Il caso di coefficienti decrescenti e infinitesimi

Quando una serie trigonometrica ha coefficienti reali, decrescenti e infinitesimi, le sue proprietà di convergenza sono particolarmente interessanti. Iniziamo questa descrizione con uno strumento fondamentale: l'*identità di Abel*, già incontrata nel corso del primo anno.

Proposizione 0.1 *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni di numeri reali o complessi. Fissati $p, q \in \mathbb{N}$ con $q \le p$ e posto $B_N = \sum_{n=q}^{N} b_n$, risulta*

$$\sum_{n=p}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_p B_{p-1} + \sum_{n=p}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n \qquad \forall N > p,$$

ove $B_{p-1} = 0$ nel caso in cui $q = p$.

Dimostrazione Basta osservare che

$$\begin{aligned}\sum_{n=p}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=p}^{N} a_n (B_n - B_{n-1}) = \sum_{n=p}^{N} a_n B_n - \sum_{n=p-1}^{N-1} a_{n+1} B_n = \\ &= a_N B_N - a_p B_{p-1} + \sum_{n=p}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n \,. \quad \square\end{aligned}$$

Un'immediata conseguenza di questa identità è il seguente

Lemma 0.2 (di Abel) *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni di numeri reali. Posto $B_N = \sum_{n=0}^{N} b_n$, supponiamo che*

$$\textbf{(i)}\ |B_N| \le M \quad \forall N \in \mathbb{N}, \qquad \textbf{(ii)}\ a_n \ge a_{n+1} \ge 0 \ \textit{e} \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Allora la serie $\Sigma a_n b_n$ converge e risulta

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \right| \le M a_0 \,.$$

Dimostrazione Poniamo $s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n b_n$. Dall'identità di Abel otteniamo

$$s_N - a_N B_N = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n \qquad \forall N \in \mathbb{N};$$

poiché

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(a_n - a_{n+1})B_n| = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1})|B_n| \leq M \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = Ma_0,$$

si conclude che

$$\exists \lim_{N\to\infty}(s_N - a_N B_N) \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \left|\lim_{N\to\infty}(s_N - a_N B_N)\right| \leq Ma_0.$$

D'altra parte $|a_N B_N| \leq M a_N \to 0$, e dunque si ha la tesi. $\square$

Osservazione 0.3 Alla stessa conclusione si arriva quando $|B_N| \leq M$ per ogni $N \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e, in luogo della decrescenza di $\{a_n\}$, si fa l'ipotesi che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - a_{n+1}|$ sia convergente.

Più in generale, vale questo risultato:

Proposizione 0.4 *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni di numeri reali, con $\{a_n\}$ decrescente e infinitesima e $b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Posto $B_N = \sum_{n=0}^{N} b_n$, si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1})B_n < \infty.$$

Dimostrazione ($\Longrightarrow$) Dalla positività di $a_N B_N$ e dall'identità di Abel

$$\sum_{n=0}^{N-1}(a_n - a_{n+1})B_n \leq \sum_{n=0}^{N-1}(a_n - a_{n+1})B_n + a_N B_N = \sum_{n=0}^{N} a_n b_n \qquad \forall N \in \mathbb{N},$$

da cui la tesi per confronto.

($\Longleftarrow$) Dall'identità di Abel sopra scritta segue che $a_N B_N$, essendo differenza di due somme di termini positivi una delle quali convergente, ha limite $\lambda \in [0, \infty]$; se proviamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ seguirà la tesi. A questo scopo basta osservare che

$$a_N B_N = B_N \sum_{n=N}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) \leq \sum_{n=N}^{\infty}(a_n - a_{n+1})B_n;$$

ma per ipotesi l'ultimo membro è infinitesimo per $N \to \infty$, e dunque $\lambda = 0$. $\square$

Osservazione 0.5 Si noti che dalla dimostrazione precedente segue addirittura l'uguaglianza

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n \in [0, \infty], \quad \text{ove } B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \,,$$

per ogni successione reale decrescente e infinitesima $\{a_n\}$ e per ogni successione non negativa $\{b_n\}$.

Applicheremo il lemma di Abel alle due serie trigonometriche

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx,$$

supponendo naturalmente che $\{a_n\}$ sia una successione reale, decrescente e infinitesima. Prima di tutto però ricordiamo due proprietà delle funzioni trigonometriche che ci serviranno nel seguito:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{N} \cos nt \right| &= \frac{1}{2} |D_N(t) - 1| = \\ &= \frac{1}{2} \left| \left(\frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right) t}{\sin \frac{t}{2}} - 1 \right) \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\left|\sin \frac{t}{2}\right|} + 1 \right), \quad 0 < |t| \leq \pi, \end{aligned}$$

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \sin nt \right| = \left| \frac{\cos \frac{t}{2} - \cos\left(N + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{t}{2}\right|} \,, \quad 0 < |t| \leq \pi.$$

Teorema 0.6 *Sia $\{a_n\}$ una successione reale, decrescente e infinitesima. Allora le due serie $\Sigma a_n \cos nx$ e $\Sigma a_n \sin nx$ convergono puntualmente in $[-\pi, 0[\cup]0, \pi]$ (la seconda anche in 0) ed uniformemente in $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ per ogni $\delta \in]0, \pi[$.*

Dimostrazione Consideriamo la prima serie. Fissato $\delta \in]0, \pi[$, applichiamo il lemma di Abel alle successioni $\{a_n\}_{n \geq \nu}$ e $\{a_n \cos nx\}_{n \geq \nu}$, con $\nu \in \mathbb{N}$ e $|x| \in [\delta, \pi]$. Poiché

$$\left| \sum_{n=\nu}^{N} \cos nx \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} + 1 \right) + \left| \sum_{n=1}^{\nu-1} \cos nx \right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{\delta}{2}\right|} + 1, \quad |x| \in [\delta, \pi],$$

e la successione $\{a_n\}_{n\geq\nu}$ è decrescente e infinitesima, dal lemma di Abel otteniamo che

$$\left|\sum_{n=\nu}^{\infty} a_n \cos nx\right| \leq \left(\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}+1\right) a_\nu\,, \qquad |x| \in [\delta,\pi], \quad \nu \in \mathbb{N},$$

cosicché, per confronto, la serie $\Sigma a_n \cos nx$ è uniformemente convergente in $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$. Dall'arbitrarietà di δ segue anche la convergenza puntuale in $[-\pi,0[\cup]0,\pi]$. Nel punto 0 invece la somma della serie è un ben determinato valore in $[0,\infty]$.
Per la seconda serie si procede in modo del tutto analogo; c'è soltanto da osservare che, ovviamente, la serie converge puntualmente anche per $x = 0$, con somma 0. $\square$

Esempio 0.7 Grazie al teorema precedente, le due serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}\,, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

definiscono due funzioni f e g periodiche, continue in $[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$. Tali funzioni non appartengono a $L^2(-\pi,\pi)$, poiché la serie $\sum(\ln n)^{-2}$ è divergente. Invece le due serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}\,, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$$

definiscono due funzioni periodiche, continue in $[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$, le quali appartengono a $L^2(\pi,\pi)$ se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.

Ci chiediamo a questo punto se, fissata una successione reale $\{a_n\}$ decrescente e infinitesima, la funzione ben definita

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \qquad x \in \mathbb{R},$$

sia o no un elemento di $L^1(-\pi,\pi)$ e se, in tal caso, la serie a secondo membro sia o no la serie di Fourier di f, intendendo con ciò che

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Una domanda analoga, naturalmente, va posta per la funzione

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 0.8 *Sia $\{a_n\}$ una successione reale, decrescente e infinitesima e sia $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$. Allora*

$$f \in L^1(-\pi, \pi) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty.$$

In tal caso, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ converge a f in $L^1(-\pi, \pi)$ ed è la serie di Fourier di f.

Dimostrazione Come abbiamo visto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ ha per somma $f(x)$ in ogni $x \in \mathbb{R}$. Per $0 < |x| \le \pi$ possiamo scrivere, grazie all'identità di Abel,

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \sin nx = a_N S_N(x) + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) S_n(x), \quad N \in \mathbb{N}^+,$$

ove $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \sin nx$. Poichè, come si sa, $|S_N(x)| \le |\sin \frac{x}{2}|^{-1}$, per $N \to \infty$ si ricava

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) S_n(x).$$

Introduciamo il polinomio trigonometrico

$$\begin{aligned} T_N(x) &= S_N(x) - \frac{1}{2} \sin Nx = \\ &= \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left(N + \frac{1}{2}\right) x - \sin Nx \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1 - \cos Nx}{2 \tan \frac{x}{2}}, \end{aligned}$$

il quale rispetto a S_N ha il vantaggio di essere non negativo per $x \in]0, \pi[$. Possiamo allora scrivere

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) T_n(x) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) \sin nx.$$

La seconda serie a destra è totalmente convergente, e quindi convergente anche in $L^1(-\pi,\pi)$, in quanto $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n - a_{n+1}| = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1$. Per la prima serie a destra, invece, che è a termini positivi per $x \in \,]0,\pi[\,$, si ha l'uguaglianza

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})T_n(x)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})|T_n(x)|,$$

quindi si può integrare termine a termine, ottenendo che tale serie converge in $L^1(-\pi,\pi)$ se e solo se

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})\|T_n\|_{L^1(-\pi,\pi)} < \infty.$$

Ora si vede facilmente che

$$\begin{aligned}
\|T_N\|_{L^1(-\pi,\pi)} &= 2\int_0^{\pi} \frac{1-\cos Nx}{2\tan\frac{x}{2}}\,dx \le 2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos Nx}{x}\,dx = \\
&= 2\int_0^{N\pi}\frac{1-\cos t}{t}\,dt \le c\,U_N\,,
\end{aligned}$$

ove $U_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$, ed anche, con facili calcoli,

$$\begin{aligned}
\|T_N\|_{L^1(-\pi,\pi)} &= 2\int_0^{\pi} \frac{1-\cos Nx}{2\tan\frac{x}{2}}\,dx \ge 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos Nx}{2\tan\frac{x}{2}}\,dx \ge \\
&\ge \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos Nx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{N\pi}{2}}\frac{1-\cos t}{t}\,dt \ge c\,U_N;
\end{aligned}$$

quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})T_n \in L^1(-\pi,\pi) \iff \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})U_n < \infty.$$

Utilizzando infine la proposizione 0.4, concludiamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})U_n < \infty \quad \iff \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n} < \infty.$$

Proviamo ora che se $f \in L^1(-\pi,\pi)$ risulta $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Partiamo dalla relazione

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \sin nx = a_N S_N(x) + \sum_{n=1}^{N-1}(a_n - a_{n+1})\left[T_n(x) + \frac{1}{2}\sin Nx\right], \quad N \in \mathbb{N}^+.$$

Essendo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n} < \infty$, ripetendo la dimostrazione della proposizione 0.4 si verifica che la funzione $a_N S_N(x)$, la cui norma in $L^1(-\pi,\pi)$ è limitata dalla quantità $a_N \ln N$, ossia $a_N U_N$, converge a 0 in $L^1(-\pi,\pi)$. Dato che la somma a destra converge in $L^1(-\pi,\pi)$, lo stesso vale per la somma a sinistra: in altre parole, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ nel senso di $L^1(-\pi,\pi)$. Pertanto per ogni $m \in \mathbb{N}^+$ si ha

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin mt\,dt = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt \sin mt\,dt = a_m\,. \quad \square$$

Teorema 0.9 *Sia $\{a_n\}$ una successione reale tale che*

$$\textbf{(i)}\ a_n \searrow 0, \quad \textbf{(ii)}\ n(a_n - a_{n+1}) \to 0, \quad \textbf{(iii)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}| < \infty$$

e sia $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. Allora $f \in L^1(-\pi,\pi)$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ è la serie di Fourier di f, ma in generale tale serie non converge a f in $L^1(-\pi,\pi)$.

Dimostrazione Come sappiamo, la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ è $f(x)$ in $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ e vale $+\infty$ in $\{2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Per $0 < |x| \leq \pi$ si ha, applicando due volte l'identità di Abel,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx &= a_N C_N(x) + \sum_{n=1}^{N-1}(a_n - a_{n+1})C_n(x) = \\ &= a_N C_N(x) + (a_{N-1} - a_N)G_{N-1}(x) + H_N(x),\end{aligned}$$

dove si è posto $C_N(x) = \sum_{n=1}^{N}\cos nx = \frac{1}{2}(D_N(x) - 1)$ e

$$G_N(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n(x), \quad H_N(x) = \sum_{n=1}^{N-2}(a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2})G_n(x).$$

Notiamo che si ha, come osservato in precedenza,

$$|C_N(x)| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}+1\right), \quad 0<|x|\le\pi,$$

e di conseguenza

$$|G_N(x)| \le \frac{N}{2}\left(\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}+1\right), \quad 0<|x|\le\pi.$$

Dunque, per $N\to\infty$ si ricava $a_N C_N(x)\to 0$ e $(a_{N-1}-a_N)G_{N-1}(x)\to 0$, da cui

$$f(x)=\lim_{N\to\infty} H_N(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2a_{n+1}+a_{n+2})G_n(x), \quad 0<|x|\le\pi.$$

Osserviamo che questa serie converge nella norma di $L^1(-\pi,\pi)$: infatti

$$G_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}(D_n(x)-1)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}(D_n(x)-1)=\frac{N+1}{2}(F_N(x)-1),$$

ove F_N è il nucleo di Fejér, da cui

$$\|G_N\|_1 \le \frac{N+1}{2}(\|F_N\|_1+1)\le N+1\le 2N$$

e quindi

$$\left\|\sum_{n=N}^{\infty}(a_n-2a_{n+1}+a_{n+2})G_n\right\|_1 \le \sum_{n=N}^{\infty}|a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}|\|G_n\|_1 \le$$

$$\le 2\sum_{n=N}^{\infty} n|a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}| \to 0 \quad \text{per} \quad N\to\infty.$$

Si conclude allora che la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2a_{n+1}+a_{n+2})G_n(x)$, cioè f, appartiene a $L^1(-\pi,\pi)$.
Proviamo ora che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, malgrado non ne sia stata provata la convergenza in $L^1(-\pi,\pi)$, è la serie di Fourier di f. Consideriamo le due funzioni ausiliarie

$$g_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n}\sin nx, \quad g(x)=\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt, \qquad x\in[-\pi,\pi].$$

Osserviamo che g_N è continua e 2π-periodica, e che possiamo scrivere

$$g_N(x) = \int_{-\pi}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt \, dt = \int_{-\pi}^{x} [a_N C_N(t) + (a_{N-1} - a_N) C_{N-1}(t) + H_N(t)] \, dt.$$

Passiamo al limite per $N \to \infty$ in questa relazione: si ha

$$\int_{-\pi}^{x} a_N C_N(t) \, dt = a_N \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n}$$

e questa quantità è infinitesima, essendo il prodotto di a_N per una serie che converge puntualmente in virtù del teorema 0.6; inoltre

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{x} (a_{N-1} - a_N) G_{N-1}(t) \, dt \right| &\leq (a_{N-1} - a_N) \|G_N\|_{L^1(-\pi,\pi)} \leq \\ &\leq 2N(a_{N-1} - a_N) \to 0, \end{aligned}$$

ed infine

$$\int_{-\pi}^{x} H_N(t) \, dt \to \int_{-\pi}^{x} f(t) \, dt,$$

dato che $H_N \to f$ in $L^1(-\pi, \pi)$. Pertanto

$$g_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n} \sin nx \to \int_{-\pi}^{x} f(t) \, dt \quad \text{per} \quad N \to \infty,$$

ossia

$$g(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t) \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Osserviamo adesso che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx$ converge *uniformemente*, in virtù del lemma che segue:

Lemma 0.10 *Sia $\{b_n\}$ una successione reale decrescente e infinitesima. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$ se e solo se la successione $\{nb_n\}$ è infinitesima.*

Dimostrazione ($\Longrightarrow$) Fissato $N \geq 2$ si ha, posto $k = \left[\frac{N}{2}\right]$,

$$\begin{aligned} \frac{Nb_N}{2} \leq \sum_{n=k+1}^{N} b_n &\leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} \sum_{n=k+1}^{N} b_n \sin \frac{n\pi}{2N} = \\ &\leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} \left| \sum_{n=k+1}^{N} b_n \sin nx \right|_{x=\frac{\pi}{2N}} \leq c \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{n=k+1}^{N} b_n \sin nx \right|, \end{aligned}$$

e l'ultimo membro tende a 0 per $N \to \infty$.

($\Longleftarrow$) Posto $B_k = \sup_{n \geq k} n b_n$, si ha chiaramente $B_k \searrow 0$. Per $0 < |x| \leq \pi$ sia $N = \left[\frac{N}{|x|}\right]$, cosicché $\frac{\pi}{N+1} < |x| \leq \frac{\pi}{N}$. Allora per $m > N$ possiamo scrivere

$$\left|\sum_{n=m}^{\infty} b_n \sin nx\right| \leq \left|\sum_{n=m}^{m+N-1} b_n \sin nx\right| + \left|\sum_{n=m+N}^{\infty} b_n \sin nx\right| = I + II;$$

d'altra parte

$$I \leq \sum_{n=m}^{m+N-1} b_n n|x| \leq N|x| B_m \leq \pi B_m\,,$$

mentre, utilizzando ancora una volta l'identità di Abel,

$$\begin{aligned} II &= \left|\sum_{n=m+N}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) S_n(x) - b_{m+N} S_{m+N-1}(x)\right| \leq \\ &\leq \frac{2}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} b_{m+N} \leq \frac{2\pi}{|x|} b_{m+N} \leq 2\pi(N+1) b_{m+N} \leq 2\pi B_m\,. \end{aligned}$$

Pertanto, qualunque sia $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, si ha

$$\left|\sum_{n=m}^{\infty} b_n \sin nx\right| \leq 3\pi B_m \to 0 \quad \text{per } m \to \infty,$$

e dunque la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ converge uniformemente. $\square$

Possiamo ora concludere la dimostrazione del teorema 0.9. Poiché g_n converge uniformemente a g, anzitutto anche g è 2π-periodica e, in particolare, $g(\pi) = 0$. Inoltre per ogni $m \in \mathbb{N}^+$ si ha, in virtù del teorema di Fubini,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt\, dt &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\int_t^{\pi} m \sin mx\, dx + (-1)^m\right] dt = \\ &= \frac{m}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{x} f(t) dt\right] \sin mx\, dx + \frac{(-1)^m}{\pi} g(\pi) = \\ &= \frac{m}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin mx\, dx = \frac{m}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g_N(x) \sin mx\, dx = \\ &= \frac{m}{\pi}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mx\, dx = m \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n}\,\delta_{nm} = a_m\,, \end{aligned}$$

il che prova la tesi. $\square$

Osservazione 0.11 I teoremi 0.9 e 0.8 valgono anche quando la successione $\{a_n\}$ è infinitesima, ma decrescente soltanto definitivamente: si tratterà di considerare, per un opportuno indice $N_0 \geq 1$, le serie $\sum_{n=N_0}^{\infty} a_n \cos nx$ e $\sum_{n=N_0}^{\infty} a_n \sin nx$, che differiscono solo per un numero finito di termini (continui) da quelle originarie.

Esempio 0.12 Consideriamo la successione $a_n = \frac{1}{\ln n}$, $n \geq 2$, e completiamo per comodità la definizione ponendo $a_0 = a_1 = 0$. Questa successione è (definitivamente) decrescente e infinitesima; inoltre essa verifica

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0,$$

in quanto

$$n(a_n - a_{n+1}) = \frac{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n \ln(n+1)} \leq \frac{1}{(\ln n)^2}.$$

Proviamo che si ha anche

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left| \frac{1}{\ln n} - \frac{2}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} \right| < \infty :$$

possiamo scrivere, dopo facili calcoli,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln n} - \frac{2}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} &= \int_n^{n+1} \int_x^{x+1} \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{\ln t} \, dt dx = \\ &= \int_n^{n+1} \int_x^{x+1} \left[\frac{1}{t^2 (\ln t)^2} + \frac{2}{t^2 (\ln t)^3} \right] dt dx, \end{aligned}$$

da cui

$$\left| \frac{1}{\ln n} - \frac{2}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} \right| \leq \frac{3}{n^2 (\ln n)^2} .$$

Se ne deduce che

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left| \frac{1}{\ln n} - \frac{2}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} \right| \leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^2} < \infty,$$

che è quanto si voleva. Pertanto per le funzioni dell'esempio 0.7

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n} , \qquad g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

si hanno i fatti seguenti: g appartiene a $C([-\pi,\pi]\setminus\{0\})$ ma non a $L^1(-\pi,\pi)$ (perché $\sum \frac{1}{n\ln n} = +\infty$), la serie che definisce g è la sua serie di Fourier, e la convergenza verso g è solo in senso puntuale; invece $f \in C([-\pi,\pi]\setminus\{0\}) \cap L^1(-\pi,\pi)$, la serie che definisce f è la sua serie di Fourier, ma la convergenza verso f è soltanto in senso puntuale. In tutti e due i casi la convergenza della serie è anche uniforme in $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$ per ogni $\delta\in\,]0,\pi[\,$.

Esercizi

1. Provare che $|\sin nx| \le n\,|\sin x|$ per ogni $x\in\mathbb{R}$., e che n è la migliore costante possibile.

2. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica, di classe C^1 e non negativa. Si esprima mediante i coefficienti di Fourier di f l'area della regione delimitata dalla curva chiusa di equazione polare $r=f(\vartheta)$, $\vartheta\in[0,2\pi]$.

3. Sia $f\in L^1(-\pi,\pi)$. Detto $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt$, si provi che
$$c_n = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(t) - f\left(t-\frac{\pi}{n}\right)\right]e^{-int}\,dt \qquad \forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

4. Fissata una successione $\{\varepsilon_n\}$ non negativa e infinitesima, esibire una funzione continua e 2π-periodica f tale che
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\varepsilon_n}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f\left(t-\frac{\pi}{n}\right)-f(t)\right| > 0.$$
[**Traccia:** scelta $\{\varepsilon_{n_k}\}\subseteq\{\varepsilon_n\}$ tale che $\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_{n_k}<\infty$, si definisca $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_{n_k}e^{in_kx}$.]

5. Si provi che, detto D_N il nucleo di Dirichlet, risulta
$$\frac{1}{2}D_N(x) = \frac{\sin Nx}{x} + g(x)\sin Nx + \frac{1}{2}\cos Nx \qquad \forall x\in[-\pi,\pi]\setminus\{0\},$$
ove g è una funzione continua su $[-\pi,\pi]$ con $g(0)=0$.

6. Siano $f\in L^1(-\pi,\pi)$ e $g\in L^\infty(-\pi,\pi)$ funzioni 2π-periodiche. Si provi che
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\cos nt\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin nt\,dt = 0$$

uniformemente rispetto a $x \in \mathbb{R}$.

[**Traccia:** per l'esercizio 3, entrambe le quantità sono non superiori in modulo a $\int_{-\pi}^{\pi} \left|\psi_x\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - \psi_x(t)\right| dt$, ove $\psi_x(t) = f(x+t)g(t)$. Tale integrale si maggiora con $\int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(x+t+\frac{\pi}{n}\right) - f(x+t)\right| \left|g\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right| dt +$ $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)| \left|g\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - g(t)\right| dt$. Si stimi il primo addendo con il prodotto $\|g\|_\infty \left\|f\left(\cdot+\frac{\pi}{n}\right) - f(\cdot)\right\|_1$; fissato $\varepsilon > 0$, si decomponga l'altro come $\int_{(E_p-x)} + \int_{[-\pi,\pi]\setminus(E_p-x)}$, ove $E_p = \{|f| > p\}$ e $\int_{E_p} |f(t)|\, dt < \varepsilon$: allora il secondo addendo si maggiora con $2\|g\|_\infty \varepsilon + p \left\|g\left(\cdot+\frac{\pi}{n}\right) - g(\cdot)\right\|_1$. Di qui segue la tesi.]

7. Provare che, se $S_N(x)$ è la somma parziale della serie di Fourier di una funzione 2π-periodica $f \in L^1(-\pi,\pi)$, si ha
$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin Nu}{u}\, du + \mathrm{o}(1),$$
ove $\mathrm{o}(1)$ è un infinitesimo per $N \to \infty$ indipendente dalla variabile x.

8. *(Principio di localizzazione di Riemann)* Provare che, se $S_N(x)$ è la somma parziale della serie di Fourier di una funzione 2π-periodica $f \in L^1(-\pi,\pi)$, si ha per ogni $\delta \in]0,\pi[$
$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x+u) \frac{\sin Nu}{u}\, du + \mathrm{o}(1),$$
ove $\mathrm{o}(1)$ è un infinitesimo per $N \to \infty$ indipendente dalla variabile x, e che dunque la convergenza o meno della serie di Fourier di f nel punto x dipende solo dal comportamento di f in un arbitrario intorno di x.

9. Sia f una funzione 2π-periodica e α-hölderiana, ossia esiste $M \ge 0$ tale che $|f(t) - f(s)| \le M|t-s|^\alpha$ per ogni $t, s \in \mathbb{R}$. Si provi che la serie di Fourier di f converge a f uniformemente.

10. Sia f una funzione 2π-periodica e *continua secondo Dini*, ossia, posto $\sup_{|t-s|\le r} |f(t) - f(s)| = \omega(r)$, risulta $\int_0^{\delta} \frac{\omega(r)}{r}\, dr < \infty$. Si provi che la serie di Fourier di f converge a f uniformemente.

11. Sia $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una successione e siano $s_N = \sum_{|n|\le N} c_n$, $\sigma_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} s_n$. Si verifichi che se $s_N \to \ell$, allora $\sigma_N \to \ell$. Si provi anche che
$$\sigma_N = \sum_{|n|\le N} c_n \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \qquad \forall N \in \mathbb{N}.$$

12. Sia f una funzione limitata, 2π-periodica e pari. Se i coefficienti di Fourier $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$ sono non negativi, si provi che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, e che quindi f è continua e la sua serie di Fourier converge uniformemente.
[**Traccia:** si osservi che, in virtù dell'esercizio 11, si ha $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n = S_N(0) \le 2\sigma_{2N}(0) \le 2\|f\|_\infty$, ove σ_N sono le somme di Fejér di f.]

13. Sia f una funzione limitata, 2π-periodica e dispari. Se i coefficienti di Fourier $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$ sono non negativi, dette σ_N le somme di Fejér di f si provi che:

    (i) $0 \le \sum_{m=1}^{N}\left(1 - \frac{m}{N+1}\right) m\, b_m \le N\,\sigma_N\left(\frac{\pi}{2N}\right) \le N\|f\|_\infty$;

    (ii) esiste $M \ge 0$ tale che $|S_n(x)| \le M\|f\|_\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$;

    (iii) se f è continua, allora $S_N(x) \to f(x)$ uniformemente per $N \to \infty$.

    [**Traccia:** per (i) si utilizzi la relazione $\sin\frac{m\pi}{2N} \ge \frac{m}{N}$ per $m = 1, 2, \ldots, N$. Per (ii) si scelga in (i) $N = 2n$. Per (iii) si scriva $f = \sigma_N + g_N$, ove $g_N = f - \sigma_N$: si mostri che g è dispari e che $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_N(t)\sin mt\,dt = b_m(1 - (F_N)_m) \ge 0$ per ogni $N, m \in \mathbb{N}^+$ (ove F_N è il nucleo di Fejér), e che quindi, in virtù di (ii), le somme di Fourier di g_N sono limitate da $M\|g_N\|_\infty$; infine si deduca che $|S_N(x) - S_m(x)| \le M\|f - \sigma_N\|_\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $m > N$, da cui la tesi.]

14. Sia $p \ge 1$ e sia $f \in L^p(-\pi, \pi)$ 2π-periodica. Supponiamo che i coefficienti di Fourier a_n e b_n di f verifichino

$$\tau(n) := \sum_{k=1}^{n} k(|a_k| + |b_k|) = \mathrm{o}(n) \quad \text{per } n \to \infty.$$

    Si provi che $S_N \to f$ in $L^p(-\pi, \pi)$, e che se f è continua allora $S_N \to f$ uniformemente.
    [**Traccia:** si provi che $|S_N(x) - \sigma_N(x)| \le \frac{1}{N+1}\,\tau(N)$.]

15. Si dice che una serie trigonometrica $S = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ è *lacunare* se si ha $a_n = b_n = 0$ salvo che per $n = n_k$, ove $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ è una successione crescente tale che $\frac{n_{k+1}}{n_k} \ge \lambda > 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$. Se una funzione $f \in L^p(-\pi, \pi)$ $(p \ge 1)$, 2π-periodica, ha una serie di Fourier lacunare, si provi che $S_N \to f$ in $L^p(-\pi, \pi)$ e che se f è

continua allora $S_N \to f$ uniformemente.
[**Traccia:** per l'esercizio 14 basta provare che $\tau(n) = \sum_{h=1}^{n} h(|a_h| + |b_h|) = o(n)$: si scelga $p \in \mathbb{N}^+$ tale che $|a_{n_k}| + |b_{n_k}| < \varepsilon$ per $k \geq p$; se $n > p$ e m è il massimo tra gli indici k per cui $n_k < n$, si provi che

$$\frac{\tau(n)}{n} = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{p} + \sum_{k=p+1}^{m}\right] n_k(|a_{n_k}| + |b_{n_k}|) \leq \frac{c(p)}{n} + \varepsilon \frac{n_m}{n} \sum_{k=p+1}^{m} \lambda^{-k}$$

e che quindi $\frac{\tau(n)}{n} \to 0$.]

16. Una funzione $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ si dice *a variazione limitata* se vi è una costante $M \geq 0$ tale che per ogni partizione $P = \{-\pi = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \pi\}$ di $[-\pi, \pi]$ risulta

$$\sum_{i=1}^{m} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \leq M.$$

In tal caso il numero reale

$$V(f) = \sup_P \left\{ \sum_{i=1}^{m} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| : \ t_i \in P \right\}$$

si chiama *variazione totale* di f. Siano c_n i coefficienti di Fourier di una funzione f a variazione limitata: si provi che $|c_n| \leq \frac{V(f)}{2n}$ per ogni $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
[**Traccia:** si verifichi che

$$(2n+1)|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(x + k + \frac{\pi}{n}\right) - f(x+k) \right| dx.]$$

17. Siano $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ e siano c_k, γ_k i rispettivi coefficienti di Fourier. Si provi che fg ha la serie di Fourier $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k e^{ikt}$, ove $\beta_k = \sum_{h \in \mathbb{Z}} c_k \gamma_{k-h}$.]

18. Si provi che se f è una funzione 2π-periodica e α-hölderiana, allora $\|f - \sigma_N\|_\infty \leq cN^{-\alpha}$ per ogni $N \in \mathbb{N}^+$.

19. Si provi che ogni serie trigonometrica $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ può essere scritta nella forma $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(nx - \vartheta_n)$, ove $r_n \geq 0$ e $\vartheta_n \in]-\pi, \pi]$.

20. Sia $E \subset [-\pi, \pi]$ un insieme misurabile con $m(E) > 0$. Si provi che

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E |\cos nx|\, dx \geq \frac{1}{2}\, m(E), \qquad \liminf_{n\to\infty} \int_E |\sin nx|\, dx \geq \frac{1}{2}\, m(E).$$

21. Sia $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ una serie trigonometrica assolutamente convergente per ogni $x \in E$, ove $E \subseteq [-\pi, \pi]$ è un insieme misurabile con $m(E) > 0$. Si deduca che $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) < \infty$.

22. Sia $f \in L^1(-\pi, \pi)$ e sia $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ una successione dotata di un punto d'accumulazione $z \in \mathbb{C}$. Si mostri che se $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{iz_n t}\, dt = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $f = 0$ q.o..

23. Siano $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ e siano c_k, γ_k i rispettivi coefficienti di Fourier. Si provi che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(nt)}\, dt = c_0\overline{\gamma_0}\,.$$

24. Per $\delta > 0$ sia $A_\delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos x\, \cos y > 1 - \delta\}$.

    (i) Si provi che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

    $$A_\delta \subset \bigcup_{n,m\in\mathbb{Z}} B((2\pi n, 2\pi m), \varepsilon).$$

    (ii) Posto

    $$K_{\delta,n}(x, y) = \frac{(\delta + \cos x\, \cos y)^{2n}}{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\delta + \cos s\, \cos t)^{2n}\, dsdt}\,,$$

    si verifichi che $\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_{\delta,n}(x, y)\, dxdy = 1$ e che per ogni $\varepsilon, \sigma > 0$ esistono $\delta > 0$ e $n \in \mathbb{N}^+$ tali che $K_{\delta,n}(x, y) \leq \varepsilon$ per $|x|, |y| \in]\sigma, \pi]$.

    (iii) Data una funzione $f(x, y)$ continua e 2π-periodica in entrambe le variabili, e fissato $\varepsilon > 0$, si provi che esistono $\delta > 0$ e $n \in \mathbb{N}^+$ tali che

    $$\left| f(x, y) - \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_{\delta,n}(s, t) f(x - s, y - t)\, dsdt \right| < \varepsilon \ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

    (iv) Si concluda che f è approssimata uniformemente in $\mathbb{R}^2$ da polinomi trigonometrici della forma $P_{NM}(x, y) = \sum_{|k|\leq N}\sum_{|h|\leq M} a_{hk}e^{ihx}e^{iky}$.