Prove scritte di Analisi in più variabili 1 2013-14

Prova scritta del 5 luglio 2013

Esercizio 1 Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} e^{-nx}$$

al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''' + 6u'' + 9u' = 18\cos 3x \\ u(0) = \frac{4}{3} \\ u'(0) = 0 \\ u''(0) = 6. \end{cases}$$

Esercizio 3 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_Q \sqrt[n]{\frac{y^{2n} + x^{2n}}{n + (x^2+y^2)^{3n}}}\, dxdy,$$

ove $Q = [0, \infty[\, \times [0, \infty[\,$.

Esercizio 4 Calcolare l'integrale della forma differenziale lineare

$$\omega = \left[\ln(1 + x^2 z^2) + (y+1)z\right] dx + \left[zx^2 + y^3 e^{-y^2}\right] dy + [zy - \arctan z + 1]\, dz$$

lungo la curva $+\Gamma$, bordo del triangolo di vertici $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0, \frac{1}{2}, 1)$, orientata secondo l'ordinamento dei vertici.

Risoluzione

Esercizio 1 Analizziamo la convergenza assoluta. Dato che

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^2} e^{-nx}} = \limsup_{n\to\infty} |x|^n e^{-x} = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < 1 \\ e^{-1} & \text{se } x = 1 \\ +\infty & \text{se } x > 1 \\ e & \text{se } x = -1, \\ +\infty & \text{se } x < -1, \end{cases}$$

il criterio della radice ci dice che la serie converge assolutamente per $x \in]-1,1]$, e diverge a $+\infty$ per $x > 1$, mentre per $x \leq -1$ essa è indeterminata e divergente in modulo.
In particolare, si ha convergenza semplice se e solo se vi è convergenza assoluta.
Analizziamo la convergenza totale. Per ogni $\delta \in]0,1[$ vi è convergenza totale nell'intervallo $[-1+\delta, 1]$: infatti, per $x \in [-1+\delta, 0]$ si ha, essendo $t \mapsto t^n e^t$ crescente per $t \geq 0$,

$$|x|^{n^2} e^{-nx} = |x|^{n^2} e^{n|x|} \leq \left[(1-\delta)^n e^{1-\delta}\right]^n \to 0 \quad \text{per } n \to \infty,$$

mentre per $x \in [0,1]$ si ha analogamente, essendo $t \mapsto t^n e^{-t}$ crescente per $0 \leq t \leq n$,

$$x^{n^2} e^{-nx} = (x^n\, e^{-x})^n \leq e^{-n} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty;$$

dunque

$$\max_{x\in[-1+\delta,1]} |x|^{n^2} e^{-nx} \leq$$
$$\leq \max\left\{ \max_{x\in[-1+\delta,0]} |x|^{n^2} e^{-nx}, \max_{x\in[0,1]} |x|^{n^2} e^{-nx} \right\} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Infine, per quanto riguarda la convergenza uniforme, essa si ha negli stessi intervalli in cui c'è convergenza totale.

Esercizio 2 L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti: cerchiamo anzitutto le soluzioni dell'equazione omogenea. L'equazione caratteristica è

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda^2 + 6\lambda + 9) = \lambda(\lambda+3)^2 = 0,$$

e le sue radici sono $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$. Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea è dunque

$$u_0(x) = 1, \quad u_1(x) = e^{-3x}, \quad u_2(x) = x\, e^{-3x};$$

dunque le soluzioni dell'equazione omogenea sono tutte e sole le funzioni della forma

$$c_0 + c_1 e^{-3x} + c_2\, x\, e^{-3x}, \qquad c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Cerchiamo adesso una soluzione particolare v dell'equazione data. Dato che $3i$ non è radice dell'equazione caratteristica, possiamo cercare v della forma

$$v(x) = A\cos 3x + B\sin 3x,$$

con A e B da determinare. Essendo

$$\begin{aligned} v'(x) &= -3A\sin 3x + 3B\cos 3x, \\ v''(x) &= -9A\cos 3x - 9B\sin 3x, \\ v'''(x) &= 27A\sin 3x - 27B\cos 3x, \end{aligned}$$

sostituendo nell'equazione si ha

$$\begin{aligned} 18\cos 3x = v''' + 6v'' + 9v' = 27A\sin 3x - 27B\cos 3x - \\ -54A\cos 3x - 54B\sin 3x - 27A\sin 3x + 27B\cos 3x, \end{aligned}$$

da cui segue il sistema

$$\begin{cases} -54A = 18 \\ -54B = 0 \end{cases}$$

e dunque $A = -\frac{1}{3}$, $B = 0$. Quindi le soluzioni dell'equazione differenziale data sono le funzioni

$$u(x) = c_0 + c_1\, e^{-3x} + c_2\, x\, e^{-3x} - \frac{1}{3}\cos 3x, \qquad c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Imponiamo adesso le condizioni di Cauchy: essendo

$$\begin{aligned} u'(x) &= -3c_1\, e^{-3x} + c_2\, e^{-3x} - 3c_2\, x\, e^{-3x} + \sin 3x, \\ u''(x) &= 9c_1\, e^{-3x} - 6c_2\, e^{-3x} + 9c_2\, x\, e^{-3x} + 3\cos 3x, \end{aligned}$$

si trova

$$\begin{cases} \frac{4}{3} = u(0) = c_0 + c_1 - \frac{1}{3} \\ 0 = u'(0) = -3c_1 + c_2 \\ 6 = u''(0) = 9c_1 - 6c_2 + 3, \end{cases}$$

da cui, facilmente, $c_0 = 2$, $c_1 = -\frac{1}{3}$, $c_2 = -1$. La soluzione del problema di Cauchy è pertanto

$$u(x) = 2 - \frac{1}{3}\, e^{-3x} - x\, e^{-3x} + 3\cos 3x.$$

Esercizio 3 Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ la funzione integranda

$$f_n(x, y) = \sqrt[n]{\frac{y^{2n} + x^{2n}}{n + (x^2 + y^2)^{3n}}}$$

è non negativa e continua, quindi misurabile. Inoltre, analizzando il termine predominante a numeratore e denominatore, è facile verificare che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,y) = \begin{cases} \max\{y^2, x^2\} & \text{se } x^2+y^2 \le 1 \\[2ex] \dfrac{\max\{y^2, x^2\}}{(x^2+y^2)^3} & \text{se } x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

La convergenza è dominata, perché

$$f_n(x,y) \le \begin{cases} y^2+x^2 \le 1 & \text{se } x^2+y^2 \le 1 \\[2ex] \dfrac{y^2+x^2}{(x^2+y^2)^3} = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } x^2+y^2 > 1, \end{cases}$$

e la funzione

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2+y^2 \le 1 \\[2ex] \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } x^2+y^2 > 1, \end{cases}$$

è sommabile in Q, come è facile verificare usando le coordinate polari:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty g(x,y)\,dxdy = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)\,r\,d\vartheta dr =$$
$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\,d\vartheta dr + \int_1^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{-3}\,d\vartheta dr = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Pertanto, posto $S = \{(x,y) \in Q :\ x^2+y^2 \le 1\}$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_Q f_n(x,y)\,dxdy = \int_S \max\{y^2, x^2\}\,dxdy + \int_{Q\setminus S} \frac{\max\{y^2, x^2\}}{(x^2+y^2)^3}\,dxdy.$$

D'altra parte, passando a coordinate polari, abbiamo

$$\int_S \max\{y^2, x^2\}\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \max\{\sin^2\vartheta, \cos^2\vartheta\}\,r\,d\vartheta dr =$$
$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^3 \cos^2\vartheta\,d\vartheta dr + \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin^2\vartheta\,d\vartheta dr =$$
$$= \frac{1}{4}\left[\left[\frac{\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\frac{\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{1}{8} + \frac{\pi}{16}\,,$$

ed analogamente

$$\int_{Q\setminus S}\frac{\max\{y^2,x^2\}}{(x^2+y^2)^3}\,dxdy=\int_1^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^2\ \max\{\sin^2\vartheta,\cos^2\vartheta\}}{r^6}\,r\,d\vartheta dr=$$

$$=\int_1^\infty\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^{-3}\cos^2\vartheta\,d\vartheta dr+\int_1^\infty\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}r^{-3}\sin^2\vartheta\,d\vartheta dr=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left[\frac{\vartheta+\sin\vartheta\cos\vartheta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[\frac{\vartheta-\sin\vartheta\cos\vartheta}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right]=\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}.$$

Si conclude allora che

$$\lim_{n\to\infty}\int_Q\sqrt[n]{\frac{y^{2n}+x^{2n}}{n+(x^2+y^2)^{3n}}}\,dxdy=\frac{3}{8}+\frac{3\pi}{16}\,.$$

Esercizio 4 La forma ω va integrata sulla poligonale Γ di vertici $P=(0,0,0)$, $Q=(0,1,0)$, $R=(0,\frac{1}{2},1)$, la quale è contenuta nel piano $x=0$. Dunque lungo tale curva, che è di classe C^1 a tratti, si ha $dx=0$ e $x=0$. Si ha quindi

$$\int_{+\Gamma}\omega=\int_{+\Gamma}\left[y^3e^{-y^2}\,dy+(zy-\arctan z+1)\,dz\right].$$

Invece di calcolare direttamente questo integrale, noioso anche se non difficile, osserviamo che la curva Γ delimita un dominio regolare a tratti, ossia il triangolo $T=PQR$. Utilizzando la formula di Gauss-Green nel piano yz, si ha

$$\int_{+\Gamma}\left[y^3e^{-y^2}\,dy+(zy-\arctan z+1)\,dz\right]=$$

$$=\int_T\left[\frac{\partial}{\partial y}(zy-\arctan z+1)-\frac{\partial}{\partial z}y^3e^{-y^2}+\right]\,dydz=$$

$$=\int_T(z-0)\,dydz.$$

Dunque

$$\int_{+\Gamma}\omega\ =\ \int_T z\,dydz=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{2y}z\,dzdy+\int_{\frac{1}{2}}^1\int_0^{2-2y}z\,dzdy=$$

$$=\ \int_0^{\frac{1}{2}}2y^2\,dy+\int_{\frac{1}{2}}^1 2(1-y)^2\,dy=2\int_0^{\frac{1}{2}}2y^2\,dy=\frac{1}{6}\,.$$

Prova scritta del 10 settembre 2013

Esercizio 1 Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2 \arctan \frac{2x}{\pi}\right)^n}{x^n\, n^x}$$

al variare del parametro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, determinando gli intervalli in cui c'è convergenza totale, assoluta e puntuale.

Esercizio 2 Si determini, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-n(x^2-x)} \frac{x^n}{1+x^n}\, dx.$$

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_E |x|\, y\, \ln(x^2+y^2)\, dxdy,$$

ove

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + \frac{y^2}{4} < 1, \; y > 0\right\}.$$

Esercizio 4 Risolvere il problema di Cauchy seguente:

$$\begin{cases} y'' + 4y = \dfrac{1}{1+\cos 2x} \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 1 La serie è a termini positivi per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: infatti la funzione

$$\frac{2 \arctan \frac{2x}{\pi}}{x}, \qquad x > 0,$$

è positiva e pari (quoziente di due dispari). Si noti però che il termine generale della serie,

$$a_n(x) = \frac{\left(2 \arctan \frac{2x}{\pi}\right)^n}{x^n\, n^x},$$

non è pari.

Analizziamo la convergenza puntuale, ovvero assoluta: se $x > 0$, la funzione

$2\arctan\frac{2x}{\pi}$ è concava e tocca la funzione x per $x=0$ e per $x=\frac{\pi}{2}$; pertanto essa sta al di sopra di x per $0<x<\frac{\pi}{2}$, mentre accade il contrario per $x>\frac{\pi}{2}$. Quindi, essendo

$$a_n(x)\le\frac{\left(2\arctan\frac{2x}{\pi}\right)^n}{x^n}\quad\forall x>\frac{\pi}{2},$$

la serie converge puntualmente in $\left]\frac{\pi}{2},\infty\right[$ per confronto con un'opportuna serie geometrica. Se invece $0<x<\frac{\pi}{2}$ la serie diverge perché il suo termine generale non è infinitesimo, dato che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^x}\frac{\left(2\arctan\frac{2x}{\pi}\right)^n}{x^n}=+\infty\quad\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[.$$

Infine se $x=\frac{\pi}{2}$ il termine generale si riduce a

$$a_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{n^{\pi/2}}$$

e quindi la serie è armonica generalizzata di parametro $\frac{\pi}{2}>1$, dunque convergente.
Se $x<0$ il discorso è quasi analogo: si ha convergenza puntuale per $x<-\frac{\pi}{2}$, perché $a_n(x)$ è il prodotto del monomio $n^{|x|}$ per una potenza di n con base minore di 1; si ha divergenza per $-\frac{\pi}{2}<x<0$, avendosi una potenza di n con base maggiore di 1, per giunta peggiorata dal monomio $n^{|x|}$; infine nel punto $x=-\frac{\pi}{2}$ la serie diverge perché

$$a_n\left(-\frac{\pi}{2}\right)=n^{\pi/2}$$

e quindi esso non è infinitesimo.
In definitiva, la serie diverge per $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$, mentre converge puntualmente (e assolutamente) per $x\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
Analizziamo ora la convergenza totale: per $x>0$, essa è verificata nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{2},\infty\right[$, in quanto

$$\sup_{x\in\left[\frac{\pi}{2},\infty\right[}a_n(x)=a_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

in virtù della decrescenza rispetto a x dei due fattori

$$\frac{1}{n^x},\qquad\left(\frac{2\arctan\frac{2x}{\pi}}{x}\right)^n.$$

Invece per $x < 0$ essa è verificata negli intervalli della forma $\left[-M, -\frac{\pi}{2} - \delta\right]$ con $M \geq \frac{\pi}{2}$ e $\delta > 0$: infatti non si può avere convergenza totale su semirette del tipo $\left]-\infty, -\frac{\pi}{2} - \delta\right]$ perchè per n fissato si ha

$$\lim_{x \to -\infty} n^{|x|} \left(\frac{2 \arctan \frac{2|x|}{\pi}}{|x|} \right)^n \geq \lim_{x \to -\infty} \frac{n^{|x|}}{|x|^n} \left(\frac{\pi}{2} \right)^n = +\infty,$$

mentre se $x \in \left[-M, -\frac{\pi}{2} - \delta\right]$ possiamo scrivere

$$a_n(x) = n^{|x|} \left(\frac{2 \arctan \frac{2|x|}{\pi}}{|x|} \right)^n \leq n^{M - \frac{\pi}{2} - \delta} \, a_n \left(\frac{\pi}{2} + \delta \right)$$

e quest'ultima quantità è il termine generale di una serie convergente, essendo una potenza di n moltiplicata per un'esponenziale con base minore di 1. Osserviamo che la convergenza uniforme ha luogo negli stessi intervalli in cui vale la totale.

Esercizio 2 L'integrando è non negativo: calcoliamone il limite puntuale. Anzitutto, notiamo che $0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} < 1$ per ogni $x \geq 0$ e che questa quantità per $n \to \infty$ va a 0 quando $x \in [0, 1[$, va a $\frac{1}{2}$ quando $x = 1$ e va a 1 quando $x > 1$. Inoltre, per $x \geq 0$ si ha

$$x^2 - x > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > 1,$$

quindi il limite puntuale dell'integrando è sicuramente 0 quando $x > 1$. Se invece $0 \leq x \leq 1$, la quantità $x \, e^{-(x^2 - x)}$ ha massimo uguale a 1: infatti tale funzione vale 0 per $x = 0$, vale 1 per $x = 1$ ed è crescente in $[0, 1]$, come si verifica calcolandone la derivata. Dunque, il limite puntuale dell'integrando è 0 anche per $0 \leq x < 1$, ed è $\frac{1}{2}$ per $x = 1$ (ma questo è ovviamente ininfluente). In definitiva

$$\lim_{n \to \infty} e^{-n(x^2 - x)} \frac{x^n}{1 + x^n} = 0 \quad \text{per q.o. } x \geq 0.$$

D'altra parte, la convergenza è dominata: infatti

$$e^{-n(x^2 - x)} \frac{x^n}{1 + x^n} \leq \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ e^{-(x^2 - x)} & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

e la funzione $e^{-(x^2 - x)}$ è certamente sommabile in $[1, \infty[$, essendo dominata ad esempio da $c \, e^{-x^2/2}$ per un'opportuna $c > 0$ (ad esempio, $c = e^{\frac{1}{2}}$).

Dunque, per il teorema di Lebesgue, l'integrale ha limite 0.

Esercizio 3 La funzione integranda è continua in E e limitata, poiché il fattore $|x|y$ annulla la singolarità logaritmica in $(0,0)$. Dunque l'integrale converge e si tratta di calcolarlo.
Notiamo poi che il dominio di integrazione è delimitato dall'asse x e da una semiellisse centrata in $(0,0)$, quindi esso è simmetrico rispetto all'asse x. Perciò, essendo l'integrando pari, si ha

$$\int_E |x|\, y\, \ln(x^2+y^2)\, dxdy = 2\int_{E^+} x\, y\, \ln(x^2+y^2)\, dxdy,$$

ove $E^+ = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + \frac{y^2}{4} < 1,\ x > 0,\ y > 0\Big\}$. Parametrizziamo E^+ con le coordinate ellittiche

$$x = r\, \cos\vartheta, \quad y = 2r\, \sin\vartheta, \qquad \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad r \in]0,1[\,.$$

Allora, essendo il determinante della trasformazione uguale a $2r$, si ha

$$\begin{aligned}
2\int_{E^+} & x\, y\, \ln(x^2+y^2)\, dxdy = \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 4r^2\cos\vartheta\sin\vartheta\ln\big(r^2(\cos^2\vartheta + 4\sin^2\vartheta)\big)\cdot 2r\, drd\vartheta = \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 8r^3\cos\vartheta\sin\vartheta\ln\big(r^2(1+3\sin^2\vartheta)\big)\, drd\vartheta = \\
&= \int_0^1 16r^3\ln r\, dr\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\sin\vartheta\, drd\vartheta + \\
&\quad + \int_0^1 8r^3\, dr\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\sin\vartheta\ln(1+3\sin^2\vartheta)\, d\vartheta = I_1 + I_2\,.
\end{aligned}$$

È immediato verificare che $I_1 = (-1)(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$, mentre ponendo $3\sin^2\vartheta = t$ il secondo integrale diventa

$$I_2 = 2\int_0^3 \frac{1}{6}\ln(1+t)\, dt = \frac{4\ln 4 - 3}{3}\,.$$

Pertanto

$$\int_E |x|\, y\, \ln(x^2+y^2)\, dxdy = I_1 + I_2 = \frac{8\ln 4 - 9}{6}\,.$$

Esercizio 4 L'equazione omogenea $y'' + 4y = 0$ ha chiaramente il sistema fondamentale di soluzioni

$$y_1(x) = \cos 2x, \qquad y_2(x) = \sin 2x.$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie: la soluzione particolare sarà dunque della forma

$$y(x) = \cos 2x \cdot u(x) + \sin 2x \cdot v(x),$$

con u, v funzioni incognite, che risolvono il sistema

$$\begin{cases} \cos 2x \cdot u'(x) + \sin 2x \cdot v'(x) = 0 \\ -2\sin 2x \cdot u'(x) + 2\cos 2x \cdot v'(x) = \dfrac{1}{1+\cos 2x}\,. \end{cases}$$

Con facili calcoli si trova

$$u'(x) = -\frac{\sin 2x}{2(1+\cos 2x)}\,, \qquad v'(x) = \frac{\cos 2x}{2(1+\cos 2x)}\,,$$

da cui, scegliendo arbitrariamente una primitiva,

$$u(x) = \frac{1}{4}\ln(1+\cos 2x), \qquad v(x) = \frac{x}{2} + \frac{\tan x}{4}\,.$$

In definitiva le soluzioni dell'equazione non omogenea sono tutte le funzioni della forma

$$y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{\cos 2x}{4}\ln(1+\cos 2x) + \frac{\sin 2x}{4}(2x - \tan x).$$

Imponendo la prima condizione $y(0) = 0$, si ottiene

$$0 = y(0) = A + \frac{\ln 2}{4},$$

mentre imponendo la seconda $y'(0) = 0$, ed eliminando i termini della derivata che si annullano per $x = 0$, troviamo

$$0 = y'(0) = 2B.$$

Dunque la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(x) = -\frac{\ln 2}{4}\cos 2x + \frac{\cos 2x}{4}\ln(1+\cos 2x) + \frac{\sin 2x}{4}(2x - \tan x).$$

Prova scritta del 13 gennaio 2014

Esercizio 1 Determinare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 12x + 4y$$

nell'insieme

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{4} + (y+2)^2 \leq 1 \right\}.$$

Esercizio 2 Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 - n^2 \sin 2x}{2n^2 + x^2} \exp\left(-\frac{n}{n+1} \sin x \right) dx.$$

Esercizio 3 Si consideri la curva Γ definita dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = (1 - |t|)(1+t) \\ y = t(t^2 - 1), \end{cases} \qquad t \in [-1, 1].$$

Si verifichi che Γ è una curva chiusa e si determini l'area della regione A da essa delimitata.

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione f è di classe C^∞. Cerchiamo i punti stazionari di f interni ad E: si ha $\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = \mathbf{0}$ se e solo se

$$\begin{cases} 8x - 12 = 0 \\ 2y + 4 = 0, \end{cases}$$

e questo sistema ha l'unica soluzione $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$, che è interna ad E come richiesto. Calcoliamo la matrice Hessiana in tale punto: essa è la matrice diagonale

$$H = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

I suoi autovalori sono positivi e pertanto $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$ è punto di minimo locale per f.
Vediamo cosa succede sul bordo di E. Si tratta di una ellisse centrata

in $(0, -2)$, con semiassi paralleli agli assi coordinati e di lunghezza 2 e 1. Possiamo parametrizzare ∂E nel modo seguente:

$$\begin{cases} x = 2\cos\vartheta \\ y = -2 + \sin\vartheta, \end{cases} \qquad \vartheta \in [-\pi, \pi].$$

La funzione f, ristretta a ∂E, diventa

$$\begin{aligned} g(\vartheta) &= f(2\cos\vartheta, -2 + \sin\vartheta) = \\ &= 16\cos^2\vartheta + (-2 + \sin\vartheta)^2 - 24\cos\vartheta + 4(-2 + \sin\vartheta) = \\ &= 16\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta - 4\sin\vartheta + 4 - 24\cos\vartheta - 8 + 4\sin\vartheta = \\ &= 15\cos^2\vartheta - 24\cos\vartheta - 3. \end{aligned}$$

Annulliamo la derivata di g: si ha $g'(\vartheta) = 0$ se e solo se

$$-30\cos\vartheta\sin\vartheta + 24\sin\vartheta = 0,$$

ossia se e solo se $\sin\vartheta = 0$ oppure $\cos\vartheta = \frac{4}{5}$. Si hanno quindi i punti stazionari vincolati seguenti:

$$\begin{aligned} &\text{per} \quad \cos\vartheta = \tfrac{4}{5}: \quad \left(\tfrac{8}{5}, -\tfrac{13}{5}\right), \quad \left(\tfrac{8}{5}, -\tfrac{7}{5}\right); \\ &\text{per} \quad \sin\vartheta = 0: \quad (2, -2), \quad (-2, -2). \end{aligned}$$

Non resta che calcolare i valori di f in tutti i punti trovati: si ha

$$f\left(\tfrac{3}{2}, -2\right) = -13, \quad f\left(\tfrac{8}{5}, -\tfrac{13}{5}\right) = f\left(\tfrac{8}{5}, -\tfrac{7}{5}\right) = -\tfrac{63}{5} = -12.6,$$

$$f(2, -2) = -12, \quad f(-2, -2) = 36.$$

Pertanto

$$\max_E f = f(-2, -2) = 36, \qquad \min_E f = f\left(\tfrac{3}{2}, -2\right) = -13.$$

Osservazione 1 In maniera equivalente, potevamo analizzare la $g(\vartheta)$ cambiando variabile: posto $t = \cos\vartheta$, la funzione da studiare è

$$h(t) = 15t^2 - 24t - 3, \qquad t \in [-1, 1].$$

Essendo

$$h'(t) = 30t - 24 = 0 \quad \text{se e solo se} \quad t = \frac{4}{5},$$

occorre considerare il punto $t = \frac{4}{5}$ nonché i due estremi $t = \pm 1$: si ricavano

$$\begin{aligned} &\text{per} \quad t = \tfrac{4}{5}: \quad \left(\tfrac{8}{5}, -\tfrac{13}{5}\right), \quad \left(\tfrac{8}{5}, -\tfrac{7}{5}\right); \\ &\text{per} \quad t = -1: \quad (-2, -2), \\ &\text{per} \quad t = 1: \quad (2, -2), \end{aligned}$$

che sono ovviamente i punti già trovati.

Osservazione 2 Naturalmente si poteva usare anche il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: posto

$$L(x, y, \lambda) = 4x^2 + y^2 - 12x + 4y + \lambda \left(\frac{x^2}{4} + (y+2)^2 - 1 \right),$$

il gradiente di L si annulla se e solo se

$$\begin{cases} 8x - 12 + \frac{\lambda x}{2} = 0 \\ 2y + 4 + 2\lambda(y+2) = 0 \\ \frac{x^2}{4} + (y+2)^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione si riscrive come $2(y + 2)(1 + \lambda) = 0$: quindi è risolta per $y = -2$, che implica (usando la terza equazione) $x = \pm 2$, oppure per $\lambda = -1$: in questo caso, grazie alla prima equazione, si ha $\frac{15}{2}x - 12 = 0$, ossia $x = \frac{8}{5}$ e dunque, dalla terza, $(y + 2)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$, da cui infine $y = -\frac{13}{5}$ oppure $y = -\frac{7}{5}$. In definitiva si ritrovano i punti

$$(2, -2), \quad (-2, -2), \quad \left(\tfrac{8}{5}, -\tfrac{13}{5}\right), \quad \left(\tfrac{8}{5}, -\tfrac{7}{5}\right).$$

Esercizio 2 Per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione integranda

$$f_n(x) = \frac{3 - n^2 \sin 2x}{2n^2 + x^2} \exp\left(-\frac{n}{n+1} \sin x \right)$$

è continua in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, quindi è misurabile; essa è anche integrabile, essendo evidentemente limitata. Inoltre si ha convergenza puntuale, poiché scrivendo

$$f_n(x) = \frac{n^2 \left(-\sin 2x + \frac{3}{n^2}\right)}{n^2 \left(2 + \frac{x^2}{n^2}\right)} \exp\left(-\frac{n}{n+1} \sin x \right)$$

si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = -\frac{\sin 2x}{2} e^{-\sin x} \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

La convergenza è dominata in quanto, come si vede immediatamente,

$$|f_n(x)| \leq \frac{\sin 2x + 3}{2} \leq 2 \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dal teorema di Lebesgue segue allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 - n^2 \sin 2x}{2n^2 + x^2} \exp\left(-\frac{n}{n+1} \sin x\right) dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, e^{-\sin x} \, dx.$$

Calcoliamo quest'ultimo integrale: ponendo $\sin x = t$ si ricava

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, e^{-\sin x} \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, \sin x \, e^{-\sin x} \, dx = \\ &= \int_0^1 t \, e^{-t} \, dt = \left[(-t-1)e^{-t}\right]_0^1 = 1 - 2e^{-1}, \end{aligned}$$

e dunque

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 - n^2 \sin 2x}{2n^2 + x^2} \exp\left(-\frac{n}{n+1} \sin x\right) dx = 2e^{-1} - 1.$$

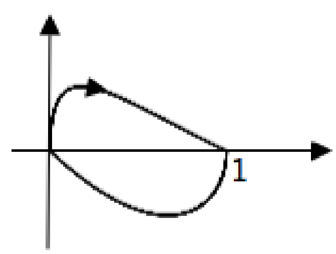
Esercizio 3 La curva Γ è chiusa perché, posto

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = ((1 - |t|)(1 + t), t(t^2 - 1)),$$

si ha $\boldsymbol{\varphi}(-1) = (0,0) = \boldsymbol{\varphi}(1)$. Inoltre $\boldsymbol{\varphi}$ è di classe C^1 a tratti, dato che $\boldsymbol{\varphi}|_{[-1,0]}$ e $\boldsymbol{\varphi}|_{[0,1]}$ sono curve di classe C^1. Per calcolare l'area della regione A delimitata da Γ conviene utilizzare le formule di Gauss-Green. Non essendoci particolari simmetrie, useremo la formula

$$m_2(A) = \int_{+\Gamma} x \, dy,$$

ove l'orientazione positiva di Γ è quella antioraria. Osserviamo che tale orientazione è opposta a quella delle t crescenti: infatti per $t \in]-1, 0[$ si ha $y > 0$ e x crescente da 0 a 1, mentre per $t \in]0, 1[$ risulta $y < 0$ e x decrescente da 1 a 0. Avremo dunque, essendo $y' = 3t^2 - 1$,



$$m_2(A) = \int_{+\Gamma} x \, dy = -\int_{-1}^{1} (1 - |t|)(1 + t)(3t^2 - 1) \, dt.$$

Dunque

$$\begin{aligned} m_2(A) &= -\int_{-1}^{0}(1+t)^2(3t^2-1)\,dt-\int_0^1(1-t^2)(3t^2-1)\,dt= \\ &= -\int_{-1}^{0}(3t^4+6t^3+2t^2-2t-1)\,dt-\int_0^1(-3t^4+4t^2-1)\,dt= \\ &= -\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+1-1\right)-\left(-\frac{3}{5}+\frac{4}{3}-1\right)=\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Prova scritta del 3 febbraio 2014

Esercizio 1 Determinare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y)=|xy-1|\,e^{\frac{5}{4}\,x+\frac{1}{4}\,y}$$

nell'insieme $[0,2]\times[0,2]$.

Esercizio 2 Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{x}{n^2}}}{1+x^{\frac{n+1}{n}}+\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2n}{n+1}}}\,dx.$$

Esercizio 3 Sia Γ il sostegno della curva del piano xy di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=\sin t \\ y=3-4\cos^2 t, \end{cases} \qquad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Si calcoli la lunghezza di Γ.

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione f è continua e non negativa in $Q=[0,2]\times[0,2]$, quindi ha massimo e minimo. Essa non è differenziabile lungo la curva $xy=1$, ma in tutti questi punti la funzione si annulla: dunque sono tutti punti di minimo assoluto.

Cerchiamo i punti stazionari di f interni a Q: a meno del segno, che è ininfluente, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} e^{\frac{5}{4}\,x+\frac{1}{4}\,y}\left[y+\frac{5}{4}(xy-1)\right]=0 \\ e^{\frac{5}{4}\,x+\frac{1}{4}\,y}\left[x+\frac{1}{4}(xy-1)\right]=0. \end{cases}$$

Eliminando la quantità $xy - 1$, si ricava subito $y = 5x$, e sostituendo nella seconda equazione troviamo

$$5x^2 + 4x - 1 = 0,$$

le cui soluzioni sono $\frac{1}{5}$ e -1; dunque i punti stazionari sono

$$(\tfrac{1}{5}, 1) \in Q, \qquad (-1, -5) \notin Q.$$

Risulta $f(\frac{1}{5}, 1) = \frac{4}{5}\, e^{\frac{1}{2}}$. Volendo si può anche calcolare la matrice Hessiana in questo punto: tenuto conto che esso si trova nella regione $xy - 1 < 0$, si ricava

$$\mathbf{H}_f(\tfrac{1}{5}, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix},$$

e dunque non possiamo dire nulla sulla natura di questo punto stazionario.
Analizziamo la funzione f sul bordo di Q. Esso è formato da quattro segmenti:

$$\gamma_1 = \{(0, y) : y \in [0, 2]\}, \qquad \gamma_2 = \{(x, 0) : x \in [0, 2]\},$$
$$\gamma_3 = \{(2, y) : y \in [0, 2]\}, \qquad \gamma_4 = \{(x, 2) : x \in [0, 2]\}.$$

Si ha:

$$f|_{\gamma_1}(y) = f(0, y) = e^{\frac{1}{4}\, y}$$

cresce da $f(0, 0) = 1$ a $f(0, 2) = e^{\frac{1}{2}}$;

$$f|_{\gamma_2}(x) = f(x, 0) = e^{\frac{5}{4}\, x}$$

cresce da $f(0, 0) = 1$ a $f(2, 0) = e^{\frac{5}{2}}$;

$$f|_{\gamma_3}(y) = f(2, y) = |2y - 1| e^{\frac{5}{2} + \frac{1}{4}\, y}$$

decresce da $f(2, 0) = e^{\frac{5}{2}}$ a $f(2, \frac{1}{2}) = 0$ per poi crescere fino a $f(2, 2) = 3e^3$;

$$f|_{\gamma_4}(x) = f(x, 2) = |2x - 1| e^{\frac{5}{4}\, x + \frac{1}{2}}$$

decresce da $f(0, 2) = e^{\frac{1}{2}}$ a $f(\frac{1}{2}, 2) = 0$ per poi crescere fino a $f(2, 2) = 3e^3$.
In conclusione, confrontando i valori trovati, abbiamo

$$\min_Q f = 0, \qquad \max_Q f = f(2, 2) = 3e^3.$$

Esercizio 2 Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ la funzione integranda è positiva e continua in $[0, \infty[$, e si ha chiaramente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n^2}}}{1 + x^{\frac{n+1}{n}} + \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2n}{n+1}}} = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{4}} \qquad \forall x \geq 0.$$

Il numeratore è crescente rispetto a n, ma per il denominatore la crescenza o decrescenza rispetto a n non è chiara. Conviene allora verificare le ipotesi del teorema di Lebesgue. Se consideriamo separatamente l'intervallo limitato $[0, 2]$ e la semiretta $]2, \infty[$, nella quale le potenze a denominatore hanno entrambe base maggiore di 1, otteniamo le stime

$$\frac{e^{-\frac{x}{n^2}}}{1 + x^{\frac{n+1}{n}} + \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2n}{n+1}}} \leq 1 \qquad \forall x \in [0, 2], \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

$$\frac{e^{-\frac{x}{n^2}}}{1 + x^{\frac{n+1}{n}} + \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2n}{n+1}}} \leq \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{4}{3}}} \quad \forall x > 2, \quad \forall n \geq 2.$$

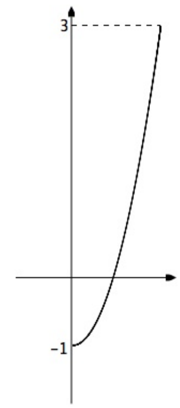
La funzione

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 2] \\ \dfrac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{4}{3}}} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

è sommabile in $[0, \infty[$, essendo continua, limitata e comportandosi come $x^{-\frac{4}{3}}$ per $x \to \infty$; quindi possiamo concludere, per convergenza dominata, che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{n^2}}}{1 + x^{\frac{n+1}{n}} + \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2n}{n+1}}} \, dx =$$
$$= \int_0^\infty \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{4}} \, dx = \int_0^\infty \frac{1}{(1 + \frac{x}{2})^2} \, dx = 2 \int_0^\infty \frac{dt}{(1 + t)^2} = 2.$$

Esercizio 3 L'insieme Γ è il sostegno della curva



$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (\sin t, 3 - 4\cos^2 t), \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

la quale è di classe C^1. Si ha

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = (\cos t, 8\cos t \sin t), \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

da cui

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\varphi}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t + 64\sin^2 t \cos^2 t}\, dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sqrt{1 + 64\sin^2 t}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 64 s^2}\, ds. \end{aligned}$$

Ponendo $8s = u$, si ottiene

$$\ell(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{8} \int_0^8 \sqrt{1 + u^2}\, du;$$

ricordando che una primitiva di $\sqrt{1+u^2}$ è

$$\frac{1}{2}\left(u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)\right),$$

si conclude che

$$\ell(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{16}\left[u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)\right]_0^8 = \frac{\sqrt{65}}{2} + \frac{1}{16}\ln\left(8 + \sqrt{65}\right).$$

Prova scritta del 13 giugno 2014

Esercizio 1.1 Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2} e^{nx}}{x^n + 2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Stabilire:

(i) per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge puntualmente;

(ii) per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge assolutamente;

(iii) in quali sottointervalli di $\mathbb{R}$ la serie converge totalmente.

Esercizio 1.2 Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + x^2 y^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(i) Si scriva la soluzione del problema.

(ii) Si mostri che essa è definita in $]-\infty, 1]$ ma non in $]-\infty, 2[$.

Esercizio 2.1 Trovare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(\mathbf{x}) = e^{-|\mathbf{x}|^2}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N,$$

nell'insieme

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} x_i = 1,\ x_j \geq 0 \text{ per } 1 \leq j \leq N\}.$$

Esercizio 2.2 Data la 1-forma differenziale

$$\frac{ax + by}{(x^2 + y^2)^\lambda}\, dx + \frac{cx + dy}{(x^2 + y^2)^\lambda}\, dy,$$

stabilire:

(i) per quali $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$ la forma è chiusa nell'aperto dove è definita,

(ii) per quali $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$ la forma è esatta nell'aperto dove è definita.

Esercizio 3.1 Determinare due numeri reali a, b tali che

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-n(x^2 - x^4)}\, dx = a\, n^b\, (1 + \mathrm{o}(1)) \quad \text{per } n \to \infty.$$

[**Suggerimento:** si utilizzi un opportuno cambiamento di variabile e si applichi un teorema di passaggio al limite sotto l'integrale.]

Esercizio 3.2 Sia Σ la superficie sferica

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Detto $\mathbf{F}$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2x + y + e^{z^2}, y - 3z + \arctan x^2, 3z - 2x - \sin y^2),$$

si calcoli il flusso del campo $\mathbf{F}$ attraverso la superficie Σ, ossia l'integrale

$$\int_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle_3 \, d\boldsymbol{\sigma},$$

ove $\mathbf{n}$ è il versore normale esterno a Σ.

Risoluzione

Esercizio 1.1 La serie è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Vediamo la convergenza assoluta.
Bisogna distinguere il caso $|x| < 1$ dal caso $|x| \geq 1$. Nel primo caso, $|x| < 1$, possiamo scrivere

$$\left| \frac{x^{n^2} e^{nx}}{x^n + 2} \right| = \frac{(|x|^n e^x)^n}{|x^n + 2|} \leq (|x|^n e^x)^n;$$

Invece nel secondo caso, per $|x| > 1$ e per $x = 1$ si ha

$$\left| \frac{x^{n^2} e^{nx}}{x^n + 2} \right| = \left(\frac{|x|^n e^x}{|x|} \right)^n \frac{1}{1 + \frac{2}{|x|^n}} \geq \frac{1}{2} (|x|^n e^x)^n,$$

mentre per $x = -1$ si trova

$$\left| \frac{x^{n^2} e^{nx}}{x^n + 2} \right| = \frac{e^{-n}}{2 + (-1)^n} \leq e^{-n}.$$

Pertanto, per confronto con un'opportuna serie geometrica, vi è convergenza assoluta se e solo se $x \in [-1, 1[$, mentre se $x \geq 1$ la serie diverge a $+\infty$ perché il suo termine generale non è infinitesimo.
Per la convergenza puntuale, essa ovviamente vale per ogni $x \in [-1, 1[$; se $x \geq 1$ la serie è a termini positivi e diverge a $+\infty$, mentre se $x < -1$ la serie

è divergente: infatti, poichè i numeri n e n^2 hanno la stessa parità, la serie è ancora a termini positivi e quindi diverge per quanto visto in precedenza.
Analizziamo gli intervalli di convergenza totale. Se $[-a,a] \subset]-1,1[$, certamente vi è convergenza totale, sempre in virtù del confronto con una opportuna serie geometrica, essendo

$$\left|\frac{x^{n^2}e^{nx}}{x^n+2}\right| \le \frac{(a^n e^a)^n}{2-a^n} \le (a^n e^a)^n.$$

D'altra parte, in $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$ si ha

$$\left|\frac{x^{n^2}e^{nx}}{x^n+2}\right| = \frac{(|x|^n e^{-|x|})^n}{||x|^n+2(-1)^n|} \le |x|^n \le 2^{-n},$$

e quindi vi è convergenza totale in $[-1,a]$ per ogni $a \in]0,1[$.

Esercizio 1.2 L'equazione è di tipo Riccati con esponente 2: quindi bisogna porre $u(x) = y(x)^{-1}$, e si ha

$$u'(x) = -\frac{y'(x)}{y(x)^2} = -\frac{y(x)+x^2y(x)^2}{y(x)^2} = -u(x)+x^2,$$

e naturalmente $u(1) = 1$.
La soluzione di questo problema di Cauchy è

$$u(x) = 3e^{-x} - x^2 + 2x - 2,$$

da cui

$$y(x) = \frac{1}{3e^{-x} - x^2 + 2x - 2}.$$

Questa funzione è certamente definita in un intorno di 1; ma scrivendola nella forma

$$y(x) = \frac{1}{3e^{-x} - 1 - (x-1)^2},$$

si vede che essa è definita nell'intervallo di $\mathbb{R}$ in cui risulta

$$3e^{-x} - 1 - (x-1)^2 > 0.$$

Tale intervallo contiene certamente la semiretta $]-\infty,1]$: infatti, se $x \le 0$ si ha semplicemente

$$1 + (x-1)^2 \le 2 < 3 \le 3e^{-x} \qquad \forall x \le 0,$$

mentre per $0 < x \leq 1$, ricordando che

$$3e^{-x} = 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} > 3 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 \qquad \forall x \geq 0,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} 1 + (x-1)^2 &= 2 - 2x + x^2 = 3 - 3x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 < \\ &< 3e^{-x} + (1-x)\left(-1 + \frac{1}{2}x^2\right) < 3e^{-x} \qquad \forall x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Dunque la soluzione y è definita almeno in $]-\infty, 1]$. Se $x \geq 2$, invece, si ha

$$1 + (x-1)^2 \geq 2 > 3e^{-2} \geq 3e^{-x} \qquad \forall x \geq 2,$$

e quindi la soluzione non è estendibile a $]-\infty, 2]$.

Esercizio 2.1 La funzione f è di classe C^∞ e l'insieme V è compatto e privo di punti interni, quindi il massimo ed il minimo di f esistono finiti. Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori e consideriamo la funzione Lagrangiana

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = e^{-|\mathbf{x}|^2} + \lambda \left[\sum_{i=1}^{N} x_i - 1\right],$$

definita per $x_1, \ldots, x_N \geq 0$; si noti che se qualcuno degli x_j è nullo, il problema si riduce di dimensione ma non cambia. Naturalmente, non tutti gli x_j possono annullarsi simultaneamente, poiché la loro somma deve fare 1. Supponiamo allora che esista $p \in \mathbb{N}$, con $1 \leq p \leq N$, tale che il punto stazionario vincolato $\mathbf{x}$ abbia esattamente p componenti non nulle, che per simmetria possiamo supporre essere le prime p: dunque $x_1, \ldots, x_p > 0$ mentre $x_{p+1}, \ldots, x_n = 0$. Si ha allora

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = e^{-|\mathbf{x}|^2} + \lambda \left[\sum_{i=1}^{p} x_i - 1\right] = e^{-x_1^2 - \ldots - x_p^2} + \lambda \left[\sum_{i=1}^{p} x_i - 1\right].$$

Annullando il gradiente di L, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -2x_i e^{-|\mathbf{x}|^2} + \lambda = 0, \quad i = 1, \ldots, p \\ \sum_{i=1}^{p} x_i = 1. \end{cases}$$

Le prime p equazioni del sistema ci dicono che

$$x_i = \frac{\lambda}{2}\, e^{|\mathbf{x}|^2}\,,$$

ove $\lambda > 0$ è il corrispondente moltiplicatore. Quindi gli x_i, $1 \le i \le p$, sono tutti uguali e pertanto l'ultima equazione del sistema ci dice che

$$x_i = \frac{1}{p}, \qquad i = 1, \dots p.$$

Si trova anche, quadrando e sommando,

$$\frac{1}{p} = \frac{\lambda}{2}\, e^{\frac{1}{p}},$$

da cui segue che il moltiplicatore relativo ai punti stazionari con esattamente p componenti non nulle è

$$\lambda_p = \frac{2e^{-\frac{1}{p}}}{p}\,.$$

Il corrispondente valore critico è

$$e^{-\frac{1}{p}}.$$

Non ci resta che trovare il massimo ed il minimo di questa espressione al variare di p tra 1 e N: dato che l'esponente è funzione crescente di p, si ha

$$\max_V f = e^{-\frac{1}{N}}, \qquad \min_V f = e^{-1}.$$

Esercizio 2.2 La forma

$$\omega(x,y) = \frac{ax+by}{(x^2+y^2)^\lambda}\, dx + \frac{cx+dy}{(x^2+y^2)^\lambda}\, dy$$

è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (se $\lambda > 0$) oppure in $\mathbb{R}^2$ (se $\lambda \le 0$). Imponiamo che siano uguali le derivate "incrociate": posto

$$\alpha(x,y) = \frac{ax+by}{(x^2+y^2)^\lambda}, \qquad \beta(x,y) = \frac{cx+dy}{(x^2+y^2)^\lambda},$$

si ha

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y}(x,y) = \frac{bx^2+by^2-2\lambda axy-2\lambda by^2}{(x^2+y^2)^{\lambda+1}}, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial x}(x,y) = \frac{cx^2+cy^2-2\lambda cx^2-2\lambda dxy}{(x^2+y^2)^{\lambda+1}},$$

e dunque

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad bx^2 + by^2 - 2\lambda axy - 2\lambda by^2 = cx^2 + cy^2 - 2\lambda cx^2 - 2\lambda dxy,$$

ovvero

$$(b - c + 2\lambda c)x^2 + (b - c - 2\lambda b)y^2 - 2\lambda(a - d)xy = 0.$$

Queste relazioni devono valere per ogni x, y, e quindi deve essere

$$b - c + 2\lambda c = 0, \quad b - c - 2\lambda b, \quad \lambda(a - d) = 0.$$

Se $\lambda = 0$, otteniamo $b = c$; se $\lambda = \frac{1}{2}$, si trova $b = c = 0$ e $a = d$, se $\lambda \notin \{0, \frac{1}{2}\}$ si ricava $c = -(2\lambda - 1)b = (2\lambda - 1)^2 c$, da cui, se $\lambda = 1$, si deduce $b = -c$ e $a = d$, mentre se $\lambda \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ si conclude che $b = c = 0$, $a = d$. Morale: la forma è chiusa se e solo se

$$\begin{cases} b = c & \text{se } \lambda = 0 \\ b = -c \quad \text{e} \quad a = d & \text{se } \lambda = 1 \\ b = c = 0 \quad \text{e} \quad a = d & \text{se } \lambda \notin \{0, 1\}. \end{cases}$$

Per $\lambda \leq 0$, queste condizioni implicano anche l'esattezza di ω, poiché essa è in tal caso definita su $\mathbb{R}^2$. Per $\lambda > 0$, la condizione per l'esattezza è che sia nullo l'integrale curvilineo di ω su una qualunque curva γ regolare a tratti che circondi l'origine; scegliendo la circonferenza di raggio 1 orientata in verso antiorario, si ha

$$\int_{+\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} [(a\cos t + b\sin t)(-\sin t) + (-b\cos t + a\sin t)(\cos t)]dt = -b\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = -\pi b.$$

Quindi la forma ω, per $\lambda > 0$, è esatta se e solo se $b = c = 0$ e $a = d$. In tal caso si ha

$$\omega(x, y) = \frac{ax}{(x^2 + y^2)^\lambda}\, dx + \frac{ay}{(x^2 + y^2)^\lambda}\, dy,$$

ed una primitiva è

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{a}{2(1 - \lambda)}(x^2 + y^2)^{1-\lambda} & \text{se } \lambda \neq 1 \\ \ln\left(\frac{a}{2}(x^2 + y^2)\right) & \text{se } \lambda = 1. \end{cases}$$

Esercizio 3.1 Operiamo la sostituzione $t = \sqrt{n}\,x$: si ha

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-n(x^2-x^4)}\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\frac{\sqrt{n}}{2}} e^{-t^2-\frac{t^4}{n}}\,dt.$$

Osservato che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\sqrt{n}}{2}} e^{-t^2-\frac{t^4}{n}}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(infatti l'integrando converge puntualmente a e^{-t^2}, ed è dominato da tale funzione), deduciamo che

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-n(x^2-x^4)}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{n}}\,(1+\mathrm{o}(1)) \qquad \text{per } n\to\infty.$$

Quindi la condizione richiesta è verificata con

$$a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad b = -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 3.2 Possiamo calcolare direttamente il flusso (metodo 1), oppure utilizzare il teorema della divergenza (metodo 2).

Metodo 1 La superficie Σ è parametrizzata in coordinate polari da

$$\begin{cases} x = \sin\vartheta\cos\varphi \\ y = \sin\vartheta\sin\varphi \\ z = \cos\vartheta, \end{cases} \qquad \vartheta\in[0,\pi], \quad \varphi\in[0,2\pi],$$

e in particolare il versore normale esterno alla sfera nel punto (x,y,z) coincide con (x,y,z):

$$\mathbf{n} = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta).$$

Si ha dunque, essendo $\sqrt{EG-F^2} = \sin\vartheta$,

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \langle\mathbf{F},\mathbf{n}\rangle_3\,d\boldsymbol{\sigma} \;&=\; \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Big[\big(2\sin\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi + e^{\cos^2\vartheta}\big)\sin\vartheta\cos\varphi + \\ &+\; \big(\sin\vartheta\sin\varphi - 3\cos\vartheta + \arctan[\sin^2\vartheta\cos^2\varphi]\big)\sin\vartheta\sin\varphi + \\ &+\; \big(3\cos\vartheta - 2\sin\vartheta\cos\varphi - \sin[\sin^2\vartheta\sin^2\varphi]\big)\cos\vartheta\Big]\sin\vartheta\,d\vartheta d\varphi.\end{aligned}$$

Tenuto conto della periodicità e della parità e disparità degli addendi da integrare, si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle_3 \, d\boldsymbol{\sigma} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [2\sin^3\vartheta\cos^2\varphi + \sin^3\vartheta\sin^2\varphi + 3\cos^2\vartheta\sin\vartheta] d\vartheta d\varphi = \\
&= 3\pi \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \, d\vartheta + 6\pi \int_0^{\pi} \cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta = \\
&= 3\pi \int_0^{\pi} (\sin\vartheta + \cos^2\vartheta\sin\vartheta)\, d\vartheta = 3\pi\left(2+\frac{2}{3}\right) = 8\pi.
\end{aligned}$$

Metodo 2 Per il teorema della divergenza,

$$\int_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle_3 \, d\boldsymbol{\sigma} = \int_B \mathrm{div}\mathbf{F}(x,y,z)\, dxdydz,$$

ove $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \le 1\}$. Poiché

$$\mathrm{div}\mathbf{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z) + F_y(x,y,z) + F_z(x,y,z) = 6,$$

si ottiene

$$\int_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle_3 \, d\boldsymbol{\sigma} = \int_B 6dxdydz = 6\cdot\frac{4}{3}\pi = 8\pi.$$

Prova scritta dell'11 luglio 2014

Esercizio 1 Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x(\alpha t), & t \in [-T,T] \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

ove $0 \le \alpha \le 1$.

(i) Si provi che tale problema è equivalente ad un'equazione integrale univocamente risolubile in $C^0[-T,T]$.

(ii) Si verifichi che la soluzione del problema di Cauchy è definita su tutto $\mathbb{R}$.

(iii) Si scriva la soluzione come somma di una serie di potenze.

Esercizio 2 Sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\mathbf{F}(r,s,t) = \begin{pmatrix} e^{2s} + e^{2t} \\ e^{2r} - e^{2t} \\ r - s \end{pmatrix} \qquad \forall (r,s,t) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Si determini l'immagine $D \subseteq \mathbb{R}^3$ di $\mathbf{F}$.

(ii) Si provi che $\mathbf{F}$ è un diffeomorfismo da $\mathbb{R}^3$ a D.

(iii) Si scriva esplicitamente l'applicazione $\mathbf{F}^{-1} : D \to \mathbb{R}^3$.

Esercizio 3 (i) Si calcoli l'integrale

$$\int_{B(\mathbf{0},r)} |\mathbf{w}|^2 \, d\mathbf{w}$$

ove $|\mathbf{w}|$ è la norma euclidea del vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$.
(ii) Data $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$, si calcoli il limite

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{r^5} \int_{B(\mathbf{0},r)} \big(f(\mathbf{w}) - f(\mathbf{0})\big) \, d\mathbf{w}.$$

Risoluzione

Esercizio 1 Il problema di Cauchy assegnato è ovviamente equivalente, in virtù del teorema fondamentale del calcolo integrale, all'equazione integrale

$$x(t) = 1 + \int_0^t x(\alpha s) \, ds, \qquad t \in [-T,T].$$

Definiamo allora l'operatore lineare $P : C^0[-T,T] \to C^0[-T,T]$ nel modo seguente:

$$[Px](t) = \int_0^t u(\alpha s) \, ds = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha t} x(\sigma) \, d\sigma.$$

L'equazione integrale si riscrive allora come $x = 1 + Px$, ossia $x - Px = 1$. Per ricavare la funzione x, occorre che sia ben definito l'operatore $(I-P)^{-1}$ nello spazio $C^0[-T,T]$: a questo scopo è sufficiente che esista $m \in \mathbb{N}^+$ tale che l'm-esima iterata P^m sia una contrazione in $C^0[-T,T]$. Si ha in effetti

$$[P^2x](t) = [P(Px)](t) = \int_0^t [Px](\alpha s) \, ds = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha t} [Px](\sigma) \, d\sigma = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{\alpha t} \int_0^{\alpha \sigma} x(\tau) \, d\tau d\sigma,$$

e induttivamente

$$[P^m x](t) = \frac{1}{\alpha^m} \int_0^{\alpha t} \int_0^{\alpha t_1} \cdots \int_0^{\alpha t_{m-1}} x(t_m)\, dt_m dt_{m-1} \dots dt_1 \qquad \forall m \in \mathbb{N}^+.$$

Di conseguenza otteniamo la stima

$$\|P^2 x\|_\infty = \sup_{|t|\le|T|} |[P^2 x](t)| \le \frac{1}{\alpha^2} \|x\|_\infty \int_0^{\alpha T} \alpha\sigma\, d\sigma = \frac{\alpha^{1+2}}{\alpha^2} \frac{T^2}{2} \|x\|_\infty \,,$$

e induttivamente

$$\|P^m x\|_\infty \le \frac{\alpha^{1+\cdots+m}}{\alpha^m} T^m \|x\|_\infty = \alpha^{\binom{m}{2}} \frac{T^m}{m!} \|x\|_\infty \,.$$

Quindi, qualunque sia T, esiste $m \in \mathbb{N}^+$ tale che P^m è una contrazione su $C^0[-T,T]$ e partanto esiste un'unica soluzione $x(\cdot)$ del problema di Cauchy, definita in $[-T,T]$.
Per unicità, e per l'arbitrarietà di T, vi è un'unica soluzione x definita su tutto $\mathbb{R}$.
Per scrivere x sotto forma di serie di potenze, osserviamo che

$$x'(t) = x(\alpha t), \quad x''(t) = \alpha x'(\alpha t) = \alpha x(\alpha^2 t), \quad x'''(t) = \alpha^3 u'(\alpha^2 t) = \alpha^3 u(\alpha^3 t),$$

e induttivamente

$$u^{(m)}(t) = \alpha^{1+\cdots+(m-1)} u(\alpha^m t) = \alpha^{\binom{m}{2}} u(\alpha^m t) \qquad \forall m \in \mathbb{N}^+,$$

da cui

$$u(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^{(m)}(0)}{m!} t^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\binom{m}{2}}}{m!} t^m;$$

Si noti che questa serie converge per ogni $t \in \mathbb{R}$, in virtù del fatto che $0 \le \alpha \le 1$.

Esercizio 2 Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x = e^{2s} + e^{2t} \\ y = e^{2r} - e^{2t} \qquad\qquad (r,s,t) \in \mathbb{R}^3. \\ z = r - s, \end{cases}$$

Intanto si nota che deve essere $x = e^{2s} + e^{2t} > 0$, $x + y = e^{2s} + e^{2r} > 0$. Dalla terza equazione ricaviamo

$$e^z = \frac{e^r}{e^s},$$

da cui $e^r = e^z e^s$ e quindi $x + y = e^{2s}(e^{2z} + 1)$; dunque

$$e^s = \sqrt{\frac{x+y}{e^{2z}+1}}, \qquad e^r = e^z \sqrt{\frac{x+y}{e^{2z}+1}}.$$

Inoltre, dalla prime due equazioni,

$$e^{2t} = \frac{1}{2}(x - y - e^{2s} + e^{2r}) = \frac{(x-y)(e^{2z}+1) + (x+y)(e^{2z}-1)}{2(e^{2z}+1)}$$

ovvero

$$e^{2t} = \frac{e^{2z}x - y}{e^{2z}+1}.$$

In particolare deve essere anche $e^{2z}x - y > 0$. In definitiva

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x > 0, \ -x < y < e^{2z}x\};$$

si noti che nella definizione di D la prima condizione $x > 0$ è banale conseguenza dell'altra $-x < y < e^{2z}x$.
Si ha poi

$$\begin{cases} x = e^{2s} + e^{2t} \\ y = e^{2r} - e^{2t} \\ z = r - s, \end{cases} \qquad \iff \qquad \begin{cases} r = z + \ln \sqrt{\dfrac{x+y}{e^{2z}+1}} \\ s = \ln \sqrt{\dfrac{x+y}{e^{2z}+1}} \\ t = \ln \sqrt{\dfrac{e^{2z}x - y}{e^{2z}+1}}\,. \end{cases}$$

Queste relazioni definiscono la funzione inversa $\mathbf{F}^{-1}$: dunque $\mathbf{F}$ è un omeomorfismo. D'altra parte, in ogni punto di $\mathbb{R}^3$ si ha

$$\det \mathbf{D}F(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} 0 & 2e^{2s} & 2e^{2t} \\ 2e^{2r} & 0 & -2e^{2t} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -4e^{2(s+t)} - 4e^{2(r+t)} \neq 0,$$

cosicché $\mathbf{F}$ è un diffeomorfismo.

Esercizio 3 Risulta, passando in coordinate sferiche,

$$\int_{B(\mathbf{0},r)} |\mathbf{w}|^2 \, d\mathbf{w} = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^2(\rho^2 \sin\vartheta) \, d\varphi d\vartheta d\rho = \frac{4\pi}{5} \, r^5.$$

Se $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$, possiamo scrivere

$$f(\mathbf{w}) - f(\mathbf{0}) = \langle \nabla f(\mathbf{0}), \mathbf{w} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{H}_f(\mathbf{0})\mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle + \mathrm{o}(|\mathbf{w}|^2) \quad \text{per } |\mathbf{w}| \to 0.$$

Dunque

$$\int_{B(\mathbf{0},r)} \big(f(\mathbf{w}) - f(\mathbf{0})\big) \, d\mathbf{w} = \int_{B(\mathbf{0},r)} \big[\langle \nabla f(\mathbf{0}), \mathbf{w} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{H}_f(\mathbf{0})\mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle + \mathrm{o}(r^2)\big] d\mathbf{w};$$

D'altra parte, per evidenti motivi di simmetria, si ha

$$\int_{B(\mathbf{0},r)} \langle \nabla f(\mathbf{0}), \mathbf{w} \rangle \, d\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{3} \int_{B(\mathbf{0},r)} w_i \, d\mathbf{w} = 0,$$

e analogamente

$$\sum_{i \neq j} \int_{B(\mathbf{0},r)} D_i D_j f(\mathbf{0}) w_i w_j \, d\mathbf{w} = 0,$$

da cui

$$\frac{1}{2} \int_{B(\mathbf{0},r)} \langle \mathbf{H}_f(\mathbf{0})\mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \, d\mathbf{w} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} D_i^2 f(\mathbf{0}) \int_{B(\mathbf{0},r)} w_i^2 \, d\mathbf{w}.$$

Per motivi di simmetria,

$$\int_{B(\mathbf{0},r)} w_i^2 \, d\mathbf{w} = \frac{1}{3} \int_{B(\mathbf{0},r)} |\mathbf{w}|^2 \, d\mathbf{w} = \frac{4\pi}{15} \, r^5,$$

e dunque

$$\frac{1}{2} \int_{B(\mathbf{0},r)} \langle \mathbf{H}_f(\mathbf{0})\mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \, d\mathbf{w} = \frac{2\pi}{15} \sum_{i=1}^{3} D_i^2 f(\mathbf{0}) \, r^5 = \frac{2\pi}{15} \, \Delta f(\mathbf{0}) \, r^5.$$

Si conclude che

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{r^5} \int_{B(\mathbf{0},r)} \big(f(\mathbf{w}) - f(\mathbf{0})\big) \, d\mathbf{w} = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{r^5} \left[\frac{2\pi}{15} \, \Delta f(\mathbf{0}) r^5 + \mathrm{o}(r^5)\right] = \frac{2\pi}{15} \, \Delta f(\mathbf{0}).$$

Prova scritta del 9 settembre 2014

Esercizio 1 Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y'''(t) = 4t\, y'(t) + 2\, y(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(i) Si provi che (3) ammette soluzioni della forma $y(t) = u(t)^2$, dove u risolve l'equazione lineare del secondo ordine

$$u''(t) = t\, u(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

(ii) Dette u e v le soluzioni di (2) con le condizioni di Cauchy

$$u(0) = 1,\ u'(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad v(0) = 0,\ v'(0) = 1,$$

si scrivano in funzione di u e v le soluzioni U, V, W dei problemi di Cauchy per (3) con le condizioni

$$\begin{aligned} U(0) = 1, \quad U'(0) = 0, \quad U''(0) = 0; \\ V(0) = 0, \quad V'(0) = 1, \quad V''(0) = 0; \\ W(0) = 0, \quad W'(0) = 0, \quad W''(0) = 1. \end{aligned}$$

Esercizio 2 Sia

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+bxy+y^2)}\, dxdy,$$

ove b è un parametro reale. Si stabilisca per quali valori di b risulta $I < \infty$, e in tal caso si calcoli l'integrale.

Esercizio 3 (i) Sia Γ la curva piana espressa in coordinate polari dalle relazioni

$$r = \vartheta^2, \quad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Si calcoli:

(i) la lunghezza di Γ;

(ii) l'area della regione A delimitata da Γ e dal segmento $S = \{(x, 0) :\ 0 < x < 4\pi^2\}$.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Sia u una soluzione di (2) e poniamo $y = u^2$. Allora

$$\begin{aligned} y' &= 2uu', \\ y'' &= 2(u')^2 + 2uu'' = 2(u')^2 + 2t\,u^2, \\ y''' &= 4u'u'' + 2u^2 + 4t\,uu' = 8t\,uu' + 2u^2, \end{aligned}$$

e quindi si riconosce subito che

$$y''' = 8t\,uu' + 2u^2 = 4t\,y' + 2y.$$

Notiamo anche che, essendo (3) e (2) equazioni lineari, se u, v risolvono (2) allora le funzioni $\pm(au+bv)^2$ risolvono (3) per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, e di conseguenza, essendo $2uv = (u+v)^2 - u^2 - v^2$, anche uv risolve (3).

(ii) Siano u, v le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u''(t) = t\,u(t) \\ u(0) = 1,\ u'(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} v''(t) = t\,v(t) \\ v(0) = 0,\ v'(0) = 1. \end{cases}$$

Per risolvere i tre problemi di Cauchy

$$\begin{cases} U''' = 4t\,U' + 2U \\ U(0) = 1,\ U'(0) = 0,\ U''(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} V''' = 4t\,V' + 2V \\ V(0) = 0,\ V'(0) = 1,\ V''(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} W''' = 4t\,W' + 2W \\ W(0) = 0,\ W'(0) = 0,\ W''(0) = 1, \end{cases}$$

applicando (i) possiamo cercare una soluzione y della forma

$$y(t) = a\,u(t)^2 + b\,u(t)v(t) + cv(t)^2,$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ coefficienti da determinare. Per la linearità di (3) e per quanto osservato sopra, y è certamente soluzione di (3). Imponiamo le condizioni in 0: poiché

$$\begin{aligned} y' &= 2a\,uu' + b[u'v + uv'] + 2c\,vv', \\ y'' &= 2a(u')^2 + 2a\,uu'' + b[u''v + 2u'v' + uv''] + 2c(v')^2 + 2c\,vv'' = \\ &= 2a(u')^2 + 2at\,u^2 + 2bt\,uv + 2b\,u'v' + 2c(v')^2 + 2ct\,v^2, \end{aligned}$$

si ha immediatamente

$$y(0) = a, \qquad y'(0) = b, \qquad y''(0) = 2c.$$

Pertanto dobbiamo porre

$$U(t) = u(t)^2, \qquad V(t) = u(t)v(t), \qquad W(t) = \frac{1}{2}v(t)^2.$$

Esercizio 2 L'esponente dell'integrando è una forma quadratica reale e simmetrica, la cui matrice associata A ha autovalori $1 \pm |b|/2$. Se $1 - |b|/2 < 0$, ossia $|b| > 2$, si ha

$$x^2 + bxy + y^2 < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4}}{2} < \frac{y}{x} < \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4}}{2};$$

detto Ω l'aperto di $\mathbb{R}^2$ definito da tali disuguaglianze, Ω è un doppio settore di misura infinita, nel quale l'integrando è una esponenziale positiva: ne segue che

$$|b| > 2 \qquad \Longrightarrow \qquad I = +\infty.$$

Se $b = \pm 2$ l'integrale diventa

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2 \pm 2xy + y^2)}\, dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x \pm y)^2}\, dxdy,$$

e posto, per $\delta > 0$,

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x + y| < \delta\}, \quad \text{oppure} \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x - y| < \delta\},$$

si ha in entrambi i casi

$$I \geq \int_{\Omega} e^{-\delta^2}\, dxdy = +\infty$$

dato che $m_2(\Omega) = +\infty$. Perciò $I = +\infty$ per $|b| \geq 2$.
Invece se $|b| < 2$ entrambi gli autovalori sono positivi, e quindi esiste $\sigma > 0$ tale che

$$x^2 + bxy + y^2 \geq \sigma(x^2 + y^2) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2;$$

ne segue

$$I \leq \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\sigma(x^2+y^2)} dxdy < \infty.$$

Calcoliamo in questo caso l'integrale: una base ortonormale di autovettori relativi agli autovalori $1 \pm b/2$ è data da

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \qquad \text{per } \lambda_1 = 1 + \frac{b}{2},$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \qquad \text{per } \lambda_2 = 1 - \frac{b}{2}.$$

Con il cambiamento di base che manda $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{v}_2$ in $\mathbf{e}_2$, ossia

$$(x,y) = T(u,v) = \left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}, \frac{u-v}{\sqrt{2}} \right),$$

la matrice A viene diagonalizzata: quindi si ha, essendo $J_T = 1$ e $T^{-1} = T$,

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+bxy+y^2)} dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(1+\frac{b}{2})u^2-(1-\frac{b}{2})v^2} dudv.$$

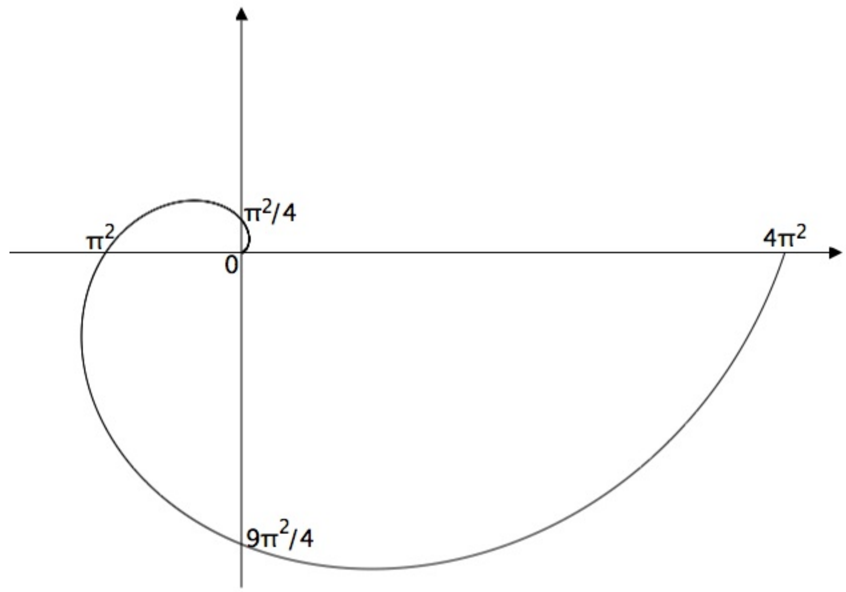
Ricordando infine che

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ct^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{c}} \qquad \forall c > 0,$$

si conclude che se $|b| < 2$ risulta

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(1+\frac{b}{2})u^2-(1-\frac{b}{2})v^2} dudv = \int_{\mathbb{R}} e^{-(1+\frac{b}{2})u^2} du \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-(1-\frac{b}{2})v^2} dv = \frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{b^2}{2}}}.$$

Esercizio 3 La curva Γ è regolare. Dalle note formule valide per le curve espresse in coordinate polari ricaviamo anzitutto la lunghezza:



$$\begin{aligned}\ell(\Gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \sqrt{\vartheta^4 + 4\vartheta^2}\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \vartheta\sqrt{4+\vartheta^2}\, d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{4\pi^2} \sqrt{4+s}\, ds = \frac{1}{3}\left[(4+s)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{4\pi^2} ds = \frac{8}{3}\left[(1+\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right].\end{aligned}$$

Per l'area si ha invece, utilizzando la ben nota formula,

$$m_2(A) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \vartheta^4\, d\vartheta = \frac{16\pi^5}{5}.$$

Prova scritta dell'8 gennaio 2015

Esercizio 1 Si consideri la funzione $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ così definita:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + yz + 1 \\ z^2 + xy - 1 \end{pmatrix} \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

e si definisca $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{0}\}$.

(i) Si verifichi che $(0,-1,1) \in Z$ e si provi che esiste un intorno U di $(0,-1,1)$ tale che $Z \cap U$ è immagine di una curva di classe C^∞ della forma

$$x = x, \quad y = h(x), \quad z = k(x), \qquad x \in [-\delta, \delta]$$

con $\delta > 0$ opportuno;

(ii) si determini la retta tangente a Z nel punto $(0, -1, 1)$;

(iii) si scrivano i polinomi di Taylor di grado 2 relativi alle funzioni h e k, centrati in 0.

Esercizio 2 Determinare due costanti $c, \alpha \in \mathbb{R}$ tali che risulti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^4 t^2} [(1 - nt)^n]_+ \, dt = c \, n^\alpha (1 + \mathrm{o}(1)) \qquad \text{per } n \to \infty,$$

ove $[f]_+$ è la parte positiva di f, definita da $[f]_+(x) = \max\{f(x), 0\}$.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_D \sin\left(\frac{x^3 + y^3}{xy}\right) dxdy.$$

ove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq 2y, \ y^2 \leq 2x\}$.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) La funzione $\mathbf{F}$ è di classe C^∞ e si ha ovviamente

$$\mathbf{F}(0, -1, 1) = \mathbf{0}.$$

Calcoliamo la matrice $\mathbf{DF}$:

$$\mathbf{DF}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & z & y \\ y & x & 2z \end{pmatrix},$$

quindi

$$\mathbf{DF}(0, -1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$, per il teorema del Dini possiamo esplicitare in un intorno U di $(0, -1, 1)$ le variabili y e z in funzione della x; in altre parole, per ogni $(x, y, z) \in U$ vale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = x \\ y = h(x), \\ z = k(x), \end{cases}$$

con h e k funzioni di classe C^∞, definite in un intorno $[-\delta, \delta]$ di 0, tali che $h(0) = -1$, $k(0) = 1$ e

$$\begin{pmatrix} h'(x) \\ k'(x) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} k(x) & h(x) \\ x & 2k(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x \\ h(x) \end{pmatrix}.$$

(ii) In particolare, dalla formula precedente segue che

$$\begin{pmatrix} k(x) & h(x) \\ x & 2k(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h'(x) \\ k'(x) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2x \\ h(x) \end{pmatrix},$$

ossia

$$\begin{cases} k(x)h'(x) + h(x)k'(x) = -2x \\ xh'(x) + 2k(x)k'(x) = -h(x), \end{cases} \tag{3}$$

da cui, per $x = 0$, segue che $h'(0) = k'(0) = \frac{1}{2}$. Quindi, la retta tangente a Z in $(0, -1, 1)$, in forma parametrica, è data da

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + \frac{1}{2}\,t \qquad t \in \mathbb{R}; \\ z = 1 + \frac{1}{2}\,t, \end{cases}$$

in forma cartesiana la retta si esprime come intersezione dei due piani

$$\frac{x}{2} - y = 1, \qquad \frac{x}{2} - z = -1.$$

(iii) Possiamo derivare il sistema (3), ottenendo

$$\begin{cases} k(x)h''(x) + 2h'(x)k'(x) + h(x)k''(x) = -2 \\ h'(x) + xh''(x) + 2k'(x)^2 + 2k(x)k''(x) = -h'(x), \end{cases}$$

e in particolare, per $x = 0$,

$$\begin{cases} h''(0) + \frac{1}{2} - k''(0) = -2 \\ 1 + 2k''(0) = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

da cui $h''(0) = -\frac{13}{4}$ e $k''(0) = -\frac{3}{4}$. Pertanto i polinomi di Taylor relativi a h e a k, che denotiamo rispettivamente con p_h e p_k, sono

$$p_h(x) = -1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{13}{8}\,x^2, \qquad p_k(x) = 1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{3}{8}\,x^2.$$

Esercizio 2 Se n è pari, l'integrando è sempre positivo, mentre se n è dispari esso è nullo in $]\frac{1}{n}, \infty[$: quindi per n dispari si può riscrivere l'integrale nella forma

$$\int_{-\infty}^{\frac{1}{n}} e^{-n^4t^2}(1-nt)^n\,dt.$$

In ogni caso, con il cambiamento di variabile $x = n^2 t$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^4t^2}[(1-nt)^n]_+\,dt = \frac{1}{n^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]_+ dx,$$

ovvero, moltiplicando per n^2,

$$n^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^4t^2}[(1-nt)^n]_+\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]_+ dx.$$

Notiamo adesso che

$$\lim_{n\to\infty} e^{-x^2}\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]_+ = e^{-x^2-x} \qquad \forall x \in \mathbb{R};$$

inoltre, trattando separatamente il caso n pari e n dispari, per n dispari si ha

$$e^{-x^2}\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]_+ \le e^{-x^2}\left[\left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}\right]_+ \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

per cui è applicabile il teorema di B. Levi. Invece per n pari si ha

$$e^{-x^2}\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]_+ \le e^{-x^2}\left(1+\frac{|x|}{n}\right)^n \le e^{-x^2+|x|} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

per cui è applicabile il teorema di Lebesgue. In definitiva,

$$\exists \lim_{n\to\infty} n^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^4t^2}[(1-nt)^n]_+\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}e^{-x}\,dx.$$

Dato che $e^{-x^2-x} = e^{\frac{1}{4}}e^{-(x+\frac{1}{4})^2}$, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}e^{-x}\,dx = e^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+\frac{1}{4})^2}\,dx = e^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = \sqrt{\pi}\,e^{\frac{1}{4}}.$$

Pertanto

$$n^2\int_{-\infty}^{\frac{1}{n}} e^{-n^4t^2}(1-nt)^n\,dt = \sqrt{\pi}\,e^{\frac{1}{4}}(1+\mathrm{o}(1)) \qquad \text{per } n\to\infty,$$

e dunque si conclude che

$$\int_{-\infty}^{\frac{1}{n}} e^{-n^4t^2}(1-nt)^n\,dt = \sqrt{\pi}\,e^{\frac{1}{4}}n^2(1+\mathrm{o}(1)) \qquad \text{per } n\to\infty,$$

cioè $c=\sqrt{\pi}\,e^{\frac{1}{4}}$ e $\alpha=2$.

Esercizio 3 Scrivendo l'integrale nella forma

$$\int_D \sin\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right)\,dxdy,$$

e tenuto conto della forma del dominio D, conviene utilizzare il cambiamento di variabili seguente:

$$u=\frac{x^2}{y}\,,\quad v=\frac{y^2}{x}\,.$$

Si noti che

$$(x,y)\in D \quad\Longleftrightarrow\quad 0<\frac{x^2}{y}\le 2,\;\; 0<\frac{y^2}{x}\le 2 \quad\Longleftrightarrow\quad (u,v)\in\,]0,2]\times\,]0,2].$$

Poiché inoltre

$$\det\begin{pmatrix} u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2}\\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x}\end{pmatrix} = 3,$$

si ha di conseguenza

$$\det\begin{pmatrix} x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{pmatrix} = \left[\det\begin{pmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2}\\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x}\end{pmatrix}\right]^{-1} = \frac{1}{3}\,.$$

Ne segue

$$\int_D \sin\left(\frac{x^3+y^3}{xy}\right)\,dxdy = \frac{1}{3}\int_0^2\int_0^2 \sin(u+v)\,dudv.$$

Un facile calcolo finale ci dice allora che

$$\int_D \sin\left(\frac{x^3+y^3}{xy}\right)\,dxdy = \frac{1}{3}(2\sin 2-\sin 4).$$

Prova scritta dell'11 febbraio 2015

Esercizio 1 Determinare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = -16x^2 - 16y^2 + 48x - 24y$$

nell'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 4, \; \max\{|x|,|y|\} \geq 1\}.$$

Esercizio 2 Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili su $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Supponiamo che esistano una funzione misurabile f ed una funzione sommabile g tali che

(i) $g(x) \leq f_n(x) \leq f(x)$ q.o. in X;

(ii) $f_n(x) \to f(x)$ q.o. in X per $n \to \infty$.

Si provi che f è integrabile su X e che

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Esercizio 3 Calcolare l'integrale superficiale

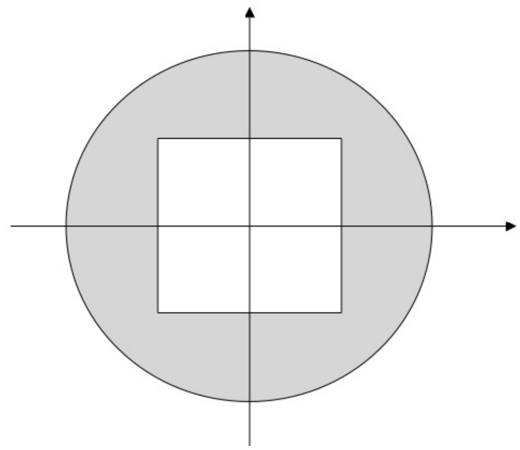
$$\int_\Sigma |xy| \sin z \sqrt{1 + \sin^2 z} \, d\mathbf{s},$$

dove Σ è la superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z il grafico della funzione

$$z = \arccos(x-1), \qquad x \in [0,2].$$

Risoluzione

Esercizio 1 La funzione f è di classe C^∞, il dominio E è descritto nella figura a fianco. Cerchiamo i punti stazionari di f interni ad E. In tali punti deve essere



$$\begin{cases} f_x(x,y) = -32x + 48 = 0 \\ f_y(x,y) = -32y - 24 = 0, \end{cases}$$

e l'unica soluzione di questo sistema è $(x,y) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$, punto che appartiene ad E, essendo $x^2 + y^2 = \frac{45}{16} < 4$ e $\max\{|x|,|y|\} = \frac{3}{2} > 1$; risulta $f\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right) = 45$.

Cerchiamo i punti stazionari vincolati di f sulla frontiera ∂E, che è regolare a tratti ed è composta da quattro vertici e dalle cinque curve regolari $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_5$ così definite:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1: \quad x = t, \quad y = 1, && t \in [-1,1]; \\
&\Gamma_2: \quad x = -1, \quad y = t, && t \in [-1,1]; \\
&\Gamma_3: \quad x = t, \quad y = -1, && t \in [-1,1]; \\
&\Gamma_4: \quad x = 1, \quad y = t, && t \in [-1,1]; \\
&\Gamma_5: \quad x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, && t \in [-\pi,\pi]
\end{aligned}$$

Nei quattro vertici si ha, con facile verifica,

$$f(1,1) = -8, \quad f(-1,1) = -104, \quad f(1,-1) = 40, \quad f(-1,-1) = -56.$$

Poniamo ora $g_i = f|_{\Gamma_i}$, $i = 1,2,3,4,5$.

- Su Γ_1 si ha
$$g_1(t) = f(t,1) = -16t^2 + 48t - 40, \qquad g_1'(t) = -32t + 48,$$
e $g_1'(t) \geq 0$ sempre in $[-1,1]$.

- Su Γ_2 si ha
$$g_2(t) = f(-1,t) = -16t^2 - 24t - 64, \qquad g_2'(t) = -32t - 24$$

e $g_2'(t) \geq 0$ se e solo se $t \in [-1, -\frac{3}{4}]$; quindi ci interessa calcolare

$$g_2\left(-\frac{3}{4}\right) = f\left(-1, -\frac{3}{4}\right) = -55.$$

- Su Γ_3 si ha

$$g_3(t) = f(t, -1) = -16t^2 + 48t + 8, \qquad g_3'(t) = -32t + 48$$

e $g_3'(t) \geq 0$ sempre in $[-1, 1]$.

- Su Γ_4 si ha

$$g_4(t) = f(1, t) = -16t^2 - 24t + 32, \qquad g_4'(t) = -32t - 24$$

e $g_4'(t) \geq 0$ se e solo se $t \in [-1, -\frac{3}{4}]$; quindi ci interessa calcolare

$$g_4\left(-\frac{3}{4}\right) = f\left(1, -\frac{3}{4}\right) = 41.$$

- Infine, su Γ_5 si ha

$$g_5(t) = -64 + 96\cos t - 48\sin t, \qquad g_5'(t) = -96\sin t - 48\cos t$$

e $g_5'(t) = 0$ se e solo se $\tan t = -\frac{1}{2}$, ossia $t = -\arctan\frac{1}{2}$ oppure $t = \pi - \arctan\frac{1}{2}$, il che equivale a $(\cos t, \sin t) = \pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Nei punti corrispondenti $(2\cos t, 2\sin t) = \pm\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ si ha

$$\begin{aligned} g_5\left(-\arctan\tfrac{1}{2}\right) &= f\left(\tfrac{4}{\sqrt{5}}, -\tfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = -64 + 48\sqrt{5} \simeq 43.331, \\ g_5\left(\pi - \arctan\tfrac{1}{2}\right) &= f\left(-\tfrac{4}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = -64 - 48\sqrt{5} \simeq -171.331. \end{aligned}$$

In definitiva

$$\begin{aligned} &\max_E f = \\ &\quad = \max\{45,\ -8,\ -104,\ 40,\ -56,\ -55,\ 41,\ -64 + 48\sqrt{5},\ -64 - 48\sqrt{5}\} = \\ &\quad = 45, \end{aligned}$$

$\min_E f =$

$$= \min\{45,\ -8,\ -104,\ 40,\ -56,\ -55,\ 41,\ -64+48\sqrt{5},\ -64-48\sqrt{5}\} =$$
$$= -64-48\sqrt{5}.$$

Osservazione Si poteva fare meno fatica notando i seguenti fatti:

- la funzione f tende a $-\infty$ per $x^2+y^2 \to +\infty$;
- essa ha un massimo assoluto in $\mathbb{R}^2$, necessariamente raggiunto nell'unico suo punto stazionario, che è $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$;
- tale punto appartiene a E, quindi è il punto di massimo in E;
- il punto di minimo assoluto di f in $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\}$ non può essere interno a C (altrimenti sarebbe un punto stazionario di f), quindi sta su ∂C;
- a maggior ragione tale punto è punto di minimo assoluto in E;
- pertanto non era necessario analizzare l'andamento di f sul bordo del quadrato $[-1,1]\times[-1,1]$.

Esercizio 2 **Premessa**: una funzione misurabile è *integrabile* se il suo integrale ha senso, finito o infinito; è *sommabile* se è integrabile con integrale finito.
Anzitutto osserviamo che f è certamente integrabile su X: infatti, poiché $g \le f$ q.o., si ha $g^+ \le f^+$ e $g^- \ge f^-$ q.o.; quindi, passando agli integrali e ricordando che g è sommabile, almeno l'integrale di f^- deve essere finito.
Ciò premesso, dalla disuguaglianza $f_n \le f$ q.o. segue che $\int_X f\, d\mu \le \int_X f\, d\mu$ per ogni n; pertanto

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \le \int_X f\, d\mu.$$

D'altra parte, essendo $f_n - g \ge 0$ q.o., il lemma di Fatou ci dice che

$$\int_X (f-g)\, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X (f_n - g)\, d\mu;$$

dunque

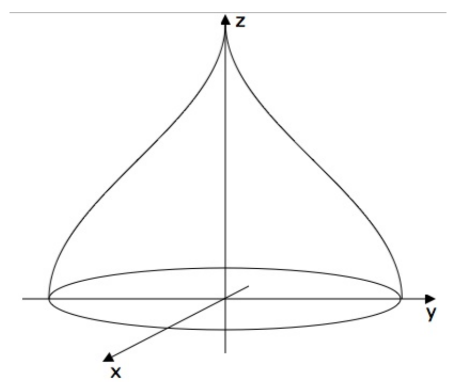
$$\int_X f\, d\mu - \int_X g\, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu - \int_X g\, d\mu,$$

e semplificando l'addendo finito $\int_X g\, d\mu$ si trova

$$\int_X f\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

Ne segue la tesi.

Esercizio 3 La superficie di rotazione Σ si parametrizza nel modo seguente:



$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \\ z = \arccos(r-1), \end{cases} \qquad \begin{array}{l} r \in [0,2] \\ \vartheta \in [0,2\pi]. \end{array}$$

Quindi la matrice delle derivate è

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \\ -\frac{1}{\sqrt{1-(r-1)^2}} & 0 \end{pmatrix},$$

e si ha

$$E = 1 + \frac{1}{1-(r-1)^2}\,, \qquad G = r^2, \qquad F = 0.$$

Perciò

$$\sqrt{EG - F^2} = r\sqrt{1 + \frac{1}{1-(r-1)^2}} = \frac{r}{\sqrt{1-(r-1)^2}}\sqrt{2-(r-1)^2}$$

Poiché sui punti della superficie Σ si ha

$$\sin z = \sqrt{1-\cos^2 z} = \sqrt{1-(r-1)^2},$$

l'integrando su Σ diventa

$$|xy| \sin z \sqrt{1+\sin^2 z} = r^2 |\cos\vartheta \sin\vartheta| \sqrt{1-(r-1)^2}\sqrt{2-(r-1)^2},$$

e in definitiva il calcolo dell'integrale è il seguente:

$$
\begin{aligned}
&\int_\Sigma |xy| \sin z \sqrt{1+\sin^2 z}\, d\mathbf{s} = \\
&\quad = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 |\cos\vartheta \sin\vartheta| (2-(r-1)^2)\, dr d\vartheta = \\
&\quad = \int_0^{2\pi} |\cos\vartheta \sin\vartheta|\, d\vartheta \int_0^2 r^3(-r^2+2r+1)\, dr = \\
&\quad = 4\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^2 (-r^5+2r^4+r^3)\, dr = \\
&\quad = 2\left[-\frac{64}{6}+\frac{64}{5}+\frac{16}{4}\right] = \frac{184}{15}\,.
\end{aligned}
$$