}{\operatorname{Re} \lambda - \omega_1} \|f\|_X;$$

quindi

$$\rho(A + BK) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > \omega_1\},$$

e per il teorema 3.2.18 di Hille-Yosida $A + BK$ è generatore infinitesimale di un semigruppato fortemente continuo $\mathcal{G}_K \in \mathbf{G}(2H, \omega_1)$.

Per ipotesi, (A, C) è esponenzialmente rilevabile: quindi, come osservato dopo la definizione, esiste un operatore $L \in \mathcal{L}(Y, X)$ tale che $A + L^*C$ sia generatore infinitesimale di un semigruppato \mathcal{G}_L esponenzialmente stabile.

Definiamo adesso

$$y(t) = G_K(t)x, \quad t \geq 0.$$

Scrivendo

$$A + BK = A + L^*C + [BK - L^*C],$$

possiamo scrivere

$$y(t) = G_K(t)x = G_L(t)x + \int_0^t G_L(t-s)[BK - L^*C]y(s) ds, \quad t \geq 0.$$

Proviamo che $Cy \in L^2(0, \infty; Y)$ e $Ky \in L^2(0, \infty; U)$. Supponiamo dapprima $x \in D(A)$: allora $y'(t) = (A + BK)y(t)$ e, usando l'equazione risolta da R , ossia la (3.31), si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle Ry(t), y(t) \rangle_X &= \langle (A + BK)y(t), Ry(t) \rangle_X + \langle Ry(t), (A + BK)y(t) \rangle_X = \\ &= -\langle NKy(t), Ky(t) \rangle_U - \langle Cy(t), Cy(t) \rangle_Y. \end{aligned}$$

perciò, integrando in $[0, t]$,

$$\langle Ry(t), y(t) \rangle_X + \int_0^t \|N^{\frac{1}{2}}Ky(s)\|_U^2 ds + \int_0^t \|Cy(s)\|_Y^2 ds = \langle Rx, x \rangle_X.$$

Per densità, questa relazione vale per ogni $x \in X$. Per $t \rightarrow \infty$, si ottiene $Cy \in L^2(0, \infty; Y)$ e $Ky \in L^2(0, \infty; U)$.

Poi, la relazione esplicita di y in termini di G_L mostra che

$$\|y\|_{L^2(0, \infty; X)} \leq c [\|x\|_X + \|Ky\|_{L^2(0, \infty; U)} + \|Cy\|_{L^2(0, \infty; Y)}];$$

dunque $y(\cdot) = G_K(\cdot)x \in L^2(0, \infty; X)$ e, per il teorema 3.2.25 di Datko si ottiene che \mathcal{G}_K è esponenzialmente stabile, e (i) è provata.

(ii) Poniamo $W = R - P$. Per ogni $x \in D(A)$ si ha, utilizzando l'equazione algebrica di Riccati con $M = C^*C$ risolta da P ,

$$\begin{aligned} & \langle (A + BK)x, Wx \rangle_X + \langle Wx, (A + BK)x \rangle_X = \\ & = -\langle Cx, Cx \rangle_Y - \langle NKx, Kx \rangle_U - \\ & \quad - \langle BKx, Px \rangle_X - \langle Px, BKx \rangle_X - \langle N^{-1}B^*Px, B^*Px \rangle_U + \langle C^*Cx, x \rangle_X = \\ & = -\langle NKx, Kx \rangle_U - \langle BKx, Px \rangle_X - \langle Px, BKx \rangle_X - \langle N^{-1}B^*Px, B^*Px \rangle_U. \end{aligned}$$

Poniamo $K_0 = -N^{-1}B^*P$: allora $NK_0 = -B^*P$, $PB = -K_0^*N$ e perciò

$$\begin{aligned} & \langle (A + BK)x, Wx \rangle_X + \langle Wx, (A + BK)x \rangle_X = \\ & = -\langle NKx, Kx \rangle_U + \langle NKx, K_0x \rangle_U + \langle NK_0x, Kx \rangle_U - \langle NK_0x, K_0x \rangle_U = \\ & = -\langle N(K - K_0)x, (K - K_0)x \rangle_U \leq 0 \quad \forall x \in D(A). \end{aligned}$$

Sostituendo $G_K(t)x$ al posto di x , si ottiene per ogni $t \geq 0$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \langle WG_K(t)x, G_K(t)x \rangle_X = \\ & = \langle (A + BK)G_K(t)x, WG_K(t)x \rangle_X + \langle WG_K(t)x, (A + BK)G_K(t)x \rangle_X \leq 0, \end{aligned}$$

e integrando in $[0, t]$

$$\langle WG_K(t)x, G_K(t)x \rangle_X \leq \langle Wx, x \rangle_X \quad \forall x \in D(A),$$

e, per densità, lo stesso vale per ogni $x \in X$. Per $t \rightarrow \infty$, il primo membro tende a 0 perchè \mathcal{G}_K è di tipo negativo. Ne segue $\langle Wx, x \rangle_X \geq 0$ per ogni $x \in X$, ossia $W \geq 0$: dunque $R \geq P$. Ciò prova (ii) e conclude la dimostrazione del lemma. \square

Corollario 3.3.29 *Supponiamo che $U_x \neq \emptyset$ per ogni $x \in X$, che $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ e che la coppia (A, C) sia esponenzialmente rilevabile. Allora l'equazione algebrica di Riccati (3.24) con $M = C^*C$ ha una e una sola soluzione $P \in \Sigma(X)$, $P \geq 0$, e la coppia (A, B) è esponenzialmente stabilizzabile con feedback $K = -N^{-1}B^*P$.*

Dimostrazione Immediata conseguenza del teorema 3.3.23 e del teorema 3.3.27 (ii).

\square

3.4 Controllo lineare-convesso in spazi di Hilbert

La più naturale generalizzazione di un problema di controllo lineare-quadratico consiste nel mantenere lineare l'equazione di stato e nel considerare un funzionale *convesso*, anziché quadratico. In questo modo la teoria è altrettanto completa, seppure un po' più complicata. Andiamo dunque ad analizzare il problema seguente: vogliamo minimizzare, per $T > 0$ e $s \in [0, T]$, il funzionale

$$J_s(x, u) = \int_s^T [g(y(t)) + h(u(t))] dt + \Phi(y(T)) \quad (3.32)$$

fra le $u \in L^2(s, T; U)$, con $u(\cdot)$ e $y(\cdot)$ vincolate dalla relazione

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), & t \in]s, T] \\ y(s) = x, \end{cases} \quad (3.33)$$

sotto queste ipotesi:

- X e U sono spazi di Hilbert reali separabili;
- $g : X \rightarrow [0, \infty[$ e $\Phi : X \rightarrow [0, \infty[$ sono funzioni convesse di classe C^1 ;
- $h : U \rightarrow [0, \infty[$ è una funzione strettamente convessa, di classe C^1 , tale che

$$h(u) \geq a\|u\|_U^2 + b \quad \forall u \in U, \quad \text{con } a > 0, b \in \mathbb{R}; \quad (3.34)$$

- x è un elemento di X , B è un operatore in $\mathcal{L}(U, X)$, $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ è il generatore infinitesimale di un semigruppoo fortemente continuo \mathcal{G} .

Lo stato $y(\cdot)$ sarà dunque

$$y(t) = G(t-s)x + \int_s^t G(t-r)Bu(r) dr, \quad t \in [s, T]. \quad (3.35)$$

Non è detto che il funzionale J_s sia sempre finito: occorre che $h(u(\cdot)) \in L^1(s, T)$. Tuttavia J_s non è identicamente $+\infty$ perché, scelto $x = 0$, risulta

$$J_s(0, u) = \int_s^T [g(G(t-s)x) + h(0)] dt + \Phi(G(T-s)x),$$

e naturalmente $t \mapsto g(G(t-s)x)$ è una funzione continua da $[s, T]$ in $[0, \infty[$, dunque limitata.

Denotiamo con \mathcal{U}_x la classe dei controlli ammissibili:

$$\mathcal{U}_x = \{u \in L^2(s, T; U) : J_s(x, u) < +\infty\}.$$

La convessità di J_s garantisce facilmente l'esistenza di un controllo ottimale.

Proposizione 3.4.1 *Nelle ipotesi precedenti, esiste un unico controllo ottimale $u_{s,x}^*$:*

$$J_s(x, u_{s,x}^*) \leq J_s(x, u) \quad \forall u \in L^2(s, T; U).$$

Dimostrazione Sia $\{u_n\} \subseteq \mathcal{U}_x$ una successione minimizzante:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_s(x, u_n) = \inf_{u \in \mathcal{U}_x} J_s(x, u).$$

Poiché, grazie a (3.34),

$$a \|u_n\|_{L^2(s, T; U)}^2 \leq \int_s^T h(u_n(s)) ds - b(T - s),$$

la successione $\{u_n\}$ è limitata in $L^2(s, T; U)$ e quindi esiste $\{u_{n_k}\} \subseteq \{u_n\}$ tale che $u_{n_k} \rightharpoonup \bar{u}$ in $L^2(s, T; U)$. La funzione

$$H : L^2(s, T; U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(u) = \int_s^T h(u(s)) ds \quad \forall u \in L^2(s, T; U)$$

è convessa (evidente) e semicontinua inferiormente: infatti se $v_n \rightarrow v$ in $L^2(s, T; U)$, scelta una sottosuccessione $\{v_{n_j}\}$ tale che

$$\lim_{j \rightarrow \infty} H(v_{n_j}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} H(v_n),$$

passando ad un'ulteriore sottosuccessione si può supporre che

$$v_{n_j}(t) \rightarrow v(t) \quad \text{q.o. in } [s, t];$$

dunque $h(v_{n_j}(t)) \rightarrow h(v(t))$ q.o., e dal lemma di Fatou deduciamo

$$H(v) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} H(v_{n_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} H(v_{n_j}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} H(v_n).$$

Dunque la funzione H , essendo convessa e semicontinua inferiormente, è anche debolmente semicontinua infeiormente, come conseguenza non elementare del teorema di Hahn-Banach. Pertanto, tornando alla sottosuccessione minimizzante $\{u_{n_k}\}$, si ha

$$H(\bar{u}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} H(u_{n_k}).$$

Detto poi y_{n_k} lo stato corrispondente al controllo u_{n_k} , dalla formula di rappresentazione (3.35) si ha facilmente

$$y_{n_k}(t) \rightharpoonup \bar{y}(t) \quad \text{in } X \quad \forall t \in [s, T],$$

ove \bar{y} è lo stato corrispondente al controllo \bar{u} . Poiché g e Φ sono convesse e continue su X , esse sono debolmente semicontinue inferiormente in X , cosicché

$$g(\bar{y}(t)) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} g(y_{n_k}(t)) \quad \forall t \in [s, T]; \quad \Phi(\bar{y}(T)) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \Phi(y_{n_k}(T)).$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
J_s(x, \bar{u}) &= \int_s^T [g(\bar{y}(t) + h(\bar{u}(t)))] dt + \Phi(\bar{y}(T)) \leq \\
&\leq \int_s^T \liminf_{k \rightarrow \infty} g(y_{n_k}(t)) dt + H(\bar{u}) + \liminf_{k \rightarrow \infty} \Phi(y_{n_k}(T)) \leq \\
&\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_s^T g(y_{n_k}(t)) dt + \liminf_{k \rightarrow \infty} H(u_{n_k}) + \liminf_{k \rightarrow \infty} \Phi(y_{n_k}(T)) \leq \\
&\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J_s(x, u_{n_k}) = \inf_{u \in \mathcal{U}_x} J_s(x, u).
\end{aligned}$$

Dunque \bar{u} è ottimale.

Proviamo l'unicità: siano u_1 e u_2 ottimali con $u_1 \neq u_2$: dunque l'insieme

$$E = \{t \in [s, T] : u_1(t) \neq u_2(t)\}$$

ha misura positiva. Perciò, essendo h strettamente convessa, per $\lambda \in]0, 1[$ si ha

$$\begin{aligned}
H((1 - \lambda)u_1 + \lambda u_2) &= \int_E h((1 - \lambda)u_1(t) + \lambda u_2(t)) dt + \int_{E^c} h(u_1(t)) dt < \\
&< \int_E [(1 - \lambda)h(u_1(t)) + \lambda h(u_2(t))] dt + \int_{E^c} h(u_1(t)) dt \leq \\
&\leq (1 - \lambda)H(u_1) + \lambda H(u_2).
\end{aligned}$$

Ne segue

$$J_s(x, (1 - \lambda)u_1 + \lambda u_2) < (1 - \lambda)J_s(x, u_1) + \lambda J_s(x, u_2) = \inf_{u \in \mathcal{U}_x} J_s(x, u),$$

il che è assurdo. Dunque $u_1 \equiv u_2$. \square

Il passo successivo è quello di cercare di caratterizzare la coppia ottimale per mezzo delle condizioni necessarie di Pontrjagin. A questo scopo ci occorrono preliminarmente alcune nozioni sulle funzioni convesse.

3.4.1 Proprietà delle funzioni convesse

Sia X uno spazio normato, sia $f : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ una funzione. Come si sa, f è convessa in X se

$$f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y) \quad \forall x, y \in X, \quad \forall t \in [0, 1],$$

ed è strettamente convessa se, inoltre,

$$f((1 - t)x + ty) < (1 - t)f(x) + tf(y) \quad \forall x, y \in X, \quad \forall t \in]0, 1[.$$

Proposizione 3.4.2 *Se f è differenziabile secondo Gâteaux, allora sono fatti equivalenti:*

(i) f è convessa;

(ii) $f(\xi) \geq f(x) + \langle f'_G(x), \xi - x \rangle_{X^*, X} \quad \forall x, \xi \in X$;

(iii) f'_G è un operatore monotono, vale a dire

$$\langle f'_G(\xi) - f'_G(x), \xi - x \rangle_{X^*, X} \geq 0 \quad \forall \xi, x \in X.$$

Similmente, sono fatti equivalenti:

(i') f è strettamente convessa;

(ii') $f(\xi) > f(x) + \langle f'_G(x), \xi - x \rangle_{X^*, X} \quad \forall \xi, x \in X \text{ con } x \neq \xi$;

(iii') f'_G è un operatore strettamente monotono, ossia

$$\langle f'_G(\xi) - f'_G(x), \xi - x \rangle_{X^*, X} > 0 \quad \forall \xi, x \in X \text{ con } x \neq \xi.$$

Dimostrazione (i) \implies (ii) Se f è convessa, i suoi rapporti incrementali in qualunque direzione sono crescenti. Quindi

$$f(\xi) - f(x) \geq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + t(\xi - x)) - f(x)}{t} = \langle f'_G(x), \xi - x \rangle_{X^*, X}.$$

(ii) \implies (iii) Se $\xi, x \in X$, per ipotesi si ha

$$f(\xi) \geq f(x) + \langle f'_G(x), \xi - x \rangle_{X^*, X}, \quad f(x) \geq f(\xi) + \langle f'_G(\xi), x - \xi \rangle_{X^*, X};$$

sommando e semplificando, si trova

$$0 \geq \langle f'_G(x) - f'_G(\xi), \xi - x \rangle_{X^*, X},$$

che equivale alla tesi.

(iii) \implies (i) Siano $x, \xi \in X$. Posto

$$\varphi(\lambda) = f((1 - \lambda)x + \lambda\xi), \quad \lambda \in [0, 1],$$

risulta

$$\varphi'(\lambda) = \langle f'_G((1 - \lambda)x + \lambda\xi), \xi - x \rangle_{X^*, X} \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Perciò, per $0 \leq \lambda < \mu \leq 1$ si ha

$$\begin{aligned} \varphi'(\mu) - \varphi'(\lambda) &= \langle f'_G((1 - \mu)x + \mu\xi) - f'_G((1 - \lambda)x + \lambda\xi), \xi - x \rangle_{X^*, X} \\ &= \frac{\langle f'_G((1 - \mu)x + \mu\xi) - f'_G((1 - \lambda)x + \lambda\xi), [(1 - \mu)x + \mu\xi] - [(1 - \lambda)x + \lambda\xi] \rangle_{X^*, X}}{\mu - \lambda} \geq \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

in virtù dell'ipotesi. Dunque φ' è crescente, cosicché φ è convessa. Pertanto

$$f((1 - \lambda)x + \lambda\xi) = \varphi(\lambda) \leq (1 - \lambda)\varphi(0) + \lambda\varphi(1) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(\xi).$$

Le implicazioni (i') \implies (ii') \implies (iii') \implies (i') si provano allo stesso modo. \square

Definizione 3.4.3 Diciamo che $f : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ è sottodifferenziabile nel punto $x_0 \in X$ se esiste un'applicazione affine $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ (dunque della forma $\psi(x) = \varphi x + b$, con $\varphi \in X^*$ e $b \in \mathbb{R}$) tale che

$$f(x) \geq \psi(x) \quad \forall x \in X, \quad f(x_0) = \psi(x_0).$$

Notiamo che f è sottodifferenziabile in x_0 se e solo se $f(x_0) \in \mathbb{R}$, ed esiste $\varphi \in X^*$ tale che

$$f(x) \geq f(x_0) + \varphi(x - x_0) \quad \forall x \in X.$$

Infatti, detta $\psi(x) = \varphi x + b$ l'applicazione affine che verifica la definizione, si ha $f(x_0) = \psi(x_0) \in \mathbb{R}$, e inoltre

$$f(x) \geq \psi(x) = \varphi(x - x_0) + \varphi x_0 + b = \varphi(x - x_0) + \psi(x_0) = \varphi(x - x_0) + f(x_0) \quad \forall x \in X.$$

Viceversa, questa relazione implica la sottodifferenziabilità di f in x_0 , con

$$\psi(x) = \varphi x + b, \quad b = f(x_0) + \varphi x_0.$$

Definizione 3.4.4 Sia X uno spazio normato reale e sia $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Se f è sottodifferenziabile in x_0 , ogni $\varphi \in X^*$ tale che

$$f(x) \geq f(x_0) + \varphi(x - x_0) \quad \forall x \in X$$

si chiama sottogradiente di f in x_0 . L'insieme dei sottogradienti di f in x_0 ,

$$\partial f(x_0) = \{\varphi \in X^* : f(x) \geq f(x_0) + \varphi(x - x_0) \quad \forall x \in X\},$$

si chiama sottodifferenziale di f in x_0 .

Si noti che $\partial f(x_0)$ può essere vuoto, ma è sempre un convesso di X^* , chiuso per la topologia debole* di X^* .

Esempio 3.4.5 Consideriamo la funzione

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|_X.$$

Si ha per $x_0 = 0$

$$\partial f(0) = \{\varphi \in X^* : \|\varphi\|_{X^*} \leq 1\}.$$

Infatti, la relazione di sottodifferenziabilità ci dice che

$$\|x\|_X \geq \langle \varphi, x \rangle_{X^*, X} \quad \forall x \in X \quad \iff \quad \varphi \in \partial f(0);$$

ma poiché possiamo scambiare x con $-x$, essa ci dà appunto

$$|\langle \varphi, x \rangle_{X^*, X}| \leq \|x\|_X \quad \forall x \in X \quad \iff \quad \varphi \in \partial f(0),$$

vale a dire $\|\varphi\|_{X^*} \leq 1$ se e solo se $\varphi \in \partial f(0)$.

Proposizione 3.4.6 Sia $f : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ una funzione convessa e sia $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) \in \mathbb{R}$.

- (i) Se f è differenziabile secondo Gâteaux in x_0 , allora $\partial f(x_0) = \{f'_G(x_0)\}$;
(ii) Se f è continua in x_0 e $\partial f(x_0) = \{\varphi_0\}$ allora f è differenziabile secondo Gâteaux in x_0 , con $f'_G(x_0) = \varphi_0$.

Dimostrazione (i) Se $\varphi \in \partial f(x_0)$, si ha $f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle \varphi, v \rangle_{X^*, X}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $v \in X$. Se $t \neq 0$, dividendo per t si ha

$$\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \begin{cases} \geq \langle \varphi, v \rangle_{X^*, X} & \text{se } t > 0 \\ \leq \langle \varphi, v \rangle_{X^*, X} & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

e dunque, per $t \rightarrow 0$,

$$\langle f'_G(x_0), v \rangle_{X^*, X} = \langle \varphi, v \rangle_{X^*, X} \quad \forall v \in X.$$

D'altra parte, usando la convessità,

$$f(x) - f(x_0) \geq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t} = \langle f'_G(x_0), x - x_0 \rangle_{X^*, X},$$

cioè $f'_G(x_0) \in \partial f(x_0)$.

(ii) Omessa: è una dimostrazione niente affatto banale, conseguenza del teorema di Hahn-Banach. \square

Proposizione 3.4.7 Sia $f : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ una funzione convessa. Se $x_0 \in X$, si ha

$$f(x_0) = \min_X f \quad \iff \quad 0 \in \partial f(x_0).$$

Dimostrazione Segue subito dalla definizione 3.4.3. \square

Definizione 3.4.8 Sia X uno spazio di Hilbert e sia $f : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ una funzione convessa. La coniugata, o polare, di f è la funzione

$$f^*(y) = \sup_{x \in X} \{ \langle y, x \rangle_X - f(x) \}, \quad y \in X.$$

Osserviamo che f^* è sempre convessa e semicontinua inferiormente rispetto alla topologia debole di X . Inoltre, per definizione, vale la *disuguaglianza di Young*

$$\langle y, x \rangle_X \leq f(x) + f^*(y) \quad \forall x, y \in X.$$

Esempi 3.4.9 Se $X = \mathbb{R}$, si ha con facili verifiche:

(i) $f(x) = \frac{1}{p}|x|^p, \quad 1 < p < \infty \implies f^*(y) = \frac{1}{q}|y|^q;$

$$(ii) \quad f(x) = |x| \quad \Longrightarrow \quad f^*(y) = I_{[-1,1]}(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } |y| \leq 1 \\ +\infty & \text{se } |y| > 1; \end{cases}$$

$$(iii) \quad f(x) = ax, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \Longrightarrow \quad f^*(x) = I_{\{a\}}(y);$$

$$(iv) \quad f(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad f^*(y) = \begin{cases} +\infty & \text{se } y < 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \\ y(\ln y - 1) & \text{se } y > 0. \end{cases}$$

Definizione 3.4.10 Sia X uno spazio di Hilbert e sia $f : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ una funzione convessa. La bipolare di f è la polare di f^* , ossia

$$f^{**}(z) = \sup_{y \in X} \{ \langle z, y \rangle_X - f^*(y) \}, \quad z \in X.$$

Dalla disuguaglianza di Young segue subito

$$f^{**}(z) \leq f(z) \quad \forall z \in X;$$

ma un'importante onseguenza del teorema di Hahn-Banach è il

Teorema 3.4.11 (di Fenchel-Moreau) Sia $f : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ una funzione propria, cioè $f \not\equiv +\infty$. Allora f è convessa e semicontinua inferiormente se e solo se risulta $f^{**}(z) = f(z)$ per ogni $z \in X$.

Dimostrazione Omessa (è il teorema 2.5.8 dei miei appunti di Analisi convessa). \square

Proposizione 3.4.12 Sia X uno spazio di Hilbert e sia $f : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ una funzione convessa, propria e semicontinua inferiormente. Allora per ogni $u, y \in X$ si ha

$$y \in \partial f(u) \quad \Longleftrightarrow \quad u \in \partial f(y) \quad \Longleftrightarrow \quad \langle y, u \rangle_X = f(u) + f^*(y).$$

Dimostrazione Si ha, utilizzando nel quarto passaggio il teorema di Fenchel-Moreau:

$$\begin{aligned} y \in \partial f(u) &\Longleftrightarrow f(v) \geq f(u) + \langle y, v - u \rangle_X \quad \forall v \in X \\ &\Longleftrightarrow \langle y, v \rangle_X - f(v) \leq \langle y, u \rangle_X - f(u) \quad \forall v \in X \\ &\Longleftrightarrow f^*(y) = \langle y, u \rangle_X - f(u) \\ &\Longleftrightarrow f^{**}(u) = f(u) = \langle y, u \rangle_X - f^*(y) \\ &\Longleftrightarrow \langle u, v \rangle_X - f^*(v) \leq \langle u, y \rangle_X - f^*(y) \quad \forall v \in X \\ &\Longleftrightarrow f^*(v) \geq f^*(y) + \langle u, v - y \rangle_X \quad \forall v \in X \quad \Longleftrightarrow \quad u \in \partial f^*(y). \end{aligned}$$

L'ultima relazione è stata stabilita nel terzo passaggio. \square

3.4.2 Condizioni necessarie di ottimalità

Torniamo al nostro problema di minimo (3.32)-(3.33). Nell'unico punto di minimo $u_{s,x}^*$ fornito dalla proposizione 3.4.1 vale la relazione, frutto della proposizione 3.4.7,

$$0 \in \partial_u J_s(x, u_{s,x}^*),$$

ove ∂_u denota il sottodifferenziale fatto rispetto alla variabile u . Per determinare $\partial_u J_s(x, u)$ ci occorrono due lemmi.

Lemma 3.4.13 *Sia*

$$\Gamma(u) = \int_s^T g(y_u(t)) dt + \Phi(y_u(T)), \quad u \in L^2(s, T; U),$$

ove

$$y_u(t) = G(t-s)x + \int_s^t G(t-\sigma)Bu(\sigma) d\sigma, \quad t \in [s, T].$$

Allora il funzionale Γ è differenziabile secondo Gâteaux, con

$$\langle \Gamma'_G(u), v \rangle_{L^2(s, T; U)} = -\langle B^*p_u, v \rangle_{L^2(s, T; U)} \quad \forall v \in L^2(s, T; U),$$

ove

$$p_u(t) = G(T-t)^*\Phi'(y_u(T)) + \int_t^T G(\sigma-t)^*g'(y_u(\sigma)) d\sigma, \quad t \in [s, T].$$

Dimostrazione Essendo g, ϕ di classe C^1 , il funzionale Γ è certamente differenziabile secondo Fréchet e quindi differenziabile secondo Gâteaux. Quindi, a norma della proposizione 3.4.6, $\partial\Gamma(u)$ contiene un solo elemento ed è più facile identificarlo con la definizione di sottodifferenziale, piuttosto che derivare $\Gamma(u)$. Si ha infatti

$$\begin{aligned} \Gamma(u) - \Gamma(v) &\geq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(u+tv) - \Gamma(u)}{t} = \\ &= \int_s^T \langle g'(y_u(t)), y_v(t) - y_u(t) \rangle_X dt + \langle \Phi'(y_u(T)), y_v(T) - y_u(T) \rangle_X = \\ &= \int_s^T \left\langle g'(y_u(t)), \int_s^t G(t-r)B[v(r) - u(r)] dr \right\rangle_X dt + \\ &\quad + \left\langle \Phi'(y_u(T)), \int_s^T G(T-r)B[v(r) - u(r)] \right\rangle_X dr, \end{aligned}$$

e utilizzando il teorema di Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned} \Gamma(u) - \Gamma(v) &\geq \\ &= \int_s^T \left[\left\langle B^* \int_r^T G(t-r)^*g'(y_u(t)) dt + B^*G(T-r)^*\Phi'(y_u(T)), v(r) - u(r) \right\rangle_U \right] dr = \\ &= \int_s^T \langle B^*p_u(r), v(r) - u(r) \rangle_U dr. \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 3.4.14 *Sia*

$$H(u) = \int_s^T h(u(t)) dt, \quad u \in L^2(s, T; U).$$

Allora

$$\partial H(u) = \begin{cases} \{h'(u)\} & \text{se } h(u) \in L^1(0, 1) \text{ e } h'(u) \in L^2(s, T; U) \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrazione Se $h(u) \notin L^1(s, T)$, essendo $h \geq 0$ si ha $H(u) = +\infty$ e quindi $\partial H(u) = \emptyset$.

Sia allora $h(u) \in L^1(s, T)$; per $u \in L^2(s, T; U)$ si ha dalla convessità di h

$$h(v(r)) - h(u(r)) \geq \langle h'(u(r)), v(r) - u(r) \rangle_U \quad \text{q.o. in } [s, T].$$

Se $h'(u) \in L^2(s, T; U)$, possiamo integrare in $[s, T]$, ottenendo

$$H(v) - H(u) \geq \int_s^T \langle h'(u(r)), v(r) - u(r) \rangle_U dr = \langle h'(u), v - u \rangle_{L^2(s, T; U)},$$

da cui $h'(u) \in \partial H(u)$.

Viceversa, sia $\varphi \in \partial H(u)$: si ha dunque

$$H(v) - H(u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle_{L^2(s, T; U)} \quad \forall v \in L^2(s, T; U).$$

Fissati $E \subseteq [s, T]$ misurabile e $w \in L^2(s, T; U)$, scegliamo

$$v = w \cdot \chi_E + u \cdot (1 - \chi_E), \quad \text{ove } \chi_E(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r \notin E \\ 1 & \text{se } r \in E. \end{cases}$$

Si ottiene, per ogni $w \in L^2(s, T; U)$,

$$\int_E [h(w(t)) - h(u(t))] dt = H(v) - H(u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle_{L^2(s, T; U)} = \int_E \langle \varphi(t), w(t) - u(t) \rangle_U dt.$$

Prendendo come E l'insieme

$$E_0 = \{t \in [s, T] : h(w(t)) - h(u(t)) - \langle \varphi(t), w(t) - u(t) \rangle_U < 0\},$$

la relazione precedente, applicata ad E_0 , mostra che E_0 ha misura nulla. Ne segue, q.o. in $[s, T]$,

$$h(w(t)) - h(u(t)) \geq \langle \varphi(t), w(t) - u(t) \rangle_U \quad \forall w \in L^2(s, T; U),$$

e ciò implica $\varphi(t) \in \partial h(u(t))$ q.o. in $[s, T]$, ossia

$$\varphi(t) = h'(u(t)) \quad \text{q.o. in } [s, T].$$

Si conclude che se $h'(u) \in L^2(s, T; U)$ l'insieme $\partial h(u)$ coincide con $\{h'(u)\}$, mentre se $h'(u) \notin L^2(s, T; U)$ risulta $\partial h(u) = \emptyset$. \square

Corollario 3.4.15 Per ogni $x \in X$ e $s \in [0, T[$, per il funzionale J_s definito da (3.32) si ha

$$\partial_u J_s(x, u) = \begin{cases} \{h'(u) - B^*p_u\} & \text{se } h(u) \in L^1(0, 1) \text{ e } h'(u) \in L^2(s, T; U) \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrazione Se $h(u) \notin L^1(s, T)$, oppure $h'(u) \notin L^2(s, T; U)$, allora $J_s = \Gamma + H$ con Γ funzione differenziabile secondo Gâteaux e H funzione non sottodifferenziabile: quindi J_s non è sottodifferenziabile.

Se invece $h(u) \in L^1(0, 1)$ e $h'(u) \in L^2(s, T; U)$, dai due lemmi precedenti segue che $B^*p_u \in \partial\Gamma(u)$ e $h'(u) \in \partial H(u)$; è banale verificare allora che $B^*p_u + h'(u) \in \partial\Gamma(u) + \partial H(u) \subseteq \partial_u J_s(x, u)$. Inoltre in questo caso sia Γ che H sono funzioni differenziabili secondo Gâteaux, quindi anche J_s è differenziabile secondo Gâteaux rispetto a u , e pertanto $\partial_u J_s(x, u)$ è costituito dall'unico elemento $\{B^*p_u + h'(u)\}$. \square

Da questi risultati deduciamo che per il punto di minimo $u_{s,x}^*$ del problema (3.32)-(3.33) valgono le condizioni necessarie seguenti:

$$\begin{cases} B^*p_{s,x}^* + h'(u_{s,x}^*) = 0 \\ (p_{s,x}^*)'(t) = -A^*p_{s,x}^* - g'(y_{s,x}^*) \quad \text{in } [s, T[\\ p_{s,x}^*(T) = \Phi'(y_{s,x}^*(T)), \end{cases} \quad (3.36)$$

mentre la funzione valore $V(s, x)$, definita da

$$V(s, x) = \inf_{u \in \mathcal{U}_x} J_s(x, u),$$

verifica

$$V(s, x) = \int_s^T [g'(y_{s,x}^*(t)) + h(u_{s,x}^*(t))] dt + \Phi(y_{s,x}^*(T)). \quad (3.37)$$

I fatti che seguono si verificano come nel caso lineare-quadratico (proposizione 3.3.3).

Proposizione 3.4.16 Risulta per $s \in [0, T[$ e per $x \in X$:

(i) $u_{0,x}^*|_{[s,T]} \equiv u_{s,y_{0,x}^*(s)}^*$, $y_{0,x}^*|_{[s,T]} \equiv y_{s,y_{0,x}^*(s)}^*$, $p_{0,x}^*|_{[s,T]} \equiv p_{s,y_{0,x}^*(s)}^*$;

(ii) $V(s, x) = \int_s^t [g(y_{s,x}^*(r)) + h(u_{s,x}^*(r))] dr + V(t, y_{s,x}^*(t))$ per ogni $t \in [s, T[$;

(iii) $V(s, x) = \inf \left\{ \int_s^t [g(y(r)) + h(u(r))] dr + V(t, y(t)) : \right.$
 $u \in L^2(s, t; U)$, $y' = Ay + Bu$ in $[s, t]$, $y(s) = x \left. \right\} \quad \forall t \in [s, T[$.

Dimostrazione L'unica cosa che è stata omessa nel caso lineare-quadratico è la terza affermazione di (i): la funzione $p_{0,x}^*$ risolve

$$\begin{cases} p'(t) = -A^*p(t) - g'(y_{0,x}^*(t)), & t \in [0, T] \\ p(T) = \Phi'(y_{0,x}^*(T)), \end{cases} \quad (3.38)$$

mentre $p_{s,y_{0,x}^*}^*$ risolve

$$\begin{cases} p'(t) = -A^*p(t) - g'(y_{s,y_{0,x}^*}^*(t)), & t \in [s, T] \\ p(T) = \Phi'(y_{s,y_{0,x}^*}^*(T)), \end{cases}$$

Poiché $y_{0,x}^*(t) = y_{s,y_{0,x}^*}^*(t)$ in $[s, T]$, per unicità le due funzioni coincidono in $[s, T]$. \square

3.4.3 Stime per la funzione valore e per la coppia ottimale

Osserviamo anzitutto che le funzioni g, h, Φ , essendo convesse, sono lipschitziane sui limitati: cioè, per ogni $r > 0$ esiste $M(r) > 0$ tale che

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(y)\|_X + \|\Phi(x) - \Phi(y)\|_X &\leq M(r)\|x - y\|_X \quad \forall x, y \in B_X(0, r), \\ \|h(u) - h(v)\|_U &\leq M(r)\|u - v\|_U \quad \forall u, v \in B_U(0, r), \end{aligned}$$

ove $B_X(0, r)$ e $B_U(0, r)$ sono le palle di centro 0 e raggio r in X e in U .

Vogliamo ora identificare univocamente il controllo ottimale $u_{s,x}^*$ per mezzo della condizione necessaria $B^*p_{s,x}^* + h'(u_{s,x}^*) = 0$ stabilita in (3.36). Per ipotesi, h è strettamente convessa e di classe C^1 , con $h(u) \geq a\|u\|_U^2 + b$. Dunque, per la proposizione 3.4.2, h' è strettamente monotona, e di conseguenza $\partial h^*(z)$ ha un solo elemento per ogni $z \in U$: infatti, grazie alla proposizione 3.4.6,

$$u_1, u_2 \in \partial h^*(z) \implies z \in \partial h(u_1) \cap \partial h(u_2) = \{h'(u_1)\} \cap \{h'(u_2)\};$$

ma essendo h' iniettiva, l'ultima intersezione è non vuota se e solo se $u_1 = u_2$. Perciò

$$\partial h^*(z) = \{(h^*)'_G(z)\} \quad \forall z \in U.$$

Dunque la condizione necessaria $B^*p_{s,x}^* + h'(u_{s,x}^*) = 0$ diventa $-B^*p_{s,x}^* \in \partial h(u_{s,x}^*)$, ossia (proposizione 3.4.12) $u_{s,x}^* \in \partial h^*(-B^*p_{s,x}^*)$, ovvero

$$u_{s,x}^* = (h^*)'_G(-B^*p_{s,x}^*). \quad (3.39)$$

Notiamo ancora un fatto: la funzione $(h^*)'_G$ è limitata sui limitati di U . Per verificarlo, partiamo dalla relazione

$$h^*(y) = \sup_{u \in U} \{\langle y, u \rangle_U - h(u)\} \leq \sup_{u \in U} \{\langle y, u \rangle_U - a\|u\|_U^2 - b\} = \frac{\|y\|_U^2}{4a} - b \quad \forall y \in U,$$

la quale implica che h^* , essendo convessa, è limitata sui limitati di U . Lo stesso allora deve valere per $(h^*)'_G$: infatti, se esistesse $\{z_n\} \subset U$ tale che

$$\|z_n\|_U \leq R, \quad \|(h^*)'_G(z_n)\|_U \rightarrow +\infty \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

avremmo

$$h^*(x) - h^*(z_n) \geq \langle (h^*)'_G(z_n), x - z_n \rangle_U \quad \forall x \in U;$$

allora, scegliendo

$$x = z_n + \frac{(h^*)'_G(z_n)}{\|(h^*)'_G(z_n)\|_U},$$

otterremmo $\|x\|_U \leq R + 1$, dunque $|h^*(x)| \leq K$, $|h^*(z_n)| \leq K$, da cui

$$2K \geq h^*(x) - h^*(z_n) \geq \langle (h^*)'_G(z_n), x - z_n \rangle_U = \|(h^*)'_G(z_n)\|_U,$$

il che è assurdo. Pertanto $(h^*)'_G$ è limitata sui limitati di U .

Ciò premesso, si ha la seguente

Proposizione 3.4.17 *Per ogni $r > 0$ esiste $c(r) > 0$ tale che, se $\|x\|_X \leq r$,*

- (i) $V(s, x) \leq c(r)$ per ogni $s \in [0, T[$;
- (ii) $\int_s^T \|u_{s,x}^*(t)\|_U^2 dt \leq c(r)$ per ogni $s \in [0, T[$;
- (iii) $\|y_{s,x}^*(t)\|_X \leq c(r)$ per ogni $s \in [0, T[$ e $t \in [s, T[$;
- (iv) $\|p_{s,x}^*(t)\|_X \leq c(r)$ per ogni $s \in [0, T[$ e $t \in [s, T[$;
- (v) $\|u_{s,x}^*(t)\|_X \leq c(r)$ per ogni $s \in [0, T[$ e $t \in [s, T[$;

Dimostrazione (i) Come sappiamo

$$V(s, x) \leq J_s(x, 0) = \int_s^T [g(G(t-s)x) + h(0)] dt + \Phi(G(T-s)x),$$

ed essendo g , h e Φ limitate sui limitati, si ricava facilmente la tesi.

(ii) Si ha da (i)

$$c(r) \geq V(s, x) \geq \int_s^T h(u_{s,x}^*(t)) dt \geq a \int_s^T \|u_{s,x}^*\|_U^2 dt + b(T-s),$$

da cui la tesi aumentando un po' la costante $c(r)$.

(iii) Si ha per ogni $t \in [s, T[$

$$\begin{aligned} \|y_{s,x}^*(t)\|_X &\leq H e^{\omega T} \left[\|x\|_X + \int_s^T \|B\|_{\mathcal{L}(U,X)} \|u_{s,x}^*(\sigma)\|_U d\sigma \right] \leq \\ &\leq H e^{\omega T} \left[\|x\|_X + \|B\|_{\mathcal{L}(U,X)} \sqrt{T} \left[\int_s^T \|u_{s,x}^*(\sigma)\|_U^2 d\sigma \right]^{\frac{1}{2}} \right], \end{aligned}$$

e quindi, per (i), si ha la tesi aumentando un po' $c(r)$.

(iv) Poiché $p_{s,x}^*$ risolve (3.38), si ha

$$p_{s,x}^*(t) = G(T-t)^* \Phi'(y_{s,x}^*(T)) + \int_t^T G(\sigma-t)^* g'(y_{s,x}^*(\sigma)) d\sigma, \quad (3.40)$$

da cui si ricava facilmente la tesi, essendo ϕ' e g' funzioni continue.

(v) Utilizziamo la relazione (3.39): poiché, grazie a (iv), $B^* p_{s,x}^*(t)$ varia in un limitato quando $\|x\|_X \leq r$, e poiché $(h^*)'_G$ è limitata sui limitati, la tesi segue facilmente, aumentando al solito la costante $c(r)$. \square

3.4.4 Regolarità lipschitziana della funzione valore

Vogliamo adesso provare che la funzione $(s, x) \mapsto V(s, x)$ è lipschitziana, per poi dedurre che essa risolve una equazione differenziale non lineare che generalizza quella di Riccati: l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman.

Proposizione 3.4.18 *Per ogni $r > 0$ esiste $c_{1,r} > 0$ tale che, per $\|x\|_X, \|x'\|_X \leq r$,*

$$|V(s, x') - V(s, x)| \leq c_{1,r} \|x' - x\|_X \quad \forall s \in [0, T].$$

Dimostrazione Sia y la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu_{s,x}^*(t), & t \in [s, T] \\ y(s) = x', \end{cases}$$

cosicché

$$y(t) = G(t-s)x' + \int_s^t G(t-\sigma)Bu_{s,x}^*(\sigma) d\sigma, \quad t \in [s, T],$$

e di conseguenza

$$y(t) - y_{s,x}^*(t) = G(t-s)(x' - x).$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} V(s, x') - V(s, x) &\leq \int_s^T [g(y(t)) - g(y_{s,x}^*(t))] dt + \Phi(y(T)) - \Phi(y_{s,x}^*(T)) \leq \\ &\leq M(c(r)) \left[\int_s^T \|y(t) - y_{s,x}^*(t)\|_X dt + \|y(T) - y_{s,x}^*(T)\|_X \right] \leq \\ &\leq M(c(r)) \cdot 2He^{\omega T} \|x' - x\|_X. \end{aligned}$$

Scambiando x con x' (e modificando di conseguenza la funzione ausiliaria $y(\cdot)$) si ottiene la stima cercata. \square

Proposizione 3.4.19 *Per ogni $r > 0$ esiste $c_{2,r} > 0$ tale che, per $t, s \in [0, T]$,*

(i) $|V(t, x) - V(s, x)| \leq c_{2,r} [|t - s| + \|G(t-s)x - x\|_X]$, quando $x \in X$ e $\|x\|_X \leq r$;

(ii) $|V(t, x) - V(s, x)| \leq c_{2,r} |t - s|$, quando $x \in D(A)$ e $\|x\|_X \leq r$.

Dimostrazione (i) Sia $t > s$: allora dalle proposizioni 3.4.16(ii) e 3.4.18 segue:

$$\begin{aligned} |V(s, x) - V(t, x)| &\leq |V(s, x) - V(t, y_{s,x}^*(t))| + |V(t, y_{s,x}^*(t)) - V(t, x)| = \\ &= \int_s^t [g(y_{s,x}^*(r)) + h(u_{s,x}^*(r))] dr + |V(t, y_{s,x}^*(t)) - V(t, x)| \leq \\ &\leq 2c(r)(t-s) + c_{1,c(r)} \|y_{s,x}^*(t) - x\|_X \leq \\ &\leq \max\{2c(r), c_{1,c(r)}\} [(t-s) + \|G(t-s)x - x\|_X] + \\ &\quad + c_{1,c(r)} He^{\omega T} \|B\|_{\mathcal{L}(U,X)} c(r)(t-s) \leq \\ &\leq c_{2,r} [(t-s) + \|G(t-s)x - x\|_X]. \quad \square \end{aligned}$$

(ii) Se $x \in D(A)$, si ha

$$\|G(t-s)x - x\|_X = \left\| \int_0^{t-s} G(r)Ax \, dr \right\|_X \leq He^{\omega T} \|Ax\|_X(t-s);$$

dunque se in più $\|x\|_X \leq r$ si ripete il calcolo precedente, ottenendo la tesi. \square

Proviamo infine questa proprietà:

Proposizione 3.4.20 *Per ogni $s \in [0, T[$ e per ogni $x \in X$ risulta*

$$p_{0,x}^*(s) \in \partial_x V(s, y_{0,x}^*(s)).$$

Dimostrazione Siano $x, x' \in X$. Per la convessità di g, h, Φ si ha

$$\begin{aligned} V(s, x') - V(s, x) &= \\ &= \int_s^T \left[[g(y_{s,x'}^*(t)) - g(y_{s,x}^*(t))] + [h(u_{s,x'}^*(t)) - h(u_{s,x}^*(t))] \right] dt + \\ &\quad + \Phi(y_{s,x'}^*(T)) - \Phi(y_{s,x}^*(T)) \geq \\ &\geq \int_s^T \left[\langle g'(y_{s,x}^*(t)), y_{s,x'}^*(t) - y_{s,x}^*(t) \rangle_X + \langle h'(u_{s,x}^*(t)), u_{s,x'}^*(t) - u_{s,x}^*(t) \rangle_U \right] dt + \\ &\quad + \langle \Phi'(y_{s,x}^*(T)), y_{s,x'}^*(T) - y_{s,x}^*(T) \rangle_X = \\ &= \int_s^T \left[\left\langle g'(y_{s,x}^*(t)), G(t-s)(x' - x) + \int_s^t G(t-r)B[u_{s,x'}^*(r) - u_{s,x}^*(r)] \, dr \right\rangle_X + \right. \\ &\quad \left. + \langle h'(u_{s,x}^*(t)), u_{s,x'}^*(t) - u_{s,x}^*(t) \rangle_U \right] dt + \\ &\quad + \left\langle \Phi'(y_{s,x}^*(T)), G(T-s)(x' - x) + \int_s^T G(T-r)B[u_{s,x'}^*(r) - u_{s,x}^*(r)] \, dr \right\rangle_X = \\ &= \left\langle \int_s^T G(t-s)^* g'(y_{s,x}^*(t)) \, dt + G(T-s)^* \Phi'(y_{s,x}^*(T)), x' - x \right\rangle_X + \\ &\quad + \int_s^T \left\langle \int_r^T B^* G(t-r)^* g'(y_{s,x}^*(t)) \, dt + h'(u_{s,x}^*(r)) + \right. \\ &\quad \left. + B^* G(T-r)^* \Phi'(y_{s,x}^*(T)), u_{s,x'}^*(r) - u_{s,x}^*(r) \right\rangle_U dr. \end{aligned}$$

Ricordando la formula esplicita di $p_{s,x}^*$ data da (3.40), si ottiene

$$\begin{aligned} V(s, x') - V(s, x) &\geq \\ &\langle p_{s,x}^*(s), x' - x \rangle_X + \int_s^T \langle B^* p_{s,x}^*(r) + h'(u_{s,x}^*(r)), u_{s,x'}^*(r) - u_{s,x}^*(r) \rangle_U dr = \\ &= \langle p_{s,x}^*(s), x' - x \rangle_X + 0, \end{aligned}$$

in quanto $B^* p_{s,x}^* + h'(u_{s,x}^*) = 0$ per la condizione necessaria (3.36). Dunque

$$p_{s,x}^*(s) \in \partial_x V(s, x) \quad \forall x \in X;$$

rimpiando x con $y_{0,x}^*(s)$, tenuto conto della proposizione 3.4.16, si ha infine

$$p_{0,x}^*(s) = p_{s,y_{0,x}^*(s)}^*(s) \in \partial_x V(s, y_{0,x}^*(s)). \quad \square$$

Corollario 3.4.21 *La funzione valore $V(s, x)$ è convessa rispetto alla variabile $x \in X$.*

Dimostrazione Sia $s \in [0, T[$ e supponiamo, per assurdo, che la funzione $v(x) := V(s, x)$ non sia convessa:” cioè significa che esistono $t \in]0, 1[$ e due punti distinti $x, x' \in X$ tali che, posto $x^* = (1 - t)x + tx'$, risulta

$$v(x^*) > (1 - t)v(x) + tv(x').$$

Osservato che $v = V(s, \cdot)$ ha sottodifferenziale non vuoto in ogni punto di X , in virtù della proposizione precedente, fissiamo $\varphi \in \partial v(x^*) = \partial_x V(s, x^*)$: allora

$$v(y) \geq v(x^*) + \langle \varphi, y - x^* \rangle_X \quad \forall y \in X.$$

Dato che $x - x^* = t(x - x')$ e $x' - x^* = (1 - t)(x' - x)$, possiamo scrivere, scelto $y = x$,

$$\begin{aligned} v(x) &\geq v(x^*) + \langle \varphi, x - x^* \rangle_X = v(x^*) + t \langle \varphi, x - x' \rangle_X > \\ &> (1 - t)v(x) + tv(x') + t \langle \varphi, x - x' \rangle_X, \end{aligned}$$

da cui, semplificando e dividendo per t ,

$$v(x) - v(x') > \langle \varphi, x - x' \rangle_X.$$

Analogamente, scelto $y = x'$, si ha

$$\begin{aligned} v(x') &\geq v(x^*) + \langle \varphi, x' - x^* \rangle_X = v(x^*) + (1 - t) \langle \varphi, x' - x \rangle_X > \\ &> (1 - t)v(x) + tv(x') + (1 - t) \langle \varphi, x' - x \rangle_X, \end{aligned}$$

da cui, dividendo per $1 - t$,

$$v(x') - v(x) > \langle \varphi, x' - x \rangle_X,$$

vale a dire

$$v(x) - v(x') < \langle \varphi, x - x' \rangle_X.$$

Ciò contraddice la relazione precedente. Ne segue $\partial v(x^*) = \emptyset$ e ciò è assurdo. \square

3.4.5 Equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman

Come nel caso lineare-quadratico, anche nel caso lineare-convesso la funzione valore risolve (in un senso opportuno) un'equazione differenziale, la quale, nella nostra situazione, è ovviamente più complicata di quella di Riccati. Per determinare di che equazione si tratta, facciamo anzitutto delle ipotesi un pochino più restrittive.

Proposizione 3.4.22 *Supponiamo che $(h')^{-1} : U \rightarrow U$ sia continua. Sia $s \in [0, T[$, sia $x \in D(A)$ e supponiamo che in (s, x) esistano le derivate parziali $V_s(s, x) \in \mathbb{R}$ e $V_x(s, x) \in X$. Allora vale l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman*

$$V_s(s, x) + \langle V_x(s, x), Ax \rangle_X + g(x) - h^*(-B^*V_x(s, x)) = 0.$$

Dimostrazione Partiamo dalla relazione, stabilita nella Proposizione 3.4.16(iii),

$$V(s, x) = \inf_{u \in L^2(s, T; U)} \left\{ \int_s^t [g(y(r)) + h(u(r))] dr + V(t, y(t)) \right\},$$

ove naturalmente

$$y(r) = G(r - s)x + \int_s^r G(r - \sigma)Bu(\sigma) d\sigma, \quad r \in [s, t].$$

Scegliamo $u(r) \equiv \bar{u} \in U$, nonché lo stato corrispondente

$$\bar{y}(r) = G(r - s)x + \int_s^r G(r - \sigma)B\bar{u} d\sigma.$$

Utilizzando la formula di Taylor si ha

$$\begin{aligned} 0 &\leq V(t, \bar{y}(t)) - V(s, x) + \int_s^t [g(\bar{y}(r)) + h(\bar{u})] dr = \\ &= V_s(s, x)(t - s) + \langle V_x(s, x), \bar{y}(t) - x \rangle_X + \\ &\quad + \int_s^t [g(\bar{y}(r)) - g(x)] dr + [g(x) + h(\bar{u})](t - s) + o(t - s) + o(\|\bar{y}(t) - x\|_X). \end{aligned}$$

Notiamo che per $t \rightarrow s^+$ si ha

$$\frac{\bar{y}(t) - x}{t - s} = \frac{G(t - s)x - x}{t - s} + \frac{1}{t - s} \int_s^t G(t - \sigma)B\bar{u} d\sigma \rightarrow Ax + B\bar{u};$$

dunque

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) - x &= [Ax + B\bar{u}](t - s) + o(t - s), \\ o(\|\bar{y}(t) - x\|_X) &= o(t - s), \\ \int_s^t [g(\bar{y}(r)) - g(x)] dr &= \int_s^t [\langle g'(x), \bar{y}(r) - x \rangle_X + o(\|\bar{y}(r) - x\|_X)] dr = o(t - s). \end{aligned}$$

Pertanto, dividendo per $t - s$ e facendo tendere $t \rightarrow s^+$, si ricava

$$0 \leq V_s(s, x) + \langle V_x(s, x), Ax + B\bar{u} \rangle_X + g(x) + h(\bar{u}) \quad \forall \bar{u} \in U,$$

ovvero

$$\begin{aligned} 0 &\leq V_s(s, x) + \langle V_x(s, x), Ax \rangle_X + \inf_{\bar{u} \in U} \{ \langle B^*V_x(s, x), \bar{u} \rangle_U + h(\bar{u}) \} + g(x) = \\ &= V_s(s, x) + \langle V_x(s, x), Ax \rangle_X + g(x) - h^*(-B^*V_x(s, x)). \end{aligned}$$

Per provare la disuguaglianza opposta, partiamo dalla relazione (proposizione 3.4.16(ii))

$$V(s, x) = \int_s^t [g(y_{s,x}^*(r)) + h(u_{s,x}^*(r))] dr + V(t, y_{s,x}^*(t)), \quad t \in [s, T[,$$

e dalla formula (3.39):

$$u_{s,x}^*(t) = (h^*)'_G(-B^*p_{s,x}^*(t)), \quad t \in [s, T].$$

Osserviamo che $p_{s,x}^*$ è una funzione continua, e che anche $(h^*)'_G$ è continua. Infatti, ricordiamo che per $u, z \in U$ vale

$$z = (h^*)'_G(u) \iff u = h'(z),$$

ovvero $(h^*)'_G = (h')^{-1}$, e quest'ultima funzione è continua per ipotesi. Dalla continuità di $u_{s,x}^*$ segue per $t \rightarrow s^+$

$$\frac{y_{s,x}^*(t) - x}{t - s} = \frac{G(t-s)x - x}{t-s} + \frac{1}{t-s} \int_s^t G(t-\sigma)Bu_{s,x}^*(\sigma) d\sigma \rightarrow Ax + Bu_{s,x}^*(s).$$

Possiamo allora scrivere, utilizzando la formula di Taylor e la convessità di g e h ,

$$\begin{aligned} 0 &= V(t, y_{s,x}^*(t)) - V(s, x) + \int_s^t [g(y_{s,x}^*(r)) + h(u_{s,x}^*(r))] dr = \\ &= V_s(s, x)(t-s) + \langle V_x(s, x), y_{s,x}^*(t) - x \rangle_X + \\ &\quad + \int_s^t \left[g(y_{s,x}^*(r)) - g(x) + h(u_{s,x}^*(r)) - h(u_{s,x}^*(s)) \right] dr + \\ &\quad + \left[g(x) + h(u_{s,x}^*(s)) \right] (t-s) + o(t-s) \geq \\ &\geq \left[V_s(s, x) + \langle V_x(s, x), Ax + Bu_{s,x}^*(s) \rangle_X + g(x) + h(u_{s,x}^*(s)) \right] (t-s) + \\ &\quad + \int_s^t \langle g'(x), y_{s,x}^*(r) - x \rangle_X dr + \int_s^t \langle h'(u_{s,x}^*(s)), u_{s,x}^*(r) - u_{s,x}^*(s) \rangle_U dr + o(t-s). \end{aligned}$$

Dato che, per $t \rightarrow s^+$,

$$\begin{aligned} \int_s^t \langle g'(x), y_{s,x}^*(r) - x \rangle_X dr &= o(t-s), \\ \int_s^t \langle h'(u_{s,x}^*(s)), u_{s,x}^*(r) - u_{s,x}^*(s) \rangle_U dr &= o(t-s), \end{aligned}$$

si conclude che

$$0 \geq (t-s) \left[V_s(s, x) + \langle V_x(s, x), Ax \rangle_X + g(x) + \langle B^*V_x(s, x), u_{s,x}^*(s) \rangle_U + h(u_{s,x}^*(s)) \right] + o(t-s),$$

e pertanto, dividendo per $t-s$ e facendo tendere $t \rightarrow s^+$, si trova

$$\begin{aligned} 0 &\geq V_s(s, x) + \langle V_x(s, x), Ax \rangle_X + g(x) + \langle B^*V_x(s, x), u_{s,x}^*(s) \rangle_U + h(u_{s,x}^*(s)) \geq \\ &\geq V_s(s, x) + \langle V_x(s, x), Ax \rangle_X + g(x) + \inf_{u \in U} \{ \langle B^*V_x(s, x), u \rangle_U + h(u) \} = \\ &= V_s(s, x) + \langle V_x(s, x), Ax \rangle_X + g(x) - h^*(-B^*V_x(s, x)). \quad \square \end{aligned}$$

L'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman è dunque

$$V_s(s, x) + \langle V_x(s, x), Ax \rangle_X + g(x) - h^*(-B^*V_x(s, x)) = 0, \quad (3.41)$$

ove $s \in [0, T[$ e $x \in D(A)$.

Osservazione 3.4.23 Il calcolo precedente è lo stesso che si può fare in problemi molto più generali, in cui il costo è

$$J_s(x, u) = \int_s^T L(y(t), u(t)) dt + \Phi(y(T)),$$

con equazione di stato

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), u(t)), & t \in [0, T], \\ y(s) = x; \end{cases}$$

In questo caso si definisce l' *Hamiltoniana*

$$H(t, x, p) = \inf_{u \in U} \{ \langle p, f(t, x, u) \rangle_X + L(t, x, u) \},$$

e l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman diventa

$$v_s(s, x) + H(s, x, V_x(s, x)) = 0, \quad s \in [0, T[.$$

In tutte e due le situazioni (caso lineare-convesso e caso generale) si ha la condizione finale

$$V(T, x) = \Phi(x).$$

È chiaro che nel caso lineare-convesso, in cui

$$f(t, y, u) = Ay + Bu, \quad L(t, y, u) = g(y) + h(u),$$

si ritrova

$$\begin{aligned} H(s, x, V_x(s, x)) &= \inf_{u \in U} \{ \langle V_x(s, x), Ax + Bu \rangle_X + g(x) + h(u) \} = \\ &= \langle V_x(s, x), Ax \rangle_X + g(x) - h^*(-B^*V_x(s, x)). \end{aligned}$$

In che senso, nel caso lineare-convesso, la funzione valore risolve l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman? Nel senso delle *soluzioni di viscosità*, che andiamo a introdurre nel caso generale di un'equazione della forma

$$F(x, u(x), u'(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.42)$$

ove Ω è un aperto di X e $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è un'assegnata funzione continua. Come vedremo, le soluzioni di viscosità sono associate alla dinamica espressa dalla *funzione* F , più che all'*equazione* $F = 0$: infatti una soluzione di viscosità di $F = 0$ può *non essere* soluzione di viscosità di $-F = 0$!

Definizione 3.4.24 Sia $u \in C(\Omega)$. Diciamo che u è soluzione di viscosità dell'equazione $F(x, u, u') = 0$ in Ω se:

- (i) per ogni $x_0 \in \Omega$ e per ogni $\varphi \in C^1(\Omega)$ tale che x_0 sia punto di massimo locale per $u - \varphi$, risulta $F(x_0, u(x_0), \varphi'(x_0)) \leq 0$;
- (ii) per ogni $x_0 \in \Omega$ e per ogni $\varphi \in C^1(\Omega)$ tale che x_0 sia punto di minimo locale per $u - \varphi$, risulta $F(x_0, u(x_0), \varphi'(x_0)) \geq 0$.

Se u soddisfa solo la condizione (i), diciamo che u è subsoluzione di viscosità; se u soddisfa solo la condizione (ii), diciamo che u è supersoluzione di viscosità.

Osserviamo che ogni soluzione $u \in C^1(\Omega)$ di (3.42) (in senso classico) è anche soluzione di viscosità di tale equazione, come si verifica subito prendendo nella definizione $\varphi = u$; viceversa, ogni soluzione di viscosità u , che sia di classe C^1 , verifica l'equazione in senso classico: basta osservare che in entrambi i casi (i) e (ii) si ha $u'(x_0) = \varphi'(x_0)$ per tutte le φ per le quali $u - \varphi$ ha massimo o minimo locale in x_0 , da cui $0 \leq F(x_0, u(x_0), u'(x_0)) \leq 0$ in ogni punto x_0 .

Dunque la nozione di soluzione di viscosità è una buona estensione della definizione classica di soluzione.

Esempio 3.4.25 Consideriamo il caso $F(x, u, u') = -|u'| + 1$ in $\Omega =] - 1, 1[$. Si può verificare che $u(x) := |x|$ è soluzione di viscosità dell'equazione

$$-|u'(x)| + 1 = 0,$$

Infatti, se $x \in] - 1, 1[\setminus \{0\}$, esiste $u'(x)$ e $|u'(x)| = 1$, quindi u verifica (i) e (ii) in virtù di quanto osservato poco fa. Se $x = 0$, sia $\varphi \in C^1(] - 1, 1[)$ tale che $u - \varphi$ abbia massimo locale in 0: allora esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x| - \varphi(x) \leq -\varphi(0) \quad \text{per } |x| < \delta,$$

per cui

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \geq 1 \quad \text{per } 0 < x < \delta, \quad \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \leq -1 \quad \text{per } -\delta < x < 0,$$

il che significa che tale φ non esiste, dovendo verificare $\varphi'(0) \geq 1$ e $\varphi'(0) \leq -1$. Pertanto (i) è verificata. Quanto a (ii), se $\varphi \in C^1(] - 1, 1[)$ è tale che $u - \varphi$ abbia minimo locale in 0, allora esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x| - \varphi(x) \geq -\varphi(0) \quad \text{per } |x| < \delta,$$

da cui

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \leq 1 \quad \text{per } 0 < x < \delta, \quad \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \geq -1 \quad \text{per } -\delta < x < 0,$$

il che implica

$$-|\varphi'(0)| + 1 \geq 0,$$

cioè vale (ii).

Notiamo che invece $u(x) = |x|$ non è soluzione di viscosità di

$$|u'(x)| - 1 = 0.$$

Infatti, se $\varphi \in C^1(] - 1, 1[)$ è tale che $u - \varphi$ abbia massimo locale in 0, come prima si trova che tale φ non esiste e quindi (i) è vera; quindi u è subsoluzione di viscosità. Tuttavia, esistono funzioni $\varphi \in C^1(] - 1, 1[)$ tali che $u - \varphi$ abbia minimo locale in 0, per le quali la relazione

$$|\varphi'(0)| - 1 \geq 0$$

è falsa: basta prendere $\varphi(x) = Cx^n$, con $n \geq 2$. Dunque u non è supersoluzione di viscosità, e pertanto non è soluzione di viscosità dell'equazione $|u'(x)| - 1 = 0$.

Torniamo al caso lineare-convesso. Vale questo risultato:

Teorema 3.4.26 *Supponiamo che $(h')^{-1} : U \rightarrow U$ sia continua. Allora la funzione valore $V(s, x)$ è soluzione di viscosità in $]0, T[\times X$ dell'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman*

$$-V_s(s, x) - \langle V_x(s, x), Ax \rangle_X - g(x) + h^*(-B^*V_x(s, x)) = 0, \quad x \in D(A).$$

Come si vede, questa nozione di soluzione di viscosità è lievemente più debole rispetto alla definizione 3.4.24: dobbiamo verificare le condizioni (i) e (ii) di tale definizione solamente nei punti (s, x) con $x \in D(A)$, e non in tutti i punti di $]0, T[\times X$.

Dimostrazione Per ogni $(s, x) \in]0, T[\times D(A)$ dobbiamo provare i due fatti seguenti:

(i) se $\varphi \in C^1(]0, T[\times X)$ e se (s, x) è punto di massimo locale per $V - \varphi$, allora

$$-\varphi_s(s, x) - \langle \varphi_x(s, x), Ax \rangle_X - g(x) + h^*(-B^*\varphi_x(s, x)) \leq 0;$$

(ii) se $\varphi \in C^1(]0, T[\times X)$ e se (s, x) è punto di minimo locale per $V - \varphi$, allora

$$-\varphi_s(s, x) - \langle \varphi_x(s, x), Ax \rangle_X - g(x) + h^*(-B^*\varphi_x(s, x)) \geq 0.$$

Il calcolo è simile a quello della dimostrazione della proposizione 3.4.22.

Dimostriamo (i). Se $(s, x) \in]0, T[\times D(A)$ e se (s, x) è punto di massimo locale per $V - \varphi$, allora per $|t - s| + \|y - x\|_X < \delta$, con $\delta > 0$ opportuno, si ha

$$V(t, y) - \varphi(t, y) \leq V(s, x) - \varphi(s, x). \quad (3.43)$$

Fissiamo adesso $\bar{u} \in U$ e poniamo

$$\bar{y}(r) = G(r - s)x + \int_s^r G(r - \sigma)B\bar{u} d\sigma, \quad r \in [s, T].$$

Lemma 3.4.27 *Risulta $\bar{y}(r) \in D(A)$ per ogni $r \in [s, T]$, con*

$$A\bar{y}(r) = G(r-s)Ax + [G(r-s) - I]B\bar{u}.$$

Dimostrazione Poiché $x \in D(A)$, per ogni $r \geq s$ si ha $G(r-s)x \in D(A)$ con $AG(r-s)x = G(r-s)Ax$. Inoltre se λ è un fissato elemento di $\rho(A)$ vale la relazione

$$\begin{aligned} \int_s^r G(r-\sigma)B\bar{u} d\sigma &= \int_s^r (\lambda I - A)R(\lambda, A)G(r-\sigma)B\bar{u} d\sigma = \\ &= \lambda R(\lambda, A) \int_s^r G(r-\sigma)B\bar{u} d\sigma + R(\lambda, A) \int_s^r \frac{d}{d\sigma} G(r-\sigma)B\bar{u} d\sigma = \\ &= \lambda R(\lambda, A) \int_s^r G(r-\sigma)B\bar{u} d\sigma + R(\lambda, A)[I - G(r-s)]B\bar{u}; \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_s^r G(r-\sigma)B\bar{u} d\sigma &\in D(A), \\ (\lambda I - A) \int_s^r G(r-\sigma)B\bar{u} d\sigma &= \lambda \int_s^r G(r-\sigma)B\bar{u} d\sigma + [I - G(r-s)]B\bar{u}, \end{aligned}$$

ovvero

$$A \int_s^r G(r-\sigma)B\bar{u} d\sigma = [G(r-s) - I]B\bar{u}.$$

Ne segue la tesi. \square

Notiamo che, come conseguenza di questo lemma che ha interesse in sé, risulta

$$\bar{y} \in C[s, T]; D(A).$$

Inoltre, in particolare, si ha $\|\bar{y}(r) - x\|_X < \delta$ per $t \in [s, s + \eta]$, con $\eta > 0$ opportuno. Possiamo quindi scrivere, per la proposizione 3.4.16(iii),

$$\varphi(t, \bar{y}(t)) - \varphi(s, x) \geq V(t, \bar{y}(t)) - V(s, x) \geq - \int_s^t [g(\bar{y}(\sigma)) + h(\bar{u})] d\sigma.$$

Dividendo per $t - s$ e facendo tendere $t \rightarrow s^+$ si ottiene

$$\left[\frac{d}{dt} \varphi(t, \bar{y}(t)) \right]_{t=s} \geq -g(x) - h(\bar{u}),$$

ovvero

$$g(x) + h(\bar{u}) \geq -\varphi_s(s, x) - \langle \varphi_x(s, x), \bar{y}'(s) \rangle_X = -\varphi_s(s, x) - \langle \varphi_x(s, x), Ax + B\bar{u} \rangle_X.$$

Ne segue, per ogni $\bar{u} \in U$,

$$-\varphi_s(s, x) - \langle \varphi_x(s, x), Ax \rangle_X - g(x) \leq \langle \varphi_x(s, x), B\bar{u} \rangle_X + h(\bar{u}),$$

vale a dire

$$-\varphi_s(s, x) - \langle \varphi_x(s, x), Ax \rangle_X - g(x) + h^*(-B^* \varphi_x(s, x)) \leq 0.$$

Ciò prova (i).

Dimostriamo (ii). Sia $(s, x) \in]0, T[\times D(A)$ un punto di minimo locale per $V - \varphi$: allora per $|t - s| + \|y - x\|_X < \delta$, con $\delta > 0$ opportuno, si ha

$$V(t, y) - \varphi(t, y) \geq V(s, x) - \varphi(s, x). \quad (3.44)$$

Consideriamo il controllo ottimale $u_{s,x}^*$, che è continuo in $[s, T]$ essendo $(h')^{-1}$ continua, nonché il corrispondente stato ottimale $y_{s,x}^*$. Per continuità esiste $\eta \in]0, \delta]$ tale che

$$\|y_{s,x}^*(t) - x\|_X < \delta \quad \forall t \in [s, s + \eta].$$

Dunque, per $t \in [s, s + \eta]$ si ha, grazie alla proposizione 3.4.16(ii),

$$\varphi(s, x) - \varphi(t, y_{s,x}^*(t)) \geq V(s, x) - V(t, y_{s,x}^*(t)) = \int_s^t [g(y_{s,x}^*(r)) + h(u_{s,x}^*(r))] dr.$$

Osservato che, per la continuità di $u_{s,x}^*$,

$$\lim_{t \rightarrow s^+} \frac{y_{s,x}^*(t) - x}{t - s} = \lim_{t \rightarrow s^+} \frac{1}{t - s} \left[G(t - s)x + \int_s^t G(t - \sigma) B u_{s,x}^*(\sigma) d\sigma \right] = Ax + B u_{s,x}^*(s),$$

dividendo per $t - s$ e facendo tendere $t \rightarrow s^+$ si ottiene

$$- \left[\frac{d}{dt} \varphi(t, y_{s,x}^*(t)) \right]_{t=s} \geq g(x) + h(u_{s,x}^*(s)),$$

ossia

$$-\varphi_s(s, x) - \langle \varphi_x(s, x), Ax + B u_{s,x}^*(s) \rangle_X - g(x) - h(u_{s,x}^*(s)) \geq 0;$$

ne deduciamo, a maggior ragione,

$$-\varphi_s(s, x) - \langle \varphi_x(s, x), Ax \rangle_X - g(x) + h^*(-B^* \varphi_x(s, x)) \geq 0.$$

Ciò prova (ii) e conclude la dimostrazione del teorema 3.4.26. \square

Osservazione 3.4.28 Nel caso lineare-quadratico, l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman si riduce all'equazione differenziale di Riccati. Infatti si ha

$$V(s, x) = \langle Q(s)x, x \rangle_X, \quad g(y) = \langle My, y \rangle_X, \quad h(u) = \langle Nu, u \rangle_U;$$

quindi

$$\begin{aligned} h^*(z) &= \sup_{u \in U} \{ \langle z, u \rangle_U - h(u) \} = \sup_{u \in U} \{ \langle z, u \rangle_U - \langle Nu, u \rangle_U \} = \\ &= \sup_{u \in U} \left\{ 2 \left\langle \frac{1}{2} N^{-\frac{1}{2}} z, N^{\frac{1}{2}} u \right\rangle_U - \|N^{\frac{1}{2}} u\|_U^2 \right\} = \\ &= \sup_{u \in U} \left\{ - \left\| \frac{1}{2} N^{-\frac{1}{2}} z - N^{\frac{1}{2}} u \right\|_U^2 + \frac{1}{4} \|N^{-\frac{1}{2}} z\|_U^2 \right\} = \frac{1}{4} \langle N^{-1} z, z \rangle_U. \end{aligned}$$

Perciò l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman (3.41) diventa

$$\frac{d}{ds}\langle Q(s)x, x \rangle_X + 2\langle Q(s)x, Ax \rangle_X + \langle Mx, x \rangle_X - \frac{1}{4}\langle N^{-1}B^* 2Q(s)x, B^* 2Q(s)x \rangle_U = 0,$$

vale a dire

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\langle Q(s)x, x \rangle_X &= \\ &= -\langle Q(s)x, Ax \rangle_X - \langle Ax, Q(s)x \rangle_X - \langle Mx, x \rangle_X + \langle N^{-1}B^*Q(s)x, B^*Q(s)x \rangle_U, \end{aligned}$$

che è l'equazione di Riccati (3.16) con $y = x$.

Bibliografia

- [1] P. Acquistapace, Appunti di analisi convessa, 2017, <http://people.dm.unipi.it/~acquistp/anacon.pdf>
- [2] A. Bensoussan, G. Da Prato, M. C. Delfour, S. K. Mitter, Representation and control of infinite dimensional systems, Birkhäuser, Boston 2007.
- [3] N. Dunford, J. T. Schwartz, Linear operators. Part I: general theory, In terscience Publishers, New York 1957.
- [4] K.-J. Engel, R. Nagel, One-parameter semigroups for linear evolution equations, Springer, New York 2000.
- [5] W. H. Fleming, R. W. Rishel, Deterministic and stochastic optimal control, Springer, New York 1975.
- [6] E. J. McShane, Integration, Princeton University Press, Princeton 1947.
- [7] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer, New York 1983.
- [8] J.-P. Penot, Calculus without derivatives, Springer, New York 2015.
- [9] A. Rachah, D. F. M. Torres, Mathematical modelling, simulation, and optimal control of the 2014 Ebola outbreak in West Africa, Discrete Dyn. Nat. Soc. 2015, Art. ID 842792, <http://dx.doi.org/10.1155/2015/842792>.
- [10] J. Yong, X. Zhou, Stochastic Controls. Hamiltonian systems and HJB equations, Springer, 1999.
- [11] J. Zabczyk, Mathematical control theory. An introduction, Birkhäuser, Boston 2008.

Indice analitico

- applicazione
 - affine, 126
 - differenziabile
 - secondo Fréchet, 26, 29–31, 129
 - secondo Gâteaux, 125, 127, 129, 131
 - surgettiva, 29, 30
- approssimanti di Yosida, 80
- atterraggio morbido, 3
- bipolare, 128
- co-stato, 95
 - ottimale, 95, 96, 105
- combinazione convessa, 62
- completa stabilizzabilità, 21
- condizione
 - del rango, 9
 - di Kalman, 9
 - di qualificazione, 33
 - necessaria, 38, 50, 132
- coniugata, 127
- cono
 - normale, 26, 30
 - tangente, 26
- consumo ottimale, 4
- contrazione, 109
- controllabilità, 2, 5, 8
- controllo, 2
 - ammissibile, 52, 54, 58, 113, 122
 - closed-loop, 2
 - feedback, 2, 97, 114
 - lineare-convesso, 122, 139, 141
 - lineare-quadratico, 94
 - open-loop, 2
 - ottimale, 3, 6, 25, 96, 114, 123, 132
- convergenza
 - debole, 94, 114
- coppia
 - esponenzialmente rilevabile, 119
 - esponenzialmente stabilizzabile, 118, 119
 - ottimale, 35, 94, 95, 105
- coppia ottimale, 38, 50
- crescita esponenziale, 78
- criterio di stabilità, 15
- decomposizione di Kalman, 20
- derivata
 - debole, 75
 - distribuzionale, 38
- dinamica, 139
- disuguaglianza
 - di Poincaré, 90
 - di Young, 127
- duale, 26, 91
 - di $C([0, T], \mathbb{R}^n)$, 36
 - di $H_0^1(\Omega)$, 91
- epidemia, 39
 - con vaccinazione, 39
- equazione
 - closed-loop, 100
 - di Hamilton-Jacobi-Bellman, 134, 137, 139, 141, 143
 - di Lyapunov, 14, 86
 - di osservazione, 2
 - di Riccati, 102, 103, 111, 143
 - algebrica, 114
 - in avanti, 105, 112
 - in forma mild, 106, 113
 - integrale, 108, 116
 - di Volterra, 35
- feedback, 2, 97, 105
 - esponenzialmente stabilizzante, 3
 - stabilizzante, 3, 16, 118, 119
- forma

- bilineare, 90
 - hermitiana, 87
 - quadratica
 - indefinita, 93
- formula
 - di Taylor, 137, 138
 - di variazione delle costanti, 6
 - feedback, 101, 104, 105
- funzionale
 - costo, 3, 25
 - guadagno, 3
 - quadratico, 94
- funzione
 - bipolare, 128
 - coniugata, 127
 - convessa, 122, 124, 136
 - Hamiltoniana, 139
 - lipschitziana, 102, 132, 134
 - polare, 127
 - propria, 128
 - sottodifferenziabile, 126
 - strettamente convessa, 122, 124
 - valore, 95, 102, 131, 134, 136, 141
- generatore
 - di un gruppo, 75, 93
 - di un semigruppoo, 71, 79, 82, 86, 90, 94, 105, 113, 120, 122
- gruppo, 69
 - contrattivo, 93
 - fortemente continuo, 75, 93
- Hamiltoniana, 139
- individui
 - infetti, 39
 - rimossi, 39
 - suscettibili, 39
- integrale di Bochner, 71
- inviluppo convesso, 62
- lemma
 - di Fatou, 114, 123
 - di Grönwall, 52
 - di selezione, 65
- fondamentale del calcolo delle variazioni, 37
 - malattia, 39
 - endemica, 40
 - matrice
 - compagna, 17
 - di controllabilità, 6
 - di osservabilità, 11
 - esponenziale, 6
 - metodo di Newton, 28
 - moltiplicatore, 33, 43, 95
 - numero riproduttivo di base, 40
 - operatore
 - chiuso, 68, 74, 79
 - coercivo, 94
 - di evoluzione, 108, 113
 - di Riccati, 97, 114
 - dissipativo, 90
 - integrale, 41, 108
 - massimale dissipativo, 90, 93
 - monotono, 125
 - strettamente monotono, 125, 132
 - surgettivo, 32
 - orizzonte
 - finito, 25
 - infinito, 25
 - osservabilità, 2, 11
 - ottimalità, 3
 - polare, 127
 - polarizzazione, 104, 111, 115
 - principio di ottimalità di Bellman, 98, 103
 - problema
 - del regolatore, 4
 - del tempo minimo, 3, 54
 - di Bolza, 3, 34
 - di calcolo delle variazioni, 5
 - di Cauchy, 69, 82, 105, 112, 113, 134
 - retrogrado, 95, 105
 - lineare-quadratico
 - in orizzonte finito, 68, 94
 - in orizzonte infinito, 113
 - prodotto scalare, 90, 93

punto di equilibrio
 esponenzialmente stabile, 3
 stabile, 3

rilevabilità esponenziale, 119

semigruppò, 70, 120
 contrattivo, 77, 90
 fortemente continuo, 70, 79, 82, 86, 94, 105, 113, 120, 122
 esponenzialmente stabile, 118, 120

sistema, 2
 completamente stabilizzabile, 16
 controllabile, 2, 9, 17, 20
 dinamico, 25
 esponenzialmente stabilizzabile, 3
 lineare, 5, 9, 11, 13
 osservabile, 2, 11, 13, 15
 stabile, 14, 15
 stabilizzabile, 3, 16

sistemi dinamici equivalenti, 17

soglia di crescita, 76

soluzione
 di viscosità, 139–141
 forte, 82
 in senso classico, 140
 minimale, 114
 stretta, 82

sottodifferenziabilità, 126

sottodifferenziale, 126, 129

sottogradiente, 126

spazio
 di Sobolev, 75
 duale, 26, 91

spettro, 78

stabilità, 13

stabilizzabilità, 3, 13, 118
 esponenziale, 118

stato, 2
 finale, 51
 iniziale, 51
 ottimale, 96
 raggiungibile, 2, 7, 9

strategia ottimale di vaccinazione, 49

subsoluzione di viscosità, 140

successione minimizzante, 45, 64, 67, 94, 114, 123

supersoluzione di viscosità, 140

tasso
 di contagio, 39
 di guarigione, 39
 di immunizzazione, 39

tempo
 finale, 51
 iniziale, 51

teorema
 dell'alternativa di Fredholm, 41
 della convergenza dominata, 80, 84
 di Ascoli-Arzelà, 46, 50, 60
 di Banach-Steinhaus, 87, 108
 di Carathéodory, 45
 di Cesàri, 52
 di completa stabilizzabilità, 16
 di controllabilità, 9
 di Datko, 86, 121
 di derivazione di Lebesgue, 66
 di Fenchel-Moreau, 128
 di Fermat, 26
 di Filippov, 52
 di Fubini-Tonelli, 43, 129
 di Hahn-Banach, 123, 127, 128
 di Hille-Yosida, 120
 di Kantorovich, 28
 di Lusin, 66
 di Lyusternik, 31
 di Lyusternik-Graves, 29
 di osservabilità, 11
 di Pontrjagin, 33, 43, 95
 di Riesz, 87, 91
 di stabilità, 13

tipo di un semigruppò, 76

topologia
 debole, 127
 debole*, 126

traslazione, 69

vaccinazione, 39

valore di soglia critica, 40

vincolo, 33

di disuguaglianza, 33
di uguaglianza, 33
differenziale, 34