Appunti di Analisi funzionale

Paolo Acquistapace

30 novembre 2025

Indice

1 Misura di Lebesgue **1**
1.1 Motivazioni . . . 1
1.2 Lunghezza degli intervalli . . . 2
1.3 Misura esterna di Lebesgue . . . 3
1.4 Insiemi misurabili secondo Lebesgue . . . 6
1.5 Misurabilità degli intervalli . . . 10
1.6 Insieme di Cantor . . . 12
1.7 Proprietà della misura di Lebesgue . . . 14
1.8 Un insieme non misurabile . . . 19
Soluzioni degli esercizi . . . 20

2 Misure **36**
2.1 Spazi misurati . . . 36
2.2 Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ . . . 42
2.3 Misure esterne di Hausdorff . . . 43
2.4 Misure e dimensione di Hausdorff . . . 47
Soluzioni degli esercizi . . . 56

3 Funzioni misurabili **75**
3.1 Definizione e proprietà . . . 75
3.2 Funzioni essenzialmente limitate . . . 80
3.3 Lo spazio L^∞ . . . 83
3.4 Misurabilità e continuità . . . 85
3.5 Convergenza in misura . . . 89
Soluzioni degli esercizi . . . 92

4 L'integrale **104**
4.1 Integrale di funzioni semplici . . . 104
4.2 Integrale di funzioni misurabili . . . 107
4.3 Passaggio al limite sotto il segno di integrale . . . 116
4.4 Confronto fra integrale di Riemann ed integrale di Lebesgue . . . 121
4.5 Assoluta continuità . . . 129
4.6 Lo spazio L^1 . . . 138
4.7 Teoremi di densità in L^1 . . . 142
Soluzioni degli esercizi . . . 146

5 Misure prodotto **181**
5.1 Rettangoli misurabili . . . 181
5.2 Insiemi misurabili in $X \times Y$ . . . 183
5.3 Teoremi di integrazione successiva . . . 188
5.4 Completamento delle misure prodotto . . . 193
Soluzioni degli esercizi . . . 199

6 Derivazione **214**
6.1 Teorema fondamentale del calcolo integrale . . . 214
6.2 Punti di Lebesgue . . . 215
6.3 Derivabilità delle funzioni monotone . . . 220
6.4 Funzioni a variazione limitata . . . 225
6.5 Funzioni assolutamente continue . . . 228
6.6 Cambiamento di variabile in $\mathbb{R}$ . . . 235
6.7 Cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^N$ . . . 239
Soluzioni degli esercizi . . . 254

7 Spazi di Banach **277**
7.1 Norme . . . 277
7.2 Prodotti scalari . . . 281
7.3 Operatori lineari e continui . . . 286
Soluzioni degli esercizi . . . 295

8 Spazi di Hilbert **319**
8.1 Proiezioni su convessi chiusi . . . 319
8.2 Il duale di uno spazio di Hilbert . . . 327
8.3 Sistemi ortonormali . . . 330
8.4 Trasformata di Fourier . . . 340
Soluzioni degli esercizi . . . 351

9 Spazi L^p **381**
9.1 La norma di L^p . . . 381
9.2 Il duale di L^p . . . 392
Soluzioni degli esercizi . . . 398

10 Operatori lineari **423**
10.1 Estensione di funzionali lineari . . . 423
10.2 Uniforme limitatezza di operatori . . . 431
10.3 Applicazioni aperte . . . 436
10.4 Operatore aggiunto . . . 441
10.5 Riflessività . . . 446
10.6 Convergenze deboli e topologie deboli . . . 451
10.7 Compattezza . . . 459
10.8 Uniforme convessità . . . 471
Soluzioni degli esercizi . . . 478

11 Teoria spettrale **515**
11.1 Spettro e risolvente 515
11.2 Operatori compatti 521
11.3 Operatori compatti in spazi di Hilbert 526
11.4 L'equazione di Sturm - Liouville 540
Soluzioni degli esercizi 553

Bibliografia **575**

Indice analitico **577**

Capitolo 1

Misura di Lebesgue

01

1.1 Motivazioni

motivaz

La teoria della misura e dell'integrazione secondo Riemann, concettualmente semplice e soddisfacente per molti aspetti, non è tuttavia così flessibile da consentire certe operazioni che pure appaiono naturali: ad esempio, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

solo quando A è limitato e vi è convergenza uniforme delle f_n; se $\{A_n\}$ è una successione di insiemi misurabili disgiunti, la loro unione non è necessariamente misurabile, né, tanto meno, vale in generale la relazione

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n);$$

infine, le quantità

$$\int_A |f(x)|\,dx, \qquad \left[\int_A |f(x)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

non sono norme sullo spazio $\mathcal{R}(A)$ delle funzioni integrabili secondo Riemann, perché manca loro la proprietà di annullarsi se e solo se f è identicamente nulla (la f potrebbe essere non nulla in un insieme finito o anche numerabile di punti).
Vi sono poi altre, e più importanti, motivazioni "a posteriori": la teoria dell'integrazione secondo Lebesgue ha dato l'avvio ad enormi sviluppi nell'analisi funzionale, nella teoria della probabilità, ed in svariatissime applicazioni (risoluzione di equazioni differenziali, calcolo delle variazioni, ricerca operativa, fisica matematica, matematica finanziaria, biomatematica, ed altre ancora).
Esporremo la teoria della misura di Lebesgue seguendo la presentazione introdotta da Carathéodory, che è quella che più facilmente si estende, come vedremo, al caso di misure astratte definite su insiemi arbitrari.

Esercizi 1.1

Rienolim

1. Esibire una successione di funzioni $\{f_n\}$ definite su $[a,b]$, integrabili secondo Riemann in $[a,b]$, puntualmente convergenti in $[a,b]$, e tali che

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx \neq \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Rienomis

2. Esibire una successione di sottoinsiemi $\{A_n\}$ di $\mathbb{R}$, misurabili secondo Riemann e disgiunti, tali che la loro unione non sia misurabile secondo Riemann.

1.2 Lunghezza degli intervalli

intervalli

Il punto di partenza della teoria, come è naturale, è l'attribuzione di una lunghezza agli intervalli della retta reale.

lunghezza

Definizione 1.2.1 *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. La sua* lunghezza $\ell(I)$ *è data da*

$$\ell(I) = \begin{cases} b-a & \text{se }]a,b[\subseteq I \subseteq [a,b], \\ +\infty & \text{se } I \text{ è illimitato.} \end{cases}$$

La funzione $\ell(I)$ associa ad ogni intervallo di $\mathbb{R}$ un numero in $[0,+\infty]$ (si noti che, in particolare, $\ell(\emptyset)$ e $\ell(\{a\})$ valgono 0). Vogliamo estendere tale funzione a sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ più generali, in modo da poterli "misurare". Sarebbe auspicabile poter definire una funzione di insieme m che verifichi le seguenti proprietà:

1. $m(E)$ è definita per ogni $E \subseteq \mathbb{R}$;

2. $m(I) = \ell(I)$ per ogni intervallo I;

3. (*numerabile additività*) se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una famiglia numerabile di insiemi disgiunti, allora

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n);$$

4. (*invarianza per traslazioni*) per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $E \subseteq \mathbb{R}$ si ha $m(x+E) = m(E)$, ove $x + E = \{y \in \mathbb{R} : y - x \in E\}$.

Sfortunatamente si può dimostrare (si veda l'esercizio 2.1.10) che non è possibile soddisfare simultaneamente queste richieste: se si vogliono mantenere le proprietà 2, 3 e 4 non si potranno misurare tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$; se, al contrario, si vuole mantenere la proprietà 1, occorrerà indebolire qualcuna delle altre, ad esempio sostituire la 3 con la seguente:

3′. (*numerabile subadditività*) se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una famiglia numerabile di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, allora

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n).$$

Considerazioni geometriche ci inducono a considerare irrinunciabili le proprietà 2, 3 e 4: di conseguenza, come si vedrà, la classe degli insiemi "misurabili" sarà un sottoinsieme proprio di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Esercizi 1.2

intalg

1. Si provi che la famiglia delle unioni finite di intervalli di $\mathbb{R}$ aperti a destra è un'*algebra*, ossia è una classe contenente l'insieme vuoto e chiusa rispetto all'unione ed al passaggio al complementare.

intnoalg

2. Si verifichi che la famiglia delle unioni finite di intervalli aperti di $\mathbb{R}$ non è un'algebra.

1.3 Misura esterna di Lebesgue

misest

Cominciamo ad attribuire ad ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ una "misura esterna" che goda delle proprietà 1, 2, 3′ e 4 del paragrafo 1.2.

m-star **Definizione 1.3.1** *Se $E \subseteq \mathbb{R}$, la* misura esterna $m^*(E)$ *è data da*

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) : E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\,,\ I_n \text{ intervalli aperti}\right\}.$$

Dalla definizione seguono subito le seguenti proprietà:

posit-monot **Proposizione 1.3.2** *Si ha:*

(i) $m^*(E) \geq 0 \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}$*;*

(ii) $m^*(\emptyset) = m^*(\{x\}) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$*;*

(iii) (monotonia) *se $E \subseteq F$ allora $m^*(E) \leq m^*(F)$.*

Dimostrazione **(i)** Evidente.

(ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\emptyset \subset \{x\} \subset]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$; questo intervallo ha lunghezza 2ε e ricopre $\{x\}$ e $\emptyset$. Quindi, per definizione,

$$0 \leq m^*(\emptyset) \leq m^*(\{x\}) \leq 2\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

da cui la tesi.

(iii) Se $E \subseteq F$, ogni ricoprimento $\{I_n\}$ di F costituito da intervalli aperti è anche un ricoprimento di E, da cui

$$m^*(E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n);$$

per l'arbitrarietà del ricoprimento di F, si ottiene $m^*(E) \leq m^*(F)$. □

Verifichiamo ora la proprietà 2:

m-star=l **Proposizione 1.3.3** *Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, allora $m^*(I) = \ell(I)$.*

Dimostrazione Supponiamo dapprima $I = [a, b]$. Per ogni $\varepsilon > 0$, I è contenuto nell'intervallo $]a - \varepsilon, b + \varepsilon[$, e quindi per definizione si ha

$$m^*(I) \leq \ell(\,]a - \varepsilon, b + \varepsilon[\,) = b - a + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

da cui $m^*(I) \leq b - a$.
Per provare la disuguaglianza opposta, sia $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ricoprimento di I costituito da intervalli aperti; poiché I è compatto, esisterà un sottoricoprimento finito $\{I_{n_1}, \ldots, I_{n_m}\}$. Eliminando eventualmente qualcuno degli I_{n_k}, possiamo supporre che gli I_{n_k} siano tutti distinti fra loro, ed inoltre che il ricoprimento sia minimale, nel senso che togliendo un qualunque I_{n_k} gli intervalli residui non ricoprano più $[a, b]$.
Ordiniamo gli intervalli $I_{n_k} =]a_k, b_k[$ in modo che

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_m;$$

si noti che non può essere $a_k = a_{k+1}$, poiché in tal caso si avrebbe $I_{n_k} \subseteq I_{n_{k+1}}$ se $b_k < b_{k+1}$ e l'inclusione contraria se $b_k > b_{k+1}$: quindi potremmo eliminare uno dei due intervalli. Avremo poi $a_1 < a < b_1$, perché se fosse $b_1 \leq a$ potremmo eliminare I_{n_1}, e possiamo supporre $b_1 \leq b$, perché da $b < b_1$ segue $[a, b] \subset I_{n_1}$ e in tal caso si ha direttamente $\ell(I) = b - a < b_1 - a_1 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$, che è ciò a cui vogliamo arrivare. Risulta anche

$$a_1 < a \leq a_2 < b_1 < b_2 :$$

infatti se fosse $b_2 \leq b_1$ potremmo eliminare I_{n_2}, se fosse $b_1 \leq a_2$ risulterebbe $b_1 \in [a, b] \setminus \bigcup_{k=1}^m I_{n_k} = \emptyset$ (assurdo), e se fosse $a_2 < a$ potremmo eliminare I_{n_1}.
Ragionando in modo analogo troviamo che

$$a_{k-1} < a_k < b_{k-1} < b_k, \qquad k = 3, 4, \ldots, m - 1,$$

ed infine per l'indice m avremo

$$a_{m-1} < a_m < b_{m-1} \leq b < b_m.$$

Pertanto

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) \geq \sum_{k=1}^{m} \ell(I_{n_k}) = \sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k) > (b - b_{m-1}) + \sum_{k=2}^{m-1} (b_k - b_{k-1}) + (b_1 - a) = b - a.$$

Dall'arbitrarietà del ricoprimento segue $m^*(I) \geq b - a = \ell(I)$.
Sia ora I tale che $\overline{I} = [a, b]$. Poiché per ogni $\varepsilon \in \left]0, \frac{b-a}{2}\right[$ si ha $[a + \varepsilon, b - \varepsilon] \subset I \subseteq [a, b]$, dalla monotonia di m^* e da quanto già dimostrato segue

$$b - a - 2\varepsilon \leq m^*(I) \leq b - a \qquad \forall \varepsilon \in \left]0, \frac{b-a}{2}\right[,$$

e quindi $m^*(I) = b - a = \ell(I)$.
Infine, se I è illimitato, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un intervallo J_n di lunghezza n contenuto in I: quindi, per monotonia,

$$m^*(I) \geq m^*(J_n) = \ell(J_n) = n \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

cioè $m^*(I) = +\infty = \ell(I)$. $\square$

Verifichiamo ora che m^* gode della proprietà 3′ del paragrafo 1.2.

numsubadd **Proposizione 1.3.4** *La misura esterna m^* è numerabilmente subadditiva.*

Dimostrazione Sia $\{E_n\}$ una successione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$: dobbiamo provare che

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*(E_n).$$

Ciò è ovvio se la serie a secondo membro è divergente; supponiamo quindi che essa sia convergente, cosicché in particolare $m^*(E_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per definizione di misura esterna, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento $\{I_{kn}\}_{k\in\mathbb{N}}$ di E_n costituito da intervalli aperti, tale che

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \ell(I_{kn}) < m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

La famiglia $\{I_{kn}\}_{k,n\in\mathbb{N}}$ è allora un ricoprimento di $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ costituito da intervalli aperti, e si ha

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{k,n\in\mathbb{N}} \ell(I_{kn}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*(E_n) + \varepsilon\,;$$

dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. $\square$

Infine osserviamo che m^* verifica anche la proprietà 4 del paragrafo 1.2: infatti la lunghezza degli intervalli è ovviamente invariante per traslazioni; ne segue facilmente, usando la definizione, che anche m^* è invariante per traslazioni.
Come vedremo in seguito, la misura esterna *non* verifica invece la proprietà 3 del paragrafo 1.2, ed anzi non è nemmeno finitamente additiva su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (esercizio 1.8.4). Sarà però numerabilmente additiva su una sottoclasse molto vasta di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Esercizi 1.3

m*omo 1. Sia $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Posto $tE = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{t} \in E\}$, si provi che

$$m^*(tE) = |t| m^*(E).$$

m*intarb 2. Dimostrare che la funzione di insieme m^* non cambia se nella definizione 1.3.1 si fa uso, anziché di intervalli I_n aperti, di intervalli I_n di uno dei seguenti tipi:

   (a) intervalli I_n chiusi;

(b) intervalli I_n aperti a destra;

(c) intervalli I_n qualunque;

(d) intervalli I_n ad estremi razionali.

intersap

3. Se E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, si provi che esiste una famiglia di aperti $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che
$$E \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\,, \qquad m^*(E) = m^*\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

apunin

4. Si dimostri che ogni aperto di $\mathbb{R}$ è unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti.

apmispos

5. Si provi che ogni aperto non vuoto di $\mathbb{R}$ ha misura esterna strettamente positiva.

numm*0

6. Si provi che ogni sottoinsieme numerabile di $\mathbb{R}$ ha misura esterna nulla. È vero il viceversa?

apdsmall

7. Per ogni $\varepsilon > 0$ si costruisca un aperto $A \subset \mathbb{R}$, denso in $\mathbb{R}$, tale che $m^*(A) < \varepsilon$.

EquasiI

8. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme di misura esterna strettamente positiva. Si provi che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intervallo I tale che $m^*(E \cap I) > (1-\varepsilon)\ell(I)$.
[**Traccia:** fissato $\varepsilon > 0$, si prenda un aperto A contenente E, tale che $m^*(A) < m^*(E) + \varepsilon$; si utilizzi l'esercizio 1.3.4 e si verifichi che, per ε sufficientemente piccolo, uno almeno degli intervalli che compongono A verifica necessariamente la tesi.]

1.4 Insiemi misurabili secondo Lebesgue

misurabili

Introduciamo adesso una classe di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sulla quale la funzione m^* è numerabilmente additiva (proprietà 3 del paragrafo 1.2).

misurab

Definizione 1.4.1 *Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ è detto* misurabile *(secondo Lebesgue) se per ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si ha*
$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Indicheremo con $\mathcal{M}$ la classe dei sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}$.
Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ è dunque misurabile se, fissato un arbitrario "insieme test" $A \subseteq \mathbb{R}$, esso viene "decomposto bene" da E, nel senso che la misura esterna di A è additiva sulle due parti $A \cap E$ e $A \cap E^c$. Si noti che per la subadditività di m^* si ha sempre
$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c);$$
quindi la disuguaglianza significativa è quella opposta.

Osservazione 1.4.2 Dalla definizione segue subito che E è misurabile se e solo se lo è E^c; quindi la classe $\mathcal{M}$ è chiusa rispetto al passaggio al complementare. Inoltre è facile vedere che $\mathbb{R}, \emptyset$ sono insiemi misurabili.

Più in generale:

misnulla **Proposizione 1.4.3** *Se $E \subset \mathbb{R}$ e $m^*(E) = 0$, allora E è misurabile.*

Dimostrazione Per ogni insieme test $A \subseteq \mathbb{R}$ si ha

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

in quanto $m^*(A \cap E) \leq m^*(E) = 0$. Ne segue la tesi. □

La classe $\mathcal{M}$ è chiusa anche rispetto all'unione; si ha infatti:

Proposizione 1.4.4 *Se $E, F \subseteq \mathbb{R}$ sono misurabili, allora $E \cup F$ è misurabile.*

Dimostrazione Sia A un insieme test. Poiché E è misurabile,

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c);$$

poiché F è misurabile, scelto come insieme test $A \cap E^c$ si ha

$$\begin{aligned} m^*(A \cap E^c) &= m^*(A \cap E^c \cap F) + m^*(A \cap E^c \cap F^c) = \\ &= m^*(A \cap E^c \cap F) + m^*(A \cap (E \cup F)^c), \end{aligned}$$

e dunque

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c \cap F) + m^*(A \cap (E \cup F)^c);$$

d'altra parte, essendo

$$(A \cap E) \cup (A \cap E^c \cap F) = A \cap (E \cup F),$$

la subadditività di m^* implica che

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c \cap F) \geq m^*(A \cap (E \cup F)),$$

da cui finalmente

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap (E \cup F)) + m^*(A \cap (E \cup F)^c).$$

Ciò prova la misurabilità di $E \cup F$. □

Corollario 1.4.5 *Se $E, F \subseteq \mathbb{R}$ sono misurabili, allora $E \cap F$ ed $E \setminus F$ sono misurabili.*

Dimostrazione Se $E, F \in \mathcal{M}$, allora $E^c, F^c \in \mathcal{M}$; per la proposizione precedente, $E^c \cup F^c \in \mathcal{M}$ e quindi $E \cap F = (E^c \cup F^c)^c \in \mathcal{M}$. Di qui segue $E \setminus F = E \cap F^c \in \mathcal{M}$. □

La classe $\mathcal{M}$ contiene l'insieme vuoto ed è chiusa rispetto alle operazioni di unione, intersezione e differenza; in particolare, $\mathcal{M}$ è un'algebra (v. esercizio 1.2.1).

diffset **Osservazione 1.4.6** Se E, F sono insiemi misurabili e disgiunti, si ha

$$m^*(E \cup F) = m^*(E) + m^*(F),$$

come si verifica applicando ad E la definizione 1.4.1 e scegliendo come insieme test $E \cup F$. Di conseguenza, se $E, F \in \mathcal{M}$ ed $E \subseteq F$, vale l'uguaglianza

$$m^*(F \setminus E) + m^*(E) = m^*(F),$$

e, se $m^*(E) < \infty$,

$$m^*(F \setminus E) = m^*(F) - m^*(E).$$

Nel caso di N insiemi misurabili disgiunti si ha, più generalmente:

finadd **Lemma 1.4.7** *Siano $E_1, \ldots, E_N$ misurabili e disgiunti. Allora per ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si ha*

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) = \sum_{n=1}^{N} m^*(A \cap E_n).$$

Dimostrazione Ragioniamo per induzione. Se $N = 1$ non c'è niente da dimostrare. Supponiamo che la tesi sia vera per N insiemi misurabili disgiunti, e consideriamo $N+1$ insiemi $E_1, \ldots, E_{N+1} \in \mathcal{M}$ fra loro disgiunti. Poiché E_{N+1} è misurabile, scegliendo come insieme test $A \cap \bigcup_{n=1}^{N+1} E_n$, si ha

$$\begin{aligned} m^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N+1} E_n\right) &= \\ &= m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N+1} E_n\right) \cap E_{N+1}\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N+1} E_n\right) \cap E_{N+1}^c\right) = \\ &= m^*(A \cap E_{N+1}) + m^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right); \end{aligned}$$

ma, per ipotesi induttiva,

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) = \sum_{n=1}^{N} m^*(A \cap E_n),$$

da cui

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N+1} E_n\right) = m^*(A \cap E_{N+1}) + \sum_{n=1}^{N} m^*(A \cap E_n) = \sum_{n=1}^{N+1} m^*(A \cap E_n). \quad \square$$

Grazie al lemma 1.4.7, siamo in grado di provare che la classe $\mathcal{M}$ è chiusa rispetto all'unione numerabile (e quindi rispetto all'intersezione numerabile).

uninum **Proposizione 1.4.8** *Se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$, allora $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}$.*

Dimostrazione Anzitutto, scriviamo $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ come unione numerabile di insiemi misurabili e *disgiunti*: basta porre

$$F_0 = E_0, \qquad F_{n+1} = E_{n+1} \setminus \bigcup_{k=0}^{n} F_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

per ottenere che gli F_n sono disgiunti, appartengono a $\mathcal{M}$ e verificano

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme test: per ogni $N \in \mathbb{N}$ possiamo scrivere, grazie al lemma 1.4.7,

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*\left(A \cap \bigcup_{n=0}^{N} F_n\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=0}^{N} F_n\right)^c\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{N} m^*(A \cap F_n) + m^*\left(A \cap \bigcap_{n=0}^{N} F_n^c\right) \geq \\ &\geq \sum_{n=0}^{N} m^*(A \cap F_n) + m^*\left(A \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n^c\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{N} m^*(A \cap F_n) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right)^c\right). \end{aligned}$$

Se $N \to \infty$, in virtù della numerabile subadditività di m^* otteniamo

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq \sum_{n=0}^{\infty} m^*(A \cap F_n) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right)^c\right) \geq \\ &\geq m^*\left(A \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right)^c\right). \end{aligned}$$

Ciò prova che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ è misurabile. □

Dunque la classe $\mathcal{M}$ contiene l'insieme vuoto ed è chiusa rispetto all'unione numerabile ed al passaggio al complementare. Una famiglia di insiemi dotata di queste proprietà si chiama *σ-algebra*, o *tribù*; $\mathcal{M}$ è pertanto una σ-algebra di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.
Proviamo finalmente che m^* è numerabilmente additiva su $\mathcal{M}$.

numadd **Proposizione 1.4.9** *Se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ e gli E_n sono fra loro disgiunti, allora si ha*

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*(E_n).$$

Dimostrazione Poiché m^* è numerabilmente subadditiva, la disuguaglianza ($\leq$) è evidente; proviamo l'altra. Per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha, utilizzando la monotonia di m^* ed il lemma 1.4.7 con $A = \mathbb{R}$,

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \geq m^*\left(\bigcup_{n=0}^{N} E_n\right) = \sum_{n=0}^{N} m^*(E_n),$$

da cui per $N \to \infty$

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} m^*(E_n). \quad \square$$

Esercizi 1.4

apalfa

1. Per ogni $\alpha \in [0,\infty]$ si determini una successione di aperti $\{A_n\}$ di $\mathbb{R}$ tali che

$$A_n \supseteq A_{n+1}, \quad m^*(A_n) = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad m^*\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \alpha.$$

0lip

2. Sia $E \subset \mathbb{R}$ con $m^*(E) = 0$ e sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile con derivata limitata. Si provi che $f(E)$ ha misura esterna nulla. Si provi poi lo stesso risultato supponendo $f \in C^1(\mathbb{R})$.

densitaE

3. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. La *densità di E nel punto $x \in \mathbb{R}$* è il limite

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h} m^*(E \cap]x-h, x+h[\,).$$

   (i) Tale limite esiste sempre?

   (ii) Si provi che l'insieme

$$\left\{x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : \cos\frac{1}{x} > \frac{1}{2}\right\}$$

   ha densità $\frac{1}{3}$ nel punto $x = 0$.

   [**Traccia:** per (i) si consideri $E = \bigcup_{n=0}^{\infty}[2^{-2n-1}, 2^{-2n}]$.]

ribunonnum

4. Sia $\mathcal{F}$ una σ-algebra di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Si provi che $\mathcal{F}$ è finita, oppure $\mathcal{F}$ contiene una infinità più che numerabile di elementi.
   [**Traccia:** se, per assurdo, fosse $\mathcal{F} = \{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con gli E_n tutti distinti, si costruisca una successione $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ di insiemi disgiunti; dopodiché, posto $\mathcal{F}' = \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si metta $\mathcal{P}(\mathcal{F}')$ in corrispondenza biunivoca con $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.]

1.5 Misurabilità degli intervalli

intermisu

La classe degli insiemi misurabili non avrebbe l'importanza che ha, se non contenesse gli intervalli di $\mathbb{R}$: questo è ciò che andiamo a dimostrare.

intmis

Proposizione 1.5.1 *Gli intervalli di $\mathbb{R}$ sono misurabili secondo Lebesgue.*

Dimostrazione Sappiamo già che $\mathbb{R} = \emptyset^c$ è misurabile. Osserviamo poi che ogni intervallo *non* aperto è l'unione di un intervallo aperto e di uno o due punti, e dunque è misurabile se lo sono tutti gli intervalli *aperti*; inoltre, dato che ogni intervallo aperto

limitato $]a,b[$ è l'intersezione delle due semirette aperte $]-\infty,b[$ e $]a,+\infty[$, basterà provare che sono misurabili le semirette aperte. Infine, essendo $]a,+\infty[^c =]-\infty,a[\cup \{a\}$, sarà in definitiva sufficiente mostrare che $]-\infty,b[\in \mathcal{M}$ per ogni $b \in \mathbb{R}$.
Sia dunque $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme test. Se $m^*(A) = \infty$, la disuguaglianza da provare, ossia

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap]-\infty,b[\,) + m^*(A \cap [b,+\infty[\,)$$

è evidente. Se invece $m^*(A) < \infty$, per definizione fissato $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento $\{I_n\}$ di A, fatto di intervalli aperti, tale che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) < m^*(A) + \varepsilon.$$

Poniamo

$$I'_n = I_n \cap]-\infty,b[\,, \quad I''_n = I_n \cap [b,+\infty[\,;$$

chiaramente

$$\ell(I'_n) + \ell(I''_n) = \ell(I_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

quindi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I'_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I''_n) < m^*(A) + \varepsilon.$$

Dato che $\{I'_n\}$ e $\{I''_n\}$ ricoprono rispettivamente $A \cap]-\infty,b[$ e $A \cap [b,+\infty[$, per la numerabile subadditività di m^* si ottiene a maggior ragione

$$m^*(A \cap]-\infty,b[\,) + m^*(A \cap [b,+\infty[\,) < m^*(A) + \varepsilon,$$

e la tesi segue per l'arbitrarietà di ε. □

Corollario 1.5.2 *Gli aperti ed i chiusi di* $\mathbb{R}$ *sono misurabili secondo Lebesgue.*

Dimostrazione Basta ricordare l'esercizio 1.3.4. □

Naturalmente la σ-algebra $\mathcal{M}$ contiene molti altri insiemi: indicando con $\mathcal{A}$ la famiglia degli aperti di $\mathbb{R}$, dovrà stare in $\mathcal{M}$ tutto ciò che si ottiene da $\mathcal{A}$ con unioni ed intersezioni numerabili. La *più piccola* σ-algebra che contiene $\mathcal{A}$ (ossia l'intersezione di tutte le σ-algebre contenenti $\mathcal{A}$: si vede subito che essa stessa è una σ-algebra) si indica con $\mathcal{B}$ ed i suoi elementi si chiamano *Boreliani* (dal nome del matematico Émile Borel). Si dice che $\mathcal{B}$ è la σ-algebra *generata* da $\mathcal{A}$. Vedremo in seguito (esercizio 3.1.9) che $\mathcal{M}$ contiene propriamente $\mathcal{B}$.

Esercizi 1.5

missin1x

1. Si verifichi che l'insieme

$$\left\{ x \in \left]0, \frac{1}{\pi}\right] : \sin\frac{1}{x} \geq 0 \right\}$$

è misurabile e se ne calcoli la misura esterna.

decnon9

2. Sia E l'insieme dei numeri di $[0,1]$ che possiedono uno sviluppo decimale ove non compare mai la cifra 9. Si dimostri che E è misurabile e se ne calcoli la misura esterna.

cifredec

3. Per ogni $x \in [0,1]$ sia $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ la successione delle cifre decimali di x (scegliendo lo sviluppo infinito nei casi di ambiguità). Si calcoli la misura esterna dei seguenti insiemi:

   (a) $E = \{x \in [0,1] : \ \alpha_n \text{ è dispari per ogni } n \in \mathbb{N}^+\}$,

   (b) $F = \{x \in [0,1] : \ \alpha_n \text{ è definitivamente dispari}\}$,

   (c) $G = \{x \in [0,1] : \ \alpha_n \text{ è dispari per infiniti indici } n \in \mathbb{N}^+\}$.

ptomed

4. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che $m^*(E) < \infty$. Si provi che ogni numero reale è il punto medio di un intervallo aperto I tale che

$$m^*(E \cap I) = m^*(E \cap I^c) = \frac{1}{2} m^*(E).$$

esnumQ

5. Sia $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata di numeri positivi. Per ogni numerazione $\sigma = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dell'insieme $\mathbb{Q}$, sia

$$A_\sigma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]q_n - \alpha_n, q_n + \alpha_n[\, .$$

   Si provi che valgono i fatti seguenti:

   (i) se $\inf_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n > 0$, allora $A_\sigma = \mathbb{R}$ per ogni numerazione σ;

   (ii) se $\{\alpha_n\}$ non è infinitesima, ma $\inf_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n = 0$,allora esiste una numerazione σ tale che $A_\sigma = \mathbb{R}$ ed esiste una numerazione σ tale che $m^*(A_\sigma) < \infty$;

   (iii) se $\{\alpha_n\}$ è infinitesima, ma la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ diverge, allora, ugualmente, esiste una numerazione σ tale che $A_\sigma = \mathbb{R}$, e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una numerazione σ tale che $m^*(A_\sigma) < 2 \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n + \varepsilon$;

   (iv) se la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ converge, allora per ogni numerazione σ si ha $m^*(A_\sigma) < \infty$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una numerazione σ tale che $m^*(A_\sigma) < 2 \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n + \varepsilon$.

1.6 Insieme di Cantor

Cantor

Per rendersi conto di quanto la nozione di misurabilità secondo Lebesgue sia generale, e di quanto la misura esterna si discosti dall'idea intuitiva di "estensione" di un insieme, è utile considerare l'esempio che segue.
Sia $\xi \in]0, \frac{1}{3}]$. Osserviamo preliminarmente che, come si verifica facilmente, risulta

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \xi^n \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < \xi \le \frac{1}{3} \, ,$$

il che ci permette di fare la costruzione che andiamo a descrivere.
Dall'intervallo $[0,1]$ togliamo i punti dell'intervallo aperto I_1^1 di centro $\frac{1}{2}$ e ampiezza ξ; dai due intervalli chiusi rimasti togliamo i due intervalli aperti I_1^2, I_2^2 che hanno come centri i punti medi e ampiezza ξ^2: questo è possibile perché $\xi^2 < \frac{1-\xi}{2}$, essendo $2\xi^2 + \xi < 1$; dai quattro intervalli chiusi residui togliamo i quattro intervalli aperti $I_1^3, I_2^3, I_3^3, I_4^3$ con centri nei punti medi ed ampiezza ξ^3 (lecito, essendo $\xi^3 < \frac{1}{2}\left(\frac{1-\xi}{2} - \xi^2\right)$, dato che $4\xi^3 + 2\xi^2 + \xi < 1$); al passo k-simo toglieremo dai 2^{k-1} intervalli chiusi residui le 2^{k-1} parti centrali aperte di ampiezza ξ^k, cosa possibile essendo $\sum_{n=1}^{k} 2^{n-1}\xi^n < 1$. Procedendo in questa maniera per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, ciò che resta "alla fine" è l'insieme

$$C_\xi = [0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}} I_j^k \,,$$

il quale è chiuso, quindi misurabile; utilizzando la proposizione 1.4.9, la sua misura è

$$m(C_\xi) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{k-1}} \xi^k = 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (2\xi)^k = \frac{1-3\xi}{1-2\xi}.$$

Si noti che C_ξ è privo di punti interni: infatti per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ esso non può contenere intervalli di ampiezza superiore a 2^{-k} (perché dopo il solo passo k-simo rimangono 2^k intervalli disgiunti di uguale lunghezza che non ricoprono $[0,1]$: tale lunghezza quindi è minore di 2^{-k}). In particolare, C_ξ è totalmente sconnesso, cioè la componente connessa di ogni punto $x \in C_\xi$ è $\{x\}$. Inoltre C_ξ è perfetto, ossia tutti i suoi punti sono punti d'accumulazione per C_ξ: infatti se $x \in C_\xi$ allora per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ il punto x sta in uno dei 2^k intervalli residui del passo k-simo, per cui gli estremi di tale intervallo sono punti di C_ξ che distano da x meno di 2^{-k}.
Per $\xi = 1/3$, l'insieme $C_{1/3}$ (che è quello introdotto originariamente da Cantor) ha misura nulla. Esso si può costruire anche nel modo seguente: per ogni $x \in [0,1]$ consideriamo lo sviluppo ternario

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k} \,, \qquad \alpha_k \in \{0,1,2\}.$$

Tale sviluppo non è sempre unico: ad esempio, $\frac{1}{3}$ si scrive come $0.0\overline{2}$ oppure come 0.1. È facile verificare che $C_{1/3}$ è costituito dai numeri $x \in [0,1]$ che ammettono uno sviluppo ternario in cui non compare mai la cifra 1. Così, $\frac{1}{3} \in C_{1/3}$ mentre $\frac{1}{2} = 0.\overline{1} \notin C_{1/3}$ (perché lo sviluppo di $\frac{1}{2}$ è unico).
L'insieme $C_{1/3}$, pur avendo misura esterna nulla, è più che numerabile: se infatti si avesse $C_{1/3} = \{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, con

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^{(n)}}{3^k} \,, \qquad \alpha_k^{(n)} \in \{0,2\},$$

allora scegliendo

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k} \,, \qquad \alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha_n^{(n)} = 2 \\ 2 & \text{se } \alpha_n^{(n)} = 0, \end{cases}$$

avremmo $y \in C_{1/3}$ ma $y \neq x^{(n)}$ per ogni n, dato che la n-sima cifra ternaria di y è diversa da quella di $x^{(n)}$ (per una stima della distanza $|y - x^{(n)}|$ si veda l'esercizio 1.6.1). Ciò è assurdo.

Esercizi 1.6

Cnonnu 1. Con riferimento all'argomentazione che mostra la non numerabilità di $C_{1/3}$, si provi che $|y - x^{(n)}| \geq 3^{-n}$.

E<I 2. Si costruisca un insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}$, tale che

$$0 < m^*(E) < \infty, \qquad m^*(E \cap I) < \ell(I)$$

per ogni intervallo aperto non vuoto I.

cardM=R 3. Si mostri che $\mathcal{M}$ ha la stessa cardinalità di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

CRie 4. La funzione caratteristica χ_{C_ξ} degli insiemi di Cantor C_ξ, definita da

$$\chi_{C_\xi}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in C_\xi \\ 0 & \text{se } x \notin C_\xi \,, \end{cases}$$

è integrabile secondo Riemann su $[0, 1]$?

1.7 Proprietà della misura di Lebesgue

misLeb

Anzitutto, definiamo la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$:

Definizione 1.7.1 *La funzione di insieme*

$$m = m^*|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$$

si chiama misura di Lebesgue.

Dalle proposizioni 1.3.2 e 1.4.9 segue che m è monotona, numerabilmente additiva ed invariante per traslazioni, con $m(\emptyset) = 0$. Queste proprietà (tranne l'invarianza per traslazioni, legata alla geometria di $\mathbb{R}$) saranno i requisiti richiesti per definire le misure in spazi astratti.
Vediamo adesso come si comporta la misura di Lebesgue rispetto alle successioni monotone di insiemi misurabili.

limmis **Proposizione 1.7.2** *Sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi misurabili.*

(i) *Se $E_n \subseteq E_{n+1}$, allora*

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

(ii) *Se $E_n \supseteq E_{n+1}$ e se esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $m(E_{n_0}) < \infty$, allora*

$$m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

Dimostrazione (i) Poniamo

$$F_0 = E_0, \qquad F_{n+1} = E_{n+1} \setminus E_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora si ha

$$E_N = \bigcup_{n=0}^{N} F_n\,, \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\,,$$

e gli F_n sono misurabili e disgiunti. Quindi, usando la numerabile additività di m,

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) &= m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(F_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} m(F_n) = \\ &= \lim_{N\to\infty} m\left(\bigcup_{n=0}^{N} F_n\right) = \lim_{N\to\infty} m(E_N). \end{aligned}$$

(ii) Poniamo $F_n = E_{n_0} \setminus E_n$ per ogni $n > n_0$. Allora gli F_n sono misurabili e $F_n \subseteq F_{n+1}$; inoltre

$$\bigcup_{n=n_0}^{\infty} F_n = E_{n_0} \setminus \bigcap_{n=n_0}^{\infty} E_n\,.$$

Per (i) e per l'osservazione 1.4.6 abbiamo

$$\begin{aligned} m(E_{n_0}) - m\left(\bigcap_{n=n_0}^{\infty} E_n\right) &= m\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} F_n\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} m(F_n) = \lim_{n\to\infty} [m(E_{n_0}) - m(E_n)] = m(E_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} m(E_n). \end{aligned}$$

Ne segue la tesi poiché, ovviamente,

$$\bigcap_{n=n_0}^{\infty} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\,. \quad \square$$

Osserviamo che l'ipotesi che esista $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $m(E_{n_0}) < \infty$ è essenziale nell'enunciato (ii): se ad esempio $E_n = [n, \infty[$, si ha $E_n \supset E_{n+1}$, $m(E_n) = \infty$ per ogni n, ma l'intersezione degli E_n, essendo vuota, ha misura nulla.

Diamo ora un'importante caratterizzazione degli insiemi misurabili: sono quegli insiemi E che differiscono arbitrariamente poco, in termini di m^*, sia dagli aperti (contenenti E), sia dai chiusi (contenuti in E).

misreg **Proposizione 1.7.3** *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Sono fatti equivalenti:*

(i) *$E \in \mathcal{M}$;*

(ii) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $A \supseteq E$ tale che $m^*(A \setminus E) < \varepsilon$;*

(iii) *esiste un Boreliano $B \supseteq E$ tale che $m^*(B \setminus E) = 0$;*

(iv) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $C \subseteq E$ tale che $m^*(E \setminus C) < \varepsilon$;*

(v) *esiste un Boreliano $D \subseteq E$ tale che $m^*(E \setminus D) = 0$.*

Dimostrazione Proveremo le due catene di implicazioni

$$\textbf{(i)} \Longrightarrow \textbf{(ii)} \Longrightarrow \textbf{(iii)} \Longrightarrow \textbf{(i)}, \qquad \textbf{(i)} \Longrightarrow \textbf{(iv)} \Longrightarrow \textbf{(v)} \Longrightarrow \textbf{(i)}.$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Supponiamo dapprima $m(E) < \infty$. Per definizione di m^*, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento $\{I_n\}$ di E fatto di intervalli aperti, tale che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) < m(E) + \varepsilon,$$

cosicché, posto $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, l'aperto A verifica, per subadditività numerabile,

$$m(A) < m(E) + \varepsilon;$$

dal fatto che $m(E) < \infty$ segue allora (osservazione 1.4.6)

$$m(A \setminus E) = m(A) - m(E) < \varepsilon.$$

Sia ora $m(E) = \infty$. Prendiamo un ricoprimento di $\mathbb{R}$ fatto di intervalli limitati e disgiunti: ad esempio

$$I_{2n} = [2n, 2n+2[\,, \quad I_{2n+1} = [-2n-2, -2n[\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots\,.$$

Posto $E_n = E \cap I_n$, si ha $m(E_n) < \infty$; quindi, per quanto già dimostrato, esistono degli aperti $A_n \supseteq E_n$ tali che

$$m(A_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

L'insieme $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ è un aperto contenente E, e poiché

$$A \setminus E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus E_n),$$

si conclude che

$$m(A \setminus E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n \setminus E_n) < \varepsilon.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia A_n un aperto contenente E, tale che

$$m^*(A_n \setminus E) < \frac{1}{n+1}\,;$$

l'insieme $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ è un Boreliano contenente E e si ha, per monotonia,

$$m^*(B \setminus E) \le m^*(A_n \setminus E) < \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

cioè $m^*(B \setminus E) = 0$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Scrivendo $E = B \setminus (B \setminus E)$, la tesi segue dal fatto che l'insieme B è misurabile perché Boreliano, mentre l'insieme $B \setminus E$ è misurabile avendo, per ipotesi, misura esterna nulla (proposizione 1.4.3). Dunque E è misurabile.

(i) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (v) $\Longrightarrow$ (i) Queste implicazioni si dimostrano facilmente applicando ad E^c gli enunciati già dimostrati. □

Le proprietà **(ii) $\mapsto$ (v)** della proposizione precedente si sintetizzano dicendo che la misura di Lebesgue è una misura *regolare*.

Esercizi 1.7

formulina

1. Dimostrare che se E, F sono sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}$, si ha

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B).$$

unnonmis

2. Si provi che per ogni successione $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tale che $E_n \subseteq E_{n+1}$ risulta

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m^*(E_n).$$

[**Traccia:** una disuguaglianza è banale. Per l'altra, si può supporre che sia $\lim_{n\to\infty} m^*(E_n) < \infty$; scelto un aperto $A_n \supseteq E_n$ in modo che $m(A_n) < m^*(E_n) + 2^{-n-1}\varepsilon$, sia $F_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$; si mostri per induzione che $m(F_n) < m^*(E_n) + \varepsilon \sum_{k=0}^n 2^{-k-1}$. Poiché $m(F_n) \to m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)$ per $n \to \infty$, se ne deduca che $m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \le \lim_{n\to\infty} m^*(E_n) + \varepsilon$.]

mamili

3. Sia $\{E_n\}$ una successione di insiemi misurabili di $\mathbb{R}$. L'insieme E' degli $x \in \mathbb{R}$ tali che $x \in E_n$ per infiniti valori di n si chiama *massimo limite* della successione $\{E_n\}$ e si scrive $E' = \limsup_{n\to\infty} E_n$, mentre l'insieme E'' degli $x \in \mathbb{R}$ tali che $x \in E_n$ definitivamente si chiama *minimo limite* di $\{E_n\}$ e si scrive $E'' = \liminf_{n\to\infty} E_n$.

   (i) Si verifichi che

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m\,, \qquad \liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m\,.$$

   (ii) Si provi che

$$m\left(\liminf_{n\to\infty} E_n\right) \le \liminf_{n\to\infty} m(E_n),$$

   e che se $m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) < \infty$ allora

$$m\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) \ge \limsup_{n\to\infty} m(E_n).$$

(iii) Si mostri che la seconda disuguaglianza è in generale falsa nel caso che $m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) = \infty$.

(iv) Si verifichi che $\liminf_{n\to\infty} E_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} E_n$ e si provi che se la successione $\{E_n\}$ è monotona rispetto all'inclusione, allora $\liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty} E_n$.

misEmisB

4. Provare che se $E \in \mathcal{M}$ è un insieme di misura positiva, allora per ogni $t \in [0, m(E)]$ esiste un insieme Boreliano $B_t \subseteq E$ tale che $m(B_t) = t$.

supneqinf

5. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con $0 < m^*(E) < \infty$. Si provi che esistono due Boreliani B, D, tali che $D \subseteq E \subseteq B$ e

$$\begin{aligned} m(D) &= \max\{m(F) : F \in \mathcal{B},\ F \subseteq E\} \leq \\ &\leq m^*(E) = \min\{m(F) : F \in \mathcal{B},\ F \supseteq E\} = m(B), \end{aligned}$$

dove la disuguaglianza intermedia si riduce ad un'uguaglianza se e solo se $E \in \mathcal{M}$.

missup

6. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con $m^*(E) < \infty$. Si provi che E è misurabile secondo Lebesgue se e solo se

$$m^*(E) = \sup\{m(B) : B \in \mathcal{B}, B \subseteq E\}.$$

Si mostri anche che se $m^*(E) = \infty$ l'enunciato precedente è falso.

misdisi

7. Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme tale che $m^*(E) < \infty$. Si provi che E è misurabile secondo Lebesgue se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia finita di intervalli disgiunti $I_1, \ldots, I_N$ tali che

$$m^*\left(E \triangle \bigcup_{i=1}^{N} I_i\right) < \varepsilon,$$

ove $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ è la *differenza simmetrica* fra due insiemi A e B. [**Traccia:** per la necessità, approssimare E con aperti dall'esterno e ricordare che ogni aperto è unione al più numerabile di intervalli disgiunti. Per la sufficienza: dapprima selezionare un aperto $A \supseteq E$ tale che $m(A) < m^*(E) + \varepsilon$; poi, posto $F = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{N} I_i\right)$, verificare che $m^*(F \triangle E) < \varepsilon$; infine, utilizzando le inclusioni $A \setminus E \subseteq (A \setminus F) \cup (F \setminus E)$ e $E \subseteq F \cup (E \setminus F)$, provare che $m^*(A \setminus E) < 3\varepsilon$.]

QDelta

8. Sia $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ una numerazione dell'insieme dei numeri razionali. Posto

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} \left]q_n - \frac{1}{n^2}, q_n + \frac{1}{n^2}\right[,$$

si provi che per ogni chiuso $F \subset \mathbb{R}$ risulta $m(A \triangle F) > 0$.

micro

9. Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice *microscopico* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ di E, costituito da intervalli aperti, tale che $\ell(I_n) < \varepsilon^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Si dimostri che:

(i) se E è al più numerabile, allora E è microscopico;

(ii) se E è microscopico, allora E è misurabile e $m(E) = 0$;

(iii) se $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ è una successione di insiemi microscopici, allora $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ è microscopico.

1.8 Un insieme non misurabile

nonmis

La σ-algebra $\mathcal{M}$ degli insiemi misurabili secondo Lebesgue è molto vasta, ma non esaurisce la classe di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Tuttavia, per esibire un insieme non misurabile non si può fare a meno del seguente

Assioma della scelta *Per ogni insieme non vuoto X esiste una* funzione di scelta *$f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ tale che $f(E) \in E$ per ogni $E \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$.*

In altre parole, l'assioma della scelta dice che è possibile selezionare, per mezzo della funzione f, esattamente un elemento da ciascun sottoinsieme non vuoto di X. La cosa sarebbe banale se X avesse cardinalità finita, e facile se X fosse numerabile (esercizio 1.8.7), ma per insiemi di cardinalità più alta questa proprietà non è altrimenti dimostrabile.

L'insieme che andiamo a costruire fu introdotto da Giuseppe Vitali. Consideriamo in $[0, 1]$ la relazione di equivalenza

$$x \simeq y \quad \Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

Vi è un'infinità più che numerabile di classi di equivalenza, ognuna delle quali contiene un'infinità numerabile di elementi. Costruiamo un insieme V prendendo, grazie all'assioma della scelta, esattamente un elemento da ciascuna classe di equivalenza: V è un sottoinsieme più che numerabile di $[0, 1]$.
Sia ora $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una numerazione di $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, e sia $V_n = V + q_n$. Notiamo che $V_n \cap V_m = \emptyset$ se $n \neq m$: infatti se $x \in V_n \cap V_m$ allora $x = a + q_n = b + q_m$ con $a, b \in V$; di qui segue $a - b = q_m - q_n \in \mathbb{Q}$, da cui (per come è stato costruito V) $a = b$. Ne deduciamo $q_n = q_m$, ed infine $n = m$. Notiamo anche che valgono le inclusioni

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n \subseteq [-1, 2],$$

e quindi, per la monotonia di m^*,

$$1 \leq m^* \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} V_n \right) \leq 3.$$

Se V fosse misurabile secondo Lebesgue, anche i suoi traslati V_n sarebbero misurabili ed avrebbero la stessa misura; per l'additività numerabile di m si ricaverebbe

$$m \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} V_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} m(V_n) = \sum_{n=0}^{\infty} m(V) = \begin{cases} 0 & \text{se } m(V) = 0 \\ +\infty & \text{se } m(V) > 0, \end{cases}$$

e ciò contraddice il fatto che la misura di $\bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$ è compresa fra 1 e 3. Pertanto V non può essere misurabile.

Esercizi 1.8

nonmist 1. Dimostrare che per ogni $\lambda \in]0, +\infty]$ esiste un sottoinsieme $U \subset [0, \infty[$, non misurabile secondo Lebesgue, tale che $m^*(U) = \lambda$.

nomiarb 2. Dato un insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}$ di misura positiva, si provi che esiste un sottoinsieme $W \subset E$ che non è misurabile.

lim>inters 3. Sia $V_n = V + q_n$, come nella costruzione dell'insieme non misurabile di Vitali. Posto $E_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} V_m$, si provi che

$$m^*(E_n) < \infty, \quad E_n \supset E_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} m^*(E_n) > m^*\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n\right).$$

nonad 4. Siano V, W sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ non misurabili e disgiunti, con $V \cup W$ misurabile. Si provi che se $m(V \cup W) < \infty$ allora

$$m(V \cup W) < m^*(V) + m^*(W).$$

[**Traccia:** si utilizzi l'esercizio 1.7.5 per V e W, e la proposizione 1.7.3(v) per $V \cup W$.]

nonmisad 5. Siano V, W sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ non misurabili, tali che esistano $G \supset V$e $H \supset W$, entrambi Boreliani e fra loro disgiunti. Si provi che se $m^*(V \cup W) < \infty$ allora

$$m^*(V \cup W) = m^*(V) + m^*(W).$$

<Vmis0 6. Sia V l'insieme di Vitali e sia $E \subset V$ un insieme misurabile. Si provi che $m(E) = 0$.

sce 7. Dato un insieme numerabile X, si costruisca una funzione di scelta per X.

Soluzioni degli esercizi del capitolo 1

sol01

Esercizi del paragrafo 1.1

Esercizio 1.1.1 Definiamo per $n \in \mathbb{N}^+$

$$f_n(x) = n\, e^{-nx}, \qquad x \in]0, 1[\,.$$

Queste funzioni sono continue in $]0, 1[$, quindi sono integrabili secondo Riemann, e convergono puntualmente in $]0, 1[$ alla funzione 0; tuttavia

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} (1 - e^{-n}) = 1 \neq 0 = \int_0^1 0\, dx.$$

Esercizio 1.1.2 La risoluzione di questo esercizio richiede la nozione di insieme di Cantor, che è introdotta nel paragrafo 1.6. Consideriamo l'insieme $A = [0, 1] \setminus C_\xi$, ove C_ξ è l'insieme di Cantor di parametro $\xi \in]0, \frac{1}{3}[$: l'insieme A è dato da

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}} I_{jk}\,,$$

ove gli I_{jk} sono opportuni intervalli di ampiezza ξ^k. Si dimostra nell'esercizio 4.4.14 che la funzione χ_{C_ξ} non è integrabile secondo Riemann; quindi nemmeno χ_A appartiene a $\mathcal{R}(0, 1)$.

Esercizi del paragrafo 1.2

Esercizio 1.2.1 Sia $\mathcal{A}$ la famiglia delle unioni finite di intervalli di $\mathbb{R}$ aperti a destra. Non è difficile verificare che $\mathcal{A}$ è anche la famiglia delle unioni finite di intervalli di $\mathbb{R}$ *disgiunti* e aperti a destra. Siccome $\emptyset = [a, a[$, si ha $\emptyset \in \mathcal{A}$. Ovviamente, $\mathcal{A}$ è chiusa rispetto all'unione. Inoltre, se $E \in \mathcal{A}$, sarà

$$E = \bigcup_{j=1}^{p} [a_j, b_j[\,,$$

ove $-\infty \le a_1 \le b_1 \le a_2 \le b_2 \le \ldots \le a_p \le b_p \le +\infty$. Ne segue

$$E^c =]-\infty, a_1[\cup \bigcup_{j=1}^{p-1} [b_j, a_{j+1}[\cup [b_p, +\infty[\,,$$

cosicché $E^c \in \mathcal{A}$.

Esercizio 1.2.2 Detta $\mathcal{A}$ la famiglia delle unioni finite di intervalli aperti di $\mathbb{R}$, basta osservare che $]0, 1[\in \mathcal{A}$, mentre il suo complementare $]\infty, 0] \cup [1, \infty[$ non è unione finita di intervalli aperti.

Esercizi del paragrafo 1.3

Esercizio 1.3.1 Si ha

$$\begin{aligned} m^*(tE) &= \inf\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \ell(I_n) : tE \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\right\} = |t| \inf\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|t|}\ell(I_n) : E \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \frac{1}{t} I_n\right\} = \\ &= |t| \inf\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \ell(J_n) : E \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} J_n\right\} = |t|\, m^*(E) \qquad \forall t \neq 0. \end{aligned}$$

Esercizio 1.3.2 Dimostriamo simultaneamente (a), (b) e (c). Sia m^+ la misura esterna definita considerando intervalli I_n di tipo (a), oppure (b), oppure (c), che denoteremo con I_n^+. Fissato $E \subseteq \mathbb{R}$, considerando intervalli aperti I_n, ed essendo in questo caso $I_n \subseteq I_n^+$ ma $\ell(I_n) = \ell(I_n^+)$, risulta

$$\begin{aligned} m^*(E) &= \inf\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \ell(I_n) : I_n \text{ aperti, } E \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\right\} \le \\ &\le \inf\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \ell(I_n^+) : E \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n^+\right\} = m^+(E). \end{aligned}$$

D'altra parte, fissato $\varepsilon > 0$, siano I_n intervalli aperti tali che $E \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ell(I_n) < m^*(E) + \varepsilon;$$

allora $E \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n^+$ e quindi

$$m^+(E) \le \sum_{n=0}^{\infty} \ell(I_n^+) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell(I_n) < m^*(E) + \varepsilon,$$

da cui $m^+(E) = m^*(E)$ per l'arbitrarietà di ε.
Adesso dimostriamo (d). Sia m^o la misura esterna definita considerando intervalli R_n ad estremi razionali. Ovviamente $m^* \le m^o$. D'altra parte, fissato $\varepsilon > 0$, sia $\{I_n\}$ tale che $E \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \ell(I_n) < m^*(E) + \varepsilon$; prendendo intervalli R_n ad estremi razionali in modo che

$$I_n \subseteq R_n, \qquad m(R_n \setminus I_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},$$

si ha

$$m^o(E) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \ell(R_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \ell(I_n) + \varepsilon < m^*(E) + 2\varepsilon,$$

con ε arbitrario; pertanto $m^o = m^*$.

Esercizio 1.3.3 Supponiamo dapprima $m^*(E) < \infty$. Per definizione di m^*, per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ esiste una famiglia di intervalli aperti $\{I_{nk}\}$ tali che

$$E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_{nk}\,, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_{nk}) < m^*(E) + \frac{1}{k}\,.$$

Posto $A_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_{nk}$, gli A_k sono aperti e contengono E. Risulta quindi

$$E \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k, \qquad m^*(A_k) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_{nk}) < m^*(E) + \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}^+,$$

da cui

$$m^*(E) \leq m^*\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m\right) \leq m^*(A_k) < m^*(E) + \frac{1}{k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Ne segue la tesi.

Esercizio 1.3.4 Sia A un aperto di $\mathbb{R}$ e sia $x \in A$. Poniamo

$$a = \inf\{y \in \mathbb{R} : \,]y, x[\, \subseteq A\}\,, \qquad b = \sup\{y \in \mathbb{R} : \,]x, y[\, \subseteq A\}\,,$$

e sia $I_x = \,]a, b[\,$. Ovviamente, $x \in I_x \subseteq A$, mentre $a, b \notin A$ (altrimenti avremmo $a - \varepsilon \in A$, oppure $b + \varepsilon \in A$, per qualche $\varepsilon > 0$, contro la definizione di a e b).
Adesso notiamo che

$$A = \bigcup_{x\in A} I_x,$$

ed inoltre se $x, x' \in A$ si ha $I_x \cap I_{x'} = \emptyset$ oppure $I_x = I_{x'}$, a seconda che fra x e x' cadano o no punti di A^c. Poiché ogni I_x contiene un numero razionale, l'insieme degli I_x fra loro distinti è al più numerabile. Pertanto A è unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti $\{I_{x_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, i quali costituiscono le componenti connesse di A.

Esercizio 1.3.5 Per l'esercizio 1.3.4, ogni aperto A è unione al più numerabile di intervalli I_n fra loro disgiunti: per la monotonia della misura esterna,

$$m^*(A) = m^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\right) \geq m^*(I_0) = \ell(I_0) > 0.$$

Esercizio 1.3.6} Sia $E = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; allora per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$E \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \Big]x_n - \frac{\varepsilon}{2^n},\ x_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\Big[\,,$$

da cui

$$m^*(E) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^n} = 4\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Il viceversa non è vero, ma per esibire un insieme più che numerabile di misura esterna nulla bisogna ricorrere all'insieme di Cantor $C_{1/3}$ del paragrafo 1.6, Esso ha misura esterna nulla ed è più che numerabile, come dimostrato in tale paragrafo.

Esercizio 1.3.7 Sia $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una numerazione di $\mathbb{Q}$. Allora l'aperto

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left]q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+3}},\ q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+3}}\right[$$

è denso in $\mathbb{R}$ perché contiene $\mathbb{Q}$, ed ha misura esterna non superiore a $\varepsilon/2$.

Esercizio 1.3.8 Supponiamo dapprima $m^*(E) < \infty$ e sia $\varepsilon > 0$. Fissato $\delta > 0$, esiste una famiglia di intervalli $\{I_n\}$ tali che $E \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \ell(I_n) < m^*(E) + \delta$. La tesi è allora verificata da almeno uno degli I_n. Infatti in caso contrario avremmo

$$m^*(E \cap I_n) \leq (1-\varepsilon)\ell(I_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui, sommando,

$$m^*(E) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m^*(E \cap I_n) \leq (1-\varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \ell(I_n) < (1-\varepsilon)\left(m^*(E) + \delta\right)$$

e ciò è assurdo se si sceglie $\delta < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} m^*(E)$. Se invece $m^*(E) = +\infty$, posto $F_k = E \cap [-k, k]$, per quanto già provato esiste un intervallo I_k tale che

$$m^*(F_k \cap I_k) > (1-\varepsilon)\ell(I_k),$$

ed allora, a maggior ragione,

$$m^*(E \cap I_k) > (1-\varepsilon)\ell(I_k).$$

Esercizi del paragrafo 1.4

Esercizio 1.4.1 Se $\alpha = 0$ si può prendere $A_n =]n, \infty[$; se $\alpha > 0$ si può prendere $A_n =]0, \alpha[\cup]n, \infty[$.

Esercizio 1.4.2 Sia $\varepsilon > 0$. Poiché $m^*(E) = 0$, esiste una famiglia di intervalli $\{I_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ tale che $E \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$. Dato che $|f'(x)| \leq M$, si ha dal teorema di Lagrange

$$f(E) \subseteq f\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\right) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f(I_n) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \left[\min_{\overline{I_n}} f, \max_{\overline{I_n}} f\right],$$

$$m^*\left(f(E)\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left[\max_{\overline{I_n}} f - \min_{\overline{I_n}} f\right] \leq M \sum_{n=0}^{\infty} l(I_n) \leq M\varepsilon,$$

da cui $m^*(f(E)) = 0$ per l'arbitrarietà di ε.
Sia ora f di classe C^1: allora f' è limitata su ogni intervallo $[-n, n]$; quindi se $E \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme di misura nulla avremo, per quanto già dimostrato, $m^*\left(f(E \cap [-n, n])\right) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. La tesi segue allora dalla subadditività della misura esterna rispetto all'unione numerabile.

Esercizio 1.4.3 (i) Non è detto che il limite esista. Scegliamo

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{2n+1}}, \frac{1}{2^{2n}}\right].$$

Allora nel punto $x = 0$ si ha, prendendo la successione $h_k = 2^{-2k}$:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2 \cdot 2^{-2k}} m\left(E \cap \left]-\frac{1}{2^{2k}}, \frac{1}{2^{2k}}\right[\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} 2^{2k-1} \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2n}} - \frac{1}{2^{2n+1}}\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} 2^{2k-1} \frac{1}{2} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3};$$

d'altra parte, prendendo la successione $h_k = 2^{-2k-1}$ si trova

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\cdot 2^{-2k-1}} m\left(E \cap \left]-\frac{1}{2^{2k+1}}, \frac{1}{2^{2k+1}}\right[\right) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} 2^{2k} \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2n}} - \frac{1}{2^{2n+1}}\right) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} 2^{2k} \frac{1}{2} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{6}.$$

Ciò prova che la densità di E nel punto 0 non esiste.

(ii) Sia $E = \{x \in \mathbb{R} : \cos\frac{1}{x} > \frac{1}{2}\}$. Poiché E è simmetrico rispetto all'origine, possiamo limitarci al calcolo di $m^*(E \cap [0,h])$. Risulta

$$E \cap]0,\infty[= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left]\frac{3}{(6n+1)\pi}, \frac{3}{(6n-1)\pi}\right[\cup \left]\frac{3}{\pi}, \infty\right[;$$

se $h \to 0^+$ avremo due casi:

$$\text{(a) } h \in \left[\frac{3}{\pi(6k+5)}, \frac{3}{\pi(6k+1)}\right], \quad \text{oppure} \quad \text{(b) } h \in \left]\frac{3}{\pi(6k+1)}, \frac{3}{\pi(6k-1)}\right[,$$

ove $k \in \mathbb{N}$ e $k \to \infty$. Nel caso (a), h è situato fra due intervalli consecutivi di E, mentre nel caso (b) h è interno ad uno di tali intervalli.
Nel caso (a) si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} m^*(E \cap [0,h[) &= \frac{1}{h} m\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} \left]\frac{3}{(6n+1)\pi}, \frac{3}{(6n-1)\pi}\right[\right) \\ &= \frac{3}{h\pi} \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n+1}\right) = \frac{6}{h\pi} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{36n^2-1}, \end{aligned}$$

mentre nel caso (b) si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} m^*(E \cap [0,h[) &= \frac{1}{h} m\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} \left]\frac{3}{(6n+1)\pi}, \frac{3}{(6n-1)\pi}\right[\cup \left]\frac{3}{(6k+1)\pi}, h\right[\right) = \\ &= \frac{6}{h\pi} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{36n^2-1} + 1 - \frac{3}{(6k+1)h\pi}. \end{aligned}$$

Dunque, tenendo conto delle limitazioni su h, si ottiene nel caso (a)

$$2(6k+1) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{36n^2-1} \le \frac{1}{h} m^*(E \cap [0,h[) \le 2(6k+5) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{36n^2-1},$$

e nel caso (b)

$$2(6k-1) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{36n^2-1} \le \frac{1}{h} m^*(E \cap [0,h[) \le$$
$$\le 2(6k+1) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{36n^2-1} + 1 - \frac{6k-1}{6k+1}.$$

Pertanto in ogni caso

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} m^*(E \cap [0,h[) = \lim_{k\to\infty} 12k \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{36n^2-1} = \frac{1}{3} \lim_{k\to\infty} k \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\frac{1}{36}}.$$

Questo limite si calcola osservando che per $k \to \infty$ si ha

$$k \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{36}} \geq k \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = k \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{k}{k+1} \to 1,$$

$$k \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{36}} \leq k \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = k \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{k}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) \to 1.$$

Quindi la densità dell'insieme E nel punto 0 è uguale a $\frac{1}{3}$.

Esercizio 1.4.4 Supponiamo per assurdo che $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sia una σ-algebra infinita costituita da una famiglia numerabile di elementi $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $A_n \neq A_m$ per ogni $n \neq m$. Il punto chiave dell'argomentazione consiste nel costruire una successione $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{F}$ tra loro disgiunti; infatti, fatto ciò, si conclude osservando che l'applicazione $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{F}$, definita da

$$g(E) = \bigcup_{n\in E} B_n \qquad \forall E \subseteq \mathbb{N},$$

è iniettiva, il che implica che la cardinalità di $\mathcal{F}$ è non inferiore a quella di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$; dunque essa è più che numerabile. Di qui l'assurdo.
Il nostro obiettivo è allora quello di costruire una sottofamiglia $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ tale che $B_n \cap B_m = \emptyset$ per ogni $n \neq m$.
Ora la σ-algebra $\mathcal{F}$ possiede, oppure no, la seguente proprietà:

(P) Esiste $B_0 \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ tale che per ogni $C \subseteq B_0,\ C \in \mathcal{F}$, si ha $C = \emptyset$ oppure $C = B_0$.

(Un insieme con questa proprietà si dice *atomo*.) Osserviamo che la proprietà (P) vale, ad esempio, se $\mathcal{F}$ contiene insiemi costituiti da un singolo punto.
Se $\mathcal{F}$ non verifica (P), vuol dire che per ogni $B \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ esiste $C \subseteq B,\ C \in \mathcal{F}$, tale che $C \neq \emptyset,\ C \subset B$. Quindi, posto $E_0 = X$, si costruisce induttivamente una sequenza strettamente decrescente $\{E_n\} \subseteq \mathcal{F}$; allora gli insiemi $B_n = E_n \setminus E_{n+1} \in \mathcal{F}$ costituiscono, aggiungendovi (volendo) anche $B_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$, la famiglia disgiunta cercata.
Se invece $\mathcal{F}$ verifica (P), consideriamo la sottofamiglia $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ definita da

$$\mathcal{F}_0 = \{E \setminus B_0 : E \in \mathcal{F}\}.$$

Notiamo che $\mathcal{F}_0$ è una σ-algebra di sottoinsiemi di $X \setminus B_0$; essa non può essere finita, perché altrimenti anche $\mathcal{F}$ sarebbe finita: per vedere ciò, osserviamo che gli elementi di $\mathcal{F}$ contengono B_0 oppure sono disgiunti da B_0. Gli elementi disgiunti da B_0 sono esattamente gli elementi di $\mathcal{F}_0$; quelli che contengono B_0 sono dati da $E \cup B_0$ con E un qualunque elemento di $\mathcal{F}_0$. Quindi se $\mathcal{F}_0$ è finita, allora è finita anche $\mathcal{F}$, assurdo.
Dunque $\mathcal{F}_0$ è una σ-algebra numerabile di insiemi disgiunti da B_0. Proviamo che anche $\mathcal{F}_0$, come $\mathcal{F}$, contiene una famiglia numerabile di elementi distinti. A questo scopo possiamo applicare a $\mathcal{F}_0$ l'argomentazione svolta per $\mathcal{F}$: pertanto, o $\mathcal{F}_0$ non verifica (P), ed in tal caso si seleziona direttamente una famiglia disgiunta $\{B_n\}_{n\geq 1}$ contenuta in $X \setminus B_0$, oppure $\mathcal{F}_0$ verifica (P), ed allora si individua un insieme $B_1 \in \mathcal{F}_0$ privo di sottoinsiemi propri non vuoti appartenenti a $\mathcal{F}_0$. In tal caso, si definisce

$$\mathcal{F}_1 = \{E \setminus B_1 : E \in \mathcal{F}_0\},$$

e ragionando come prima si verifica che $\mathcal{F}_1$ è una σ-algebra di sottoinsiemi di $X \setminus (B_0 \cup B_1)$, che contiene una famiglia numerabile di elementi distinti. Iterando l'argomento, o esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{F}_{n_0}$ non gode della proprietà (P), ed in tal caso si seleziona una famiglia disgiunta $\{B_n\}_{n\geq n_0} \subseteq \mathcal{F}_{n_0}$ che fa al caso nostro, oppure per ogni n le σ-algebre $\mathcal{F}_n$ verificano (P), ed allora per ogni n si individua un insieme $B_n \in \mathcal{F}_n$, contenuto in $X \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} B_k$, che non contiene sottoinsiemi propri non vuoti appartenenti a $\mathcal{F}_{n-1}$. Allora in particolare la famiglia $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è la famiglia disgiunta cercata.

Esercizi del paragrafo 1.5

Esercizio 1.5.1 Si ha

$$\begin{aligned}
&m^*\left(\left\{x\in\left]0,\frac{1}{\pi}\right[\,:\sin\frac{1}{x}\geq 0\right\}\right)=\\
&=m^*\left(\left\{x\in\left]0,\frac{1}{\pi}\right[\,:\frac{1}{x}\in\bigcup_{k=1}^{\infty}[2k\pi,(2k+1)\pi]\right\}\right)=\\
&=m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2k+1)\pi},\frac{1}{2k\pi}\right]\right)=\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2k\pi}-\frac{1}{(2k+1)\pi}\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots\right]=\\
&=\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\frac{1}{\pi}(1-\log 2).
\end{aligned}$$

Esercizio 1.5.2 Risulta

$$E=[0,1]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\,,$$

ove E_n è l'insieme dei numeri che hanno la n-sima cifra uguale a 9 e le precedenti diverse da 9. Si ha

$$E_1=\left]\frac{9}{10},1\right[\,,$$

$$E_2=\bigcup_{k=0}^{8}\left]\frac{k}{10}+\frac{9}{100},\frac{k+1}{10}\right[\,,$$

$$E_3=\bigcup_{k=0}^{8}\bigcup_{h=0}^{8}\left]\frac{k}{10}+\frac{h}{100}+\frac{9}{1000},\frac{k}{10}+\frac{h+1}{100}\right[\,,$$

e così via. Si riconosce che

$$m^*(E_1)=\frac{1}{10},\quad m^*(E_2)=\frac{9}{100},\quad m^*(E_3)=\frac{81}{1000},$$

e che in generale

$$m^*(E_n)=\frac{9^{n-1}}{10^n}\qquad\forall n\in\mathbb{N}^+.$$

Dunque

$$m^*(E)=1-m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^{n-1}}{10^n}=1-\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^{n-1}}{10^{n-1}}=1-\frac{1}{10}\,\frac{1}{1-\frac{9}{10}}=1-1=0.$$

Esercizio 1.5.3 Consideriamo per ogni $n\in\mathbb{N}^+$ l'insieme

$$E_n=\{x\in[0,1]:\ \alpha_n\text{ è dispari per }k=1,\dots,n\}.$$

Definendo inoltre $K_j=\{x\in[0,1]:\ \alpha_j\text{ è pari}\}$, si ha

$$E_n=[0,1]\setminus\left[K_1\cup(K_2\setminus K_1)\cup\cdots\cup\left(K_n\setminus\bigcup_{h=1}^{n-1}K_h\right)\right],$$

e risulta

$$m^*(K_1)=\frac{1}{2}\,,$$

perché si tratta di 5 intervalli disgiunti di ampiezza $\frac{1}{10}$;

$$m^*(K_2 \setminus K_1) = \frac{1}{4}\,,$$

perché si tratta di 5 intervalli disgiunti di ampiezza $\frac{1}{100}$ estratti da ciascuno dei 5 residui intervalli di ampiezza $\frac{1}{10}$;

$$m^*\left(K_n \setminus \bigcup_{h=1}^{n-1} K_h\right) = \frac{1}{2^n}\,,$$

perché si tratta di 5^{n-1} intervalli disgiunti di ampiezza $\frac{1}{10^n}$ estratti da ciascuno dei 5^{n-1} residui intervalli di ampiezza $\frac{1}{10^{n-1}}$. In definitiva

$$m^*(E_n) = 1 - \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{2^h} = 1 - \left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} - 1\right) = 2 - 2 + \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}\,,$$

e infine

$$m^*(E) \le m^*(E_n) = \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

ossia $m^*(E) = 0$.
In modo analogo si dimostra che $m^*(F) = 0$.
Infine, essendo

$$G^c = \{x \in [0,1] :\ \alpha_n \text{ è definitivamente pari}\},$$

per quanto provato sopra si ha $m^*(G^c) = 0$, da cui $m^*(G) = 1$.

Esercizio 1.5.4 Se E è vuoto, non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti, per ogni fissato $x \in E$ e per ogni $t \ge 0$ poniamo $I_t =]x-t, x+t[$. Osserviamo che $t \mapsto m^*(E \cap I_t)$ è una funzione continua: infatti, per $s \ge r \ge 0$ si ha

$$m^*(E \cap I_s) = m^*(E \cap [(I_s \setminus I_r) \cup I_r]) \le m^*(E \cap [I_s \setminus I_r]) + m^*(E \cap I_r),$$

da cui

$$\begin{aligned} 0 \;&\le\; m^*(E \cap I_s) - m^*(E \cap I_r) \le m^*(E \cap [(I_s \setminus I_r]) = \\ &=\; m^*([x+r, x+s[\,) \cup]x-s, x-r]) \le \ell([x+r, x+s[\,) + \ell(\,]x-s, x-r]) = 2(s-r). \end{aligned}$$

Ciò premesso, l'insieme

$$A = \{t \ge 0 :\ m^*(E \cap I_t) \le m^*(E \cap I_t^c)\}$$

è non vuoto e limitato superiormente, dato che $m^*(E) < \infty$. Sia $t_0 = \sup A$: allora risulta

$$m^*(E \cap I_{t_0}) = m^*(E \cap I_{t_0}^c).$$

Inoltre, per la misurabilità di I_{t_0} ,

$$m^*(E) = m^*(E \cap I_{t_0}) + m^*(E \cap I_{t_0}^c),$$

da cui la tesi.

Esercizio 1.5.5 (i) Sia $a = \inf_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$. Allora per ogni numerazione σ si ha

$$A_\sigma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]q_n - \alpha_n, q_n + \alpha_n[\supset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]q_n - a, q_n + a[= \mathbb{R}.$$

(ii) Poiché $\alpha_n \not\to 0$, esiste $m \in \mathbb{N}^+$ ed esiste $\{\alpha_{n_k}\} \subset \{\alpha_n\}$ tale che $\alpha_{n_k} \ge \frac{1}{m} > 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Scegliamo una numerazione σ di $\mathbb{Q}$ assegnando agli indici n_k i valori $q_{n_{2k}} = \frac{k}{m}$ e $q_{n_{2k+1}} = -\frac{k+1}{m}$, $k \in \mathbb{N}$;

agli altri indici $j \in \mathbb{N} \setminus \{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ facciamo corrispondere l'insieme $\{q_j\}_{j\in\mathbb{N}} = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{h}{m}\}_{h\in\mathbb{Z}}$. Per questa numerazione si ha

$$A_\sigma \supseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}}]q_{n_k} - \alpha_{n_k}, q_{n_k} + \alpha_{n_k}[\supseteq \bigcup_{h\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left]\frac{h-1}{m}, \frac{h+1}{m}\right[= \mathbb{R}.$$

Proviamo la seconda parte di (ii). Fissato $\varepsilon > 0$ e posto $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$, esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che $\alpha_{n_k} < \frac{2^{-k-2}}{2M+1}$. Scegliamo una numerazione $\sigma = \{q_n\}$ tale che agli indici $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ corrisponda $\mathbb{Q} \cap \{x \in \mathbb{R} : \ |x| > \frac{\varepsilon M}{2M+1}\}$, mentre ai residui indici $\mathbb{N} \setminus \{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ corrisponda $\mathbb{Q} \cap \left[-\frac{\varepsilon M}{2M+1}, \frac{\varepsilon M}{2M+1}\right]$. Allora

$$A_\sigma \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}}]q_{n_k} - \alpha_{n_k}, q_{n_k} + \alpha_{n_k}[\cup \left]-\frac{\varepsilon M}{2M+1} - M, \frac{\varepsilon M}{2M+1} + M\right[,$$

da cui

$$m^*(A_\sigma) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} 2 \cdot \frac{2^{-k-2}}{2M+1} + \frac{2M\varepsilon}{2M+1} = 2M + \varepsilon.$$

(iii) Anzitutto, esiste una sottosuccessione $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ tale che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n_k}$ sia ancora divergente: infatti, scelti $\alpha_{j_h} < 2^{-h}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{j_h}$ converge: dunque, per ogni $m \in \mathbb{N}$ possiamo scrivere, posto $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \mathbb{N} \setminus \{j_h\}_{h\in\mathbb{N}}$,

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_{n_k} = \sum_{n=0}^{n_m} \alpha_n - \sum_{h\le n_m} \alpha_{j_h};$$

per $m \to \infty$ il secondo termine a secondo membro ha limite finito, mentre il primo diverge: quindi il termine a primo membro diverge.
In corrispondenza degli indici n_k scegliamo q_{n_k} in questo modo: Per k pari, $k = 2p$, sarà $q_{n_0} = 0$ e $q_{n_{2p}} > 0$, tale che

$$q_{n_{2p-2}} < q_{n_{2p}} - \alpha_{n_{2p}} < q_{n_{2p-2}} + \alpha_{n_{2p-2}}, \quad p \ge 1,$$

mentre per k dispari, $k = 2p+1$, sarà $q_{n_{2p+1}} < 0$ tale che

$$q_{n_{2p-1}} > q_{n_{2p+1}} + \alpha_{n_{2p+1}} > q_{n_{2p-1}} - \alpha_{n_{2p-1}}, \quad p \ge 1.$$

In questo modo si ha

$$q_{n_{2p}} = \sum_{r=1}^{p} (q_{n_{2r}} - q_{n_{2r-2}}) > \sum_{r=1}^{p} \alpha_{n_{2r}}, \qquad q_{n_{2p+1}} = \sum_{r=1}^{p} (q_{n_{2r+1}} + q_{n_{2r-1}}) < -\sum_{r=1}^{p} \alpha_{n_{2r+1}};$$

dunque, per la divergenza della serie $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n_k}$, si ha

$$A_\sigma \supseteq \bigcup_{k=0}^{\infty}]q_{n_k} - \alpha_{n_k}, q_{n_k} + \alpha_{n_k}[\supseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} \left]-\sum_{r=1}^{p} \alpha_{n_{2r+1}}, \sum_{r=1}^{p} \alpha_{n_{2r}}\right[= \mathbb{R},$$

dato che l'ampiezza dell'intervallo all'ultimo membro tende a $+\infty$ per $p \to \infty$.
Proviamo la seconda parte: fissato $\varepsilon > 0$, sia $\{\alpha_{n_k}\} \subseteq \{\alpha_n\}$ tale che $\alpha_{n_k} \le 2^{-k.1} \frac{\varepsilon}{4}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Agli indici $\{n_k\}$ associamo $\mathbb{Q} \cap \{x \in \mathbb{R} : \ |x| \ge \frac{\varepsilon}{4}\}$, mentre agli indici di $\mathbb{N} \setminus \{n_k\}$, che denotiamo $\{m_h\}$, associamo $\mathbb{Q} \cap \left]-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right[$. Allora

$$\bigcup_{h=1}^{\infty}]q_{m_h} - \alpha_{m_h}, q_{m_h} + \alpha_{m_h}[\subseteq \left[-\frac{\varepsilon}{4} - M, \frac{\varepsilon}{4} + M\right], \quad m\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}]q_{n_k} - \alpha_{n_k}, q_{n_k} + \alpha_{n_k}[\right) \le \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

cosicché $m^*(A_\sigma) \le (2M+2)\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = 2M + \varepsilon$.

(iv) Dato che la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ converge, si ha per ogni numerazione σ di $\mathbb{Q}$

$$m^*(A_\sigma) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} 2\alpha_n < \infty.$$

La seconda parte dell'enunciato si prova esattamente come si è fatto nella seconda parte di (iii).

Esercizi del paragrafo 1.6

Esercizio 1.6.1 Dimostriamo, più in generale, che se $x, y \in C_{1/3}$, $x \neq y$, detto k il primo indice tale che $\alpha_k(x) \neq \alpha_k(y)$ (ove $\{\alpha_h(x)\}_{h\in\mathbb{N}^+}$ è la successione delle cifre ternarie di x), si ha $|x-y| \geq 3^{-k}$. A questo scopo notiamo che $|\alpha_k(x) - \alpha_k(y)| = 2$; quindi

$$\begin{aligned} |x-y| &= \left|\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)-\alpha_k(y)}{3^h}\right| = \left|\sum_{h=k}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)-\alpha_k(y)}{3^h}\right| \geq \\ &\geq \frac{|\alpha_k(x)-\alpha_k(y)|}{3^k} - \left|\sum_{h=k+1}^{\infty} \frac{|\alpha_k(x)-\alpha_k(y)|}{3^h}\right| \geq \\ &\geq \frac{2}{3^k} - \sum_{h=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^h} = \frac{2}{3^k} - \frac{2}{3^{k+1}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{3^p} = \frac{2}{3^k} - \frac{2}{3^{k+1}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{3^k}. \end{aligned}$$

In particolare, nell'argomentazione che prova la non numerabilità di $C_{1/3}$, per i numeri y e $x^{(n)}$ il primo indice tale che $\alpha_k(y) \neq \alpha_k(x^{(n)})$ è $k \leq n$: dunque deve essere

$$|y - x^{(n)}| \geq 3^{-k} \geq 3^{-n}.$$

Esercizio 1.6.2 Sia C_ξ l'insieme di Cantor di misura esterna $\frac{1-3\xi}{1-2\xi} = 2^{-n-1}$: dunque $\xi = \xi_n = \frac{1-2^{-n-1}}{3-2^{-n-2}}$. Indichiamo con A_n l'insieme $C_{\xi_n} + n$, ossia il traslato di C_{ξ_n} nell'intervallo $[n, n+1]$. Sia infine

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} (A_n \cup (-A_n)).$$

L'insieme A è misurabile con

$$m^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*\big(A_n \cup (-A_n)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^{n+1}} = 1.$$

Sia ora I un intervallo. Se esistono $x, y \in A \cap I$, con $x < y$, allora esiste un intervallo J che è contenuto in $]x, y[\cap A^c \subseteq I \cap A^c$, e quindi

$$\ell(I) > m^*(I \setminus J) \geq m^*\big((I \cap A) \setminus J\big) = m^*(I \cap A).$$

Se invece non ci sono punti $x, y \in A \cap I$ con $x < y$, allora $A \cap I$ contiene al più un punto, e dunque $m^*(I \cap A) = 0 < \ell(I)$.

Esercizio 1.6.3 Ovviamente, la cardinalità di $\mathcal{M}$ è non superiore a quella di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, essendo $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. D'altra parte, l'insieme di Cantor $C_{1/3}$ ha misura esterna nulla ed appartiene a $\mathcal{M}$, dunque ogni $D \subseteq C_{1/3}$ appartiene a $\mathcal{M}$. Perciò $\mathcal{P}(C_{1/3}) \subseteq \mathcal{M}$. Dato che $C_{1/3}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$, si deduce che $\mathcal{P}(C_{1/3})$ ha la stessa cardinalità di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, e che quindi le cardinalità di $\mathcal{M}$ e di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ sono uguali.

Esercizio 1.6.4 La funzione caratteristica χ_{C_ξ} dell'insieme C_ξ, con $\xi < \frac{1}{3}$, non è integrabile secondo Riemann perché, come si vedrà nella risoluzione dell'esercizio 4.4.14, per ogni suddivisione σ di $[0,1]$ le somme superiori $S(\chi_{C_\xi}, \sigma)$ valgono sempre 1, mentre per le somme inferiori $s(\chi_{C_\xi}, \sigma)$ si ha

$$s(\chi_{C_\xi}, \sigma) \leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{2^{k-1}} \xi^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} (2\xi)^k < \frac{1}{2} \frac{\xi}{1-2\xi} < 1.$$

Esercizi del paragrafo 1.7

Esercizio 1.7.1 Essendo

$$A \cup B = A \setminus (B \cap A)] \cup [B \setminus (B \cap A)] \cup (A \cap B),$$

risulta

$$m(A \cup B) = m(A) - m(A \cap B) + m(B) - m(A \cap B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B),$$

da cui la tesi.

Esercizio 1.7.2 Poiché $E_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, per monotonia ricaviamo

$$\exists \lim_{i\to\infty} m^*(E_i) \leq m^* \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right).$$

Per la disuguaglianza inversa, possiamo supporre che sia $m^*(E_i) < \infty$ per ogni $i \in \mathbb{N}^+$, perché altrimenti la tesi è banale. Per definizione di m^*, fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $i \in \mathbb{N}^+$ esiste un aperto $A_i \supset E_i$ tale che

$$m^*(A_i) < m^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Poniamo $F_i = \bigcup_{j=1}^{i} A_j$: per induzione si vede che

$$m^*(F_{i-1} \setminus A_i) < \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\varepsilon}{2^j} \qquad \forall i \geq 2.$$

Infatti, per $i = 2$ si ha, essendo $E_1 \subseteq E_2$,

$$m(F_1 \setminus A_2) = m(A_1) - m(A_1 \cap A_2) < m^*(E_1) + \frac{\varepsilon}{2} - m^*(E_1 \cap E_2) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

e se la tesi vale per i, allora

$$\begin{aligned} m(F_i \setminus A_{i+1}) &= m(A_i) + m(F_{i-1} \setminus A_i) - m(F_i \cap A_{i+1}) < \\ &< m^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\varepsilon}{2^j} - m^*(E_i \cap E_{i+1}) \leq \sum_{j=1}^{i} \frac{\varepsilon}{2^j}. \end{aligned}$$

Dunque

$$m(F_i) = m(A_i) + m(F_{i-1} \setminus A_i) < m^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\varepsilon}{2^j} < m^*(E_i) + \varepsilon \qquad \forall i \geq 2.$$

Passiamo al limite per $i \to \infty$: dato che gli F_i sono misurabili e crescenti rispetto all'inclusione, si ottiene

$$m^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) \leq m \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \lim_{i\to\infty} m(F_i) \leq \lim_{i\to\infty} m^*(E_i) + \varepsilon,$$

ove $\varepsilon > 0$ è arbitrario.

Esercizio 1.7.3 Verifichiamo (i). Se $x \in \mathbb{R}$, allora x appartiene ad E_n per infiniti valori di n se e solo se esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $x \in \bigcup_{n=m}^{\infty} E_n$. Dunque x appartiene all'unione, al variare di $m \in \mathbb{N}$, di tali insiemi, ossia $x \in E'$. La seconda verifica è del tutto analoga.
Proviamo (ii). Poiché $\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \subseteq \bigcap_{k=n+1}^{\infty} E_k$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$m \left(\liminf_{n\to\infty} E_n \right) = \lim_{n\to\infty} m \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \right) \leq \liminf_{n\to\infty} m(E_n).$$

Similmente, dal fatto che $\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \supseteq \bigcup_{k=n+1}^{\infty} E_k$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e dall'ipotesi $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) < \infty$ segue che

$$m \left(\limsup_{n\to\infty} E_n \right) = \lim_{n\to\infty} m \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \right) \geq \limsup_{n\to\infty} m(E_n).$$

Passando a (iii), sia $E_n = [n, \infty[$. Allora

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = [n, \infty[\,, \qquad \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = \emptyset,$$

da cui

$$m\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} m(E_n) = +\infty.$$

Infine, quanto a (iv), dall'evidente relazione

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \subseteq \bigcup_{k=p}^{\infty} E_k \qquad \forall n, p \in \mathbb{N}$$

segue

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \subseteq \bigcup_{k=p}^{\infty} E_k \qquad \forall p \in \mathbb{N},$$

e dunque

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \subseteq \bigcap_{p=0}^{\infty} \bigcup_{k=p}^{\infty} E_k = \limsup_{n\to\infty} E_n\,.$$

Infine, se $\{E_n\}$ è monotona rispetto all'inclusione, si ha nel caso crescente

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k = E_n\,, \qquad \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\,,$$

mentre

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k\,, \qquad \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k;$$

nel caso decrescente invece si trova

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k\,, \qquad \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k\,,$$

ed anche

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = E_n\,, \qquad \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n\,.$$

Dunque nel caso monotono vale l'uguaglianza

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \liminf_{n\to\infty} E_n = \begin{cases} \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n & \text{se } \{E_n\} \text{ è crescente,} \\ \displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n & \text{se } \{E_n\} \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

Esercizio 1.7.4 Se $t = 0$, si può prendere $B_0 = \{x\}$, essendo x un qualunque punto di E. Se $t = m(E)$, per la proposizione 1.7.3(v) si può prendere un Boreliano $B \subseteq E$ tale che $m(B) = m(E)$. Se $0 < t < m(E)$, consideriamo la funzione $g : [0, \infty[\to [0, \infty[$ data da $g(\alpha) = m(E \cap [-\alpha, \alpha])$ per ogni $\alpha \geq 0$: questa funzione è continua e crescente, con $g(0) = 0$ e $g(\infty) = m(E)$. Quindi esiste $\alpha_t > 0$ tale che $g(\alpha_t) = t = m(E \cap [-\alpha_t, \alpha_t])$. Per la proposizione 1.7.3, esiste un Boreliano B_t tale che $m(B_t) = m(E \cap [-\alpha_t, \alpha_t]) = t$.

Esercizio 1.7.5 Per definizione, $m^*(E) = \inf_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$, ove $\{A_n\}$ è un'opportuna successione di aperti contenenti E. Allora $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ verifica

$$m^*(E) = m(B) = \min\{m(D) :\ D \in \mathcal{B},\ D \supseteq E\}.$$

Analogamente, sia $\{D_n\}$ una successione di Boreliani tale che $D_n \subseteq D_{n+1} \subseteq E$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim_{n\to\infty} m(D_n) = \sup\{m(B) :\ B \in \mathcal{B},\ B \subseteq E\};$$

allora $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ è un Boreliano tale che

$$m(D) = \max\{m(B) :\ B \in \mathcal{B},\ B \subseteq E\}.$$

Infine, se $E \in \mathcal{M}$ allora tale massimo coincide con $m(E)$ in virtù della proposizione 1.7.3. Viceversa, se tale massimo coincide con $m^*(E)$, allora possiamo selezionare due Boreliani D, B tali che

$$D \subseteq E \subseteq B, \qquad m(D) = m^*(E) = m(B).$$

Ne segue

$$m^*(E \setminus D) \leq m(B \setminus D) = m(B) - m(D) = 0,$$

da cui segue, ancora per la proposizione 1.7.3, che E è misurabile.

Esercizio 1.7.6 Se E è misurabile, si sa dall'esercizio 1.7.5 che

$$m(E) = \max\{m(B) :\ B \in \mathcal{B},\ B \subseteq E\}.$$

Viceversa, per ipotesi, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esiste $B_n \in \mathcal{B}$ tale che $B_n \subseteq E$ e $m^*(E) < m(B_n) + \frac{1}{n}$. Inoltre si può supporre induttivamente che $B_{n+1} \subseteq B_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $B = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$ e, dato che $m^*(E) < \infty$, si ottiene $m(B) = m^*(E)$. D'altra parte esiste un altro Boreliano C, contenente E, tale che $m(C) = m^*(E)$. Dunque

$$m(C \setminus B) = m(C) - m(B) = 0;$$

a maggior ragione, $m^*(E \setminus B) = 0$, e dalla proposizione 1.7.3 segue che E è misurabile.
Se $m^*(E) = \infty$ questa implicazione è falsa: se $E = V \cup [2, \infty[$, ove $V \subset [0, 1]$ è un insieme non misurabile (l'esistenza di un tale insieme è dimostrata nel paragrafo 1.8), si ha $m^*(E) = \infty$ e, scelto $B =]2, \infty[$ si ha $B \subset E$ e $m(B) = \infty$: ciò mostra che

$$m^*(E) = \sup\{m(B) :\ B \in \mathcal{B},\ B \subseteq E\},$$

malgrado sia $E \notin \mathcal{M}$.

Esercizio 1.7.7 Sia E misurabile. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste una famiglia $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di intervalli aperti la cui unione ricopre E, per la quale si ha

$$m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \ell(I_n) < m(E) + \varepsilon.$$

Dato che $m(E) < \infty$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \ell(I_n)$ converge e dunque esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon.$$

Consideriamo l'unione finita $\bigcup_{n=0}^{n_\varepsilon} I_n$: si ha

$$m\left(E \setminus \bigcup_{n=0}^{n_\varepsilon} I_n\right) \leq m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \setminus \bigcup_{n=0}^{n_\varepsilon} I_n\right) \leq \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon,$$

mentre

$$m\left(\bigcup_{n=0}^{n_\varepsilon} I_n \setminus E\right) \leq m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \setminus E\right) = m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\right) - m(E) < \varepsilon.$$

Ciò mostra che

$$m\left(E \triangle \bigcup_{n=0}^{n_\varepsilon} I_n\right) < 2\varepsilon.$$

Però gli I_n non sono in generale disgiunti. Possiamo comunque supporre che il ricoprimento $\{I_n\}$ sia minimale, cioè che, togliendone uno, gli altri I_n non ricoprano più E. Allora definiamo

$$J_0^* = I_0, \qquad J_n^* = I_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} I_k, \quad n \geq 1,$$

e risulta

$$\bigcup_{n=0}^{k} J_n^* = \bigcup_{n=0}^{k} I_n \qquad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Ne segue che i J_n^*, $n = 0, 1, \ldots, n_\varepsilon$, verificano le stesse proprietà degli I_n, ma non sono aperti. Basta prendere allora la famiglia delle loro parti interne J_n, togliendo un'infinità al più numerabile di punti: questo non altera il calcolo delle misure e garantisce che

$$m\left(E \triangle \bigcup_{n=0}^{n_\varepsilon} J_n\right) < 2\varepsilon.$$

Viceversa, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un aperto $A \supseteq E$ tale che $m(A) < m^*(E) + \varepsilon$. Poniamo $F = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^N I_i\right)$, ove gli intervalli I_i verificano l'ipotesi $m^*\left(E \triangle \bigcup_{i=1}^N I_i\right) < \varepsilon$, Allora, essendo $E \setminus F = E \setminus \left(E \cap \bigcup_{i=1}^N I_i\right)$,

$$\begin{aligned} m^*(F \triangle E) &= m^*(F \setminus E) + m^*(E \setminus F) \leq \\ &\leq m^*\left(\bigcup_{i=1}^N I_i \setminus E\right) + m^*\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^N I_i\right) = m^*\left(E \triangle \bigcup_{i=1}^N I_i\right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ciò premesso, andiamo a stimare la misura esterna di $A \setminus E$. Intanto si ha

$$A \setminus E \subseteq (A \setminus F) \cup (F \setminus E).$$

Per il secondo insieme si ha direttamente

$$m^*(F \setminus E) \leq m^*(F \triangle E) < \varepsilon;$$

per il primo insieme, dato che A e F sono misurabili con $F \subseteq A$, si ottiene, per subadditività di m^*,

$$\begin{aligned} m(A \setminus F) &= m(A) - m(F) < m^*(E) + \varepsilon - m(F) \leq \\ &\leq m^*(E \setminus F) + m(F) + \varepsilon - m(F) = m^*(E \setminus F) + \varepsilon < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Dunque $m^*(A \setminus E) < 3\varepsilon$, il che prova, grazie alla proposizione 1.7.3, che E è misurabile.

Esercizio 1.7.8 L'insieme A è aperto. Se esistesse un chiuso F tale che $m(A \triangle F) = 0$, l'aperto $A \setminus F$ avrebbe misura nulla e quindi sarebbe vuoto (esercizio 1.3.5). Dunque avremmo $\mathbb{Q} \subset A \subseteq F$, ed essendo F chiuso si concluderebbe che $F = \mathbb{R}$. Ma allora $m(A^c) = m(\mathbb{R} \setminus A) = m(F \setminus A) = 0$, e dunque $m(A) = \infty$: ciò è assurdo, in quanto $m(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{2}{n^2} < \infty$.

Esercizio 1.7.9 (i) Se $E = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ è un insieme al più numerabile, fissato $\varepsilon > 0$ consideriamo gli intervalli $I_n = \left]x_n - \frac{\varepsilon^n}{3}, x_n + \frac{\varepsilon^n}{3}\right[$: essi formano un ricoprimento di E e risulta $m(I_n) < \varepsilon^n$. Pertanto E è microscopico.

(ii) Sia E un insieme microscopico: fissato $\varepsilon \in]0, 1[$, esiste un ricoprimento $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ di E costituito da intervalli aperti e tali che $m(I_n) < \varepsilon^n$. Ne segue $\sum_{n=1}^\infty m(I_n) < \sum_{n=1}^\infty \varepsilon^n = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, da cui $m^*(E) \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ per ogni $\varepsilon \in]0, 1[$. Ciò prova che E è misurabile con misura nulla.

(iii) Sia $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ una successione di insiemi microscopici. Fissato $\varepsilon \in]0,1[$, per ciascun $k \in \mathbb{N}^+$ esiste un ricoprimento $\{I_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ di E_k, costituito da intervalli aperti, tale che $m(I_{n,k}) < (\varepsilon^{2^k})^n$. La famiglia $\{I_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{N}^+}$ è un ricoprimento di $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$. Rinumeriamo ora gli intervalli $I_{n,k}$ nel modo seguente. Ogni numero naturale m si scrive in modo unico nella forma $m = 2^{k-1}(2n-1)$ con $n, k \in \mathbb{N}^+$: in altri termini, l'applicazione

$$\psi : \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+, \qquad \psi(n,k) = 2^{k-1}(2n-1)$$

è bigettiva. Poniamo allora per ogni $m \in \mathbb{N}^+$

$$J_m = I_{n,k} \qquad \text{se } m = \psi(n,k).$$

La famiglia $\{J_m\}_{m\in\mathbb{N}^+}$ ricopre E e gli intervalli J_m verificano, in virtù dell'ovvia disuguaglianza $2^k n > 2^{k-1}(2n-1)$,

$$m(J_m) = m(I_{n,k}) < \varepsilon^{2^k n} < \varepsilon^{\psi(n,k)} = \varepsilon^m \qquad \forall m \in \mathbb{N}^+.$$

Ciò mostra che $\bigcup_{k=1}^\infty E_k$ è microscopico.

Esercizi del paragrafo 1.8

Esercizio 1.8.1 Sia V l'insieme non misurabile di Vitali. Per $\lambda = \infty$ si può scegliere $U = [0,\infty[\setminus V$. Per $0 < \lambda < \infty$ poniamo $t = \frac{\lambda}{m^*(V)}$ e consideriamo $U = tV$: questo insieme non è misurabile, e in virtù dell'esercizio 1.3.1 si ha $m^*(tV) = t\, m^*(V) = \lambda$.

Esercizio 1.8.2 Supponiamo dapprima che E sia limitato, ossia che esista $M > 0$ tale che $E \subseteq [-M, M]$. Procediamo come nel paragrafo 1.8: l'insieme quoziente $E/\mathbb{Q}$ ha un'infinità più che numerabile di classi di equivalenza. Selezionando, mediante l'assioma della scelta, un elemento per ciascuna classe di equivalenza, si ottiene un insieme $W \subset E$ che non è misurabile: infatti, detta $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una numerazione di $\mathbb{Q} \cap [-M, M]$, e posto $W_n = W + q_n$, si ha

$$E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n \subseteq W + [-M, M] \subseteq E + [-M, M] \subseteq [-2M, 2M]$$

da cui

$$0 < m(E) \le m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n\right) \le 4M.$$

Allora, se W fosse misurabile lo sarebbero tutti i W_n e avremmo

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n\right) = m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(W) = \begin{cases} 0 & \text{se } m(W) = 0 \\ \infty & \text{se } m(W) > 0, \end{cases}$$

mentre la misura esterna di tale unione è compresa fra $m(E)$ e $4M$. Si conclude che W non è misurabile. Se E è illimitato, esiste $M > 0$ tale che $2M \ge m(E \cap [-M, M]) > \frac{1}{2}m(E) > 0$, e per quanto visto esiste $W \notin \mathcal{M}$ tale che $W \subset E \cap [-M, M] \subset E$.

Esercizio 1.8.3 Poniamo $E_n = \bigcup_{m=n}^\infty V_m$, Osserviamo che $m^*(E_n) < \infty$, visto che tale unione è contenuta in $[-1, 2]$. Inoltre $E_n \supseteq E_{n+1}$ e

$$\lim_{n\to\infty} m^*(E_n) \ge \lim_{n\to\infty} m^*(V_n) = \lim_{n\to\infty} m^*(V) = m^*(V).$$

D'altra parte $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \emptyset$: infatti se x appartiene a tale intersezione, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $m_n \ge n$ tale che $x \in V_{m_n}$; pertanto $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_{m_n}$, il che è impossibile, dato che i V_m sono disgiunti.

Esercizio 1.8.4 Ricordando la proposizione 1.7.3(v), possiamo dire che esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $B \subseteq V \cup W$ e $m(B) = m(V \cup W)$; similmente, dall'esercizio 1.7.5 ricaviamo che esiste $H \in \mathcal{B}$ tale che $H \supset W$ e $m(H) = m^*(W)$, ed inoltre

$$\max\{m(D) :\ D \in \mathcal{B},\ D \subset V\} < m^*(V).$$

Si ha allora

$$m(V \cup W) = m(B) = m(B \setminus H) + m(B \cap H).$$

Notiamo ora che $B \setminus H \in \mathcal{B}$ e $B \setminus H \subset V$: dunque

$$m(B \setminus H) \leq \max\{m(D) : \ D \in \mathcal{B}, \ D \subset V\} < m^*(V).$$

Pertanto

$$m(V \cup W) < m^*(V) + m(H) \leq m^*(V) + m^*(W).$$

Esercizio 1.8.5 Per l'esercizio 1.7.5, esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $B \supset V \cup W$ e $m(B) = m^*(V \cup W)$. Poi, per ipotesi esistono $G, H \in \mathcal{B}$, disgiunti, tali che $G \supset V$, $H \supset W$; non è restrittivo supporre $B \supseteq G$ e $B \supseteq H$. Si ha allora $B \supseteq G \cup H \supset V \cup W$ e dunque $m(B) = m(G \cup H) = m^*(V \cup W)$. Pertanto

$$m^*(V \cup W) = m(G \cup H) = m(G) + m(H) \geq m^*(V) + m^*(W) \geq m^*(V \cup W),$$

da cui la tesi.

Esercizio 1.8.6 Se $E \subset V$ allora E contiene al più un elemento per ciascuna classe di equivalenza definita in $[0,1]$ da $x \simeq y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Se $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, essendo E misurabile anche i suoi traslati $E_n = E + q_n$ sono misurabili nonché disgiunti, con $m(E_n) = m(E)$. Dato che

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq [-1,2],$$

se fosse $m(E) > 0$ avremmo

$$+\infty = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n) = m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq 3,$$

il che è assurdo. Dunque deve essere $m(E) = 0$.

Esercizio 1.8.7 Per ogni sottoinsieme non vuoto E di $\mathbb{N}$ scegliamo il primo elemento n_E di E. Sia ora $j : \mathbb{N} \to X$ una bigezione. Allora possiamo definire la seguente funzione di scelta per X:

$$F(V) = j^{-1}\big(n_{j(V)}\big) \qquad \forall V \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}.$$

Capitolo 2

Misure

02

2.1 Spazi misurati

spazimis

La misura di Lebesgue è il modello concreto a cui si ispira la nozione astratta di misura che stiamo per introdurre. Lo studio delle misure astratte ha svariate applicazioni in analisi funzionale, in probabilità, in calcolo delle variazioni ed in altri campi ancora.

finizmisura **Definizione 2.1.1** *Uno* spazio misurabile *è una coppia $(X, \mathcal{F})$, ove X è un insieme e $\mathcal{F}$ è una σ-algebra di sottoinsiemi di X. I sottoinsiemi di X che appartengono a $\mathcal{F}$ si dicono* misurabili.
Uno spazio misurato *è una terna $(X, \mathcal{F}, \mu)$, ove X è un insieme, $\mathcal{F}$ è una σ-algebra di sottoinsiemi di X, e $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ è una* misura*, ossia una funzione di insieme tale che*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) *se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ è una successione di insiemi disgiunti, allora*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Lo spazio misurato si dice completo*, e la misura μ si dice* completa*, se ogni sottoinsieme di un insieme di $\mathcal{F}$ di misura nulla è a sua volta in $\mathcal{F}$ (ed ha misura nulla, come seguirà dalla proposizione 2.1.4).*
Lo spazio misurato si dice finito*, e la misura μ si dice* finita*, se si ha $\mu(X) < +\infty$; si dice σ-*finito*, e μ si dice σ-*finita*, se X è unione numerabile di insiemi misurabili di misura finita.*

adefmisura **Osservazione 2.1.2** Se nella definizione 2.1.1 si sceglie in (ii) $E_n = \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si deduce che $\mu(\emptyset) = 0$ oppure $\mu(\emptyset) = +\infty$. Dunque la condizione (i) non è in generale conseguenza di (ii).

Vediamo qualche esempio.

tantemis **Esempi 2.1.3 (1)** $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ è uno spazio misurato completo e σ-finito. Parimenti, anche $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m|_{\mathcal{B}})$ è uno spazio misurato; esso è ancora σ-finito ma non è completo, perché non tutti i sottoinsiemi di un Boreliano di misura nulla sono Boreliani, come vedremo più in là (esercizio 3.1.10). La misura $m|_{\mathcal{B}}$ è detta *misura di Borel*.

(2) Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme misurabile secondo Lebesgue, la funzione $\lambda(E) = m(A \cap E)$ è una misura su $\mathcal{M}$; $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \lambda)$ è uno spazio misurato σ-finito, ed è finito se e solo se $m(A) < \infty$. Tutti gli insiemi disgiunti da A hanno misura nulla, quindi in generale questo spazio misurato non è completo. Si dice che la misura λ è *concentrata* sull'insieme A.

(3) *(Misura di Lebesgue-Stieltjes)* Sia $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente e continua a sinistra, cioè tale che $\lim_{x \to x_0^-} g(x) = g(x_0)$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Ripetiamo la procedura seguita per costruire la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$, con l'unica differenza di attribuire agli intervalli una diversa lunghezza: precisamente, definiamo la lunghezza ℓ_g sugli intervalli aperti a destra, ponendo

$$\ell_g([a, b[) = g(b) - g(a),$$

e convenendo di porre $g(\pm\infty) = \lim_{x \to \pm\infty} g(x)$.
Poi introduciamo la misura esterna μ_g^* su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ in analogia con il caso di m^*, cioè definendo

$$\mu_g^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell_g(I_n) : E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \,,\ I_n \text{ intervalli aperti a destra} \right\}.$$

Dopo aver provato, in perfetta analogia con il caso di m^*, che μ_g^* è monotona e numerabilmente subadditiva, si introduce la classe $\mathcal{M}_g$ degli insiemi μ_g-misurabili:

$$\mathcal{M}_g = \{E \subseteq \mathbb{R} : \mu_g^*(A) = \mu_g^*(A \cap E) + \mu_g^*(A \cap E^c) \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}\}.$$

Si verifica, come per il caso della misura di Lebesgue, che $\mathcal{M}_g$ è una σ-algebra contenente i Boreliani, ed infine si definisce la misura di Lebesgue-Stieltjes μ_g come la restrizione di μ_g^* alla classe $\mathcal{M}_g$. Si dimostra allora, senza modifiche rispetto al caso di m, che $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_g, \mu_g)$ è uno spazio misurato completo e σ-finito (è finito se e solo se la funzione g è limitata su $\mathbb{R}$).
Questa stessa costruzione si può fare in un fissato intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ per ogni funzione $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ crescente e continua a sinistra (e non è restrittivo supporre che $g(a) = 0$): la corrispondente misura di Lebesgue-Stieltjes sarà finita quando $\lim_{t \to b^-} g(t) < +\infty$, mentre sarà σ-finita allorché tale limite vale $+\infty$. Nel primo caso, ponendo $\mu_g(\{b\}) = 0$, la misura μ_g viene estesa a tutto $[a, b]$, o più precisamente alla σ-algebra $\overline{\mathcal{M}_g} \subset \mathcal{P}([a, b])$ definita da

$$\overline{\mathcal{M}_g} = \mathcal{M}_g \cup \{E \cup \{b\} : E \in \mathcal{M}_g\}.$$

Ritroveremo questa famiglia di misure nel capitolo 6.

(4) Sia X un insieme infinito, e poniamo per ogni $E \in \mathcal{P}(X)$

$$n(E) = \begin{cases} \#(E) & \text{se } E \text{ è un insieme finito} \\ +\infty & \text{se } E \text{ è un insieme infinito,} \end{cases}$$

ove $\#(E)$ denota la cardinalità di E. Si ottiene così lo spazio misurato $(X, \mathcal{P}(X), n)$, che è completo; esso inoltre è σ-finito se e solo se X è numerabile.

(5) *(Misura di Dirac)* Sia X un insieme non vuoto, sia $x \in X$. Per ogni $E \in \mathcal{P}(X)$ poniamo

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin E \\ 1 & \text{se } x \in E. \end{cases}$$

Lo spazio misurato $(X, \mathcal{P}(X), \delta_x)$ è completo e finito.

(6) Uno spazio misurato $(X, \mathcal{F}, \mu)$ tale che $\mu(X) = 1$ si chiama *spazio probabilizzato*, la misura μ si chiama *probabilità* e gli elementi di $\mathcal{F}$ sono gli *eventi*. Il numero $\mu(E) \in [0, 1]$ è la probabilità che l'evento E si realizzi; se in particolare $\mu(E) = 1$ si dice che l'evento E è verificato *quasi certamente*.

(7) Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri non negativi. Per ogni $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sia

$$\nu(E) = \sum_{n\in E} a_n \,.$$

Lo spazio misurato $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ è completo e σ-finito; è finito se e solo se la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ è convergente. In tal caso, se si normalizza la successione $\{a_n\}$ ponendo

$$p_n = \frac{a_n}{\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k},$$

la misura $\mu(E) = \sum_{n\in E} p_n$ è una *probabilità discreta*.

(8) Sia X un insieme più che numerabile, e sia

$$\mathcal{F} = \{E \subseteq X : E, \text{ oppure } E^c, \text{ è numerabile}\};$$

si verifica subito che $\mathcal{F}$ è una σ-algebra. Per $E \in \mathcal{F}$ poniamo

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } E \text{ è numerabile} \\ +\infty & \text{se } E^c \text{ è numerabile.} \end{cases}$$

È facile verificare che μ è una misura; lo spazio misurato $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è completo ma non σ-finito.

Si estendono al caso astratto le tipiche proprietà dimostrate nel caso della misura di Lebesgue. In particolare:

mismonoto **Proposizione 2.1.4** *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. Allora μ è monotona su $\mathcal{F}$, cioè $\mu(E) \le \mu(F)$ per $E, F \in \mathcal{F}$ ed $E \subseteq F$.*

Dimostrazione Essendo $F = E \cup (F \setminus E)$, la tesi segue dall'additività e positività di μ. □

limmu **Proposizione 2.1.5** *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato e sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$.*

(i) *Se $E_n \subseteq E_{n+1}$ per ogni n, allora*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

(ii) *Se $E_n \supseteq E_{n+1}$ per ogni n, ed esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(E_{n_0}) < \infty$, allora*

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Dimostrazione Come nel caso della misura di Lebesgue (proposizione 1.7.2). □

Esercizi 2.1

comi

1. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato non completo. Si consideri la famiglia $\mathcal{F}_0$ dei sottoinsiemi di X della forma $A \cup B$, ove $A \in \mathcal{F}$ e B è sottoinsieme di un opportuno insieme $B_0 \in \mathcal{F}$ (variabile al variare di B) avente misura nulla. Si provi che $\mathcal{F}_0$ è una σ-algebra; si definisca poi

$$\mu_0(A \cup B) = \mu(A) \qquad \forall E = A \cup B \in \mathcal{F}_0 :$$

si verifichi che μ_0 è ben definita, che $\mu_0|_{\mathcal{F}} = \mu$, che μ_0 è una misura su $\mathcal{F}_0$ e che $(X, \mathcal{F}_0, \mu_0)$ è uno spazio misurato completo. Si mostri inoltre che se $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è σ-finito, anche $(X, \mathcal{F}_0, \mu_0)$ è σ-finito.

mis01

2. Sia X un insieme più che numerabile, sia $\mathcal{F}$ la σ-algebra dell'esempio 2.1.3 (8), e definiamo per $E \in \mathcal{F}$

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } E \text{ è numerabile} \\ 1 & \text{se } E^c \text{ è numerabile.} \end{cases}$$

Si provi che $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è uno spazio misurato completo e finito.

succmonmis

3. Sia $\{\mu_n\}$ una successione di misure definite su una σ-algebra $\mathcal{F}$, tale che $\mu_n(E) \leq \mu_{n+1}(E)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $E \in \mathcal{F}$. Si provi che la funzione

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(E) \qquad \forall E \in \mathcal{F}$$

è una misura su $\mathcal{F}$. Si provi poi lo stesso risultato supponendo invece $\mu_n(E) \geq \mu_{n+1}(E)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $E \in \mathcal{F}$.

FUFn

4. Sia X un insieme e sia $\{X_n\}$ una famiglia di sottoinsiemi disgiunti di X la cui unione è X. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathcal{F}_n$ una σ-algebra di sottoinsiemi di X_n. Posto

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n : E_n \in \mathcal{F}_n \right\},$$

si provi che $\mathcal{F}$ è una σ-algebra di sottoinsiemi di X.

giochino 5. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. Se A, B, C sono elementi di $\mathcal{F}$ con $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$, e se $\mu(A) = \mu(C) < \infty$, si mostri che

$$\mu(A \cap B) = \mu(B).$$

inffin 6. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato con la proprietà che ogni $A \in \mathcal{F}$ con $\mu(A) = \infty$ ha un sottoinsieme $B \in \mathcal{F}$ tale che $0 < \mu(B) < \infty$. Si provi che ogni $A \in \mathcal{F}$ con $\mu(A) = \infty$ ha un sottoinsieme $C \in \mathcal{F}$ tale che

$$\mu(C) = \infty, \qquad C = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\,, \qquad B_n \in \mathcal{F}, \qquad \mu(B_n) < \infty.$$

distDelta 7. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato finito. Definiamo su $\mathcal{F}$ la relazione

$$E \simeq F \iff \mu(E \triangle F) = 0,$$

ove $E \triangle F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$ è la differenza simmetrica fra E ed F definita nell'esercizio 1.7.7.

(i) Si verifichi che $\simeq$ è una relazione di equivalenza.

(ii) Posto $\Lambda = \mathcal{F}/\simeq$, si provi che

$$d(E, F) = \mu(E \triangle F)$$

è una distanza su Λ.

(iii) Si dimostri che (Λ, d) è uno spazio metrico completo.

[**Traccia:** per (iii), data una successione di Cauchy $\{E_n\} \subseteq \Lambda$, si provi che per un'opportuna sottosuccessione $\{E_{n_k}\}$ si ha $\mu(E_m \triangle E_{n_k}) < 2^{-k}$ per ogni $m > n_k$, e se ne deduca che $\mu(E_{n_k} \triangle E) \longrightarrow 0$ per $k \longrightarrow \infty$, ove $E = \limsup_{k\to\infty} E_{n_k}$ (v. esercizio 1.7.3); a questo scopo, può essere utile notare che $\bigcup_{k=m}^{\infty}(E_{n_k} \setminus E_{n_h}) \subseteq (E_{n_m} \setminus E_{n_h}) \cup \bigcup_{k=m+1}^{\infty}(E_{n_k} \setminus E_{n_{k-1}})$.]

archiC 8. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$E_n = \left\{ z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} :\ 0 \le r \le 1,\ \theta \notin \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}](s_n + 2k)\pi, (s_{n+1} + 2k)\pi[\right\},$$

ove $s_0 = 0$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Determinare gli insiemi $\limsup_{n\to\infty} E_n$ e $\liminf_{n\to\infty} E_n$.

mulambdam 9. Sia $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ una misura tale che:

(i) $\mu([0, 1]) = \lambda \in [0, +\infty[\,,$ (ii) μ è invariante per traslazioni.

Si provi che $\mu = \lambda m$, ove m è la misura di Lebesgue.

nolebPR 10. Si provi che non si può costruire alcuna misura su $\mathbb{R}$ in modo che valgano le proprietà 1, 2, 3 e 4 del paragrafo 1.2.

LeSti

11. Descrivere le misure di Lebesgue-Stieltjes μ_j associate alle seguenti funzioni definite su $\mathbb{R}$:

$$f_1(x) = \begin{cases} \log x & \text{se} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{se} \quad x \leq 1; \end{cases} \qquad f_2(x) = \frac{x - \sin x \, \cos x}{2}; \quad f_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{]n,\infty[}\,;$$

$$f_4(x) = \begin{cases} x - n & \text{se} \quad x \in]2n, 2n+1] \\ n+1 & \text{se} \quad x \in]2n+1, 2n+2] \end{cases}; \quad f_5(x) = x + \{x\},$$

ove $\{x\} = \max\{k \in \mathbb{Z} : \ k < x\}$.

mufinval

12. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato con $0 < \mu(X) < \infty$, tale che μ assuma solo un numero finito di valori. Provare che esistono numeri $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N$ e insiemi $E_0, E_1, \ldots, E_N$ con le seguenti proprietà:

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_N;$$
$$E_i \in \mathcal{F}, \quad X = \bigcup_{j=0}^{N} E_j\,, \quad E_i \cap E_j = \emptyset \text{ per } i \neq j, \quad \mu(E_i) = \alpha_i;$$
$$\text{se } A \in \mathcal{F} \text{ e } A \subseteq E_i\,, \text{ allora } \mu(A) = 0 \text{ oppure } \mu(A) = \alpha_i\,.$$

(Gli insiemi E_i si dicono *atomi*.)
[**Traccia:** si definisca $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \min\{\mu(B) : \ B \in \mathcal{F}, \ \mu(B) > 0\}$ e sia $E_1 \in \mathcal{F}$ tale che $\mu(E_1) = \alpha_1$. Definiti $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, si ponga $\alpha_{k+1} = \min\{\mu(B) : \ B \in \mathcal{F}, \ B \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)^c, \ \mu(B) > \alpha_k\}$, ammesso che questa classe non sia vuota, e sia E_{k+1} in tale classe, tale che $\mu(E_{k+1}) = \alpha_{k+1}$. Si osservi che esiste $N \in \mathbb{N}^+$ per cui tale classe è vuota; posto $E_0 = \left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right)^c$, si verifichi che $\mu(E_0) = 0 = \alpha_0$.]

misurego

13. Sia X uno spazio di Hausdorff localmente compatto, tale che ogni aperto sia unione numerabile di compatti; sia μ una misura definita sulla σ-algebra $\mathcal{B}$ dei Boreliani di X, tale che $\mu(F) < \infty$ per ogni compatto F. Provare che μ è una misura *regolare*, ossia tale che:

(a) $\mu(E) = \sup\{\mu(F) : \ F \subseteq E, \ F \text{ compatto}\}$ per ogni $E \in \mathcal{B}$;

(b) $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : \ U \supseteq E, \ U \text{ aperto}\}$ per ogni $E \in \mathcal{B}$.

[**Traccia:** seguire questo schema: (i) gli aperti di X verificano (a) e (b); (ii) se X è compatto, i Boreliani di X verificano (a) e (b) (posto $\mathcal{R} = \{E \in \mathcal{B} : \ E \text{ verifica (a) e (b)}\}$, si provi che $\mathcal{R}$ è una σ-algebra...); (iii) i Boreliani di X verificano (a) (si scriva X come unione numerabile crescente di compatti e si sfrutti (ii)); (iv) se $\mu(X) < \infty$, i Boreliani di X verificano (b) (si provi che $\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{B} : \ E \text{ verifica (b)}\}$ è una σ-algebra, utilizzando (iii) ed il fatto che $\mu(X) < \infty$...); (v) X è unione numerabile crescente di aperti di misura finita (usare la locale compattezza ed il fatto che $\mu(K) < \infty$ se K è compatto); (vi) i Boreliani di X verificano (b) (sfruttare (v)).]

mudasa

14. Sia $\mathcal{D}$ una semi-algebra di sottoinsiemi di un insieme non vuoto X, ossia una famiglia tale che:

    (a) $A, B \in \mathcal{D} \implies A \cap B \in \mathcal{D}$;

    (b) $A \in \mathcal{D} \implies$ esiste $m \in \mathbb{N}^+$ tale che $A^c = \bigcup_{n=1}^m B_n$, con $B_n \in \mathcal{D}$ e $B_n \cap B_k = \emptyset$ per $n \neq k$.

    Si verifichi che l'insieme $\mathcal{A}$, costituito da $\emptyset$ e dalle unioni finite disgiunte di elementi di $\mathcal{D}$, è un'algebra. Sia poi $\mu : \mathcal{D} \to [0, \infty]$ una funzione tale che $\mu(\emptyset) = 0$, μ è additiva sulle unioni finite di elementi di $\mathcal{D}$, e μ è numerabilmente subadditiva su $\mathcal{D}$. Si provi che:

    (i) la funzione μ è estendibile univocamente ad una funzione $\overline{\mu}$, definita sull'algebra $\mathcal{A}$, che è monotona e numerabilmente additiva sulle unioni disgiunte di elementi di $\mathcal{A}$;

    (ii) la funzione $\overline{\mu}$ è a sua volta estendibile ad una misura completa $\tilde{\mu}$, definita su una opportuna σ-algebra $\mathcal{F}$ contenente $\mathcal{A}$.

    [**Traccia:** Per (i), si definisca per $A \in \mathcal{A}$, $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, con $A_i \in \mathcal{D}$ disgiunti, $\overline{\mu}(A) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$, e si verifichi che questa è una buona definizione. Per (ii), si adatti la procedura del paragrafo 1.4, rimpiazzando la famiglia degli intervalli di $\mathbb{R}$ con l'algebra $\mathcal{A}$, si definisca $\mathcal{F} = \{E \subseteq X : \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)\ \forall A \subseteq X\}$ e si mostri, utilizzando i vari enunciati del paragrafo 1.4 opportunamente modificati, che $\mathcal{F}$ è una σ-algebra, e che essa contiene $\mathcal{A}$ (per questo utilizzare la proposizione 1.5.1 adeguatamente modificata). Infine si provi, sempre sulla base di quanto fatto nel paragrafo 1.4, che $\tilde{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{F}}$ è una misura completa che estende $\overline{\mu}$.]

2.2 Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$

N-Leb

Per definire la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ occorre ripetere la procedura svolta nel capitolo 1 e riassunta nell'esempio 2.1.3 (3). Si definisce anzitutto il *volume* N-dimensionale dei *parallelepipedi* $R = \prod_{i=1}^N I_i$, ove gli I_i sono intervalli di $\mathbb{R}$:

$$v_N(R) = \prod_{i=1}^N \ell(I_i),$$

con la convenzione che $0 \cdot \infty = 0$, necessaria ad attribuire volume nullo, ad esempio, ai sottospazi k-dimensionali di $\mathbb{R}^N$.
Poi si introduce la misura esterna N-dimensionale m_N^* di un arbitrario insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$:

$$m_N^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} v_N(R_n) : \ E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n \,, \ R_n \text{ parallelepipedi aperti} \right\}.$$

Si osserva che la definizione di m_N^* non cambia se i ricoprimenti sono fatti con parallelepipedi qualsiasi anziché aperti, e si verifica che m_N^* estende v_N, è monotona, nulla

sull'insieme vuoto, numerabilmente subadditiva ed invariante per traslazioni.
A questo punto si introduce la classe $\mathcal{M}_N$ degli insiemi misurabili:

$$\mathcal{M}_N = \{E \subseteq \mathbb{R}^N : m_N^*(A) = m_N^*(A \cap E) + m_N^*(A \cap E^c) \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^N\},$$

la quale è una σ-algebra contenente i parallelepipedi, e quindi anche gli aperti ed i chiusi. Dunque $\mathcal{M}_N$ contiene la σ-algebra $\mathcal{B}_N$ dei Boreliani di $\mathbb{R}^N$.
Si definisce infine la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ come la restrizione di m_N^* a $\mathcal{M}_N$:

$$m_N(E) = m_N^*(E) \quad \forall E \in \mathcal{M}_N,$$

e si dimostra che m_N è numerabilmente additiva. Quindi $(\mathbb{R}^N, \mathcal{M}_N, m_N)$ è uno spazio misurato che risulta completo e σ-finito. Tutte queste cose si provano esattamente come nel caso della misura di Lebesgue unidimensionale (con qualche attenzione in più per mostrare che i parallelepipedi sono misurabili).
Ritroveremo la misura m_N nel capitolo 5 come "misura prodotto" di N copie della misura di Lebesgue m, e ciò ci permetterà di dare una formula per il calcolo degli integrali multipli come integrali semplici iterati.

Esercizi 2.2

rettalge

1. Si definisca
$$\mathcal{R} = \{E \times F : \quad E, F \in \mathcal{M}\}.$$
   (i) Si verifichi che $\mathcal{R}$ non è un'algebra, ma che la famiglia $\mathcal{A}$ costituita dalle unioni finite di elementi di $\mathcal{R}$ lo è.
   (ii) Detta $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ la σ-algebra generata da $\mathcal{A}$ (ossia la minima σ-algebra che contiene $\mathcal{A}$), si provi che se $A \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ allora
$$\{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\} \in \mathcal{M} \qquad \forall y \in \mathbb{R},$$
$$\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\} \in \mathcal{M} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
   (iii) Si provi che la σ-algebra $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ è contenuta propriamente in $\mathcal{M}_2$.

mNomo

2. Dimostrare che
$$m_N^*(tE) = t^N m_N^*(E) \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N, \quad \forall t \geq 0.$$

2.3 Misure esterne di Hausdorff

estHaus

La misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ non fa distinzioni fra i suoi sottoinsiemi misurabili di misura nulla: un iperpiano $(N-1)$-dimensionale, il sostegno di una curva, una k-varietà sono tutti insiemi "trascurabili" rispetto a m_N. Le misure di Hausdorff H_p (ove $p > 0$) permettono invece di "catalogare" gli insiemi di misura nulla attribuendo loro una "dimensione" che può essere intera (1 per il sostegno di una curva, k per le k-varietà) od anche non intera nel caso di certi insiemi frattali (esempio 2.4.5).

Come la misura di Lebesgue, le misure di Hausdorff si costruiscono tramite i ricoprimenti: tuttavia la nozione base non è quella di volume, ma quella di diametro di un insieme.

diam **Definizione 2.3.1** *Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$, il* diametro *di E è il numero (eventualmente $+\infty$)*

$$\text{diam } E = \begin{cases} 0 & \text{se } E = \emptyset \\ \sup\{|x-y|_N : \ x, y \in E\} & \text{se } E \neq \emptyset. \end{cases}$$

Per definire le misure di Hausdorff bisogna ancora una volta cominciare dalle misure esterne. Siano $p, \delta > 0$ e consideriamo per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ le quantità

$$H^*_{p,\delta}(E) = \inf\left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} (\text{diam } U_n)^p : \ E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n, \ U_n \text{ aperti}, \ \text{diam } U_n < \delta \right\}.$$

Per misurare bene gli insiemi "frastagliati" quelli che contano sono i ricoprimenti con diametri piccoli: infatti più δ è piccolo, più la quantità $H^*_{p,\delta}(E)$ è grande, essendo l'estremo inferiore di un insieme più piccolo. La valutazione "ottimale" della misura di E si otterrà al limite per $\delta \longrightarrow 0^+$ (vedere anche l'esercizio 2.3.5).

H-star **Definizione 2.3.2** *Sia $p > 0$. La* misura esterna di Hausdorff *$H^*_p(E)$ è la quantità*

$$H^*_p(E) = \lim_{\delta\to 0^+} H^*_{p,\delta}(E) = \sup_{\delta>0} H^*_{p,\delta}(E) \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N.$$

Si noti che, in effetti, la definizione di H^*_p dipende anche da N, cioè dalla dimensione dello spazio ambiente, perché coinvolge l'uso di aperti di $\mathbb{R}^N$; d'altronde questo fatto è irrilevante, nel senso che le misure esterne di Hausdorff di indice p costruite su $\mathbb{R}^N$ e su $\mathbb{R}^M$ coincidono per $p \leq \min\{N, M\}$ (esercizio 2.3.2). Nel seguito, comunque, prenderemo in considerazione solo i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$, con N fissato. Si verifica inoltre (esercizio 2.3.4) che la definizione di $H^*_p(E)$ non cambia se i ricoprimenti di E si prendono qualsiasi, anziché costituiti da aperti.
Come conseguenza immediata della definizione si ha:

Proposizione 2.3.3 *Sia $p > 0$. Allora:*

(i) $H^*_p(E) \geq 0 \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N$;

(ii) $H^*_p(\emptyset) = H^*_p(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$;

(iii) H^*_p *è monotona.*

Dimostrazione (i) Evidente.
(ii) Un ricoprimento di $\emptyset$ e di $\{x\}$ è la famiglia costituita dalla sola palla $B(x, \frac{\delta}{3})$ il cui diametro è minore di δ; dunque

$$\lim_{\delta\to 0^+} H^*_{p,\delta}(\emptyset) = \lim_{\delta\to 0^+} H^*_{p,\delta}(\{x\}) = 0.$$

(iii) Se $E \subseteq F$, ogni ricoprimento che concorre a definire $H^*_{p,\delta}(F)$ concorre anche a definire $H^*_{p,\delta}(E)$; quindi $H^*_{p,\delta}(E) \leq H^*_{p,\delta}(F)$ per ogni $\delta > 0$, da cui $H^*_p(E) \leq H^*_p(F)$. □

omog **Proposizione 2.3.4** *Sia $p > 0$. Allora:*

(i) $H_p^*(E + x) = H_p^*(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,\ \forall E \subseteq \mathbb{R}^N$;

(ii) $H_p^*(tE) = t^p H_p^*(E) \quad \forall t > 0,\ \forall E \subseteq \mathbb{R}^N$.

Dimostrazione Si verifica facilmente che

$$H_{p,\delta}^*(E + x) = H_{p,\delta}^*(E), \qquad H_{p,\delta}^*(tE) = t^p H_{p,\frac{\delta}{t}}^*(E) \qquad \forall \delta > 0,$$

da cui la tesi per $\delta \longrightarrow 0^+$. $\square$

Infine:

Proposizione 2.3.5 *Sia $p > 0$. Allora H_p^* è numerabilmente subadditiva.*

Dimostrazione Si prova, esattamente come per la misura esterna di Lebesgue, che

$$H_{p,\delta}^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} H_{p,\delta}^*(E_n) \qquad \forall \{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N);$$

osservando poi che

$$H_{p,\delta}^*(E) \leq H_p^*(E) \qquad \forall \delta > 0, \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N,$$

al limite per $\delta \longrightarrow 0^+$ si ha la tesi. $\square$

Esercizi 2.3

diamsub 1. Siano A, B sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$. Si provi che se $A \cap B \neq \emptyset$, allora

$$\text{diam } A \cup B \leq \text{diam } A + \text{diam } B.$$

HauNM 2. Siano $N, M \in \mathbb{N}^+$ con $N < M$, e sia $p \leq N$. Si provi che per ogni sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ le misure esterne di Hausdorff di indice p costruite su $\mathbb{R}^N$ e su $\mathbb{R}^M$ coincidono.

numHp0 3. Si provi che per ogni $p > 0$ i sottoinsiemi numerabili di $\mathbb{R}^N$ hanno misura esterna H_p^* nulla.

ricarb 4. Si provi che la quantità $H_p^*(E)$ non cambia se si considerano ricoprimenti di E costituiti da insiemi arbitrari anziché aperti.

Haus0 5. Si consideri la definizione di $H_{p,\delta}^*$ nel caso $p = 0$, con l'avvertenza di porre $H_{0,\delta}^*(\emptyset) = 0$ e di prendere ricoprimenti finiti o numerabili, ma con aperti non vuoti. Si descriva la misura esterna H_0^*.

Hpnodelta

6. Sia
$$\underline{H}^*_p(E) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}}(\text{diam } U_n)^p : E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right\},$$
senza alcuna restrizione sulla grandezza dei diametri; si provi che $H^*_p(E) \geq \underline{H}^*_p(E)$ per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$, ma che in generale non vale l'uguaglianza.

Hau1

7. Dimostrare che $H^*_1(E) = m^*(E)$ per ogni $E \subseteq \mathbb{R}$.
[**Traccia:** si verifichi che $m^*(E) \leq H^*_1(E)$. Per provare l'altra disuguaglianza si consideri dapprima il caso in cui E è un intervallo limitato, e poi si passi al caso generale usando la numerabile subadditività di H^*_1.]

addipo

8. Siano $E, F \subseteq \mathbb{R}^N$ tali che
$$\text{dist}(E,F) = \inf\{|x-y|_N : \ x \in E, \ y \in F\} > 0.$$
Si provi che
$$H^*_p(E \cup F) = H^*_p(E) + H^*_p(F).$$

H1seg

9. Sia S il segmento di estremi x, y, con $x, y \in \mathbb{R}^N$ fissati. Si provi che
$$H^*_p(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } p > 1 \\ |x-y|_N & \text{se } p = 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < p < 1. \end{cases}$$

H1Gamma

10. Sia $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x|_2 = 1\}$. Si dia una stima dall'alto e dal basso per $H^*_1(\Gamma)$.

HauN+

11. Si provi che se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ allora $H^*_{N+\varepsilon}(E) = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Haulip

12. Sia $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$ una funzione Lipschitziana. Si provi che se $p \in [0, \infty[$ si ha
$$H^*_p(f(E)) \leq K^p H^*_p(E) \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^m,$$
ove K è la costante di Lipschitz di f.

Haufg

13. Siano $f, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$ funzioni continue tali che esista $c > 0$ per cui
$$|f(x) - f(y)| \leq c|g(x) - g(y)| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^k.$$
Si provi che se $p \in [0, \infty[$ si ha
$$H^*_p(f(E)) \leq c^p H^*_p(g(E)) \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Hplip

14. Sia (X, d) uno spazio metrico. Se $E \subseteq X$ è un insieme non vuoto, il diametro di E è definito, analogamente al caso di $\mathbb{R}^N$, da
$$\text{diam}(E) = \sup_{x,y\in E} d(x,y).$$

(i) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di sottoinsiemi di X tale che $A_n \subseteq A_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si provi che

$$\operatorname{diam}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n).$$

(ii) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di sottoinsiemi di X tale che $A_n \supseteq A_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si provi che

$$\operatorname{diam}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n).$$

(iii) Si trovi un esempio in cui $A_n \supseteq A_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e

$$\operatorname{diam}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) < \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n).$$

2.4 Misure e dimensione di Hausdorff

misHaus

Introduciamo adesso gli insiemi misurabili rispetto alla misura di Hausdorff di indice $p > 0$.

Definizione 2.4.1 *La classe degli insiemi H_p-misurabili è*

$$\mathcal{H}_p = \{E \subseteq \mathbb{R}^N : H_p^*(A) = H_p^*(A \cap E) + H_p^*(A \cap E^c) \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^N\}.$$

Naturalmente, in questa definizione quella che conta è la disuguaglianza $\geq$.
Come si è fatto per la classe $\mathcal{M}$, si verifica che $\mathcal{H}_p$ è una σ-algebra e che la *misura di Hausdorff* di indice p, definita da $H_p = H_p^*|_{\mathcal{H}_p}$, è numerabilmente additiva sugli elementi di $\mathcal{H}_p$. Inoltre, $\mathcal{H}_p$ contiene i Boreliani di $\mathbb{R}^N$: ciò è conseguenza della seguente

paralmis **Proposizione 2.4.2** *I parallelepipedi di $\mathbb{R}^N$ sono elementi di $\mathcal{H}_p$ per ogni $p > 0$.*

Dimostrazione Ogni parallelepipedo $P \subseteq \mathbb{R}^N$ può scriversi come unione numerabile di parallelepipedi chiusi e limitati; quindi basta provare che ogni parallelepipedo chiuso e limitato, dunque del tipo $P = \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$, appartiene a $\mathcal{H}_p$. Poniamo

$$P_n = \prod_{i=1}^N \left[a_i - \frac{1}{n+1}, b_i + \frac{1}{n+1}\right], \qquad n \in \mathbb{N},$$

e sia A un insieme test. Occorre provare la disuguaglianza

$$H_p^*(A) \geq H_p^*(A \cap P) + H_p^*(A \cap P^c),$$

che è ovvia se $H_p^*(A) = \infty$; supporremo quindi $H_p^*(A) < \infty$. Notiamo che, detto $A_n = A \cap P_n^c$, si ha

$$A_n \subseteq A_{n+1}, \qquad \operatorname{dist}(A_n, P) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A \cap P^c.$$

Dunque, per la monotonia di H_p^* e per l'esercizio 2.3.8,

$$H_p^*(A) \geq H_p^*\left((A \cap P) \cup A_n\right) = H_p^*(A \cap P) + H_p^*(A_n) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui, essendo $A_n \subseteq A_{n+1}$ per ogni n,

$$H_p^*(A) \geq H_p^*(A \cap P) + \lim_{n\to\infty} H_p^*(A_n).$$

Mostriamo che

$$\lim_{n\to\infty} H_p^*(A_n) \geq H_p^*(A \cap P^c);$$

ciò proverà la disuguaglianza cercata e quindi la tesi.
Poniamo $D_n = A_{n+1} \setminus A_n$: allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha l'uguaglianza

$$A \cap P^c = A_n \cup \bigcup_{k=n}^{\infty} D_k \ ,$$

e dunque, per la numerabile subadditività di H_p^*,

$$H_p^*(A \cap P^c) \leq H_p^*(A_n) + \sum_{k=n}^{\infty} H_p^*(D_k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Verificheremo fra poco che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} H_p^*(D_k)$ è convergente; quindi passando al limite per $n \to \infty$ si ricava

$$H_p^*(A \cap P^c) \leq \lim_{n\to\infty} H_p^*(A_n),$$

come si voleva.
Proviamo la convergenza della serie $\sum_{k=0}^{\infty} H_p^*(D_k)$: scriviamo

$$\sum_{k=0}^{m} H_p^*(D_k) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} H_p^*(D_{2k}) + \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} H_p^*(D_{2k+1}), \quad m \in \mathbb{N},$$

ed osserviamo che $\operatorname{dist}(D_k, D_{k+2}) > 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Quindi utilizzando nuovamente l'esercizio 2.3.8 otteniamo

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} H_p^*(D_{2k}) = H_p^*\left(\bigcup_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} D_{2k}\right), \qquad \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} H_p^*(D_{2k+1}) = H_p^*\left(\bigcup_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} D_{2k+1}\right).$$

Essendo inoltre

$$\left(\bigcup_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} D_{2k}\right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} D_{2k+1}\right) = \bigcup_{k=0}^{m} D_k \subseteq A_{m+1} \subseteq A,$$

si deduce finalmente che $\sum_{k=0}^{m} H_p^*(D_k) \leq H_p^*(A) < \infty$.
La misurabilità del parallelepipedo P è completamente dimostrata. $\square$

Dimensione di Hausdorff

Analizziamo adesso il comportamento di H_p^* al variare di $p > 0$. Notiamo anzitutto che, per l'esercizio 2.3.11, $H_{N+\varepsilon}^*(E) = 0$ per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e per ogni $\varepsilon > 0$; quindi ci interessano i valori di p compresi fra 0 e N.

Proposizione 2.4.3 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e sia $p \in]0, N]$. Risulta:*

(i) *se $H_p^*(E) < \infty$, allora $H_q^*(E) = 0$ per ogni $q \in]p, N]$;*

(ii) *se $H_p^*(E) > 0$, allora $H_q^*(E) = \infty$ per ogni $q \in]0, p[$.*

Dimostrazione Sia $\{U_n\}$ un ricoprimento aperto di E. Se $s > r > 0$ e se diam $U_n < \delta$ si ha

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (\text{diam } U_n)^s < \delta^{s-r} \sum_{n\in\mathbb{N}} (\text{diam } U_n)^r,$$

cosicché

$$H_{s,\delta}^*(E) \le \delta^{s-r} H_{r,\delta}^*(E) \qquad \forall s > r > 0.$$

I due enunciati seguono allora facilmente, scegliendo $r = p$ e $s = q$ nel primo caso, $r = q$ e $s = p$ nel secondo. □

Dunque, per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ la funzione $p \mapsto H_p^*(E)$ "decresce" con p, nel senso che, se non è identicamente $H_p^*(E) = 0$, esiste $p_0 \in]0, N]$ tale che

$$H_p^*(E) \begin{cases} = \infty & \text{se } 0 < p < p_0 \\ \in [0, \infty] & \text{se } p = p_0 \\ = 0 & \text{se } p > p_0. \end{cases}$$

Questo comportamento di H_p^* ci induce alla seguente

Definizione 2.4.4 *Si chiama* dimensione di Hausdorff *di un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^N$, e si indica con* $\dim_H(E)$, *il numero*

$$\dim_H(E) = \inf\{p > 0 : H_p^*(E) = 0\}.$$

Ovviamente, la dimensione di Hausdorff di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ è compresa fra 0 e N (estremi inclusi).

DHC3 **Esempio 2.4.5** Calcoliamo la dimensione di Hausdorff dell'insieme di Cantor $C = C_{1/3} \subset \mathbb{R}$ introdotto nel paragrafo 1.6. Anzitutto osserviamo che si ha $C = C^1 \cup C^2$, con C^1 e C^2 "copie" di C rimpicciolite di un fattore $\frac{1}{3}$: precisamente si ha $C^1 = \frac{1}{3}C$ e $C^2 = C^1 + \frac{2}{3}$. Per la proposizione 2.3.4(ii) si deduce $H_p(C) = H_p(C^1) + H_p(C^2) = \frac{2}{3^p} H_p(C)$, e quindi se $H_p(C) \in]0, \infty[$ deve essere $\frac{2}{3^p} = 1$, cioè $p = \frac{\log 2}{\log 3}$.
Poniamo allora $d = \frac{\log 2}{\log 3}$. Proveremo che d è davvero la dimensione di Hausdorff di C facendo vedere che $H_d(C) = 1$.
Sia $\delta > 0$: poiché $\text{dist}(C^1, C^2) > 0$, risulta per omotetia e traslazione

$$\begin{aligned} H^*_{d,\delta/3}(C) &= H^*_{d,\delta/3}(C^1) + H^*_{d,\delta/3}(C^2) = \\ &= H^*_{d,\delta/3}\left(\frac{1}{3}C\right) + H^*_{d,\delta/3}\left(\frac{1}{3}C + \frac{2}{3}\right) = \\ &= \frac{1}{3^d}H^*_{d,\delta}(C) + \frac{1}{3^d}H^*_{d,\delta}(C) = H^*_{d,\delta}(C). \end{aligned}$$

Ciò implica che la quantità $H^*_{d,\delta}(C)$ non dipende da δ, e pertanto

$$H_d(C) = \lim_{\delta\to 0^+} H^*_{d,\delta}(C) = H^*_{d,2}(C).$$

Scegliendo il ricoprimento costituito dal singolo aperto $]-\varepsilon, 1+\varepsilon[$, si vede immediatamente che $H^*_{d,2}(C) \le (1+2\varepsilon)^d$ per ogni $\varepsilon > 0$: si conclude che $H_d(C) \le 1$.
Dimostriamo che $H_d(C) \ge 1$. A questo scopo, sia $\delta > 0$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un ricoprimento aperto $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di C tale che

$$\mathrm{diam}(U_n) < \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{diam}(U_n))^d < H^*_{d,\delta}(C) + \varepsilon.$$

Andiamo a costruire un ricoprimento aperto finito $\{W_1, \ldots, W_M\}$ di C (con $\mathrm{diam}(W_i)$ non necessariamente minore di δ), tale che

$$1 \le \sum_{i=1}^{M}(\mathrm{diam}(W_i))^d \le \sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{diam}(U_n))^d.$$

Fatto ciò, la tesi si otterrà osservando che

$$1 - \varepsilon \le \sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{diam}(U_n))^d - \varepsilon < H^*_{d,\delta}(C) \le H_d(C) \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Per costruire i W_i, anzitutto estraiamo da $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, per compattezza, un sottoricoprimento finito $\{U'_1, \ldots, U'_h\}$; si può anche supporre che esso sia minimale, nel senso che, togliendo uno degli U'_j, gli altri non ricoprono più C. Consideriamo l'aperto $U'_1 \cap U'_2$: se esso è vuoto, poniamo $V_1 = U'_1$ e $V_2 = U'_2$; se esso è non vuoto, sostituiamo la coppia $\{U'_1, U'_2\}$ con il singolo aperto $V_1 = U'_1 \cup U'_2$. Si ha in tal caso, essendo $0 < d < 1$,

$$(\mathrm{diam}(V_1))^d \le (\mathrm{diam}(U'_1) + \mathrm{diam}(U'_2))^d \le (\mathrm{diam}(U'_1))^d + (\mathrm{diam}(U'_2))^d;$$

iterando questo argomento con le coppie $\{V_1, U'_3\}$ e $\{V_2, U'_3\}$ nel primo caso, e con la sola coppia $\{V_1, U'_3\}$ nel secondo, e procedendo in questo modo, si genera un nuovo ricoprimento finito $\{V_1, \ldots, V_N\}$ di C, fatto di aperti *disgiunti*, tale che

$$\sum_{k=1}^{N}(\mathrm{diam}(V_k))^d \le \sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{diam}(U_n))^d.$$

Adesso osserviamo che l'aperto $\bigcup_{k=1}^{N} V_k$ contiene C, e che $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$, ove C_k è ciò che resta dopo il k-simo passo nella costruzione dell'insieme di Cantor: ricordiamo

che $C_k = \bigcup_{j=1}^{2^k} J_j^k$, ove gli J_j^k sono intervalli chiusi disgiunti, di ampiezza 3^{-k}, tali che $\mathrm{dist}(J_j^k, J_{j+1}^k) \geq 3^{-k}$; in particolare si ha $C_k \supset C_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.
Un facile ragionamento per assurdo mostra che deve esistere $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\bigcup_{k=1}^{N} V_k \supseteq C_\nu$. Poiché C_ν ha 2^ν componenti connesse, e gli aperti V_k sono disgiunti, ciascuna componente connessa di C_ν (o più d'una di esse) deve essere coperta da un singolo V_k, cosicché si ha necessariamente $N \leq 2^\nu$.
D'altra parte, se un fissato V_k ricopre $J_j^\nu \cup J_{j+1}^\nu$, si avrà in particolare

$$\mathrm{diam}(V_k) \geq \mathrm{diam}(J_j^\nu) + \mathrm{diam}(J_{j+1}^\nu) + \mathrm{dist}(J_j^\nu, J_{j+1}^\nu) > 3^{1-\nu}.$$

Sostituiamo allora V_k con una coppia di aperti disgiunti W_1 e W_2, tali che

$$W_1 \supset J_j^\nu\,, \quad W_2 \supset J_{j+1}^\nu\,, \qquad \mathrm{diam}(W_1) < 3^{-\nu} + \sigma, \quad \mathrm{diam}(W_2) < 3^{-\nu} + \sigma,$$

ove $\sigma > 0$ è scelto in modo che si abbia

$$(\mathrm{diam}(W_1))^d + (\mathrm{diam}(W_2))^d < (\mathrm{diam}(V_k))^d :$$

ciò è possibile poiché, scelto $\eta \in]0, \mathrm{diam}(V_k) - 3^{1-\nu}[$, si verifica facilmente che vale la relazione

$$(\mathrm{diam}(W_1))^d + (\mathrm{diam}(W_2))^d < 2(3^{-\nu} + \sigma)^d < (3^{1-\nu} + \eta)^d < (\mathrm{diam}(V_k))^d$$

pur di prendere $\sigma \in]0, 2^{-1/d}\eta[$.
In questo modo si rimpiazzano tutti gli aperti V_k che contengono più di un intervallo J_j^ν. Si ottiene così una famiglia $\{W_1, \ldots, W_M\}$ di aperti disgiunti, tali che

$$\sum_{h=1}^{M} (\mathrm{diam}(W_h))^d \leq \sum_{k=1}^{N} (\mathrm{diam}(V_k))^d \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{diam}(U_n))^d.$$

Inoltre, dato che ognuno dei W_h contiene esattamente uno dei J_j^ν, deve essere $M = 2^\nu$; pertanto

$$\sum_{h=1}^{2^\nu} (\mathrm{diam}(W_h))^d \geq \sum_{h=1}^{2^\nu} (\mathrm{diam}(J_j^\nu))^d = \sum_{h=1}^{2^\nu} 3^{-d\nu} = 2^\nu\, 3^{-d\nu} = 1.$$

Ciò prova che

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{diam}(U_n))^d \geq \sum_{h=1}^{2^\nu} (\mathrm{diam}(W_h))^d \geq 1$$

e quindi, come si è osservato, $H_d(C) \geq 1$. Pertanto $H_d(C) = 1$.

Osservazione 2.4.6 Si può dimostrare che per ogni $\lambda \in [0, N]$ esiste un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ la cui dimensione di Hausdorff è λ: il caso $N = 1$ è trattato nell'esercizio 2.4.6.

La misura H_N in $\mathbb{R}^N$

Dato un insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^N$, che relazione c'è fra la sua misura di Hausdorff H_N e la sua misura di Lebesgue m_N? Vedremo ora che le due quantità coincidono a meno di una costante moltiplicativa.

HN-mN **Teorema 2.4.7** *Esiste una costante γ_N tale che per ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ si ha*

$$H_N^*(E) = \gamma_N m_N^*(E).$$

Tale costante vale

$$\gamma_N = H_N(C_0) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^N \Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right),$$

ove $C_0 = [0,1]^N$ e Γ è la funzione di Eulero:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx, \qquad p > 0.$$

Dimostrazione Proveremo solo l'esistenza della costante γ_N, senza calcolarla esattamente: il conto preciso è laborioso e viene demandato all'esercizio 2.3.9 (nel caso $N = 1$ si rimanda invece all'esercizio 2.3.7).
Sia $C_0 = [0,1]^N$. Fissato $\delta > 0$ e scelto $n > \frac{\sqrt{N}}{\delta}$, possiamo ricoprire C_0 con n^N cubi della forma

$$\prod_{i=1}^N \left[\frac{r_i - 1}{n}, \frac{r_i}{n}\right], \qquad r_1, \dots, r_N \in \{1, 2, \dots n\}.$$

Dato che tali cubi hanno diametro $\frac{\sqrt{N}}{n} < \delta$, ricordando l'esercizio 2.3.4 otteniamo $H^*_{N,\delta}(C_0) \le (\sqrt{N})^N$ per ogni $\delta > 0$, e dunque

$$H_N(C_0) \le (\sqrt{N})^N.$$

Sia ora $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un arbitrario ricoprimento di C_0 con diam $U_n < \delta$: ciascun U_n può essere ricoperto da una palla di diametro pari a diam U_n, e quindi da un cubo C_n di lato diam U_n e con gli spigoli paralleli agli assi coordinati. Dato che

$$C_0 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \ ,$$

avremo

$$1 = m_N(C_0) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m_N(C_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\text{diam } U_n)^N,$$

ossia

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (\text{diam } U_n)^N \ge 1.$$

Per l'arbitrarietà del ricoprimento, concludiamo che $H_{N,\delta}(C_0) \ge 1$, e quindi

$$H_N(C_0) \ge 1.$$

In particolare, posto $\gamma_N = H_N(C_0)$, si ha

$$H_N(C_0) = \gamma_N = \gamma_N m_N(C_0) \in \left[1, (\sqrt{N})^N\right] \subset]0, \infty[.$$

Grazie al fatto che H_N e m_N sono invarianti per traslazioni ed omogenee di grado N rispetto alle omotetie, otteniamo anche

$$H_N(C) = \gamma_N m_N(C)$$

per ogni cubo C con gli spigoli paralleli agli assi coordinati di $\mathbb{R}^N$.
Adesso sia A un aperto di $\mathbb{R}^N$: esiste un ricoprimento di A fatto di cubi disgiunti C_j, ognuno dei quali è del tipo

$$\prod_{i=1}^{N} \left[\frac{r_i - 1}{2^m}, \frac{r_i}{2^m}\right[\qquad (r_1, \ldots, r_N \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}).$$

Un modo di costruire tale ricoprimento è descritto nell'esercizio 2.4.7. Si ha allora, grazie alla numerabile additività di H_N e m_N,

$$H_N(A) = \sum_{j \in \mathbb{N}} H_N(C_j) = \gamma_N \sum_{j \in \mathbb{N}} m_N(C_j) = \gamma_N m_N(A)$$

per ogni aperto A di $\mathbb{R}^N$.
Sia ora B un Boreliano di $\mathbb{R}^N$ della forma

$$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\,, \qquad A_n \text{ aperti},$$

ove non è restrittivo supporre che $A_n \supseteq A_{n+1}$. Se $m_N(B) < +\infty$, utilizzando la definizione di misura esterna, è chiaro che possiamo scrivere B come intersezione numerabile di aperti A'_n di misura m_N *finita*; di conseguenza, per monotonia si ha $H_N(B) \leq H_N(A'_n) = \gamma_N m_N(A'_n) < \infty$. La proposizione 2.1.5 ci autorizza allora a concludere che

$$H_N(B) = \lim_{n \to \infty} H_N(A'_n) = \gamma_N \lim_{n \to \infty} m_N(A'_n) = \gamma_N m_N(B).$$

Se invece $m_N(B) = \infty$, posto $B_m = B \cap]-m, m[^N$, i B_m verificano la relazione precedente e quindi, al limite per $m \to \infty$, si ottiene l'uguaglianza

$$H_N(B) = \gamma_N m_N(B)$$

per ogni Boreliano B che sia intersezione numerabile di aperti.
Infine, sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$: per l'esercizio 2.4.8, si possono trovare due Boreliani B_1 e B_2 contenenti E, entrambi intersezione numerabile di aperti, tali che

$$H_N(B_1) = H^*_N(E), \qquad m_N(B_2) = m^*_N(E),$$

da cui, posto $B = B_1 \cap B_2$, B è un Boreliano contenente E che è ancora intersezione numerabile di aperti, e per il quale risulta

$$H^*_N(E) = H_N(B) = \gamma_N m_N(B) = \gamma_N m^*_N(E).$$

Ciò prova la tesi. $\square$

mispalla **Osservazioni 2.4.8 (1)** Si può dimostrare (esercizio 2.4.9) che

$$\gamma_N = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^N \Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right) = \frac{1}{m_N(B_0)},$$

ove B_0 è la palla di $\mathbb{R}^N$ di diametro unitario. Dunque il teorema precedente afferma che la differenza fra le misure N-dimensionali di Hausdorff e di Lebesgue è che la prima assegna misura 1 alla palla di diametro unitario, mentre la seconda assegna misura 1 al cubo di lato unitario.

(2) Più in generale, si può provare che per ogni intero k con $1 \le k \le N$ vale la relazione

$$H_k^*(E) = \gamma_k\, m_k^*(E)$$

per ogni sottoinsieme E di $\mathbb{R}^k$. La dimostrazione richiede però argomenti piuttosto fini. In questo ambito, nel paragrafo 6.7 si dimostra che per ogni varietà k-dimensionale $V = f(U)$, ove $f : U \to \mathbb{R}^N$ è un'applicazione di classe C^1 con $Df(x)$ di rango massimo k e $U \subset \mathbb{R}^k$ è la chiusura di un aperto limitato, si ha

$$H_k(V) = \gamma_k\, v_k(V),$$

essendo $v_k(V) = \int_U \sqrt{DG(x)^t \cdot DG(x)}\, dx$ (teorema 6.7.9); il caso $k = 1$ è trattato nell'esercizio 2.4.1. Per queste ragioni, molti studiosi di teoria geometrica della misura usano "normalizzare" la misura H_p, $0 < p \le N$, dividendola per γ_p.

Esercizi 2.4

Hau_curve 1. Sia $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una curva semplice di classe C^1 con sostegno Γ. Si provi che $\Gamma \in \mathcal{H}_1$ e che $H_1(\Gamma) = \ell(\Gamma)$.
[**Traccia:** si osservi anzitutto che Γ è chiuso, quindi $\Gamma \in \mathcal{H}_1$. Per provare $\le$, fissato $\delta > 0$ si mostri che se $\sigma : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ è una suddivisione di $[a,b]$ sufficientemente fine, allora, per ogni i, la palla B_i di centro $\frac{\varphi(t_i)+\varphi(t_{i-1})}{2}$ e diametro $\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi(\tau)|_N\, d\tau$ contiene $\varphi([t_{i-1}, t_i])$. Se ne deduca che se δ è piccolo si ha $H_{1,\delta}(\Gamma) \le (1+\varepsilon)\ell(\Gamma)$. Per provare $\ge$, fissato $\varepsilon > 0$ si determini $\delta > 0$ ed un ricoprimento $\{U_n\}$ di Γ con diam $U_n < \delta$, tale che $\sum_n \text{diam } U_n < H_1(\Gamma) + \varepsilon$. Si estragga un opportuno sottoricoprimento finito $\{U_{n_1}, \ldots, U_{n_m}\}$ e si costruisca una suddivisione $\sigma : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ tale che $\sum_{i=1}^m |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|_N \le \sum_{i=1}^m \text{diam } U_{n_i}$; si concluda, utilizzando la continuità di φ', che se δ è sufficientemente piccolo si ha $\ell(\Gamma) \le H_1(\Gamma) + 2\varepsilon$.]

dimHsup 2. Si provi che per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ si ha

$$\dim_H(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } H_p^*(E) = 0 \ \ \forall p > 0, \\ \sup\{p > 0 : H_p^*(E) = +\infty\} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

dimHU 3. Si dimostri che se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, allora

$$\dim_H\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \dim_H(E_n).$$

haus_holder 4. Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ una funzione α-Hölderiana, ossia tale che

$$|f(x) - f(x')|_m \leq K|x - x'|_N^\alpha \qquad \forall x, x' \in \mathbb{R}^N$$

con $K \geq 0$ e $\alpha \in]0, 1]$ costanti fissate. Si provi che se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ allora

$$\dim_H(f(E)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(E).$$

Se ne deduca che se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ è bi-Lipschitziana, ossia

$$K_1|x - x'|_N \leq |f(x) - f(x')|_N \leq K_2|x - x'|_N \qquad \forall x, x' \in \mathbb{R}^N,$$

allora per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ si ha $\dim_H(f(E)) = \dim_H(E)$.

dimHts 5. Si provi che se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è tale che $\dim_H(E) < 1$, allora E è totalmente sconnesso. [**Traccia:** fissati $x, x' \in E$, si consideri la funzione $f(z) = |z - x|_N$ e si osservi che, per l'esercizio 2.4.4, $\dim_H(f(E)) < 1$; si utilizzi infine il fatto che $f(E)^c$ è denso in $\mathbb{R}$ per costruire due diverse componenti connesse che contengano rispettivamente x e x'.]

Cantorgen 6. Fissato $s \in]0, 1[$, si consideri l'insieme Γ_s costruito, analogamente al caso dell'insieme di Cantor descritto nel paragrafo 1.6, nel modo seguente: al primo passo si toglie da $[0, 1]$ un intervallo centrale di ampiezza s; nei passi successivi si toglie da ciascun intervallino residuo di lunghezza ℓ la parte centrale di ampiezza pari a $s\ell$. Si provi che $m(\Gamma_s) = 0$ e che

$$\dim_H(\Gamma_s) = \frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-s}}.$$

[**Traccia:** adattare l'argomentazione relativa all'esempio 2.4.5.]

cudiad 7. Sia $\mathcal{C}$ la famiglia dei "cubi diadici", ossia degli insiemi della forma

$$C_k^{\mathbf{r}} = \prod_{i=1}^{N} \left[\frac{r_i - 1}{2^m}, \frac{r_i}{2^m} \right[, \qquad \mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_N) \in \mathbb{Z}^N,\ m \in \mathbb{N}.$$

(i) Si provi che se $C_k^{\mathbf{r}} \cap C_h^{\mathbf{r}'} \neq \emptyset$ con $k \geq h$, allora $C_k^{\mathbf{r}} \subseteq C_h^{\mathbf{r}'}$;

(ii) Si provi che se $A \subseteq \mathbb{R}^N$ è un aperto, allora esiste $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ tale che $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

[**Traccia:** per (ii), detta $\mathcal{C}$ la famiglia di tali cubi, si provi che ogni $x \in A$ è contenuto in un cubo $C \in \mathcal{C}$, il quale è massimale, nel senso che non c'è nessun altro cubo $C' \in \mathcal{C}$ tale che $C \subset C' \subseteq A$; se ne deduca che tutti i cubi massimali per qualche punto di A che sono fra loro disgiunti hanno per unione A.]

regHau 8. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Si provi che:

(i) esiste un Boreliano B, intersezione numerabile di aperti, che contiene E ed è tale che $m_N^*(E) = m_N(B)$;

(ii) esiste un Boreliano B, intersezione numerabile di aperti, che contiene E ed è tale che $H_N^*(E) = H_N(B)$.

palleHL

9. Detta α_n la misura della palla unitaria di $\mathbb{R}^n$, si verifichi che

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = \pi, \quad \alpha_n = \frac{2\pi}{n}\,\alpha_{n-2} \quad \forall n \geq 3,$$

e se ne ricavi la formula dell'osservazione 2.4.8.

Soluzioni degli esercizi del capitolo 2

sol02

Esercizi del paragrafo 2.1

Esercizio 2.1.1 Proviamo che $\mathcal{F}_0$ è una σ-algebra. Anzitutto, $X \in \mathcal{F}_0$ perché $X = X \cup \emptyset$ e $\emptyset$ è sottoinsieme di se stesso, con $\mu(\emptyset) = 0$. Poi, se $E_n = A_n \cup B_n \in \mathcal{F}_0$, $n \in \mathbb{N}$, allora

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right] \cup \left[\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\right] \in \mathcal{F}_0;$$

infatti $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, e quest'ultimo insieme ha misura nulla. Inoltre, se $E = A \cup B \in \mathcal{F}_0$, con $B \subseteq B_0$, $B_0 \in \mathcal{F}$ e $\mu(B_0) = 0$, allora

$$E^c = A^c \cap B^c = (A^c \cap B_0^c) \cup \big(A^c \cap (B^c \setminus B_0^c)\big),$$

e risulta $A^c \cap B_0^c \in \mathcal{F}$ e $A^c \cap (B^c \setminus B_0^c) = A^c \cap B^c \cap B_0 \subseteq B_0$: dunque $E^c \in \mathcal{F}_0$ e pertanto $\mathcal{F}_0$ è una σ-algebra. Inoltre, se $E \in \mathcal{F}$, allora $E = E \cup \emptyset \in \mathcal{F}_0$, ossia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_0$. Si verifica subito che la funzione μ_0 è ben definita su $\mathcal{F}_0$ ed è una misura. Essa è completa: infatti, se E è un sottoinsieme di X tale che $E \subseteq F$, con $F = A \cup B \in \mathcal{F}$ e $\mu_0(F) = \mu(A) = \mu(B) = 0$, allora si ha $E = \emptyset \cup E$, ove $\emptyset \in \mathcal{F}$ e $E \subseteq F = A \cup B \in \mathcal{F}$ con $\mu(A \cup B) = 0$. Dunque $E \in \mathcal{F}_0$ e $\mu_0(E) = \mu(\emptyset) = 0$. Infine, se $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è σ-finito, si ha $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con gli $X_n \in \mathcal{F}$ disgiunti e di misura finita. Dato che $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_0$, e $\mu_0(X_n) = \mu(X_n) < \infty$, anche $(X, \mathcal{F}_0, \mu_0)$ è σ-finito.

Esercizio 2.1.2 Proviamo che $\mathcal{F}$ è una σ-algebra. Si ha $X \in \mathcal{F}$, dato che $X^c = \emptyset$ è numerabile. Se $E \in \mathcal{F}$, allora E, oppure E^c, è numerabile, e per E^c vale la stessa cosa: dunque $E^c \in \mathcal{F}$. Infine, se $\{E_n\} \subset \mathcal{F}$, si ha $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ numerabile se tutti gli E_n lo sono, mentre $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ è più che numerabile se almeno uno degli E_n lo è: dunque $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{F}$.
Proviamo che μ è una misura: $\mu(\emptyset) = 0$, essendo $\emptyset$ numerabile; se $\{E_n\} \subset \mathcal{F}$, e gli E_n sono disgiunti, allora nel caso in cui tutti gli E_n siano numerabili si ha

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n),$$

mentre se uno degli E_n è più che numerabile, ad esempio E_0, allora per ogni $k > 0$ si ha $E_k \subseteq E_0^c$, quindi E_k è numerabile, da cui

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = 1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Dunque μ è una misura, ovviamente finita, e quindi $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è uno spazio misurato finito. Inoltre, se $E \in \mathcal{F}$ ha misura 0, allora E è numerabile: dunque tutti i sottoinsiemi di E sono numerabili e pertanto

appartengono a $\mathcal{F}$. Ne segue che $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è uno spazio misurato completo.

Esercizio 2.1.3 Sia $\mu_n \leq \mu_{n+1}$. È chiaro che

$$\mu(\emptyset) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(\emptyset) = 0.$$

Sia poi $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ una successione di insiemi disgiunti: posto $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$, per ogni $m \in \mathbb{N}$ risulta

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{m} E_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_n\left(\bigcup_{k=0}^{m} E_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \mu_n(E_k) = \sum_{k=0}^{m} \mu(E_k).$$

Ne segue, essendo μ monotona in quanto limite di funzioni monotone,

$$\sum_{k=0}^{m} \mu(E_k) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{m} E_k\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right),$$

e per $m \to \infty$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right).$$

D'altra parte, essendo $\mu_n \leq \mu$,

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_n\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mu_n(E_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_k).$$

Ciò prova che μ è una misura.
Sia ora $\mu_n \geq \mu_{n+1}$. Si ha, ovviamente, $\mu(\emptyset) \leq \mu_n(\emptyset) = 0$. Poi, se $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ è una successione di insiemi disgiunti e se $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$, allora, fissato $m \in \mathbb{N}^+$ si ha per ogni $n \in \mathbb{N}^+$

$$\mu_n(E) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_n(E_k) = \sum_{k=0}^{m} \mu_n(E_k) + \mu_n\left(\bigcup_{k=m+1}^{\infty} E_k\right).$$

Per $n \to \infty$ ricaviamo

$$\mu(E) = \sum_{k=0}^{m} \mu(E_k) + \mu\left(\bigcup_{k=m+1}^{\infty} E_k\right).$$

A secondo membro, il secondo termine è decrescente rispetto a m, quindi ha limite. D'altra parte, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$,

$$\mu\left(\bigcup_{k=m+1}^{\infty} E_k\right) \leq \mu_n\left(\bigcup_{k=m+1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu_n(E_k),$$

e per $m \to \infty$ si ottiene che tale limite vale 0. Pertanto

$$\mu(E) = \lim_{m\to\infty} \left[\sum_{k=0}^{m} \mu(E_k) + \mu\left(\bigcup_{k=m+1}^{\infty} E_k\right)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_k) + 0.$$

Ciò prova, anche in questo caso, che μ è una misura.

Esercizio 2.1.4 Si ha $\emptyset \in \mathcal{F}$ poiché $\emptyset = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \emptyset$ con $\emptyset \in \mathcal{F}_n$. Sia ora $\{E^k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$: sarà

$$E^k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^k\,, \quad E_n^k \in \mathcal{F}_n\,, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Allora chiaramente

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E^k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_n^k \in \mathcal{F},$$

dato che $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_n^k \in \mathcal{F}_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infine sia $E \in \mathcal{F}$, $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ con $E_n \in \mathcal{F}_n$: allora

$$E^c = X \setminus E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X_n \setminus E) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(X_n \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_m \right),$$

ed essendo gli X_n, al pari degli E_n, tutti disgiunti, con $E_n \subseteq X_n$, si ottiene

$$E^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X_n \setminus E_n) \in \mathcal{F},$$

visto che $X_n \setminus E_n \in \mathcal{F}_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2.1.5 Si ha $\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$; ma $\mu(B \setminus A) \leq \mu(C \setminus A) = \mu(C) - \mu(A) = 0$, da cui $\mu(B) = \mu(A \cap B)$.

Esercizio 2.1.6 Sia $A \in \mathcal{F}$ con $\mu(A) = \infty$. Poniamo

$$\alpha = \sup\{\mu(B) :\ B \in \mathcal{F},\ B \subseteq A,\ \mu(B) < \infty\}.$$

Esiste una successione $\{B_n\} \subseteq \mathcal{F}$ tale che $B_n \subseteq B_{n+1}$ e $\mu(B_n) \to \alpha$ per $n \to \infty$. Posto $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, risulta $C \in \mathcal{F}$, $C \subseteq A$, $\mu(C) = \alpha$ (proposizione 1.7.2). Se fosse $\alpha < \infty$, allora avremmo $\mu(C) + \mu(A \setminus C) = \mu(A) = \infty$, da cui $\mu(A \setminus C) = \infty$. Per ipotesi, esisterebbe $D \in \mathcal{F}$, $D \subseteq A \setminus C$, tale che $0 < \mu(D) < \infty$. Dunque l'insieme $C \cup D$ verificherebbe $C \cup D \in \mathcal{F}$, $C \cup D \subseteq A$, $C \cap D = \emptyset$ e quindi

$$\alpha = \mu(C) < \mu(C) + \mu(D) = \mu(C \cup D),$$

il che contraddirebbe la definizione di α. Pertanto $\alpha = \infty$ e l'insieme C verifica la tesi.

Esercizio 2.1.7 (i) Poiché $\mu(E\Delta E) = \mu(\emptyset) = 0$, si ha $E \simeq E$. Essendo $\mu(E\Delta F) = \mu(F\Delta E)$, se $E \simeq F$ allora $F \simeq E$. Sia ora $\mu(E\Delta F) = 0 = \mu(F\Delta G)$ e proviamo che $\mu(E\Delta G) = 0$. Risulta

$$E \setminus G = \big((E \setminus F) \setminus G\big) \cup \big((E \cap F) \setminus G\big) \subseteq (E \setminus F) \cup (F \setminus G),$$

e similmente

$$G \setminus E = \big((G \setminus F) \setminus E\big) \cup \big((G \cap F) \setminus E\big) \subseteq (G \setminus F) \cup (F \setminus E);$$

ne segue $\mu(E \setminus G) = \mu(G \setminus E) = 0$ e quindi $E \simeq G$. Pertanto $\simeq$ è una relazione di equivalenza.

(ii) Per maggior precisione, indichiamo con E^0, F^0, G^0 tre elementi dello spazio quoziente Λ e con $E, F, G \in \mathcal{F}$ i rappresentanti (arbitrariamente scelti) delle tre classi. Si ha $\rho(E^0, E^0) = \mu(E\Delta E) = 0$ e, viceversa, se $\rho(E^0, F^0) = 0$ allora $\mu(E\Delta F) = 0$ e quindi $E \simeq F$, vale a dire $E^0 = F^0$. Ciò prova la riflessività. Si ha poi $\rho(E^0, F^0) = \mu(E\Delta F) = \mu(F\Delta E) = \rho(F^0, E^0)$ e ciò mostra la simmetria. Infine, dalle relazioni

$$E \setminus F \subseteq (E \setminus G) \cup (G \setminus F), \qquad F \setminus E \subseteq (F \setminus G) \cup (G \setminus E)$$

segue che $\mu(E\Delta F) \leq \mu(E\Delta G) + \mu(G\Delta F)$: quindi $\rho(E^0, F^0) \leq \rho(E^0, G^0) + \rho(G^0, F^0)$, ossia vale la transitività. Dunque ρ è una distanza su Λ.

(iii) Sia $\{E_n^0\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Lambda$ una successione di Cauchy rispetto a ρ: allora esiste una sottosuccessione $\{E_{n_k}^0\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $\rho(E_{n_k}^0, E_{n_h}^0) < 2^{-k}$ per ogni $h > k$. Poniamo

$$E = \limsup_{k\to\infty} E_{n_k} = \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} E_{n_k} \in \mathcal{F}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_{n_k}\right) &= \mu\left(E_{n_0} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_{n_k} \setminus E_{n_{k-1}})\right) \leq \\ &\leq \mu(E_{n_0}) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{n_k}\Delta E_{n_{k-1}}) \leq \mu(E_{n_0}) + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} < \infty, \end{aligned}$$

e pertanto, per ogni $h \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mu(E \setminus E_{n_h}) &\leq \lim_{m\to\infty} \mu\left(\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} E_{n_k}\right) \setminus E_{n_h}\right) \leq \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \mu\left(\left[E_{n_m} \cup \bigcup_{k=m+1}^{\infty} (E_{n_k} \setminus E_{n_{k-1}})\right] \setminus E_{n_h}\right) \leq \\
&\leq \limsup_{m\to\infty} \left[\mu(E_{n_m} \setminus E_{n_h}) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu(E_{n_k} \setminus E_{n_{k-1}})\right] < \\
&< 2^{-h} + \lim_{m\to\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{-k+1} = 2^{-h};
\end{aligned}$$

analogamente

$$\begin{aligned}
\mu(E_{n_h} \setminus E) &= \mu\left(E_{n_h} \setminus \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} E_{n_k}\right) = \mu\left(\bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} (E_{n_h} \setminus E_{n_k})\right) = \\
&= \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcap_{k=m}^{\infty} (E_{n_h} \setminus E_{n_k})\right) \leq \liminf_{m\to\infty} \mu(E_{n_h} \setminus E_{n_m}) \leq 2^{-h}.
\end{aligned}$$

Se ne deduce che $\rho(E^0, E^0_{n_h}) \leq 2^{-h+1}$; di conseguenza, fissato $\varepsilon > 0$ si ha per $m > m_\varepsilon$, avendo scelto h in modo che $2^{-h+1} < \varepsilon$,

$$\rho(E^0, E^0_m) \leq \rho(E^0, E^0_{n_h}) + \rho(E^0_{n_h}, E^0_m) < 2^{-h+1} + \varepsilon < 2\varepsilon \qquad \forall m \geq m_\varepsilon.$$

Ciò prova che $\rho(E^0, E^0_m) \to 0$ per $m \to \infty$, e quindi Λ è uno spazio metrico completo.

Esercizio 2.1.8 Ciascun E_n è costituito dal disco umitario D di $\mathbb{C}$, privato del settore aperto che corrisponde all'arco di ampiezza $\frac{\pi}{n+1}$, delimitato dai punti e^{is_n} e $e^{is_{n+1}}$. Dato che la serie armonica diverge, questi settori si rimpiccioliscono, girando però infinite volte attorno all'origine: ne segue che $\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n = D$. Perciò

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} D = D.$$

Per lo stesso motivo, $\bigcap_{n=m}^{\infty} E_n = \emptyset$, e dunque

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \emptyset = \emptyset.$$

Esercizio 2.1.9 Grazie all'invarianza per traslazioni, si ha $\mu([x, x+1]) = \lambda$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per l'additività, $\mu([x, x+k]) = k\lambda$ e, di conseguenza, $\mu([x, x+\frac{1}{k}]) = \frac{\lambda}{k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$. Ne segue $\mu([x, x+q]) = \lambda q$ per ogni $q \in \mathbb{Q}^+$. Siano ora $x, y \in \mathbb{R}$ con $y > 0$: se $\{q_k\} \subset \mathbb{Q}$ è una successione crescente tale che $q_k \to y$, si ha $\mu([x, x+y[\,) = \lim_{k\to\infty} \mu([x, x+q_k]) = \lim_{k\to\infty} \lambda q_k = \lambda y$. Se invece $\{q_k\}$ è decrescente e $q_k \to y$, si ottiene $\mu([x, x+y]\,) = \lim_{k\to\infty} \mu([x, x+q_k]) = \lim_{k\to\infty} \lambda q_k = \lambda y$, da cui $\mu([x, x+y[\,) = \mu([x, x+y])$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $y > 0$. Se ne deduce

$$\mu([a,b]) = \mu([a,b[\,) = \mu(\,]a,b]) = \mu(\,]a,b[\,) = \lambda(b-a) \qquad \forall [a,b] \subset \mathbb{R}.$$

Ne segue $\mu(A) = \lambda m(A)$ per ogni aperto, $\mu(B) = \lambda m(B)$ per ogni Boreliano B; infine, ricordando la proposizione 1.7.3,

$$\begin{aligned}
\lambda \sup\{m(D) :\ D \in \mathcal{B},\ D \subseteq E\} &= \sup\{\mu(D) :\ D \in \mathcal{B},\ D \subseteq E\} \leq \mu(E) \leq \\
&\leq \inf\{\mu(B) :\ B \in \mathcal{B},\ B \supseteq E\} = \lambda \inf\{m(B) :\ B \in \mathcal{B},\ B \supseteq E\},
\end{aligned}$$

ossia $\mu(E) = \lambda m(E)$ per ogni $E \in \mathcal{M}$.

Esercizio 2.1.10 Supponiamo che μ sia una misura su $\mathbb{R}$ che soddisfa le quattro proprietà. Per l'esercizio 2.1.9, scegliendo $\lambda = 1$, si ha $\mu(E) = m(E)$ per ogni $E \in \mathcal{M}$. Adesso, utilizzando l'argomentazione del paragrafo 1.8, consideriamo l'insieme di Vitali $V \notin \mathcal{M}$: per ogni $p, q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, i traslati $V + p$, $V + q$ sono disgiunti e $\mu(V) = \mu(V + q)$ per ogni $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$. D'altra parte

$$[0, 1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (V + q) \subset [-1, 2],$$

da cui la relazione

$$1 \leq \mu \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (V + q) \right) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mu(V) \leq 3$$

che è assurda, essendo

$$\sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mu(V) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu(V) = 0 \\ \infty & \text{se } \mu(V) > 0. \end{cases}$$

Esercizio 2.1.11 Per μ_1 si ha

$$\mu_1([a, b]) = \int_a^b \frac{1}{x} \, \chi_{[1,\infty[}(x) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } a < b \leq 1 \\ \int_1^b \frac{1}{x} \, dx & \text{se } a < 1 < b \\ \int_a^b \frac{1}{x} \, dx & \text{se } 1 \leq a < b. \end{cases}$$

Dunque $\mu_1([a, b]) = \log \frac{b \vee 1}{a \vee 1}$.
Quanto a μ_2, si ha facilmente $\mu_2([a, b]) = \int_a^b \sin x \, dx$.
Dato che f_3 è costante q.o., con salti di ampiezza 1 nei punti $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$\mu_3([a, b]) = \sum_{k \in \mathbb{N} \cap [a,b]} 1 = \#([a, b] \cap \mathbb{N}),$$

ove $\#A$ è la cardinalità di A.
La funzione continua f_4 sale con pendenza 1 dal valore n al valore $n + 1$ negli intervalli $]2n, 2n + 1]$, mentre è costante negli intervalli $]2n + 1, 2n + 2]$: dunque

$$\mu_4([a, b]) = m \left([a, b] \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} [2n, 2n + 1] \right).$$

Infine, f_5 è somma della funzione identità più la funzione che salta di 1 nei punti $k \in \mathbb{Z}$ e vale costantemente k su $[k, k + 1[$. Pertanto

$$\mu_5([a, b]) = m([a, b] + \#([a, b] \cap \mathbb{Z}).$$

Esercizio 2.1.12 Poniamo

$$\mathcal{R}_1 = \{B \in \mathcal{F}, \ \mu(B) > 0\}, \qquad \alpha_1 = \min\{\mu(B) : \ B \in \mathcal{R}_1\};$$

si osservi che $\mathcal{R}_1$ non è vuota poiché contiene l'insieme X. Sia $E_1 \in \mathcal{R}_1$ tale che $\mu(E_1) = \alpha_1$. Poi, siano

$$\mathcal{R}_2 = \{B \in \mathcal{F}, \ B \subseteq E_1^c \, , \mu(B) > \alpha_1\}, \qquad \alpha_2 = \min\{\mu(B) : \ B \in \mathcal{R}_2\}, \qquad \mu(E_2) = \alpha_2;$$

allora, induttivamente, supponiamo di aver definito per $1 \leq i \leq k$

$$\mathcal{R}_i = \left\{ B \in \mathcal{F}, \ B \subseteq \left[\bigcup_{h=1}^{i} E_h \right]^c \, , \ \mu(B) > \alpha_{i-1} \right\}, \qquad \alpha_i = \min\{\mu(B) : \ B \in \mathcal{R}_i\}, \qquad \mu(E_i) = \alpha_i.$$

Poniamo

$$\mathcal{R}_{k+1} = \left\{ B \in \mathcal{F},\ B \subseteq \left[\bigcup_{h=1}^{k} E_h \right]^c ,\ \mu(B) > \alpha_k \right\}, \qquad \alpha_{k+1} = \min\{\mu(B) :\ B \in \mathcal{R}_{k+1}\},$$

ammesso che questa classe non sia vuota: in tal caso, sia $E_{k+1} \in \mathcal{R}_{k+1}$ tale che $\mu(E_{k+1}) = \alpha_{k+1}$. Dato che μ assume solo un numero finito di valori, esiste certamente $N \in \mathbb{N}$ tale che la classe $\mathcal{R}_{N+1}$ è vuota. Definiamo allora $E_0 = \left[\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right]^c$: se fosse $\mu(E_0) > 0$, allora $\mu(E_0) \geq \alpha_1$, poiché E_0 appartiene a $\mathcal{R}_1$, e analogamente $\mu(E_0) \geq \alpha_i$, $1 \leq I \leq N$, poiché E_0 appartiene a $\mathcal{R}_i$, $2 \leq i \leq N+1$; ma questo è assurdo perché $\mathcal{R}_{N+1}$ è vuota. Pertanto deve essere $\mu(E_0) = 0 = \alpha_0$.
Infine, sia $A \in \mathcal{F}$ con $A \subseteq E_i$: allora si ha $0 \leq \mu(A) \leq \alpha_i$ e inoltre A è disgiunto da $E_1, \ldots, E_{i-1}$. Dunque, per definizione, A appartiene a $\mathcal{R}_i$: quindi, o $\mu(A) = 0$ oppure, se $\mu(A) > 0$, deve essere $\mu(A) \geq \alpha_i$, perché α_i è il minimo valore assunto da μ sugli elementi di $\mathcal{R}_j$. Pertanto se $\mu(A) > 0$ si ha $\mu(A) = \alpha_i$.

Esercizio 2.1.13 (i) Sia A un aperto di X. La proprietà (b) è banale. Proviamo la (a): essendo $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, con gli F_n compatti e $F_n \subseteq F_{n+1}$, si ha

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) \leq \sup\{\mu(F) :\ F \subseteq A,\ F \text{ compatto}\} \leq \mu(A).$$

(ii) Supponiamo che X sia compatto (dunque $\mu(X) < \infty$). Per provare che i Boreliani di X verificano (a) e (b), mostriamo che

$$\mathcal{R} = \{E \in \mathcal{B} :\ E \text{ verifica (a) e (b)}\}$$

è una σ-algebra: dato che, per (i), gli aperti appartengono a $\mathcal{R}$, ciò implicherà che $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{B}$ e dunque la tesi di (ii).
Proviamo che se $E \in \mathcal{R}$ allora $E^c \in \mathcal{R}$. Se $E \in \mathcal{R}$, fissato $\varepsilon > 0$ esistono un compatto F ed un aperto U tali che $F \subseteq E \subseteq U$ e $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$. Si ha F^c aperto, U^c compatto, $U^c \subseteq E^c \subseteq F^c$ e

$$\mu(F^c \setminus U^c) = \mu(F^c \cap U) = \mu(U \setminus F) < \varepsilon,$$

da cui $E^c \in \mathcal{R}$. In particolare, essendo $\emptyset$ aperto, si ha $\emptyset \in \mathcal{R}$ per (i), da cui $X \in \mathcal{R}$.
Proviamo che se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$, allora $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{R}$. A questo scopo conviene prima far vedere che se $E_1, E_2 \in \mathcal{R}$, allora $E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{R}$: infatti, siano F_1, F_2 compatti e U_1, U_2 aperti tali che $F_1 \subseteq E_1 \subseteq U_1$, $F_2 \subseteq E_2 \subseteq U_2$ e $\mu(U_1 \setminus F_1) < \varepsilon$, $\mu(U_2 \setminus F_2) < \varepsilon$; allora $F_2 \setminus U_1 \subseteq E_2 \setminus E_1 \subseteq U_2 \setminus F_1$, poi $U_2 \setminus F_1$ è aperto, $F_2 \setminus U_1$ è compatto e

$$\begin{aligned}
\mu\big((U_2 \setminus F_1) \setminus (F_2 \setminus U_1)\big) &= \mu\big((U_2 \cap F_1^c) \cap (F_2 \cap U_1^c)^c\big) = \mu\big((U_2 \cap F_1^c) \cap (F_2^c \cup U_1)\big) = \\
&= \mu\big((U_2 \cap F_1^c \cap F_2^c) \cup (U_2 \cap F_1^c \cap U_1)\big) = \\
&= \mu\big(U_2 \cap (F_1 \cup F_2)^c\big) + \mu\big((U_2 \cap U_1) \setminus F_1\big) = \\
&= \mu\big(U_2 \setminus (F_1 \cup F_2)\big) + \mu\big((U_2 \cap U_1) \setminus F_1\big) \leq \mu(U_2 \setminus F_2) + \mu(U_1 \setminus F_1) < 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dunque $E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{R}$. Ciò premesso, sia $\{E_n\} \subset \mathcal{R}$ e sia $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Ponendo

$$E'_0 = E_0, \qquad E'_{n+1} = E_{n+1} \setminus \bigcup_{k=0}^{n} E'_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

gli E'_n sono tutti disgiunti, risulta $E = \bigcup_{n\in n\mathbb{N}} E'_n$ e da quanto sopra detto segue facilmente, per induzione, che $E'_n \in \mathcal{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Perciò, fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono F_n compatto e U_n aperto tali che $F_n \subset E'_n \subseteq U_n$ e $\mu(U_n \setminus F_n) < \varepsilon\, 2^{-n}$. L'insieme $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ è aperto, contiene E e

$$\mu(U \setminus E) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (U_n \setminus E)\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n \setminus E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n \setminus F_n) < 2\varepsilon;$$

dunque E verifica la proprietà (b). Osserviamo adesso che gli F_n sono disgiunti; inoltre, dato $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\mu\left(E \setminus \bigcup_{k=0}^{\nu} E'_k\right) < \varepsilon$. Pertanto

$$\mu(E) \leq \sum_{k=0}^{\nu} \mu(E'_k) + \varepsilon \leq \sum_{k=0}^{\nu} \mu(F_k) + 2\varepsilon = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\nu} F_k\right) + 2\varepsilon.$$

Dato che l'insieme $\bigcup_{k=0}^{\nu} F_k$ è compatto, si conclude che E verifica la proprietà (a) e quindi appartiene a $\mathcal{R}$. Pertanto $\mathcal{R}$ è una σ-algebra e, per quanto osservato in precedenza, (ii) è provata.

(iii) Dato che X è aperto, si ha $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con gli X_n compatti e $X_n \subseteq X_{n+1}$. Sia $B \in \mathcal{B}$: allora $B \cap X_n$, essendo un Boreliano incluso nel compatto X_n, per (ii) verifica (b), ossia, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un aperto $U_n \subseteq X_n$ tale che $B \cap X_n \subseteq U_n$ e $\mu\big(U_n \setminus (B \cap X_n)\big) < \varepsilon\, 2^{-n}$. Quindi, posto $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, U è aperto, $B \subseteq U$ e

$$\mu(U \setminus B) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(U_n \setminus (B \cap X_n)\big)\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n \setminus (B \cap X_n)) < 2\varepsilon.$$

Dunque B verifica (a).

(iv) Supponiamo $\mu(X) < \infty$. Sia

$$\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{B} :\ E \text{ verifica (b)}\} :$$

se proviamo che $\mathcal{A}$ è una σ-algebra, allora $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$ (dato che, per (i), $\mathcal{A}$ contiene gli aperti), e quindi i Boreliani verificano (b).

Dato che $\emptyset$ è aperto, si ha $\emptyset \in \mathcal{A}$. Proviamo che $\mathcal{A}$ è chiusa per passaggio al complementare. Sia $E \in \mathcal{A}$: per E, oltre a (b), vale (a) in virtù di (iii); quindi, dato $\varepsilon > 0$, esiste F compatto tale che $F \subseteq E$ e $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$. Ne segue F^c aperto, $E^c \subseteq F^c$,

$$\mu(F^c \setminus E^c) = \mu(F^c \cap E) = \mu(E \setminus F) < \varepsilon,$$

e dunque E^c verifica (b).

Sia ora $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ con $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$, e proviamo che $E \in \mathcal{A}$. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un aperto U_n tale che $U_n \supseteq E_n$ e $\mu(U_n \setminus E_n) < \varepsilon\, 2^{-n}$. Allora l'aperto $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ contiene E, e verifica

$$\mu(U \setminus E) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (U_n \setminus E)\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (U_n \setminus E_n)\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon.$$

Dunque $E \in \mathcal{A}$ e di conseguenza, per quanto osservato in precedenza, si ha la tesi di (iv).

(v) Sappiamo che X è unione numerabile di compatti K_n, con $K_n \subseteq K_{n+1}$; in particolare, $\mu(K_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ogni punto $x \in K_n$ ha un intorno compatto F_x, poiché X è localmente compatto; ogni F_x conterrà un aperto A_x tale che $x \in A_x$. Si noti che $\mu(A_x) \leq \mu(F_x) < \infty$. Dato che $\{A_x\}_{x\in K_n}$ è un ricoprimento del compatto K_n, esiste un sottoricoprimento finito $\{A_{n,j}\}_{1\leq j\leq m_n}$ di K_n: ne segue che la famiglia $\{A_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N};\, 1\leq j\leq m_n}$ è un ricoprimento numerabile di X costituito da aperti. Ordinando questi aperti come una famiglia $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, e rimpiazzando A_m con $A'_m = \bigcup_{h=0}^{m} A_h$, la famiglia di aperti $\{A'_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ è crescente ed ha per unione X: ciò prova (v).

(vi) Sia $B \in \mathcal{B}$. Da (v), X è unione numerabile di aperti A_n di misura finita, con $A_n \subseteq A_{n+1}$. In virtù di (iv), $B \cap A_n$ verifica (b) in A_{n+1}, ossia per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $U_n \subseteq A_{n+1}$ tale che $U_n \supseteq B \cap A_n$ (e si può supporre $U_n \subseteq U_{n+1}$), ed inoltre tale che $\mu\big(U_n \setminus (B \cap A_n)\big) < \varepsilon$. Posto $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, l'aperto U contiene B e verifica

$$\mu(B) \leq \mu(U) = \lim_{n\to\infty} \mu(U_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\big(U_n \setminus (B \cap A_n)\big) + \lim_{n\to\infty} \mu(B \cap A_n) \leq \varepsilon + \mu(B),$$

il che dimostra che B verifica (b).

Esercizio 2.1.14 Proviamo che $\mathcal{A}$ è un'algebra, cioè contiene $\emptyset$ (questo è vero per ipotesi) ed è chiusa

rispetto alle unioni finite ad al passaggio al complementare. Anzitutto, per definizione, si ha $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$, in quanto ogni elemento di $\mathcal{D}$ è "unione finita" di se stesso. Inoltre, fissato $A_0 \in \mathcal{D}$, per definizione si ha $A_0^c = \bigcup_{i=1}^n A_i$, con gli A_i elementi disgiunti di $\mathcal{D}$; dunque $X = A_0 \cup A_0^c = \bigcup_{i=0}^n A_i$ è unione disgiunta di elementi di $\mathcal{D}$: pertanto $X \in \mathcal{A}$. Proviamo adesso che se $A, B \in \mathcal{A}$, allora $A \setminus B \in \mathcal{A}$. Infatti si ha $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $B = \bigcup_{j=1}^m B_j$, con $A_i, B_j \in \mathcal{D}$ e unioni disgiunte, da cui

$$A \setminus B = A \setminus \bigcup_{j=1}^m B_j = A \cap \bigcap_{j=1}^m B_j^c;$$

essendo $B_j \in \mathcal{D}$, si ha $B_j^c = \bigcup_{h=1}^{k_j} B_{jh}$ con $B_{jh} \in \mathcal{D}$ e $B_{jh} \cap B_{jk} = \emptyset$ per $j \neq k$. Dunque

$$A \setminus B = A \cap \bigcap_{j=1}^m \bigcup_{h=1}^{k_j} B_{jh} = \bigcup_{h_1=1}^{k_1} \cdots \bigcup_{h_m=1}^{k_m} \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B_{1,h_1} \cap \cdots \cap B_{m,h_m});$$

quindi $A \setminus B$ è unione disgiunta di elementi di $\mathcal{D}$, e pertanto $A \setminus B \in \mathcal{A}$. In particolare, $X \setminus B = B^c \in \mathcal{A}$ per ogni $B \in \mathcal{A}$.
Proviamo ora che se $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, allora $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$. Possiamo scrivere

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = (A_1 \setminus \emptyset) \cup \bigcup_{i=2}^n (A_i \setminus A_{i-1}),$$

e questa è una unione disgiunta di elementi di $\mathcal{A}$; quindi, per definizione, una unione disgiunta di elementi di $\mathcal{D}$. Ciò mostra che $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.
Proviamo adesso i quesiti relativi alla funzione μ.

(i) Ricordiamo che $\mu : \mathcal{D} \to [0, \infty]$. Se $A \in \mathcal{A}$, $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ con $A_i \in \mathcal{D}$ disgiunti, poniamo $\overline{\mu}(A) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$. Questa è una buona definizione, perché se vale anche $A = \bigcup_{j=1}^m B_j$ con $B_j \in \mathcal{D}$ disgiunti, allora $A = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$, e di conseguenza, per finita additività di μ,

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n \mu\left(A_i \cap \bigcup_{j=1}^m B_j\right) = \sum_{i=1}^n \mu\left(\bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j);$$

analogamente, $\sum_{j=1}^n \mu(B_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(B_j \cap A_i)$.
La funzione $\overline{\mu}$ è monotona: se $A, B \in \mathcal{A}$ e $A \subseteq B$, allora $B \setminus A \in \mathcal{A}$; quindi si ha $B \setminus A = \bigcup_{j=1}^m C_j$ e $A = \bigcup_{i=1}^n B_i$ con $C_j, B_i \in \mathcal{D}$ e $C_j \cap C_k = D_i \cap D_h = \emptyset$ per $j \neq k$ e $i \neq h$. Perciò $B = \bigcup_{i=1}^n B_i \cup \bigcup_{j=1}^m C_j$ e quindi

$$\overline{\mu}(B) = \sum_{i=1}^m \mu(B_i) + \sum_{j=1}^n \mu(C_j) = \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B \setminus A) \geq \overline{\mu}(A).$$

Proviamo ora che $\overline{\mu}$ è numerabilmente additiva su $\mathcal{A}$. Se $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, con gli A_n elementi disgiunti di $\mathcal{A}$, si ha $A_n = \bigcup_{j=1}^{k_n} B_{nj}$, con $B_{nj} \in \mathcal{D}$ e $B_{nj} \cap B_{mh} = \emptyset$ per $(n, j) \neq (m, h)$; inoltre $A = \bigcup_{k=1}^m E_k$, con gli $E_k \in \mathcal{D}$ disgiunti. Pertanto si ha, per la numerabile subadditività di μ in $\mathcal{D}$,

$$\overline{\mu}(A) = \sum_{k=1}^m \mu(E_k), \quad \mu(E_k) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty \bigcup_{j=1}^{k_n} (E_k \cap B_{nj})\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^{k_n} \mu(E_k \cap B_{nj}).$$

Sommando su k, per la finita additività di μ su $\mathcal{D}$ e per definizione di $\overline{\mu}$,

$$\overline{\mu}(A) \leq \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^{k_n} \mu(E_k \cap B_{nj}) = \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^{k_n} \mu(A \cap B_{nj}) = \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^{k_n} \mu(B_{nj}) = \sum_{n=1}^\infty \overline{\mu}(A_n).$$

D'altra parte, per la monotonia di $\overline{\mu}$ su $\mathcal{A}$ e per definizione di $\overline{\mu}$, si ha per ogni $m \in \mathbb{N}^+$

$$\overline{\mu}(A) \geq \overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) = \overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{k_n} B_{nj}\right) = \sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_n} \mu(B_{nj});$$

per $m \to \infty$ si ricava

$$\overline{\mu}(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k_n} \mu(B_{nj}) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n).$$

Dunque $\overline{\mu}$ è numerabilmente additiva su $\mathcal{A}$.
L'unicità di $\overline{\mu}$ è facile: se μ_0 è un'altra misura su $\mathcal{A}$ tale che $\mu_0|_{\mathcal{D}} = \mu$, allora se $A \in \mathcal{A}$, $A = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$, con $A_j \in \mathcal{D}$ disgiunti, per finita additività deve essere $\mu_0(A) = \sum_{j=1}^{m} \mu_0(A_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j) = \overline{\mu}(A)$.
(ii) Per provare questo risultato basta ripercorrere le argomentazioni svolte nel paragrafo 1.4, con la famiglia degli intervalli di $\mathbb{R}$ rimpiazzata dall'algebra $\mathcal{A}$. Si parte definendo una misura esterna su $\mathcal{P}(X)$:

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(G_n) :\ G_n \in \mathcal{A},\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n \supset E\right\}.$$

Si verifica facilmente che $\mu^*(\emptyset) = 0$ e che μ^* è monotona e numerabilmente subadditiva. Poi si definisce la classe

$$\mathcal{F} = \{E \subseteq X :\ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)\ \forall A \subseteq X\};$$

si verifica che $\mathcal{F}$ è una σ-algebra, e si definisce $\tilde{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{F}}$. Utilizzando l'argomento della proposizione 1.5.1, opportunamente adattato, si ricava $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{A}$. È chiaro allora che $\tilde{\mu}$ coincide con $\overline{\mu}$ su $\mathcal{A}$, poiché se $E \in \mathcal{A}$, nella definizione di $\mu^*(E)$ possiamo scegliere $G_0 = E$ e $G_n = \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Resta da verificare che $\tilde{\mu}$ è numerabilmente additiva su $\mathcal{F}$, e questo si fa ripetendo le dimostrazioni delle proposizioni e lemmi del paragrafo 1.4. In particolare, $\tilde{\mu}$ è completa su $\mathcal{F}$.

Esercizi del paragrafo 2.2

Esercizio 2.2.1 (i) La famiglia $\mathcal{R}$ non è un'algebra, perché se $E \times F \in \mathcal{R}$ si ha

$$(E \times F)^c = (E^c \times F) \cup (E \times F^c) \cup (E^c \times F^c)$$

e non è possibile esprimere questo insieme come un prodotto cartesiano $G \times H \in \mathcal{R}$. Invece la classe $\mathcal{A}$ è un'algebra. Infatti, essa è banalmente chiusa rispetto alle unioni finite, ed inoltre, se $E = \bigcup_{j=1}^{k}(E_j \times F_j)$, con $E_j \times F_j \in \mathcal{R}$, allora si ha $E^c \in \mathcal{A}$. La verifica si fa per induzione su k: per $k = 1$ si ha la decomposizione sopra scritta e quindi $(E_1 \times F_1)^c \in \mathcal{A}$. Se poi la tesi vale per un generico k, allora

$$\left(\bigcup_{j=1}^{k+1}(E_j \times F_j)\right)^c = \bigcap_{j=1}^{k+1}(E_j \times F_j)^c = \left(\bigcap_{j=1}^{k}(E_j \times F_j)^c\right) \cap (E_{k+1} \times F_{k+1})^c.$$

Analizziamo gli insiemi dell'intersezione all'ultimo membro: il primo appartiene ad $\mathcal{A}$ per ipotesi induttiva, quindi si può scrivere

$$\bigcap_{j=1}^{k}(E_j \times F_j)^c = \bigcup_{h=1}^{m_k}(G_h \times K_h);$$

il secondo appartiene ad $\mathcal{A}$ in virtù del caso base, e analogamente avrà la forma

$$(E_{k+1} \times F_{k+1})^c = \bigcup_{i=1}^{n_k}(L_i \times M_i).$$

Ne segue

$$\left(\bigcap_{j=1}^{k}(E_j\times F_j)^c\right)\cap(E_{k+1}\times F_{k+1})^c = \left(\bigcup_{h=1}^{m_k}(G_h\times K_h)\right)\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n_k}(L_i\times M_i)\right) = \\ = \bigcup_{h=1}^{m_k}\bigcup_{i=1}^{n_k}\left[(G_h\cap L_i)\times(K_h\cap M_i)\right],$$

e quindi la tesi per $k+1$. Pertanto $\mathcal{A}$ è un'algebra.

(ii) Sia $\mathcal{M}$ la σ-algebra generata da $\mathcal{A}$. Sia $y\in\mathbb{R}$ e, per $E\in\mathcal{M}\times\mathcal{M}$, poniamo $E^y=\{x\in\mathbb{R}:\ (x,y)\in E\}$: dobbiamo provare che $E^y\in\mathcal{M}$. Sia $\mathcal{G}=\{E\in\mathcal{M}\times\mathcal{M}:\ E^y\in\mathcal{M}\}$. Si vede subito che $\mathcal{G}$ è una σ algebra: infatti $\emptyset^y=\emptyset\in\mathcal{M}$, poi se $E\in\mathcal{G}$ allora $E^c\in\mathcal{M}\times\mathcal{M}$ e $(E^c)^y=(E^y)^c\in\mathcal{M}$ (dato che $E^y\in\mathcal{M}$), per cui $E^c\in\mathcal{G}$; infine se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{G}$ allora $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\right)^y=\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(E_n)^y\right)\in\mathcal{M}$ (dato che $(E_n)^y\in\mathcal{M}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$), per cui $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\in\mathcal{G}$. D'altronde, $\mathcal{G}$ contiene $\mathcal{R}$, perché se $E\times F\in\mathcal{R}$ allora $(E\times F)^y$ è uguale a E se $y\in F$, mentre è uguale a $\emptyset$ se $y\notin F$: quindi $(E\times F)^y\in\mathcal{M}$. Dunque la σ-algebra $\mathcal{G}$, contenendo $\mathcal{R}$, deve contenere $\mathcal{M}\times\mathcal{M}$ (e in definitiva, per definizione, coincide con essa). Ne segue che per ogni $E\in\mathcal{M}\times\mathcal{M}$ si ha $E^y\in\mathcal{M}$, come si voleva.
Analogo discorso vale per gli insiemi $E_x=\{y\in\mathbb{R}:\ (x,y)\in E\}$, $x\in\mathbb{R}$.

(iii) Sia $V\notin\mathcal{M}$, $V\subset[0,1]$, e sia $W\in\mathcal{M}$ con $m(W)=0$ ma $W\neq\emptyset$: allora $V\times W$ appartiene a $\mathcal{M}_2$, perché m_2 è completa e $V\times W\subset[0,1]\times W$ con $m_2([0,1]\times W)=0$. Tuttavia $V\times W\notin\mathcal{M}\times\mathcal{M}$, perché grazie all'esercizio precedente, per un fissato $y\in W$, ciò implicherebbe $\{x\in\mathbb{R}:(x,y)\in V\times W\}=V\in\mathcal{M}$, cosa che non è.

Esercizio 2.2.2 Si ha

$$m^*(tE) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}}v_N(R_k):\ tE\subseteq\bigcup_{k\in\mathbb{N}}R_k,\ R_k\text{ parallelepipedi aperti}\right\} = \\ = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}}t^N v_N(t^{-1}R_k):\ E\subseteq\bigcup_{k\in\mathbb{N}}t^{-1}R_k,\ R_k\text{ parallelepipedi aperti}\right\} = \\ = t^N\inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}}v_N(Q_k):\ E\subseteq\bigcup_{k\in\mathbb{N}}Q_k,\ Q_k\text{ parallelepipedi aperti}\right\} = t^N m^*(E).$$

Esercizi del paragrafo 2.3

Esercizio 2.3.1 Siano $x,y\in A\cup B$. Possiamo supporre che $x\in A$; se vale anche $y\in A$, si ha

$$|x-y|_N\leq\operatorname{diam}(A)\leq\operatorname{diam}(A)+\operatorname{diam}(B);$$

se invece $y\in B$, scelto $z\in A\cap B$ risulta ugualmente

$$|x-y|_N\leq|x-z|_N+|z-y|_N\leq\operatorname{diam}(A)+\operatorname{diam}(B).$$

A primo membro possiamo passare all'estremo superiore al variare di $x,y\in A\cup B$, otteenendo la disuguaglianza cercata.

Esercizio 2.3.2 Denotiamo con $H^*_{p,N}$ e $H^*_{p,M}$ le misure esterne di Hausdorff costruite in $\mathbb{R}^N$ e in $\mathbb{R}^M$. Possiamo supporre che $\mathbb{R}^N=\mathbb{R}^M\cap\{x_{N+1}=\cdots=x_M=0\}$. Sia $\varepsilon>0$: esiste un ricoprimento $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di E costituito da aperti di $\mathbb{R}^N$ con diametri minori di δ, tale che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(\operatorname{diam}(U_n))^p<H^*_{p,N,\delta}(E)+\varepsilon.$$

Daro che $E \subseteq \mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^M$, possiamo sostituire gli aperti U_n con $V_n = U_n \times (\,]-\eta,\eta[\,)^{M-N}$, aperti in $\mathbb{R}^M$, con $\eta > 0$ scelto in modo tale che risulti

$$H^*_{p,M,\delta}(E) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{diam}(V_n))^p < \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{diam}(U_n))^p + \delta < H^*_{p,N,\delta}(E) + \delta + \varepsilon.$$

Per $\delta \to 0^+$, si ricava $H^*_{p,M}(E) \le H^*_{p,N}(E) + \varepsilon$, da cui la prima disuguaglianza.
Viceversa, sia $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ricoprimento di E costituito da aperti di $\mathbb{R}^M$ con diametri minori di δ, tali che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{diam}(V_n))^p < H^*_{p,M,\delta}(E) + \varepsilon.$$

Posto $U_n = V_n \cap \{x_{N+1} = \cdots = x_M = 0\}$, gli U_n sono aperti in $\mathbb{R}^N$, ricoprono E ed hanno diametri minori di δ, con $\mathrm{diam}(U_n) \le \mathrm{diam}(V_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque

$$H^*_{p,N,\delta}(E) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{diam}(U_n))^p \le \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{diam}(V_n))^p < H^*_{p,M,\delta}(E) + \varepsilon.$$

Per $\delta \to 0^+$ si ottiene $H^*_{p,N}(E) \le H^*_{p,M}(E) + \varepsilon$, da cui la seconda disuguaglianza.

Esercizio 2.3.3 Sia $A = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Allora

$$A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, 2^{-n-2}\delta), \qquad \mathrm{diam}\, B(x_n, 2^{-n-2}\delta) = 2^{-n-1}\delta < \delta.$$

Risulta allora

$$H^*_{p,\delta}(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \big(\mathrm{diam}\, B(x_n, 2^{-n-2}\delta)\big)^p < \delta^p \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-(n+1)p} = \frac{\delta^p 2^{-p}}{1-2^{-p}},$$

da cui, per $\delta \to 0^+$, $H^*_p(A) = 0$.

Esercizio 2.3.4 Sia

$$\overline{H}^*_{p,\delta}(E) = \inf\left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{diam}\, U_n)^p : \ E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n, \ \mathrm{diam}\, U_n < \delta \right\},$$

ove gli U_n sono insiemi arbitrari: è chiaro che $H^*_{p,\delta}(E) \ge \overline{H}^*_{p,\delta}(E)$. D'altra parte, sia $\{V_n\}$ un arbitrario ricoprimento di E con $\mathrm{diam}\, V_n < \delta$, tale che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{diam}\, V_n)^p < \overline{H}^*_{p,\delta}(E) + \delta;$$

si consideri l'aperto $U_{n,k} = \{x \in \mathbb{R}^N : \mathrm{dist}(x, V_n) < \frac{1}{k}\}$. Per $k = k_n$ opportuno si ha $\mathrm{diam}(U_{n,k_n}) \le ((\mathrm{diam}(V_n))^p + 2^{-n-1}\delta)^{1/p}$. Pertanto il ricoprimento aperto $\{U_{n,k_n}\}$ è tale che

$$H^*_{p,\delta}(E) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{diam}(U_{n,k_n}))^p \le \overline{H}^*_{p,\delta}(E) + 2\delta;$$

ne segue la tesi.

Esercizio 2.3.5 Risulta $H^*_0(E) = \#(E)$, ove $\#(E)$ è la cardinalità di E. Infatti, se $E = \{x_1, \ldots, x_k\}$, detta $r > 0$ la minima distanza fra 2 punti di E, per ogni $\delta > 0$ le palle $B(x_j, r_j)$, con $2r_j < \delta \wedge r$, sono disgiunte e formano un ricoprimento di E; ne segue

$$H^*_{0,\delta}(E) \le \sum_{j=1}^{k} (2r_j)^0 = k.$$

D'altra parte, se $\{U_n\}$ è un ricoprimento di E tale che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(U_n))^0 \leq H^*_{0,\delta}(E) + \varepsilon,$$

esso contiene un sottoricoprimento del tipo precedente, e pertanto si ricava

$$k \leq H^*_{0,\delta}(E) + \varepsilon.$$

Dunque deve essere $H^*_{0,\delta}(E) = k$ per ogni $\delta > 0$, e in definitiva $H^*_0(E) = k$.

Esercizio 2.3.6 Ovviamente $\underline{H}^*_p(E) \leq H^*_{p,\delta}(E)$ per ogni $\delta > 0$; quindi $\underline{H}^*_p(E) \leq H^*_p(E)$.
D'altra parte, sia $p = 1$ e prendiamo $E = ([0,1]\times\{0\})\cup(\{0\}\times[0,1]) \subset \mathbb{R}^2$: è facile verificare, ricoprendo E con dischi di diametro δ e poi mandando δ a 0, che $H^*_1(E) = 2$; invece, ricoprendo E con il singolo disco $B\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon\right)$, con $\varepsilon > 0$, si ottiene $\underline{H}^*_1(E) \leq \sqrt{2} + 2\varepsilon$ e quindi $\underline{H}^*_1(E) \leq \sqrt{2}$.

Esercizio 2.3.7 Poiché per ogni intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ si ha $\ell(I) = \operatorname{diam}(I)$, fissato $E \subseteq \mathbb{R}$ si ha chiaramente, per definizione di m^*, $m^*(E) \leq H^*_{1,\delta}(E)$ per ogni $\delta > 0$, da cui $m^*(E) \leq H^*_1(E)$.
Viceversa, se E è un intervallo $[a,b]$ si ha $H^*_1(E) = b - a = m^*(E)$. Se E è aperto, per l'esercizio 1.3.4 E è unione al più numerabile di intervalli I_n disgiunti: per subadditività di H^*_1 e numerabile additività di m si deduce $H^*_1(E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) = m(E) = m^*(E)$. Infine, se E è arbitrario, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $A \supset E$, aperto, tale che $m(A) < m^*(E) + \varepsilon$; dunque $H^*_1(E) \leq H^*_1(A) = m(A) < m^*(E) + \varepsilon$.

Esercizio 2.3.8 Sia $\delta_0 = \operatorname{dist}(E,F) > 0$. Se $\delta < \delta_0$, ogni ricoprimento di E con aperti di diametro minore di δ sarà fatto da insiemi disgiunti da F, ed ogni ricoprimento di F con aperti di diametro minore di δ sarà fatto da insiemi disgiunti da E. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e scegliamo un ricoprimento $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di E ed uno $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di F, entrambi con aperti di diametro minore di δ, tali che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam}(U_n))^p < H^*_{p,\delta}(E) + \varepsilon, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam}(V_n))^p < H^*_{p,\delta}(F) + \varepsilon.$$

Allora la famiglia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento di $E \cup F$, e si ha

$$H^*_{p,\delta}(E\cup F) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam}(U_n))^p + \sum_{n\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam}(V_n))^p \leq H^*_{p,\delta}(E) + H^*_{p,\delta}(F) + 2\varepsilon;$$

quindi $H^*_p(E\cup F) \leq H^*_p(E) + H^*_p(F)$.
Viceversa, dato $\varepsilon > 0$, sia $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ricoprimento di $E \cup F$ con aperti di diametro minore di δ, tale che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam}(G_n))^p < H^*_{p,\delta}(E\cup F) + \varepsilon.$$

Notiamo che ciascun G_n non può intersecare simultaneamente E ed F: quindi possiamo suddividere i G_n ponendo

$$A = \{n \in \mathbb{N} :\ G_n \cap F = \emptyset\}, \qquad B = \{n \in \mathbb{N} :\ G_n \cap E = \emptyset\}.$$

Risulta allora

$$H^*_{p,\delta}(E) \leq \sum_{n\in A} (\operatorname{diam}(G_n))^p, \qquad H^*_{p,\delta}(F) \leq \sum_{n\in B} (\operatorname{diam}(G_n))^p,$$

da cui

$$H^*_{p,\delta}(E) + H^*_{p,\delta}(F) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam}(G_n))^p < H^*_{p,\delta}(E\cup F) + \varepsilon.$$

Pertanto $H^*_p(E) + H^*_p(F) \leq H^*_p(E\cup F)$.

Esercizio 2.3.9 Sia $p > 1$. Sia $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ricoprimento di S costituito da intervalli aperti unidimensionali di lunghezze minori di δ, giacenti sulla retta che contiene S. Sia poi U_n un aperto

cilindrico di $\mathbb{R}^N$ ottenuto "ingrassando" I_n nelle $N-1$ direzioni ortogonali di un raggio $\eta > 0$. Se η è sufficientemente piccolo si avrà $\operatorname{diam}(U_n) \le (1+\delta)\ell(I_n)$. Allora

$$H^*_{p,\delta}(S) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam}(U_n))^p \le (1+\delta)^p \sum_{n\in\mathbb{N}} (\ell(I_n))^p < \delta^{p-1}(1+\delta)^p \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n).$$

Se si scelgono gli I_n in modo che $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) < \ell(S) + \delta$, si conclude che

$$H^*_p(S) = \lim_{\delta\to 0^+} H^*_{p,\delta}(S) \le \lim_{\delta\to 0^+} \delta^{p-1}(1+\delta)^p(\ell(S)+\delta) = 0.$$

Sia $p = 1$: sappiamo dall'esercizio 2.3.7 che $H^*_1(S) = \ell(S) = |x-y|_N$.
Sia $0 < p < 1$. Sia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ricoprimento di S costituito da aperti di diametro minore di δ, tale che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam}(U_n))^p < H^*_{p,\delta}(S) + \delta.$$

Allora si ha, posto $I_n = U_n \cap R$, essendo R la retta che contiene S,

$$H^*_{p,\delta}(S) > \sum_{n\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam}(U_n))^p - \delta \ge \sum_{n\in\mathbb{N}} (\ell(I_n))^p - \delta > \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ell(I_n)}{\delta^{1-p}} - \delta \ge \delta^{p-1}\ell(S) - \delta,$$

e per $\delta \to 0^+$ si ottiene $H^*_p(S) = +\infty$.

Esercizio 2.3.10 Si ha per ogni n
$ge2$

$$\Gamma \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} B(e^{ik\frac{2\pi}{n}}, r_n), \qquad r_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n},$$

poiché, con facili calcoli,

$$|e^{ik\frac{2\pi}{n}} - e^{i(k-1)\frac{2\pi}{n}}| = |e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1| = \sqrt{\left(\cos\frac{2\pi}{n} - 1\right)^2 + \sin^2\frac{2\pi}{n}} = 2\sin\frac{\pi}{n} < r_n\,.$$

Dunque, se n è grande in modo che $2r_n < \delta$, ricaviamo che $H^*_{1,\delta}(\Gamma) \le 2nr_n = 2(n+1)\sin\frac{\pi}{n}$. Perciò, se $n \to \infty$ e poi $\delta \to 0^+$ ricaviamo $H^*_1(\Gamma) \le 2\pi$.
Cerchiamo ora una stima dal basso per $H^*_1(\Gamma)$. Siano $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}^+$, e fissiamo un ricoprimento $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di Γ con $\operatorname{diam}(B_k) < \frac{2\pi}{n}$, tale che

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_k) < H^*_{1,\frac{2\pi}{n}}(\Gamma) + \varepsilon.$$

Posto $\Gamma_k = \{e^{it} : \frac{2k\pi}{n} \le t \le \frac{2(k+1)\pi}{n}\}$ e $A_j = \{k \in n\mathbb{N} : \partial B_k \cap \Gamma \subset \Gamma_k\}$, $0 \le j \le n-1$, risulta evidentemente

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_k) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k\in A_j} \operatorname{diam}(B_k).$$

Ora, se $k \in A_j$ l'insieme $\partial B_k \cap \Gamma$ consiste di due punti $e^{i\vartheta_k}$, $e^{i\gamma_k} \in \Gamma_k$; pertanto

$$\sum_{k\in A_j} \operatorname{diam}(B_k) \ge \sum_{k\in A_j} |e^{i\vartheta_k} - e^{i\gamma_k}| \ge |e^{\frac{2\pi i(k+1)}{n}} - e^{\frac{2\pi ik}{n}}| = |e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1| = 2\sin\frac{\pi}{n},$$

da cui

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_k) \ge \sum_{j=0}^{n-1} 2\sin\frac{\pi}{n} = 2n\sin\frac{\pi}{n}.$$

Ne segue $H_1^*(\Gamma) \geq H_{1,\frac{2\pi}{n}}^*(\Gamma) \geq 2n \sin\frac{\pi}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, e per $n \to \infty$ otteniamo $H_1^*(\Gamma) \geq 2\pi$. In definitiva, $H_1^*(\Gamma) = 2\pi$, com'era da aspettarsi.

Esercizio 2.3.11 Se $H_N^*(E) < \infty$, allora osservando che $H_{N+\varepsilon,\delta}^*(E) \leq \delta^\varepsilon H_{N,\delta}^*(E)$, per $\delta \to 0^+$ si ha $H_{N+\varepsilon}^*(E) = 0$. Se $H_N^*(E) = \infty$, scelta una famiglia $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di cubi N-dimensionali adiacenti che ricopre $\mathbb{R}^N$, e posto $E_k = E \cap Q_k$, avremo ovviamente $H_N^*(Q_k) < \infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e, applicando agli E_k il ragionamento precedente, si ottiene, per subadditività,

$$H_{N+\varepsilon}^*(E) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} H_{N+\varepsilon}^*(E_k) = 0.$$

Esercizio 2.3.12 Fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo un ricoprimento aperto $\{U_n\}$ di E, con $\mathrm{diam} U_n < \delta$, tale che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{diam}\, U_n)^p < H_{p,\delta}^*(E) + \varepsilon.$$

Allora $\{f(U_n)\}$ è un ricoprimento di $f(E)$. Scegliamo un aperto V_n tale che $V_n \supseteq f(U_n)$ e $\mathrm{diam} V_n < (1+\delta)\,\mathrm{diam}\, f(U_n) \leq (1+\delta)K\,\mathrm{diam}\, U_n$. Dunque

$$H_{p,(1+\delta)K\delta}^*(f(E)) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{diam}\, V_n)^p \leq (1+\delta)^p K^p \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{diam}\, U_n)^p \leq (1+\delta)^p K^p \left(H_{p,\delta}^*(E) + \varepsilon\right).$$

Per $\delta \to 0^+$, si ottiene $H_p^*(f(E)) \leq K^p \left(H_p^*(E) + \varepsilon\right)$, con $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Esercizio 2.3.13 Fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo un ricoprimento aperto $\{U_n\}$ di $g(E)$, con $\mathrm{diam} U_n < \delta$, tale che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{diam}\, U_n)^p < H_{p,\delta}^*(g(E)) + \varepsilon.$$

Allora $\{f(g^{-1}(U_n))\}$ è un ricoprimento di $f(E)$ che non è costituito da aperti, ma grazie all'esercizio 2.3.4 ciò non ha importanza. Risulta

$$\mathrm{diam}\, f(g^{-1}(U_n)) \leq c\,\mathrm{diam}\, g(g^{-1}(U_n) = c\,\mathrm{diam}\, U_n < c\delta;$$

dunque

$$H_{p,c\delta}^*(f(E)) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{diam}\, f(g^{-1}(U_n)))^p \leq c^p \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{diam}\, U_n)^p < c^p\, H_{p,\delta}^*(g(E)) + \varepsilon.$$

Per $\delta \to 0^+$ segue la tesi in virtù dell'arbitrarietà di ε.

Esercizio 2.3.14 (i) Siano $x, y \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$: sarà ad esempio $x \in A_m$ e $y \in A_k$ con $m > k$, quindi $x, y \in A_m$. Perciò

$$d(x,y) \leq \mathrm{diam}\, A_m \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}\, A_n,$$

ove l'ultimo limite esiste per monotonia. Dunque

$$\mathrm{diam} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}\, A_n.$$

D'altronde, ovviamente, $\mathrm{diam}\, A_m \leq \mathrm{diam} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, da cui la disuguaglianza opposta.

(ii) Stavolta si ha $\mathrm{diam}\, A_m \geq \mathrm{diam} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, e al limite segue

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}\, A_n \geq \mathrm{diam} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

(iii) Poniamo $A_n = [0,1] \cup \left]2, 2+\frac{1}{n}\right]$. Si ha $\mathrm{diam} A_n = 2 + \frac{1}{n}$, ma $\mathrm{diam} \bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} A_n = 1$.

Esercizi del paragrafo 2.4

Esercizio 2.4.1 Anzitutto, Γ è un insieme compatto, quindi appartiene a $\mathcal{H}_1$. Per provare che $H_1(\Gamma) \le \ell(\Gamma)$, fissato $\delta > 0$, scegliamo una suddivisione $\sigma : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ abbastanza fine da far sì che

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(\tau)|_N \, d\tau < \frac{\delta}{2} \quad \text{per } 1 \le i \le m.$$

Proviamo che la palla di centro $\frac{\varphi(t_i)+\varphi(t_{i-1})}{2}$ e raggio $\frac{1}{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(\tau)|_N \, d\tau$ contiene l'insieme $\varphi([t_{i-1}, t_i])$: se $s \in [t_{i-1}, t_i]$ si ha

$$\begin{aligned} \left|\varphi(s) - \frac{\varphi(t_i)+\varphi(t_{i-1})}{2}\right|_N &= \frac{1}{2}\Big|[\varphi(s)-\varphi(t_{i-1})] + [\varphi(s)-\varphi(t_i)]\Big|_N = \\ &= \frac{1}{2}\left|\int_{t_{i-1}}^{s} \varphi'(\tau)\,d\tau - \int_{s}^{t_i} \varphi'(\tau)\,d\tau\right| \le \frac{1}{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(\tau)|_N \, d\tau. \end{aligned}$$

Ne segue che, per ogni $\varepsilon \in]0,1[$, le palle aperte

$$B_i = B\left(\frac{\varphi(t_i)+\varphi(t_{i-1})}{2}, \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(\tau)|_N \, d\tau\right), \qquad 1 = 1, \ldots, k$$

formano un ricoprimento aperto di Γ, con

$$\operatorname{diam} B_i = (1+\varepsilon)\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(\tau)|_N \, d\tau < (1+\varepsilon)\frac{\delta}{2} < \delta.$$

Pertanto

$$H_{1,\delta}(\Gamma) \le (1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{m}\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(\tau)|_N \, d\tau = (1+\varepsilon)\ell(\Gamma),$$

e per $\delta \to 0^+$ segue $H_1(\Gamma) \le (1+\varepsilon)\ell(\Gamma)$, con ε arbitrario.
Per provare l'altra disuguaglianza, fissato $\varepsilon > 0$, esistono $\delta > 0$ ed un ricoprimento aperto $\{U_n\}$ di Γ con $\operatorname{diam} U_n < \delta$, tali che $\sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{diam} U_n < H_1(\Gamma) + \varepsilon$. Per compattezza, esiste un sottoricoprimento finito $\{U_{n_1}, \ldots, U_{n_m}\}$ di Γ, che possiamo pensare minimale, nel senso che, togliendo uno qualunque degli U_{n_i}, gli altri aperti non formano più un ricoprimento di Γ. Allora, riordinando opportunamente gli indici $n_1, \ldots, n_m$, possiamo scegliere una suddivisione $\sigma : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$, tale che $a \in U_{n_1}$, $t_i \in U_{n_i} \cap U_{n_{i+1}}$, $i = 1, \ldots, m-1$, $b \in U_{n_m}$ (e, in particolare, $|t_i - t_{i-1}| < \delta$ per $1 \le i \le m$); in questo modo,

$$\sum_{i=1}^{m} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|_N \le \sum_{i=1}^{m} \operatorname{diam} U_{n_i} \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{diam} U_n < H_1(\Gamma) + \varepsilon.$$

Se δ è abbastanza piccolo, in modo che valga $|\varphi'(t) - \varphi'(s)|_N < \varepsilon$ per $|t-s| < \delta$, allora si ha

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma) &= \int_a^b |\varphi'(t)|_N dt = \sum_{i=1}^{m}\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(t)|_N dt \le \\ &\le \sum_{i=1}^{m}\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(t) - \varphi'(t_i)|_N dt + \sum_{i=1}^{m} |(t_i - t_{i-1})\varphi'(t_i)|_N \le \\ &\le \varepsilon(b-a) + \sum_{i=1}^{m}\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} [\varphi'(t_i) - \varphi'(t)]dt\right|_N + \sum_{i=1}^{m}\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(t)dt\right|_N \le \\ &\le 2\varepsilon(b-a) + \sum_{i=1}^{m} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|_N \,. \end{aligned}$$

Se ne deduce

$$\ell(\Gamma) - 2\varepsilon(b-a) \le \sum_{i=1}^{m} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|_N \le H_1(\Gamma) + \varepsilon,$$

e dunque $\ell(\Gamma) \le H_1(\Gamma)$.

Esercizio 2.4.2 Dalla definizione segue che se $H_p^*(E) = 0$ per ogni $p > 0$, allora $\dim_H(E) = 0$. Se invece esiste $r > 0$ tale che $H_r^*(E) > 0$, sia $p = \sup\{q \ge 0 : \ H_q^*(E) = \infty\}$. Se $q > p$, deve essere $H_q^*(E) = 0$, altrimenti per $s \in]p, q[$ la quantità $H_s^*(E)$ dovrebbe essere infinita. Se $q < p$, deve essere $H_s^*(E) = \infty$ per $s \in [q, p[$. Ne segue $\dim_H(E) = p$.

Esercizio 2.4.3 Si ha $\dim_H\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \ge \dim_H(E_m)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$; pertanto $\dim_H\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \ge \sup_{m\in\mathbb{N}} \dim_H(E_m)$. Viceversa, sia $p_0 = \dim_H\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)$: se $p < p_0$ non può essere $H_p^*(E_m) = 0$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, altrimenti per subadditività avremmo $H_p^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = 0$, assurdo essendo $p < p_0$. Dunque $\sup_{m\in\mathbb{N}} H_p^*(E_m) > 0$ per ogni $p < p_0$, e ciò implica $\sup_{m\in\mathbb{N}} \dim_H(E_m) \ge p$ per ogni $p < p_0$, da cui infine $\sup_{m\in\mathbb{N}} \dim_H(E_m) \ge p_0$.

Esercizio 2.4.4 Con l'argomento usato nello svolgimento dell'esercizio 2.3.12 si ha $H_{p,K\delta}^*(f(E)) \le K^p\left(H_{\alpha p,\delta}^*(E) + \varepsilon\right)$, e dunque $H_p^*(f(E)) \le K^p H_{\alpha p}^*(E)$. Allora, se $p > \frac{1}{\alpha}\dim_H(E)$ il secondo membro di questa disuguaglienza è nullo, per cui $H_p^*(f(E)) = 0$. Perciò $\dim_H(f(E)) \le \frac{1}{\alpha}\dim_H(E)$. In particolare, se f è bi-lipdschitziana si ha $\alpha = 1$, e scrivendo la stessa disuguaglianza per f^{-1} segue la tesi.

Esercizio 2.4.5 Siano $x, x' \in E$. Posto $f(z) = |z - x|_N$ per ogni $z \in \mathbb{R}^N$, risulta dall'esercizio 2.4.3 $\dim_H(f(E)) \le \dim_H(E) < 1$, quindi $f(E)$ non può contenere alcun intervallo. Perciò $f(E)^c$ è denso in $\mathbb{R}$. Sia $t \in f(E)^c$ tale che $0 < t < |x - x'|_N$; esistono punti $z \in \mathbb{R}^N$ tali che $t = |x - z|_N$, e tali z non stanno in E, perché altrimenti avremmo $t = f(z) \in f(E)$. Dunque, mentre x ovviamente è interno alla palla $B(x, t)$, x' è esterno a tale palla. Pertanto le componenti connesse di x e x' sono necessariamente distinte.

Esercizio 2.4.6 Dopo il passo n-simo della costruzione di Γ_s, il residuo Γ_s^n è formato da 2^n intervalli di lunghezza $\left(\frac{1-s}{2}\right)^n$. Dunque $m(\Gamma_s) \le 2^n\left(\frac{1-s}{2}\right)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, cosicché $m(\Gamma_s) = 0$. Inoltre si ha $\Gamma_s = \Gamma_s^1 \cup \Gamma_s^2$, ove $\Gamma_s^1 = \frac{1-s}{2}\Gamma_s$ e $\Gamma_s^2 = \Gamma_s^1 + \frac{1+s}{2}$: dunque

$$H_p(\Gamma_s) = H_p(\Gamma_s^1) + H_p(\Gamma_s^2) = \left(\frac{1-s}{2}\right)^p [H_p(\Gamma_s) + H_p(\Gamma_s)] = 2\left(\frac{1-s}{2}\right)^p H_p(\Gamma_s).$$

Se adesso mostriamo che $H_p(\Gamma_s) \in]0, \infty[$, otteniamo subito $2\left(\frac{1-s}{2}\right)^p = 1$, ossia $p = \frac{\ln 2}{\ln(2/(1-s))}$.
D'ora in poi assumiamo $p = \frac{\ln 2}{\ln(2/(1-s))}$. Sia $\delta > 0$; dato che la distanza fra Γ_s^1 e Γ_s^2 è positiva, si ha

$$\begin{aligned} H_{p,\frac{1-s}{2}\delta}^*(\Gamma_s) &= H_{p,\frac{1-s}{2}\delta}^*(\Gamma_s^1) + H_{p,\frac{1-s}{2}\delta}^*(\Gamma_s^2) = H_{p,\frac{1-s}{2}\delta}^*\left(\frac{1-s}{2}\Gamma_s\right) + H_{p,\frac{1-s}{2}\delta}^*\left(\Gamma_s^1 + \frac{1+s}{2}\right) = \\ &= 2\left(\frac{1-s}{2}\right)^p H_{p,\delta}^*(\Gamma_s) = H_{p,\delta}^*(\Gamma_s). \end{aligned}$$

Dunque

$$H_{p,\delta}^*(\Gamma_s) = H_{p,\frac{1-s}{2}\delta}^*(\Gamma_s) = \cdots = H_{p,\left(\frac{1-s}{2}\right)^n\delta}^*(\Gamma_s)b \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

e perciò $H_{p,\delta}^*(\Gamma_s) = H_p(\Gamma_s)$ per ogni $\delta > 0$. In particolare

$$H_p(\Gamma_s) = H_{p,2}(\Gamma_s) \le \operatorname{diam}(\,]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\,)^p = (1+2\varepsilon)^p \quad \forall \varepsilon \in]0,1[\,,$$

da cui $H_p(\Gamma_s) \le 1$. Resta da dimostrare che $H_p(\Gamma_s) > 0$.
Se $\delta, \varepsilon > 0$, esiste un ricoprimento aperto $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ di Γ_s, con $\operatorname{diam} U_n < \delta$, tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{diam} U_n)^p < H_{p,\delta}^*(\Gamma_s) + \varepsilon.$$

Procedendo esattamente come nell'esempio 2.4.5, si costruisce un ricoprimento aperto finito $W_1, \dots, W_k$ di Γ_s, con diametro arbitrario, tale che

$$1 \le \sum_{i=1}^{k} (\operatorname{diam} W_i)^p \le \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{diam} U_n)^p.$$

Da qui segue subito la stima

$$1 - \varepsilon \le \sum_{i=1}^{k} (\operatorname{diam} W_i)^p - \varepsilon \le \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{diam} U_n)^p - \varepsilon < H^*_{p,\delta}(\Gamma_s) \le H^*_p(\Gamma_s),$$

da cui $H^*_p(\Gamma_s) \ge 1$, ossia $H^*_p(\Gamma_s) = 1$.
Nella costruzione dei W_i, rispetto all'esempio 2.4.5, l'unica differenza sta nella scelta del parametro σ. La distanza fra due intervalli J^k_j e J^k_{j+1} di Γ^k_s è non inferiore a $\left(\frac{1-s}{2}\right)^{k-1} s$; di conseguenza un aperto V_k che contenga l'unione $J^\nu_j \cup J^\nu_{j+1}$ avrà diametro maggiore di $2s\left(\frac{1-s}{2}\right)^k + s\left(\frac{1-s}{2}\right)^{k-1}$. In questo caso V_k viene sostituito da due aperti disgiunti W_1 e W_2 con

$$W_1 \supset J^\nu_j, \quad W_2 \supset J^\nu_{j+1}, \quad \operatorname{diam} W_1 < 2s\left(\frac{1-s}{2}\right)^k s + \sigma, \quad \operatorname{diam} W_2 < 2s\left(\frac{1-s}{2}\right)^k + \sigma,$$

ove $\sigma > 0$ va scelto in modo che $(\operatorname{diam} W_1)^p + (\operatorname{diam} W_2)^p < (\operatorname{diam} V_k)^p$: ciò è possibile in quanto, se $0 < \eta < \operatorname{diam} V_k - 2s\left(\frac{1-s}{2}\right)^k - s\left(\frac{1-s}{2}\right)^{k-1}$, allora risulta

$$\begin{aligned}(\operatorname{diam} W_1)^p + (\operatorname{diam} W_2)^p &< 2\left(2s\left(\frac{1-s}{2}\right)^k + \sigma\right)^p < \\ &< \left(2s\left(\frac{1-s}{2}\right)^k + s\left(\frac{1-s}{2}\right)^{k-1} + \eta\right)^p < (\operatorname{diam} V_k)^p\end{aligned}$$

purché $0 < \sigma < 2^{-1/p-1}\eta$: infatti, la disuguaglianza centrale equivale a

$$2^{\frac{1}{p}}\left(2s\left(\frac{1-s}{2}\right)^k + \sigma\right) < \left(2s\left(\frac{1-s}{2}\right)^k + s\left(\frac{1-s}{2}\right)^{k-1} + \eta\right),$$

ovvero

$$s\frac{(1-s)^k}{2^{k-1}} + \sigma < 2^{-\frac{1}{p}}\left(s(2-s)\frac{(1-s)^{k-1}}{2^{k-1}} + \eta\right),$$

cioè

$$\sigma < 2^{-\frac{1}{p}}\eta + s\frac{(1-s)^{k-1}}{2^{k-1}}\left(2^{-\frac{1}{p}}(2-s) - 1 + s\right).$$

Dato che $2^{-\frac{1}{p}}(2-s) - 1 + s < 0$ (ciò segue dalla relazione $1 - s = 2^{1-\frac{1}{p}}$), se k è sufficientemente grande otteniamo

$$s\frac{(1-s)^{k-1}}{2^{k-1}}\left(2^{-\frac{1}{p}}(2-s) - 1 + s\right) > -2^{-1-\frac{1}{p}}\eta,$$

e dunque la disuguaglianza sopra richiesta per σ vale certamente se $0 < \sigma < 2^{-1-\frac{1}{p}}\eta$.
Si conclude allora che $\dim_H(\Gamma_s) = p = \frac{\ln 2}{\ln(2/(1-s))}$.

Esercizio 2.4.7 (i) Dobbiamo dimostrare che se esiste $x \in C^{\mathbf{r}}_k \cap C^{\mathbf{r}'}_h$, con $k \ge h$, allora per ogni coordinata i fra 1 e N si ha

$$\frac{r'_i}{2^h} \le \frac{r_i}{2^k} < \frac{r_i + 1}{2^k} \le \frac{r'_i + 1}{2^h}.$$

Per il nostro x si ha

$$\frac{r_i}{2^k} \le x_i < \frac{r_i + 1}{2^k}, \qquad \frac{r'_i}{2^h} \le x_i < \frac{r'_i + 1}{2^h}, \qquad i = 1, \dots, N.$$

A questo punto, per ottenere la tesi dobbiamo escludere tre possibilità:

(a) esiste i fra 1 e N tale che

$$\frac{r_i}{2^k} \le \frac{r'_i}{2^h} \le x_i < \frac{r_i+1}{2^k} \le \frac{r'_i+1}{2^h};$$

(b) esiste i fra 1 e N tale che

$$\frac{r'_i}{2^h} \le \frac{r_i}{2^k} \le x_i < \frac{r'_i+1}{2^h} \le \frac{r_i+1}{2^k};$$

(c) esiste i fra 1 e N tale che

$$\frac{r_i}{2^k} \le \frac{r'_i}{2^h} \le x_i < \frac{r'_i+1}{2^h} \le \frac{r_i+1}{2^k}.$$

La condizione (c) è impossibile, essendo $k \ge h$. Dalla condizione (a) segue, moltiplicando per 2^k,

$$r_i \le 2^{k-h} r'_i < r_i + 1.$$

Dunque $0 \le 2^{k-h} r'_i - r_i < 1$, e poiché $2^{k-h} r'_i - r_i$ è intero, deve essere $2^{k-h} r'_i - r_i = 0$, ossia

$$\frac{r_i}{2^k} = \frac{r'_i}{2^h};$$

in altre parole

$$\frac{r'_i}{2^h} = \frac{r_i}{2^k} < \frac{r_i+1}{2^k} = \frac{r_i}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{r'_i}{2^h} + \frac{1}{2^k} < \frac{r'_i+1}{2^h}\,.$$

Perciò, per questo indice i ricadiamo nella condizione che dobbiamo dimostrare. Analogamente, dalla condizione (b) segue, moltiplicando per 2^k,

$$r_i < 2^{k-h}(r'_i + 1) \le r_i + 1.$$

Quindi $0 < 2^{k-h}(r'_i+1) - r_i \le 1$, e poiché $2^{k-h}(r'_i+1) - r_i$ è intero, deve essere $2^{k-h}(r'_i+1) - r_i = 1$, ossia

$$\frac{r_i+1}{2^k} = \frac{r'_i+1}{2^h};$$

in altre parole

$$\frac{r'_i}{2^h} < \frac{r'_i}{2^h} + \frac{1}{2^h} - \frac{1}{2^k} = \frac{r'_i+1}{2^h} - \frac{1}{2^k} = \frac{r_i}{2^k} < \frac{r'_i+1}{2^h} = \frac{r_i+1}{2^k}\,.$$

Pertanto, per questo indice i ricadiamo nuovamente nella condizione che dobbiamo dimostrare. Avendo escluso le tre possibilità contrarie, per esclusione deve essere

$$\frac{r'_i}{2^h} \le \frac{r_i}{2^k} < \frac{r_i+1}{2^k} \le \frac{r'_i+1}{2^h}\,, \qquad 1 \le i \le N,$$

e quindi $C_k^{\mathbf{r}} \subseteq C_h^{\mathbf{r}'}$.

(ii) Se $x \in A$, esiste $C_k^{\mathbf{r}} \in \mathcal{C}$ contenente x e contenuto in A. Inoltre, la sottofamiglia dei cubi $C_h^{\mathbf{s}}$ di $\mathcal{C}$ che contengono x e sono inclusi in A ha un elemento massimale $C_{h_0}^{\mathbf{s}_0}$, nel senso che ogni $C_h^{\mathbf{s}}$ contenente x, con $h \le h_0$, interseca A^c. Chiamiamo C_x tale cubo massimale. Per ogni $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^N$ e $j \in \mathbb{N}$ poniamo

$$X_j^{\mathbf{r}} = \{x \in A :\ x \in C_j^{\mathbf{r}} \subseteq A\}.$$

Detta $\mathcal{C}' = \{C_j^{\mathbf{r}} \in \mathcal{C} :\ X_j^{\mathbf{r}} \ne \emptyset\}$, risulta

$$A = \bigcup_{C \in \mathcal{C}'} C :$$

infatti, l'inclusione $\supseteq$ è banale; l'altra segue dal fatto che, se $x \in A$, il cubo massimale C_x contiene x ed è contenuto in A, quindi è un elemento di $\mathcal{C}'$. Si noti che se $C_1\,, C_2 \in \mathcal{C}'$ hanno intersezione non vuota, allora coincidono per (i); quindi l'unione sopra scritta è disgiunta.

Esercizio 2.4.8 (i) Per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ esiste un aperto A_k contenente E, tale che $m_N(A_k) < m_N^*(E) + \frac{1}{k}$.

Se poniamo $B = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^+} A_k$, si ha $B \in \mathcal{B}$ e $m_N^*(E) \le m_N(B) \le m_N(A_k) < m_N^*(E) + \frac{1}{k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, da cui $m_N(B) = m_N^*(E)$.

(ii) Per il teorema 2.4.7, si ha $H_N^* = \gamma_N m_N^*$; la tesi segue allora da (i).

Esercizio 2.4.9 Indicando con B_n la palla unitaria di $\mathbb{R}^n$, per calcolarne la misura α_n facciamo una integrazione per fette circolari $(n-1)$-dimensionali di raggio $\sqrt{1-t^2}$:

$$\alpha_n = \int_{-1}^{1} \alpha_{n-1}(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dt = 2\alpha_{n-1}\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dt.$$

Posto $t = \sin x$, si ha

$$\alpha_n = 2\alpha_{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx.$$

D'altra parte, posto $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx$, con n integrazioni per parti si ottiene facilmente

$$b_n = \frac{n-1}{n} b_{n-2} = \cdots = \frac{(n-1)!!}{n!!} B_n\,,$$

ove $B_n = \frac{\pi}{2}$ se n è pari, mentre $B_n = 1$ se n è dispari. Ne segue

$$\alpha_n = 2\alpha_{n-1}b_n = 4\alpha_{n-2}b_n b_{n-1} = 4\alpha_{n-2}\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{(n-2)!!}{(n-1)!!}B_n B_{n-1} = \frac{4}{n}\frac{\pi}{2}\alpha_{n-2} = \frac{2\pi}{n}\alpha_{n-2}\,.$$

Per verificare l'osservazione 2.4.8, in cui B_0 è la palla di $\mathbb{R}^N$ di diametro unitario, dunque di raggio $\frac{1}{2}$, notiamo che la tesi è $m_N(B_0) = \frac{1}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)}\big(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\big)^N$; allora, se N è pari, posto $k = \frac{N}{2}$ si ha $k \in \mathbb{N}^+$ e dunque $\Gamma(\frac{N}{2}+1) = \Gamma(k+1) = k!$, come si verifica dalla sua definizione (teorema 2.4.7) integrando k volte per parti. Quindi la tesi per N pari è $m_N(B_0) = \frac{1}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)}\big(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\big)^N = \frac{1}{N!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{N}{2}}$: d'altronde, essendo $\alpha_1 = 1$, si ricava facilmente che

$$m_N(B_0) = \frac{1}{2^N}\alpha_N = \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{2^N\,N!!} = \frac{1}{N!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{N}{2}}\,.$$

Se invece N è dispari, posto $N = 2k-1$, si ha $\Gamma(\frac{N}{2}+1) = \Gamma(k+\frac{1}{2})$ e, con k integrazioni per parti, si arriva a

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \left(k-\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}\,dx = \frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot 2\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{N!!\,\sqrt{\pi}}{2^{\frac{N+1}{2}}}.$$

Quindi la tesi per N dispari è $m_N(B_0) = \frac{1}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)}\big(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\big)^N = \frac{2^{\frac{N+1}{2}}\pi^{\frac{N}{2}}}{N!!\,\sqrt{\pi}\,2^N} = \frac{1}{N!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{N-1}{2}}$, e infatti

$$m_N(B_0) = \frac{1}{2^N}\alpha_N = \frac{(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}\cdot 2}{2^N\,N!!} = \frac{\pi^{\frac{N-1}{2}}}{2^{\frac{N-1}{2}}\,N!!}\,.$$

Capitolo 3

Funzioni misurabili

03

3.1 Definizione e proprietà

defmis

Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. Prima di introdurre la nozione astratta di integrale su X rispetto alla misura μ, occorre descrivere l'insieme delle funzioni per le quali l'integrale stesso ha senso. Considereremo funzioni $f : D \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, ove D è un insieme misurabile, ossia un elemento di $\mathcal{F}$. Dato che si ammette che le funzioni prendano i valori $\pm\infty$, sarà utile la convenzione $0\cdot(\pm\infty) = 0$, già adoperata nel paragrafo 2.2, con la quale potremo definire l'integrale senza ambiguità.
Cominciamo con la seguente proposizione, che introduce la proprietà caratteristica delle funzioni che ci interessano.

Proposizione 3.1.1 *Sia $D \in \mathcal{F}$, sia $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$. Sono fatti equivalenti:*

(i) $\{x \in D : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(ii) $\{x \in D : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{F} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) $\{x \in D : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{F} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(iv) $\{x \in D : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{F} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** Si ha

$$\{x \in D : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} \left\{ x \in D : f(x) > \alpha - \frac{1}{n} \right\}.$$

(ii) $\Longrightarrow$ **(iii)** La tesi si ha per passaggio al complementare in D.

(iii) $\Longrightarrow$ **(iv)** Si ha

$$\{x \in D : f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} \left\{ x \in D : f(x) < \alpha + \frac{1}{n} \right\}.$$

(iv) $\Longrightarrow$ **(i)** La tesi si ha per passaggio al complementare in D. $\square$

funmis **Definizione 3.1.2** *Sia $D \in \mathcal{F}$, sia $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$. La funzione f è detta* misurabile *su D se vale una delle condizioni della proposizione precedente (e quindi valgono tutte).*

Osservazione 3.1.3 Se $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è uno spazio probabilizzato (esempio 2.1.3 (6)), le funzioni misurabili su X sono chiamate *variabili aleatorie*.

Vediamo qualche esempio.

tantefzmis **Esempi 3.1.4 (1)** Se $E \subseteq X$, la *funzione caratteristica*, od *indicatrice*, di E, è

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in E^c. \end{cases}$$

Essa è misurabile su X se e solo se $E \in \mathcal{F}$: infatti

$$\{x \in X : \chi_E(x) > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \alpha \geq 1 \\ E & \text{se } \alpha \in [0, 1[\\ X & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

(2) Una *funzione semplice* è una funzione del tipo

$$\varphi(x) = \sum_{h=1}^{k} \alpha_h \chi_{E_h}(x), \quad x \in X,$$

ove $k \in \mathbb{N}^+$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sono numeri reali, $E_1, \ldots, E_k$ sono elementi di $\mathcal{F}$ e $\chi_{E_1}, \ldots, \chi_{E_k}$ sono le relative funzioni caratteristiche. Queste funzioni non si rappresentano in modo unico: ad esempio, se $X = \mathbb{R}$,

$$\chi_{[0,1]} - 2\chi_{]1,2]} = \chi_{[0,2]} - 3\chi_{]1,2]};$$

tuttavia se ne può dare una rappresentazione *canonica*: dato che esse assumono un numero finito di valori distinti $\beta_1, \ldots, \beta_r$, ponendo

$$A_i = \{x \in X : \varphi(x) = \beta_i\}, \qquad i = 1, \ldots, r,$$

si può scrivere

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{r} \beta_i \ \chi_{A_i}(x);$$

in questo modo si rappresenta la φ come combinazione lineare di funzioni caratteristiche di insiemi disgiunti e "massimali", nel senso che ciascun A_i è il più grande insieme dove la φ assume il corrispondente valore β_i.
Gli A_i sono misurabili perché ottenuti dagli E_h con un numero finito di unioni, intersezioni e differenze. Dalla rappresentazione canonica di φ segue subito che φ è misurabile: se i β_i sono ordinati in modo crescente, si ha infatti

$$\{x \in X : \varphi(x) > \alpha\} = \bigcup_{j=i}^{r} A_j \quad \text{se } \alpha \in [\beta_{i-1}, \beta_i[\,, \quad i = 2, \ldots, r,$$

mentre se $\alpha \geq \beta_r$ tale insieme è vuoto e se $\alpha < \beta_1$ tale insieme coincide con tutto X.

(3) In $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ le funzioni continue sono misurabili. Infatti per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} = f^{-1}(\,]\alpha, \infty[\,)$ è un aperto di $\mathbb{R}$, quindi è misurabile.

(4) In $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ le funzioni monotone sono misurabili, perché per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$ è una semiretta.

Indicheremo con $\mathcal{M}_D$ l'insieme delle funzioni misurabili su D, con $\mathcal{S}$ l'insieme delle funzioni semplici su X e con $\mathcal{S}_0$ l'insieme delle funzioni semplici su X che si annullano al di fuori di un insieme di misura finita.

mis+. **Osservazione 3.1.5** Se $f, g \in \mathcal{M}_D$, allora $f + g$ è misurabile sull'insieme D' dove la somma stessa è ben definita, ossia

$$D' = D \setminus \{x \in D : f(x) = -g(x) = \pm\infty\}.$$

Infatti D' è misurabile, dato che

$$\{x \in D : f(x) = \pm\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Big[\{x \in D : f(x) > n\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in D : f(x) < -n\}\Big] \in \mathcal{F},$$

ed inoltre

$$\begin{aligned}
&\{x \in D' : f(x) + g(x) > \alpha\} = \\
&\quad = \{x \in D' : g(x) = \pm\infty\} \cup \{x \in D' : -\infty < g(x) < +\infty, f(x) > \alpha - g(x)\} = \\
&\quad = \{x \in D' : g(x) = \pm\infty\} \cup \\
&\qquad \cup \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} [\{x \in D' : f(x) > r\} \cap \{x \in D' : +\infty > g(x) > \alpha - r\}] \in \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

Similmente, se $f, g \in \mathcal{M}_D$, allora il loro prodotto fg sta in $\mathcal{M}_D$ (esercizio 3.1.3).

La classe $\mathcal{M}_D$ è chiusa anche rispetto al passaggio all'estremo superiore ed all'estremo inferiore, relativi ad insiemi numerabili di indici (non per insiemi di indici qualunque: si veda l'esercizio 3.1.5).

limfmis **Proposizione 3.1.6** *Sia $D \in \mathcal{F}$, sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_D$. Allora le funzioni $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ e $\liminf_{n\to\infty} f_n$ appartengono a $\mathcal{M}_D$.*

Dimostrazione La misurabilità di $\sup_n f_n$ e $\inf_n f_n$ segue dalle uguaglianze

$$\{x \in D : \sup_n f_n > \alpha\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in D : f_n(x) > \alpha\},$$

$$\{x \in D : \inf_n f_n < \alpha\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in D : f_n(x) < \alpha\};$$

la misurabilità di $\limsup_{n\to\infty} f_n$ e $\liminf_{n\to\infty} f_n$ segue da quanto già provato e dalle identità

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_n \sup_{m\geq n} f_m, \qquad \liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_n \inf_{m\geq n} f_m. \quad \square$$

Un'importante caratterizzazione di $\mathcal{M}_D$ è la seguente:

limsempl **Proposizione 3.1.7** *Sia $D \in \mathcal{F}$, sia $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$. Si ha $f \in \mathcal{M}_D$ se e solo se esiste $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ tale che $\varphi_n \to f$ puntualmente in D per $n \to \infty$.*

Dimostrazione ($\Longleftarrow$) Poiché le funzioni semplici sono misurabili, la misurabilità di f segue dalla proposizione precedente.
($\Longrightarrow$) Sia $f \in \mathcal{M}_D$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in D$ poniamo

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } f(x) \geq n \\ \frac{k-1}{2^n} & \text{se } \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,2^n \\ \frac{k}{2^n} & \text{se } \frac{k-1}{2^n} < f(x) \leq \frac{k}{2^n}, \quad k = 0, -1, \ldots, -n\,2^n + 1 \\ -n & \text{se } f(x) \leq -n. \end{cases}$$

È facile verificare che $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}$ e che $\varphi_n(x) \to f(x)$ per $n \to \infty$. $\square$

msemplspec **Osservazioni 3.1.8 (1)** Se $f \geq 0$ in D, le funzioni φ_n sopra definite formano una successione crescente: $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq f(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in D$. Se invece $f \leq 0$, la successione $\{\varphi_n\}$ è decrescente.

(2) Se f è limitata in D, la convergenza delle φ_n è uniforme in D: infatti se $|f(x)| \leq L$, allora $|\varphi_n(x) - f(x)| \leq 2^{-n}$ per ogni $x \in D$ e per ogni $n \geq L$.

(3) La convergenza delle φ_n verso f è "dominata", ossia $|\varphi_n(x)| \leq |f(x)|$ per ogni $x \in D$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(4) Se l'insieme $\{x \in D : f(x) \neq 0\}$ è σ-finito, cioè è unione numerabile di insiemi $A_n \subseteq A_{n+1}$ misurabili di misura finita, allora rimpiazzando φ_n con $\varphi_n \chi_{A_n}$ si può supporre che ciascuna φ_n appartenga a $\mathcal{S}_0$. In tal caso valgono ancora (1) e (3), ma in generale non vale più (2).

Esercizi 3.1

f=alfa 1. Se f è misurabile su D, si provi che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in D : f(x) = \alpha\}$ è misurabile, ma che il viceversa è falso.

esistelim 2. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_D$. Si provi che l'insieme $\{x \in D : \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)\}$ è misurabile.

prmi 3. Si provi che se $f, g \in \mathcal{M}_D$ allora $fg \in \mathcal{M}_D$.

f'mis 4. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Si provi che la funzione f' è misurabile nello spazio misurato $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$.

nosupmi 5. Sia T un insieme, e sia $\{f_t\}_{t\in T}$ una famiglia di funzioni misurabili. La funzione $\sup_{t\in T} f_t$ è in generale misurabile?

misdenso 6. Si provi che una funzione $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile se e solo se gli insiemi $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > r\}$ sono misurabili per ogni $r \in D$, ove D è un insieme denso in $\mathbb{R}$.

carmi 7. Si provi che in un generico spazio misurato $(X, \mathcal{F}, \mu)$ una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile se e solo se $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ per ogni Boreliano $B \subseteq \mathbb{R}$. Si verifichi poi che la funzione $\lambda : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ definita da $\lambda(E) = \mu(f^{-1}(E))$ è una misura su $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. (Se $\mu(X) = 1$, in linguaggio probabilistico λ è la *misura immagine*, o *legge*, della variabile aleatoria f.)
[**Traccia:** si provi che $\mathcal{G} = \{B \in \mathcal{B} : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ è una σ-algebra contenente gli aperti.]

svib 8. Sia $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$; per ogni $x \in \mathbb{R}$ si consideri lo sviluppo di x in base b:

$$x = [x] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{b^n}, \qquad \varepsilon_n(x) \in \{0, 1, \ldots, b-1\}.$$

Provare che le funzioni

$$f_n(x) = \varepsilon_n(x)\ , \qquad n \in \mathbb{N}^+,$$

sono tutte misurabili in $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$.

BcM 9. Si provi che la σ-algebra $\mathcal{M}$ contiene propriamente la σ-algebra dei Boreliani.
[**Traccia:** per ogni $x \in [0, 1]$ si consideri il suo sviluppo binario $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}$ ($\varepsilon_n \in \{0, 1\}$), convenendo di scegliere lo sviluppo infinito nei casi di ambiguità: ad esempio, per $\frac{3}{4}$ si prenderà $0.10\overline{1}$ anziché 0.11. Posto $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon_n}{3^n}$, si mostri che $f([0, 1]) \subseteq C_3$ e che f è iniettiva. Si usi l'esercizio 3.1.8 per verificare che f è misurabile; quindi, $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ per ogni $B \in \mathcal{B}$ (esercizio 3.1.7). Sia $V \subset [0, 1]$ non misurabile: posto $E = f(V)$, si provi che $E \in \mathcal{M}$ ma $f^{-1}(E) \notin \mathcal{M}$. Se ne deduca che $E \notin \mathcal{B}$.]

elnoncompl 10. Si provi che lo spazio misurato $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m|_{\mathcal{B}})$ non è completo.
[**Traccia:** si consideri il Boreliano C_3, che ha misura nulla, e si utilizzi la traccia dell'esercizio 3.1.9.]

variante 11. Sia f misurabile ed inferiormente limitata. Si costruisca una successione di funzioni semplici che converga puntualmente a f in modo crescente.

comimi 12. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile in $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Si provi che $g \circ f$ è misurabile.

contBB 13. Si provi che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua allora $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ per ogni $B \in \mathcal{B}$. È vero il viceversa?

scmis 14. Si provi che le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ semicontinue (inferiormente o superiormente) sono misurabili.

misf2 15. Si provi che $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile se e solo se f^2 è misurabile e l'insieme $\{x \in D : f(x) > 0\}$ appartiene a $\mathcal{F}$.

tantetribu

16. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni da X in $\mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathcal{F}_n$ la più piccola σ-algebra di sottoinsiemi di X rispetto a cui le funzioni $\{f_k\}_{k\geq n}$ sono tutte misurabili. Si provi che:

    (i) $\mathcal{F}_n \supseteq \mathcal{F}_{n+1}$ per ogni n, e $\mathcal{F} = \bigcap_n \mathcal{F}_n$ è una σ-algebra;

    (ii) la funzione $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$, definita per gli x ove ha senso, non è in generale $\mathcal{F}$-misurabile;

    (iii) l'insieme $A = \{x \in X : \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty\}$ appartiene a $\mathcal{F}$;

    (iv) se si considerano funzioni da X in $\overline{\mathbb{R}}$ la (iii) è in generale falsa.

gC3C4

17. Si provi che esistono funzioni $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, tali che l'immagine inversa $g^{-1}(E)$ di un insieme $E \in \mathcal{M}$ non è un elemento di $\mathcal{M}$.
[**Traccia:** si costruisca un omeomorfismo $g : [0,1] \to [0,1]$ che trasformi C_4 in C_3, associando ciascun intervallo rimosso nella costruzione di C_4 al corrispondente intervallo rimosso nella costruzione di C_3. Si fissi poi un sottoinsieme non misurabile $W \subset C_4$ (esercizio 1.8.2) e si mostri che per $E = g(W)$ si ha $g^{-1}(E) \notin \mathcal{M}$.]

micomino

18. Si provi che esistono $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile secondo Lebesgue e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tali che $f \circ g$ non è misurabile.

bocomi

19. Si provi che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione Boreliana, ossia $\mathcal{B}$-misurabile, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora $f \circ g$ è Boreliana e quindi misurabile.

lipmis

20. Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una funzione Lipschitziana. Si provi che per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile l'insieme $f(A)$ è misurabile e

$$m_N(f(A)) \leq K^N m_N(A),$$

    ove K è la costante di Lipschitz di f.
    Traccia: si faccia uso del teorema 2.4.7 e dell'esercizio 2.3.12.]

misinvco

21. Sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle funzioni misurabili secondo Lebesgue definite in $[0,1]$. Poniamo

$$E_n = \left\{ f \in \mathcal{F} : \ m\left(\left\{ \{x \in [0,1] : \ f(x) > \frac{1}{n} \right\} \right) < \frac{1}{n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

    Si provi che, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $\mathcal{F}$ è il più piccolo insieme convesso che contiene E_n.

3.2 Funzioni essenzialmente limitate

Ltorto

Introduciamo anzitutto una locuzione che sarà utilissima nel seguito. Essa riflette il fatto che le funzioni che coincidono al di fuori di un insieme di misura nulla sono di fatto indistinguibili dal punto di vista della teoria della misura e dell'integrale.

qo **Definizione 3.2.1** *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato, sia $D \in \mathcal{F}$ e sia $p(x)$ un predicato, ossia un enunciato dipendente da un parametro, definito per $x \in X$. Diciamo che la proprietà espressa da $p(x)$ è vera* quasi ovunque *(e scriveremo* "q.o." *) in D se l'insieme $\{x \in D : p(x)\}$ appartiene a $\mathcal{F}$ ed il suo complementare in D, cioè $\{x \in D : \neg p(x)\}$, ha misura nulla.*

Ad esempio, in $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ la funzione $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ verifica $f(x) = 0$ q.o. in $\mathbb{R}$.

f=gqo **Osservazione 3.2.2** Siano $D \in \mathcal{F}$, $f \in \mathcal{M}_D$. Se $g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ è un'altra funzione tale che $f(x) = g(x)$ q.o. in D, possiamo dire che $g \in \mathcal{M}_{\mathcal{D}}$? In generale no (esercizio 3.2.1), ma la risposta è sì se lo spazio misurato è completo.
Infatti in tal caso, posto $A = \{x \in D : f(x) = g(x)\}$, per ipotesi $A \in \mathcal{F}$ e $\mu(D \setminus A) = 0$; d'altra parte

$$\{x \in D : g(x) > \alpha\} = \{x \in A : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in D \setminus A : g(x) > \alpha\},$$

ed a secondo membro il primo insieme è misurabile dato che $A \in \mathcal{F}$ e $f \in \mathcal{M}_D$, mentre il secondo è misurabile grazie alla completezza, essendo incluso in $D \setminus A$ che ha misura nulla.

Introduciamo ora lo spazio delle funzioni "essenzialmente limitate".

supinfess **Definizione 3.2.3** *Siano $D \in \mathcal{F}$, $f \in \mathcal{M}_D$. Se $A \subseteq D$, $A \in \mathcal{F}$, i numeri (finiti o no)*

$$\operatorname{supess}_A f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : f(x) \le \alpha \text{ q.o. in } A\},$$
$$\operatorname{infess}_A f = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : f(x) \ge \alpha \text{ q.o. in } A\}$$

si chiamano estremo superiore essenziale *ed* estremo inferiore essenziale *di f in A* (si conviene che $\inf \emptyset = +\infty$ e $\sup \emptyset = -\infty$).

esslim **Definizione 3.2.4** *Siano $D \in \mathcal{F}$, $f \in \mathcal{M}_D$. Se risulta* $\operatorname{infess}_D f > -\infty$ *e* $\operatorname{supess}_D f < +\infty$*, diremo che f è* essenzialmente limitata *in D e scriveremo $f \in \mathcal{L}^\infty(D)$ (anche se, più correttamente, dovremmo scrivere $\mathcal{L}^\infty(D, \mathcal{F}, \mu)$).*

È facile verificare che $f \in \mathcal{L}^\infty(D)$ se e solo se $f \in \mathcal{M}_D$ e $\operatorname{supess}_D |f| < +\infty$.

esesslim **Esempi 3.2.5 (1)** In $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ la funzione $f(x) = 5\chi_{\mathbb{Q}}(x) + \sin x$ verifica $\operatorname{supess}_{\mathbb{R}} f = 1$, $\operatorname{infess}_{\mathbb{R}} f = -1$.

(2) In $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua allora $\operatorname{supess}_A f = \sup_A f$ e $\operatorname{infess}_A f = \inf_A f$ per ogni aperto $A \subseteq \mathbb{R}$. La stessa cosa non vale se A non è aperto (esercizio 3.2.6).

stimeqo **Osservazione 3.2.6** Per ogni $f \in \mathcal{M}_D$ si ha $f(x) \ge \operatorname{infess}_D f$ e $f(x) \le \operatorname{supess}_D f$ q.o. in D (esercizio 3.2.3).

Osserviamo infine che $\mathcal{L}^\infty(D)$ è uno spazio vettoriale e un'algebra, come facile conseguenza dell"esercizio 3.2.4).

Esercizi 3.2

noqomis 1. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato non completo. Se $f \in \mathcal{M}_X$, si provi che esiste $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ non misurabile, tale che $f(x) = g(x)$ q.o. in X.

ses 2. Si provi che se $f \in \mathcal{L}^\infty(D)$ allora esistono $A, B \in \mathcal{F}$ tali che $\mu(D \setminus A) = \mu(D \setminus B) = 0$ e $\operatorname{supess}_D f = \sup_A f$, $\operatorname{infess}_D f = \inf_B f$.

seieqo 3. Sia $f \in \mathcal{M}_D$; provare che per ogni $E \subseteq D$, $E \in \mathcal{F}$, si ha

$$f(x) \geq \operatorname{infess}_E f \quad \text{e} \quad f(x) \leq \operatorname{supess}_E f \qquad \text{q.o. in } E.$$

milialg 4. Si provi che se $f, g \in \mathcal{L}^\infty(D)$ allora $f + g, fg \in \mathcal{L}^\infty(D)$ e

$$\operatorname{supess}_D |f + g| \leq \operatorname{supess}_D |f| + \operatorname{supess}_D |g|,$$

$$\operatorname{supess}_D |fg| \leq \operatorname{supess}_D |f| \cdot \operatorname{supess}_D |g|.$$

nocoptmi1 5. Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^\infty(D)$ una successione convergente puntualmente in D ad una funzione f. È vero che $f \in \mathcal{L}^\infty(D)$?

nocoptmi2 6. Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{M}_D$ una successione tale che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{q.o. in } D.$$

È vero che $f \in \mathcal{M}_D$?

alfanfn 7. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato, e sia $\{f_n\} \subset \mathcal{M}_D$. Se le f_n sono q.o. finite, si costruisca una successione $\{\alpha_n\}$ di numeri positivi tale che $\alpha_n f_n(x) \to 0$ q.o. in D per $n \to \infty$.
[**Traccia:** si osservi che non è restrittivo assumere che $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si scelga $k_n \in \mathbb{N}$ in modo che $A_n = \{x \in D : f_n(x) > k_n\}$ abbia misura minore di 2^{-n}; si verifichi che $\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$. Si deduca la tesi con $\alpha_n = \frac{1}{nk_n}$.]

linfty0 8. Si descriva lo spazio $\mathcal{L}^\infty(D)$ quando $D \in \mathcal{F}$ e $\mu(D) = 0$.

CL 9. Si provi che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora per ogni chiuso D si ha

$$\sup_D f = \operatorname{supess}_D f.$$

fEk 10. Sia f una funzione misurabile su $\mathbb{R}$, q.o. finita. Si provi che per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ esiste un insieme misurabile E_k, con $m(E_k) > k$, tale che f è limitata in E_k.

3.3 Lo spazio L^∞

Ldritto

Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. Fissato $D \in \mathcal{F}$, introduciamo nello spazio $\mathcal{L}^\infty(D)$ la seguente relazione di equivalenza:

$$f \simeq g \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = g(x) \quad \text{q.o. in } D;$$

le verifiche sono pressocché ovvie. A noi interesserà lo spazio quoziente rispetto a questa relazione.

Definizione 3.3.1 *L'insieme quoziente $\mathcal{L}^\infty(D)/\simeq$ si indica con $L^\infty(D)$ (nuovamente, la notazione più appropriata sarebbe $L^\infty(D, \mathcal{F}, \mu)$).*

Osserviamo che gli elementi di $L^\infty(D)$ non sono funzioni, ma *classi di equivalenza* di funzioni q.o. coincidenti; tuttavia, come è d'uso, continueremo a chiamarle *funzioni*, confondendo in effetti la classe $[f]$ con il suo rappresentante f. Si tenga presente però che tali "funzioni" sono definite soltanto quasi ovunque e non punto per punto.
Lo spazio $L^\infty(D)$ eredita da $\mathcal{L}^\infty(D)$ la struttura di spazio vettoriale e di algebra (esercizio 3.2.4): la somma è definita da $[f] + [g] = [f + g]$ e il prodotto da $[f] \cdot [g] = [fg]$; è immediato verificare che queste definizioni sono ben poste.
Le motivazioni per il passaggio da $\mathcal{L}^\infty$ a L^∞ sono fornite dal seguente fondamentale risultato:

Linfinito

Teorema 3.3.2 *Sia $D \in \mathcal{F}$. La quantità*

$$\|f\|_{\infty,D} = \operatorname{supess}_D |f|, \qquad f \in \mathcal{L}^\infty(D),$$

è invariante rispetto alla relazione $\simeq$; essa definisce una norma sullo spazio $L^\infty(D)$. Inoltre $(L^\infty(D), \|\cdot\|_{\infty,D})$ è uno spazio di Banach.

Dimostrazione Sia $f \in \mathcal{L}^\infty(D)$; se $g \simeq f$ è facile verificare che

$$\operatorname{supess}_D |f| = \operatorname{supess}_D |g|,$$

quindi la quantità $\|f\|_{\infty,D}$ dipende solo dalla classe $[f]$ e non da f. Verifichiamo che $\|\cdot\|_{\infty,D}$ è una norma.
(a) Ovviamente $\|f\|_{\infty,D} \geq 0$; se si ha $\|f\|_{\infty,D} = 0$ allora per l'osservazione 3.2.6 si ha $f(x) = 0$ q.o. in D, cioè $f \simeq 0$, ossia $[f]$ è l'elemento neutro della somma in $L^\infty(D)$.
(b) Si ha $\|\lambda f\|_{\infty,D} = |\lambda| \|f\|_{\infty,D}$ (facile verifica usando la definizione di estremo superiore essenziale).
(c) La subadditività di $\|\cdot\|_{\infty,D}$ segue dall'esercizio 3.2.4.
Proviamo ora la completezza dello spazio normato $(L^\infty(D), \|\cdot\|_{\infty,D})$. Per maggior chiarezza, utilizziamo la notazione $[f]$ per indicare gli elementi di $L^\infty(D)$.
Sia dunque $\{[f_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $L^\infty(D)$: ciò significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|[f_n] - [f_m]\|_{\infty,D} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \nu.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $g_n \in [f_n]$; allora

$$\operatorname{supess}_D |g_n| = \|[f_n]\|_{\infty,D}, \quad \operatorname{supess}_D |g_n - g_m| = \|[f_n] - [f_m]\|_{\infty,D} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Posto per $n, m \in \mathbb{N}$

$$A_n = \{x \in D : |g_n(x)| > \operatorname{supess}_D |g_n|\},$$
$$A_{nm} = \{x \in D : |g_n(x) - g_m(x)| > \operatorname{supess}_D |g_n - g_m|\},$$

dall'osservazione 3.2.6 segue che $\mu(A_n) = \mu(A_{nm}) = 0$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$; dunque anche l'insieme

$$B = \left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right] \cup \left[\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} A_{nm}\right]$$

ha misura nulla e si ha, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$|g_n(x) - g_m(x)| \le \operatorname{supess}_D |g_n - g_m| < \varepsilon \qquad \forall n, m \ge \nu, \quad \forall x \in D \setminus B.$$

Pertanto $\{g_n\}$ è una successione di $\mathcal{L}^\infty(D \setminus B)$ che è di Cauchy rispetto alla convergenza uniforme in $D \setminus B$. Dunque esiste una funzione $g : D \setminus B \to \mathbb{R}$ tale che $g_n \to g$ uniformemente in $D \setminus B$ per $n \to \infty$. Tale g è misurabile su $D \setminus B$ perché tali sono le g_n; se prolunghiamo g a tutto D ponendola uguale a 0 in B, otteniamo che $g \in \mathcal{M}_D$. Inoltre

$$\operatorname{supess}_D |g| \le \sup_{D\setminus B} |g| = \sup_D |g| < \infty,$$

cosicché la classe $[g]$ individuata da g è un elemento di $L^\infty(D)$. Proviamo che $[f_n] \to [g]$ in $L^\infty(D)$:

$$\|[f_n] - [g]\|_{\infty,D} = \operatorname{supess}_D |g_n - g| = \sup_{D\setminus B} |g_n - g| \to 0 \quad \text{per } n \to \infty. \quad \square$$

Esercizi 3.3

Linftyalg

1. Si provi che se $[f], [g] \in L^\infty(D)$ allora $[fg] \in L^\infty(D)$ e

$$\|[fg]\|_{\infty,D} \le \|[f]\|_{\infty,D} \cdot \|[g]\|_{\infty,D}.$$

idini

2. Sia $i : \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ l'applicazione definita da $i(f) = [f]$. Si provi che la restrizione di i allo spazio $C(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ è iniettiva.

sspdensi

3. Determinare la chiusura in $L^\infty(\mathbb{R})$ degli spazi $C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ e $C_c(\mathbb{R})$, ove

$$C_c(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) : f \text{ è nulla fuori da un compatto}\}$$

(si noti che confondiamo volutamente le $f \in C(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ con le loro classi di equivalenza in $L^\infty(\mathbb{R})$).

sempldense

4. Si provi che lo spazio delle funzioni semplici su X è denso in $L^\infty(X)$. Supponendo $(X, \mathcal{F}, \mu)$ σ-finito, qual'è la chiusura in $L^\infty(X)$ dello spazio delle funzioni semplici, nulle al di fuori di un insieme di misura finita?

Ldritto0

5. Si descriva lo spazio $L^\infty(D)$ quando $D \in \mathcal{F}$ e $\mu(D) = 0$.

3.4 Misurabilità e continuità

LusSevEgo

Quanta distanza c'è tra la nozione di misurabilità di una funzione e quella, più forte, di continuità? E similmente, quanta distanza intercorre fra la convergenza puntuale q.o. e la ben più restrittiva convergenza uniforme? I due risultati che seguono sembrano mostrare che le due distanze non sono poi così grandi.

Lusin **Teorema 3.4.1 (di Lusin)** *Sia $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile secondo Lebesgue, q.o. finita, nulla fuori di un insieme $A \in \mathcal{M}$ di misura finita. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $g \in C_c(\mathbb{R})$ tale che*

$$m(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon,$$

ed inoltre si ha $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Ricordiamo che lo spazio $C_c(\mathbb{R})$ è stato introdotto nell'esercizio 3.3.3. Per una lieve generalizzazione del teorema di Lusin si veda l'esercizio 3.4.1.

Dimostrazione Faremo quattro passi successivi.

(a) A compatto, $0 \leq f \leq 1$. Sia $\{\varphi_n\}$ la successione crescente di funzioni semplici, convergente uniformemente a f, costruita nella dimostrazione della proposizione 3.1.7, vale a dire

$$\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n} \qquad \text{se} \quad \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Poniamo

$$\psi_0 = \varphi_0, \qquad \psi_n = \varphi_n - \varphi_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+;$$

allora si ha $f = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n$ in $\mathbb{R}$. Osserviamo anche che ψ_n assume soltanto i valori 0 e 2^{-n}, cosicché $2^n \psi_n$ è la funzione caratteristica χ_{T_n} di un certo insieme misurabile $T_n \subseteq A$.
Sia ora V un aperto contenente A, tale che $\overline{V}$ sia compatto. Per ogni n scegliamo poi un compatto K_n ed un aperto V_n tali che

$$K_n \subseteq T_n \subseteq V_n \subseteq V, \qquad m(V_n \setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

(proposizione 1.7.3). Adesso costruiamo una funzione $h_n \in C_c(\mathbb{R})$ tale che

$$0 \leq h_n \leq 1, \qquad h_n = 1 \quad \text{in} \quad K_n\,, \qquad h_n = 0 \quad \text{in} \quad V_n^c\ :$$

ad esempio si può prendere

$$h_n(x) = \frac{\mathrm{d}(x, V_n^c)}{\mathrm{d}(x, V_n^c) + \mathrm{d}(x, K_n)}\,, \qquad x \in \mathbb{R},$$

ove $\mathrm{d}(x, K) = \inf\{|x - y| : y \in K\}$ per ogni $K \subseteq \mathbb{R}$; h_n è continua su $\mathbb{R}$ in virtù della maggiorazione

$$|\mathrm{d}(x, K) - \mathrm{d}(x', K)| \leq |x - x'| \qquad \forall x, x' \in \mathbb{R}, \quad \forall K \subseteq \mathbb{R}.$$

Definendo

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} h_n(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

si ottiene una funzione che è continua, in quanto la serie converge uniformemente su $\mathbb{R}$, e che è nulla fuori di V; dunque $g \in C_c(\mathbb{R})$. Si noti ora che

$$2^{-n} h_n(x) = \psi_n(x) \qquad \forall x \in K_n \cup V_n^c = (V_n \setminus K_n)^c :$$

infatti su K_n si ha $h_n = 1$ e $\psi_n = 2^{-n}$, mentre su V_n^c è $h_n = 0$. Quindi avremo

$$g(x) = f(x) \qquad \forall x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} (V_n \setminus K_n)^c.$$

Se ne deduce

$$m(\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq f(x)\} \leq \sum_{n=0}^{\infty} m(V_n \setminus K_n) \leq 2\varepsilon,$$

cioè la tesi del caso (a).

(b) A compatto, f limitata. Posto $M = \sup_X |f|$, le funzioni $\frac{f^+}{M}$, $\frac{f^-}{M}$ sono comprese fra 0 e 1, quindi per il passo (a) esistono due funzioni $g_+, g_- \in C_c(\mathbb{R})$ tali che

$$m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : g_+(x) \neq \frac{f^+(x)}{M}\right\}\right) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : g_-(x) \neq \frac{f^-(x)}{M}\right\}\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora la funzione $g = M(g_+ - g_-)$ verifica la tesi del caso (b): infatti se in un punto x si ha $g(x) \neq f(x)$, necessariamente deve essere $g_+(x) \neq \frac{f^+(x)}{M}$ oppure $g_-(x) \neq \frac{f^-(x)}{M}$, e dunque

$$m(\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq f(x)\}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(c) $m(A) < \infty$, f limitata. Sia K un compatto contenuto in A, tale che $m(A \setminus K) < \varepsilon/2$: l'esistenza di tale compatto è una facile conseguenza del fatto che $m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A \cap [-n, n])$ e della proposizione 1.7.3. La funzione $f\chi_K$ verifica le ipotesi del passo (b), quindi esiste $g \in C_c(\mathbb{R})$ tale che

$$m(\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq f(x)\chi_K(x)\}) < \frac{\varepsilon}{2};$$

ne segue

$$m(\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq f(x)\}) < \frac{\varepsilon}{2} + m(A \setminus K) < \varepsilon,$$

il che prova (c).

(d) Caso generale. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $B_n = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > n\}$. Gli insiemi B_n sono ovviamente contenuti in A, inoltre $B_n \supseteq B_{n+1}$ e $m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = 0$; in particolare, $\lim_{n\to\infty} m(B_n) = 0$ (proposizione 1.7.2). Scelto n in modo che $m(B_n) < \varepsilon/2$, la funzione $f\chi_{B_n^c}$ verifica le ipotesi del passo (c), quindi esiste $g \in C_c(\mathbb{R})$ tale che

$$m(\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq f(x)\chi_{B_n^c}(x)\}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

ed allora si ha anche

$$m(\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq f(x)\}) < \frac{\varepsilon}{2} + m(B_n) < \varepsilon.$$

Ciò prova il passo (d).
Infine resta da osservare che la condizione $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ è evidentemente automatica se f è illimitata; se invece f è limitata, per ottenerla basta sostituire g con

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } |g(x)| \leq \|f\|_\infty \\ \|f\|_\infty & \text{se } |g(x)| > \|f\|_\infty. \end{cases}$$

La G verifica ancora la tesi di (d) perché G differisce da g soltanto in punti dove sicuramente $g(x) \neq f(x)$, cosicché

$$\{x \in \mathbb{R} : g(x) = f(x)\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : G(x) = f(x)\},$$

da cui a maggior ragione

$$\mu(\{x \in \mathbb{R} : G(x) \neq f(x)\}) < \varepsilon. \quad \square$$

Non bisogna enfatizzare troppo la portata del teorema di Lusin: esso *non* afferma che ogni funzione misurabile è continua salvo che su un insieme di punti di misura arbitrariamente piccola. Ad esempio, la funzione $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ è discontinua in ogni punto di $[0,1]$, pur coincidendo addirittura q.o. con la funzione continua $g(x) = 0$.

SevEgo **Teorema 3.4.2 (di Severini-Egorov)** *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato con $\mu(X) < \infty$, e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili che converge q.o. in X ad una funzione f. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme $E \in \mathcal{F}$ con $\mu(E) < \varepsilon$, tale che $f_n \to f$ uniformemente in E^c per $n \to \infty$.*

Dimostrazione Per $m \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}^+$ poniamo

$$E_{k,m} = \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{ x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\};$$

allora si ha

$$\{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\} \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} E_{k,m} \quad \forall k \in \mathbb{N}^+,$$

e quindi

$$\mu\left(\left(\bigcup_{m=0}^{\infty} E_{k,m}\right)^c\right) = \mu\left(\bigcap_{m=0}^{\infty} E_{k,m}^c\right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Poiché $\mu(X) < \infty$, per la proposizione 2.1.5 si ottiene

$$\lim_{m\to\infty} \mu(E_{k,m}^c) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Di conseguenza, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ possiamo scegliere $m_k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu(E^c_{k,m_k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Dunque, posto $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E^c_{k,m_k}$, si ha

$$\mu(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E^c_{k,m_k}) < \varepsilon.$$

D'altra parte per ogni $x \in E^c$ si ha $x \in E_{k,m_k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, ossia

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \qquad \forall n \geq m_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Ciò prova che per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ risulta

$$\sup_{x \in E^c} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \qquad \forall n \geq m_k\,, \quad \forall x \in E^c,$$

cioè la tesi. □

Osservazione 3.4.3 Nel teorema di Severini-Egorov l'ipotesi $\mu(X) < \infty$ è indispensabile: in $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$, posto $f_n = \chi_{[-n-1,-n]\cup[n.n+1]}$, si ha $f_n \to 0$ puntualmente, ma non uniformemente al di fuori di alcun sottointervallo di $\mathbb{R}$; ed infatti $m(\mathbb{R}) = +\infty$.

Anche il teorema di Severini-Egorov non va enfatizzato: la convergenza puntuale q.o. si trasforma in convergenza uniforme al di fuori di un insieme di misura arbitrariamente piccola, ma l'insieme su cui si realizza la convergenza uniforme può essere estremamente irregolare e "frastagliato": di conseguenza, anche se le f_n erano continue, le proprietà di continuità ereditate da f sono ben poco significative.

Esercizi 3.4

Lumeglio

1. Si provi che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile q.o. finita, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione continua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ e

$$m(\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq f(x)\}) < \varepsilon.$$

[**Traccia:** supponendo dapprima $f \geq 0$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si consideri $f\chi_{]k,k+1[}$ e si determini una $g_k \in C_c(\mathbb{R})$ non negativa tale che $\|g_k\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ e $m(\{x \in [k, k+1] : g_k(x) \neq f(x)\}) < \varepsilon\, 2^{-|k|}$. Poi si consideri un famiglia $\{\varphi_k\}$ di funzioni continue che valgono 1 su $[k + \varepsilon\, 2^{-|k|}, k + 1 - \varepsilon\, 2^{-|k|-1}]$ e 0 fuori di $[k, k+1]$, con $\sum_k \varphi_k = 1$; quindi si definisca $g = \sum_k \varphi_k g_k$ e si mostri che g verifica la tesi. Infine si generalizzi al caso di f di segno qualunque.]

LuCa

2. Sia $f = \chi_{C_\xi}$, ove C_ξ è l'insieme di Cantor (paragrafo 1.6). Fissato $\varepsilon > 0$, si determini esplicitamente una funzione continua g, nulla fuori di $[0, 1]$, tale che $m(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$.

SeCa

3. Sia $f_n(x) = \max\{1 - n\ \mathrm{d}(x, C), 0\}$, ove $C = C_{1/3}$ è l'insieme ternario di Cantor. Si verifichi che $f_n \to 0$ q.o. in $[0,1]$ e, fissato $\varepsilon > 0$, si determini esplicitamente un insieme misurabile $E \subset [0,1]$ tale che $m(E) < \varepsilon$ e $f_n \to 0$ uniformemente in $[0,1] \setminus E$.

pusiunno

4. Trovare una successione $\{f_n\} \subset C[0,1]$ che verifichi $f_n \to 0$ puntualmente in $[0,1]$, ma che non converga uniformemente in alcun sottointervallo $I \subseteq [0,1]$.
[**Traccia:** per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $F_n = \left\{ \frac{k}{2^n} :\ k = 0, 1, \dots 2^n \right\}$, e definiamo

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in F_n \\ \frac{1}{2^{n-m}} & \text{se } x = \frac{2k-1}{2^{n+1}},\ k = 2^m p,\ p \text{ dispari}, 0 \le m \le n \\ \text{lineare} & \text{sui sottointervalli residui di } [0,1]. \end{cases}$$

Il grafico di f_n è una fila di 2^n triangoli isosceli, di altezza variabile fra $\frac{1}{2^n}$ e 1. Se potessimo vedere i grafici delle f_n in sequenza, noteremmo che i picchi si infittiscono, e che i picchi più alti "scorrono" verso destra: quelli alti $\frac{1}{2^h}$ si addensano verso i punti $\frac{k}{2^h}$ e in particolare quelli alti 1 si accumulano verso il punto 1. Si osservi che negli intervalli $\left[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}\right]$ si ha $\max f_p = \frac{1}{2^{n-1}}$ per ogni $p \ge n$...]

limtocon

5. Sia $f \in L^\infty(a,b)$. Per ogni $\delta > 0$ e $x \in [a,b]$ poniamo

$$\begin{aligned} m_\delta(x) &= \inf\{f(t) :\ t \in [a,b],\ 0 < |t - x| < \delta\} \\ M_\delta(x) &= \sup\{f(t) :\ t \in [a,b],\ 0 < |t - x| < \delta\}, \\ m(x) &= \lim_{\delta \to 0^+} m_\delta(x), \qquad M(x) = \lim_{\delta \to 0^+} M_\delta(x). \end{aligned}$$

Dimostrare che:

(i) f è continua nel punto x se e solo se $m(x) = M(x)$, e in tal caso $f(x) = m(x) = M(x)$;

(ii) m e M sono funzioni misurabili secondo Lebesgue.

3.5 Convergenza in misura

convinmis

Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. Introduciamo ora un tipo di convergenza per funzioni che è di grande importanza in teoria della probabilità.

comis

Definizione 3.5.1 *Siano f_n, f funzioni misurabili q.o. finite su X. Diciamo che $f_n \to f$* in misura *per $n \to \infty$ se per ogni $\delta > 0$ si ha*

$$\lim_{n \to \infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) = 0.$$

Diciamo che $\{f_n\}$ è fondamentale in misura *se è una successione di Cauchy rispetto alla convergenza in misura, ossia se per ogni $\delta > 0$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che*

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \delta\}) < \varepsilon \qquad \forall n, m \ge \nu.$$

Quando $\mu(X) = 1$, la convergenza in misura viene chiamata, come è giusto, *convergenza in probabilità*.
Le proprietà della convergenza in misura ed i suoi legami con la convergenza puntuale sono illustrati nella seguente

misqo **Proposizione 3.5.2** *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato, siano f_n, f, g funzioni misurabili q.o. finite su X.*

(i) *Se $f_n \to f$ in misura e $f_n \to g$ in misura, allora $f = g$ q.o. in X.*

(ii) *Se $f_n \to f$ q.o. in X ed inoltre $\mu(X) < \infty$, allora $f_n \to f$ in misura.*

(iii) *Se $f_n \to f$ in misura, allora $\{f_n\}$ è fondamentale in misura.*

(iv) *Se $\{f_n\}$ è fondamentale in misura, allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ che converge q.o. in X ad una funzione f misurabile e q.o. finita su X; inoltre $f_n \to f$ in misura.*

Dimostrazione **(i)** Basta osservare che, per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\{x \in X : |f(x) - g(x)| > \frac{1}{k}\right\} \subseteq$$
$$\subseteq \left\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > \frac{1}{2k}\right\} \cup \left\{x \in X : |f_n(x) - g(x)| > \frac{1}{2k}\right\},$$

come si verifica subito ragionando per assurdo. Quindi dall'ipotesi segue che

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f(x) - g(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}^+,$$

da cui $\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

(ii) Per il teorema di Severini-Egorov, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $E \in \mathcal{F}$ con $\mu(E) < \varepsilon$ tale che $f_n \to f$ uniformemente in E^c; ne segue che per ogni $\delta > 0$ si ha

$$\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\} \subseteq E \qquad \text{definitivamente,}$$

da cui

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) < \varepsilon \qquad \text{definitivamente:}$$

ciò prova la tesi.

(iii) Basta notare che

$$\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \delta\} \subseteq$$
$$\subseteq \left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\delta}{2}\right\} \cup \left\{x \in X : |f(x) - f_m(x)| > \frac{\delta}{2}\right\}.$$

(iv) Poiché $\{f_n\}$ è fondamentale in misura, è possibile scegliere induttivamente una sequenza $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ tale che $n_k < n_{k+1}$ e

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > 2^{-k}\}) < 2^{-k} \quad \forall n, m \geq n_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Poniamo $X_0 = X \setminus N$, ove

$$N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : |f_n(x)| = +\infty\}.$$

Allora, posto per $k, j \in \mathbb{N}^+$

$$A_k = \{x \in X_0 : |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| > 2^{-k}\}, \quad B_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k, \quad B = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j,$$

otteniamo

$$\mu(B_j) \le \sum_{k=j}^{\infty} \mu(A_k) < \sum_{k=j}^{\infty} 2^{-k},$$

ed essendo $\mu(B_1) < 1$ si conclude che

$$\mu(B) = \lim_{j\to\infty} \mu(B_j) = 0.$$

Notiamo ora che la successione $\{f_{n_k}\}$ converge uniformemente su $X_0 \setminus B_j$ per ogni $j \in \mathbb{N}^+$: infatti dall'uguaglianza $X_0 \setminus B_j = \bigcap_{k=j}^{\infty}(X_0 \setminus A_k)$ segue che se $q > p \ge j$ si ha

$$|f_{n_q}(x) - f_{n_p}(x)| \le \sum_{k=p}^{q-1} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \le \sum_{k=p}^{q-1} 2^{-k} \qquad \forall x \in X_0 \setminus B_j.$$

Ponendo allora $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$, la funzione f è ben definita per ogni $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty}(X_0 \setminus B_j) = X_0 \setminus B$, ossia q.o. in X, ed è ovviamente misurabile. Inoltre, essendo

$$|f(x)| \le |f_{n_j}(x)| + 1 \qquad \forall x \in X_0 \setminus B_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}^+,$$

la f risulta finita in $X_0 \setminus B$, e quindi è finita q.o. in X. Ciò prova la prima parte di (iv). Sia ora $\varepsilon > 0$; poiché la successione $\{f_n\}$ è fondamentale in misura, per ogni $\delta > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \delta\}) < \varepsilon \qquad \forall n, m \ge \nu.$$

Consideriamo la sottosuccessione $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ precedentemente costruita, che converge puntualmente q.o. in X ad una funzione f q.o. finita. In corrispondenza di ε esiste un insieme $B \in \mathcal{F}$ con $\mu(B) < \varepsilon$, tale che $f_{n_k} \to f$ uniformemente in B^c: basta prendere come B uno dei B_j costruiti in precedenza, con j sufficientemente grande. Allora per ogni $\delta > 0$ l'insieme $\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \delta\}$ è contenuto in B per ogni k abbastanza grande, cosicché esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu(\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \delta\}) \le \mu(B) < \varepsilon \qquad \forall k \ge k_0.$$

Ma allora per ogni $n \ge \nu$ si ha, scelto k tale che $k \ge k_0$ e $n_k \ge \nu$,

$$\begin{aligned}\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > 2\delta\} \subseteq \\ \subseteq \{x \in X : |f_n(x) - f_{n_k}(x)| > \delta\} \cup \{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \delta\},\end{aligned}$$

da cui

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > 2\delta\} < 2\varepsilon.$$

Ne segue, per l'arbitrarietà di δ, che $f_n \to f$ in misura. $\square$

Esercizi 3.5

opmisura

1. Supponiamo che $f_n \to f$ in misura e che $g_n \to g$ in misura. Si provi che:

   (i) $f_n + g_n \to f + g$ in misura;

   (ii) $\lambda f_n \to \lambda f$ in misura per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;

   (iii) $|f_n| \to |f|$ in misura;

   (iv) se $\mu(X) < \infty$, allora $f_n g_n \to fg$ in misura;

   (v) se $\mu(X) < \infty$ e f_n, f sono q.o. diverse da 0, allora $\frac{1}{f_n} \to \frac{1}{f}$ in misura.

rononmisura

2. Sia $\mu(X) = \infty$. Esibire esempi di successioni $\{f_n\}, \{g_n\}$ tali che:

   (i) $f_n \to f$ in misura, $g_n \to g$ in misura, ma $f_n g_n \not\to fg$ in misura;

   (ii) $f_n \to f$ in misura, f_n, f sono q.o. diverse da 0, ma $\frac{1}{f_n} \not\to \frac{1}{f}$ in misura.

qomisno

3. Esibire esempi di successioni $\{f_n\}$ tali che:

   (i) $f_n \to f$ q.o. in X ma $f_n \not\to f$ in misura;

   (ii) $f_n \to f$ in misura ma $f_n \not\to f$ q.o. in X.

missubsub

4. Sia $\mu(X) < \infty$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili q.o. finite e sia f un'altra funzione misurabile e q.o. finita. Si provi che $f_n \to f$ in misura se e solo se per ogni sottosuccessione $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ di $\{f_n\}$ esiste un'ulteriore sottosuccessione $\{f_{n_{k_h}}\}_{h\in\mathbb{N}}$ che converge a f q.o. in X.

composmis

5. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua. Si provi che se $f_n \to f$ in misura, allora $g \circ f_n \to g \circ f$ in misura. È vero questo risultato se g è soltanto continua?

Soluzioni degli esercizi del capitolo 3

sol03

Esercizi del paragrafo 3.1

Esercizio 3.1.1 Basta osservare che

$$\{x \in D :\ f(x) = \alpha\} = \{x \in D :\ f(x) \le \alpha\} \cap \{x \in D :\ f(x) \ge \alpha\}.$$

Per il viceversa, fissiamo $D = \mathbb{R}$, consideriamo un insieme $E \subset]0, \infty[$ non misurabile e definiamo

$$f(x) = x\left(\chi_E(x) - \chi_{E^c}(x)\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Allora, per $\alpha \neq 0$,

$$\{x \in D :\ f(x) = \alpha\} = \begin{cases} \{\alpha, -\alpha\} & \text{se } \alpha \in E \\ \{-\alpha\} & \text{se } \alpha \in E^c \text{ e } -\alpha \in E^c \\ \emptyset & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

mentre

$$\{x \in \mathbb{R} :\ f(x) = 0\} = \{0\}.$$

In particolare $\{x \in \mathbb{R} :\ f(x) = \alpha\}$ è misurabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Tuttavia f non è misurabile poiché, essendo $E \subset]0, \infty[$, l'insieme $\{x \in \mathbb{R} :\ f(x) > 0\}$ coincide con $E \cup]-\infty, 0[$ e quindi non è misurabile.

Esercizio 3.1.2 Risulta

$$\left\{x \in D :\ \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}\right\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^+} \bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} \bigcap_{n=\nu}^{\infty} \bigcap_{m=\nu}^{\infty} \left\{x \in D :\ |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}\right\},$$

e questi ultimi insiemi sono misurabili. D'altra parte

$$\left\{x \in D :\ \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\right\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^+} \bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} \bigcap_{n=\nu}^{\infty} \{x \in D :\ f_n(x) > k\},$$

e questi ultimi insiemi sono misurabili. Discorso analogo per il caso del limite $-\infty$.

Esercizio 3.1.3 Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha \geq 0$ si ha

$$\begin{aligned}\{x \in D :\ f(x)g(x) > \alpha\} &= \bigcup_{r\in\mathbb{Q}^+} \left[\{x \in D :\ f(x) > r\} \cap \left\{x \in D :\ g(x) > \frac{\alpha}{r}\right\}\right] \cup \\ &\cup \bigcup_{r\in\mathbb{Q}^+} \left[\{x \in D :\ f(x) < -r\} \cap \left\{x \in D :\ g(x) < -\frac{\alpha}{r}\right\}\right],\end{aligned}$$

mentre se $\alpha < 0$ risulta

$$\begin{aligned}\{x \in D :\ f(x)g(x) > \alpha\} &= \left[\{x \in D :\ f(x) \geq 0\} \cap \{x \in D :\ g(x) \geq 0\}\right] \cup \\ &\cup \left[\{x \in D :\ f(x) \leq 0\} \cap \{x \in D :\ g(x) \leq 0\}\right] \cup \\ &\cup \bigcup_{r\in\mathbb{Q}^+} \left[\{x \in D :\ 0 \leq f(x) < r\} \cap \left\{x \in D :\ 0 \geq g(x) > \frac{\alpha}{r}\right\}\right] \cup \\ &\cup \bigcup_{r\in\mathbb{Q}^+} \left[\{x \in D :\ 0 \geq f(x) > -r\} \cap \left\{x \in D :\ 0 \leq g(x) < -\frac{\alpha}{r}\right\}\right].\end{aligned}$$

Dunque fg è misurabile.

Esercizio 3.1.4 L'insieme

$$\left\{x \in [a, b] :\ \exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \in \mathbb{R}\right\}$$

coincide con $[a, b]$. Dato che

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}, \qquad x \in [a, b],$$

f' è limite puntuale di una successione di funzioni misurabili: quindi è misurabile.

Esercizio 3.1.5 Sia $V \subset [0, 1]$ un insieme non misurabile. Per ogni $t \in V$ sia $f_t(x) = \chi_{\{t\}}(x)$, $x \in [0, 1]$. Ciascuna f_t è una funzione misurabile, ma la funzione $\sup_{t\in V} f_t = \chi_V$ non lo è.

Esercizio 3.1.6 Basta osservare che se $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha, scelta una successione crescente $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ tale che $r_n \to \alpha$,

$$\{x \in \mathbb{R} :\ f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} :\ f(x) > r_n\}.$$

Esercizio 3.1.7 Poniamo

$$\mathcal{G} = \{E \subseteq \mathbb{R} :\ f^{-1}(E) \in \mathcal{F}\}.$$

Se $B \in \mathcal{G}$ per ogni Boreliano B, allora in particolare

$$f^{-1}(\,]a,\infty[\,) = \{x \in X :\ f(x) > a\} \in \mathcal{F},$$

cosicché f è misurabile. Viceversa, se f è misurabile, allora le semirette aperte stanno in $\mathcal{G}$: quindi tutti gli intervalli aperti appartengono a $\mathcal{G}$ e dunque lo stesso vale per tutti gli aperti. Inoltre $\mathcal{G}$ è una σ-algebra: infatti ovviamente $\emptyset \in \mathcal{G}$; poi, se $E \in \mathcal{G}$, allora $f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c \in \mathcal{F}$ e dunque $E^c \in \mathcal{G}$. Infine, se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$, allora $f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(E_n) \in \mathcal{F}$, per cui $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{G}$. Dato che la σ-algebra $\mathcal{G}$ contiene gli aperti, essa contiene anche i Boreliani. Ciò prova il primo enunciato.
Sia adesso $\lambda(E) = \mu(f^{-1}(E))$ per ogni Boreliano $E \subseteq \mathbb{R}$. Allora chiaramente $\lambda(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$, e se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una famiglia di elementi di $\mathcal{G}$ disgiunti, allora anche gli $f^{-1}(E_n)$ sono disgiunti e quindi

$$\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(E_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(f^{-1}(E_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(E_n).$$

Dunque λ è una misura.

Esercizio 3.1.8 Basta provare che per $i = 0, 1 \ldots, b-1$ l'insieme $f_n^{-1}(\{i\})$ è misurabile. Ebbene, se $x \in [0,1]$, $x = 0, \alpha_1\alpha_2 \ldots, \alpha_n\alpha_{n+1} \ldots$, allora si ha $\alpha_n = i$ se e solo se $b^n x = \alpha_n, \alpha_{n+1} \ldots \in]i, i+1]$; quindi

$$f_n^{-1}(\{i\}) = \{x \in [0,1] :\ b^n x - i \in]0,1]\}.$$

Questo insieme è misurabile essendo l'immagine inversa di un intervallo mediante la funzione continua $t \mapsto b^n t - i$.

Esercizio 3.1.9 Per ogni $x \in [0,1]$ si consideri il suo sviluppo binario $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}$ ($\varepsilon_n \in \{0,1\}$), convenendo di scegliere lo sviluppo infinito nei casi di ambiguità. Poniamo $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon_n}{3^n}$: l'immagine $f([0,1])$ è contenuta nell'insieme di Cantor C_3, e la funzione è iniettiva. Inoltre, per l'esercizio 3.1.8, f è misurabile: quindi, in virtù dell'esercizio 3.1.7, $f^{-1}(B)$ è misurabile per ogni Boreliano B. Scelto adesso $V \subset [0,1]$ non misurabile, l'insieme $f(V)$ è misurabile, essendo sottoinsieme di C_3 che ha misura nulla. Dunque $E = f(V)$ è misurabile ma ha immagine inversa $V = f^{-1}(E)$ non misurabile. Pertanto E non può essere Boreliano, ossia $E \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{B}$.

Esercizio 3.1.10 L'insieme di Cantor C_3 è un chiuso, quindi un Boreliano, di misura nulla (paragrafo 1.6). L'insieme $E = f(V)$, definito nella dimostrazione dell'esercizio 3.1.9, è incluso in C_3 (dunque è misurabile secondo Lebesgue con misura nulla), ma non è un Boreliano. Pertanto non tutti i sottoinsiemi di un Boreliano di misura nulla sono Boreliani.

Esercizio 3.1.11 Posto $k = \inf f$, la funzione $f - k$ è non negativa. Una successione di funzioni semplici che converge crescendo a $f - k$ è data da

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } f(x) - k > n, \\ \frac{h}{2^n} & \text{se } \frac{h}{2^m} \le f(x) - k < \frac{h+1}{2^n}, \quad h = 0, 1, \ldots, 2^n - 1. \end{cases}$$

La successione da prendere è allora $\psi_n(x) = k + \varphi_n(x)$.

Esercizio 3.1.12 Si ha

$$\{x \in \mathbb{R} : g(f(x)) > a\} = f^{-1}\left(g^{-1}(\,]a,\infty[\,)\right);$$

essendo g continua, l'insieme $G = g^{-1}(\,]a,\infty[\,)$ è aperto. Essendo f misurabile, $f^{-1}(G)$ è un insieme misurabile in virtù dell'esercizio 3.1.7.

Esercizio 3.1.13 Sia $\mathcal{A} = \{E \subseteq \mathbb{R} :\ f^{-1}(E) \in \mathcal{B}\}$. Si vede subito che $\mathcal{A}$ è una σ-algebra; inoltre, essendo f continua, essa contiene gli aperti, e quindi contiene $\mathcal{B}$. Ciò prova la prima parte della tesi. Il viceversa è falso: ad esempio, se $f = \chi_{\{0\}}$, allora per $B \in \mathcal{B}$ si ha

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } 0, 1 \in B \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{se } 0 \in B,\ 1 \notin B \\ \{0\} & \text{se } 0 \notin B,\ 1 \in B \\ \emptyset & \text{se } 0, 1 \notin B; \end{cases}$$

quindi in ogni caso $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$. Tuttavia, f è discontinua.

Esercizio 3.1.14 Se f è semicontinua inferiormente, allora $\{x \in \mathbb{R} : \ f(x) > \alpha\}$ è aperto, quindi misurabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Se f è semicontinua superiormente, allora $\{x \in \mathbb{R} : \ f(x) < \alpha\}$ è aperto, quindi misurabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3.1.15 Se f è misurabile è chiaro che f^2 è misurabile e che $\{x \in D : \ f(x) > 0\} \in \mathcal{F}$. Viceversa, sia $a \in \mathbb{R}$. Se $a = 0$ non c'è niente da dimostrare; se $a > 0$ risulta

$$\{x \in D : \ f(x) > a\} = \{x \in D : \ f(x)^2 > a^2\} \setminus \{x \in D : \ f(x) \le 0\},$$

e quindi l'insieme a primo membro è misurabile. Infine se $a < 0$ si ha

$$\{x \in D : \ f(x) > a\} = \{x \in D : \ f(x)^2 < a^2\} \cup \{x \in D : \ f(x) > 0\},$$

e quindi si ha la tesi.

Esercizio 3.1.16 (i) È evidente che $\mathcal{F}_n$ contiene $\mathcal{F}_{n+1}$, ed è anche chiaro che l'intersezione $\mathcal{F}$ è una σ-algebra.

(ii) Scegliendo $f_1(x) = x$ e $f_n \equiv 0$ per ogni $n > 1$, si ha $\mathcal{F}_1 = \mathcal{B}$, menre $\mathcal{F}_n = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ per ogni $n > 1$: pertanto $\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ e dunque $f(x) = x$ non è $\mathcal{F}$-misurabile.

(iii) Poiché A è l'insieme dove la serie $\Sigma|f_n|$ converge, A non dipende da $f_1, \dots, f_{n-1}$, quindi $A \in \mathcal{F}_n$ per ogni $n > 1$ e in definitiva $A \in \mathcal{F}$.

(iv) Scegliendo $f_1(x) = \tan x$ e $f_n \equiv 0$ per ogni $n > 1$, si ha $\Sigma|f_n(x)| = |\tan x|$ e $A = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$: poiché $\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, si ha $A \notin \mathcal{F}$.

Esercizio 3.1.17 Per costruire la $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, mettiamo in corrispondenza biunivoca gli intervalli $]a_n, b_n[= J_n \subset [0,1] \setminus C_4$ con gli intervalli $]c_n, d_n[= I_n \subset [0,1] \setminus C_3$, ponendo

$$g(0) = 0, \quad g(1) = 1, \quad g(a_n) = c_n\,, \quad g(b_n) = d_n\,, \quad g(J_n) = I_n \text{ in modo lineare e crescente,}$$

$$g(x) = \sup\left\{g(t) : \ t < x, \ t \in \bigcup_n J_n\right\} \quad \forall x \in C_4 \setminus \left[\{0,1\} \cup \bigcup_n \{a_n, b_n\}\right].$$

Completiamo la definizione di g ponendo $g(x) = 0$ per $x < 0$ e $g(x) = 1$ per $x > 1$. Si dimostrano i fatti seguenti:

(a) $g(x) = \sup\{g(t) : \ t < x, \ t \in \bigcup_n J_n\}$ per ogni $x \in [0,1]$.

Infatti ciò è vero, per definizione, se $x \in C_4 \setminus \{0, 1, a_n, b_n\}$; vale anche per $x \in]a_n, b_n]$ per ogni n, mentre se $x = a_m$ allora

$$g(x) = g(a_m) = c_m = \sup_n\{d_n : \ d_n < c_m\} = \sup_n\{g(b_n) : b_n < a_m\} = \sup\left\{g(t) : \ t \in \bigcup_n J_n\,, \ t < a_m\right\}.$$

Infine, lo stesso vale per $x = 1$.

(b) g è strettamente crescente in $[0,1]$.

Infatti, se $0 \le x < y \le 1$ esistono $z, t \in \bigcup_n J_n$ tali che $x < z < t < y$, e da (a) segue che $g(x) \le g(z) < g(t) \le g(y)$.

(c) g è continua.

Infatti, se $x \in]0,1]$ e $x_n \nearrow x$, allora $g(x_n) \le g(x)$; fissato $\varepsilon > 0$ esiste $t < x$, $t \in \bigcup_n J_n$, tale che $g(t) > g(x) - \varepsilon$; poiché $x_n > t$ definitivamente, si ha $g(x_n) > g(x) - \varepsilon$. Dunque $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$. Se invece $x \in [0,1[$ e $z_n \searrow x$, allora $g(z_n) \ge g(x)$; fissato $\varepsilon > 0$ esiste $t > x$, $t \in \bigcup_n J_n$, tale che $g(t) < g(x) + \varepsilon$. Dato che $z_n < t$ definitivamente, si ha $g(z_n) < g(x) + \varepsilon$, da cui ancora $\lim_{n\to\infty} g(z_n) = g(x)$.

(d) g è bigettiva da $[0,1]$ in $[0,1]$.

Infatti, $g|_{[0,1]}$, essendo continua, ha immagine connessa contenente 0 e 1: dunque è surgettiva. Inoltre g è iniettiva, essendo strettamente crescente.

Costruita la g, scegliamo un sottoinsieme W di C_4 non misurabile: esiste (esercizio 1.8.2) perché C_4 ha misura positiva. Notiamo che $E = g(W)$, essendo contenuto in C_3 che ha misura nulla, è misurabile. Tuttavia, $g^{-1}E) = g^{-1}(g(W)) = W$ non è un insieme misurabile.

Esercizio 3.1.18 Sia g la funzione continua dell'esercizio 3.1.17. Sia poi $f = \chi_{g(W)}$, ove W è l'insieme non misurabile di tale esercizio: f è misurabile perché $g(W)$ è misurabile, ma $f \circ g$ non lo è in quanto

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \ f(g(x)) > \frac{1}{2}\right\} = g^{-1}\left(f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, \infty\right[\right)\right) = g^{-1}(g(W)) = W.$$

Esercizio 3.1.19 Se $a \in \mathbb{R}$, si ha

$$\{x \in \mathbb{R} : \ f(g(x) > a\} = g^{-1}\left(f^{-1}(\,]a, \infty[\,)\right)$$

e l'insieme $f^{-1}(\,]a, \infty[\,)$ appartiene a $\mathcal{B}$. Dato che g è continua, $g^{-1}\left(f^{-1}(\,]a, \infty[\,)\right)$ appartiene anch'esso a $\mathcal{B}$. Quindi $f \circ g$ è Boreliana.

Esercizio 3.1.20 Proviamo anzitutto che $f(E)$ è misurabile. Supponiamo dapprima che E sia limitato. Per la proposizione 1.7.3 (iv)-(v), esiste un Boreliano $B \subseteq E$, intersezione numerabile di chiusi C_n, tale che $m(E \setminus B) = 0$. Tali chiusi sono anche compatti: dunque le immagini $f(C_n)$ sono a loro volta insiemi compatti, dunque misurabili. Ne segue che $f(B)$, unione numerabile dei compatti $f(C_n)$, è misurabile. D'altra parte, $f(E) = f(E \setminus B) \cup f(B)$, e l'insieme $f(E \setminus B)$ è misurabile di misura nulla in virtù dell'esercizio 1.4.2. Ne segue che anche $f(E)$ è misurabile. Se E è non limitato, scriviamo $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E \cap B_n$, ove B_n è la palla di centro 0 e raggio n. Ciascun $f(E \cap B_n)$ è misurabile per quanto già visto, e quindi anche $f(E)$, unione numerabile di misurabili, è misurabile.
Valutiamo la misura di $f(E)$: dal teorema 2.4.7 sappiamo che $H_N^*(G) = \gamma_N m_N^*(G)$ per ogni $G \subseteq \mathbb{R}^N$. Allora, utilizzando l'esercizio 2.3.12 si ha

$$m_N(f(E)) = \frac{1}{\gamma_N} H_N^*(f(E)) \leq \frac{1}{\gamma_N} K^N H_N^*(E) = K^N m_N(E).$$

Esercizio 3.1.21 Notiamo che la funzione identicamente nulla è un elemento di E_n . Sia $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$ un insieme convesso contenente E_n. Fissata $g \in \mathcal{F}$, poniamo per $i = 1, \ldots, n+1$

$$f_i = (n+1)\, g\, \chi_{\left[\frac{i-1}{n+1}, \frac{i}{n+1}\right[}\ ;$$

allora risulta $f_i \in E_n$, $i = 1, \ldots, n+1$, e $g = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} f_i$. Pertanto g è combinazione convessa di elementi di E_n e quindi $g \in \mathcal{K}$: ciò prova che $\mathcal{K} = \mathcal{F}$.

Esercizi del paragrafo 3.2

Esercizio 3.2.1 Poiché lo spazio X non è completo, esiste $E \in \mathcal{F}$ con $\mu(E) = 0$ ed esiste $F \subset E$ tale che $F \notin \mathcal{F}$. Data $f \in \mathcal{M}_X$, sia $a \in \mathbb{R}$ tale che l'insieme $\{x \in X : \ f(x) > a\}$ abbia misura positiva. Definiamo

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \setminus E \\ a+1 & \text{se } x \in F \\ a-1 & \text{se } x \in E \setminus F. \end{cases}$$

Allora si ha $f(x) = g(x)$ q.o., perché le due funzioni coincidono in $X \setminus E$ e $\mu(E) = 0$. Tuttavia

$$\{x \in X : \ g(x) > a - 1\} = F \cup \{x \in X \setminus E : \ f(x) > a - 1\},$$

e questo insieme non è misurabile: se lo fosse, lo sarebbe anche F per differenza, visto che l'unione è disgiunta.

Esercizio 3.2.2 Per definizione di estremo superiore essenziale, posto

$$A_n = \left\{x \in D : \ f(x) < \operatorname{supess}_D f + \frac{1}{n}\right\},$$

si ha $A_n \in \mathcal{F}$ e $\mu(D \setminus A_n) = 0$. Osservato che $A_n \subseteq A_m$ se $n \geq m$, sia $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} A_n$: allora $\mu(D \setminus A) = 0$ e $f(x) \leq \text{supess}_D f$ per ogni $x \in A$: quindi $\sup_A f \leq \text{supess}_D f$. D'altra parte, essendo $\mu(D\setminus A) = 0$, si ha ovviamente $f(x) \leq \sup_A f$ per ogni $x \in A$, ossia q.o. in D: ne segue, per definizione, $\text{supess}_D f \leq \sup_A f$.
Discorso del tutto analogo per l'estremo inferiore essenziale.

Esercizio 3.2.3 Sia $E \in \mathcal{F}$. Se $\mu(E) = 0$, allora dalla definizione segue $\text{supess}_E f = -\infty$ e $\text{infess}_E f = +\infty$; ma in questo caso la tesi vale, perché possiamo dire che $f(x) \leq -\infty$ e $f(x) \geq +\infty$ q.o. in E: infatti, ciò è vero per ogni $x \in \emptyset$ (ossia mai), ove $\emptyset \subset E$ e $\mu(E \setminus \emptyset) = \mu(E) = 0$.
Sia ora $\mu(E) > 0$. Per l'esercizio 3.2.2, esistono $A, B \in \mathcal{F}$, contenuti in E, con $\mu(E\setminus A) = \mu(E\setminus B) = 0$, tali che

$$\text{supess}_E f = \sup_A f, \qquad \text{infess}_E f = \inf_B f.$$

Dato che $\mu(E \setminus A) = \mu(E \setminus B) = 0$, si ha

$$f(x) \leq \sup_A f = \text{supess}_E f \quad \text{q.o. in } E, \qquad f(x) \geq \inf_B f = \text{infess}_E f \quad \text{q.o. in } E.$$

Esercizio 3.2.4 Poiché, per l'esercizio 3.2.3,

$$|f(x)| \leq \text{supess}_D f \text{ q.o. in } D, \qquad |g(x)| \leq \text{supess}_D g \text{ q.o. in } D,$$

esistono due insiemi $A, B \in \mathcal{F}$, contenuti in D, con $\mu(D \setminus A) = \mu(D \setminus B) = 0$, tali che

$$|f(x)| \leq \text{supess}_D|f| \quad \forall x \in A, \qquad |g(x)| \leq \text{supess}_D|g| \quad \forall x \in B.$$

Dunque

$$|f(x) + g(x)| \leq \text{supess}_D|f| + \text{supess}_D|g| \qquad \forall x \in A \cap B,$$

e siccome $\mu(D \setminus (A \cap B)) = \mu((D \setminus A) \cup (D \setminus B)) = 0$, si ha

$$|f(x) + g(x)| \leq \text{supess}_D|f| + \text{supess}_D|g| \quad \text{q.o in } D,$$

vale a dire $\text{supess}_D|f + g| \leq \text{supess}_D|f| + \text{supess}_D|g|$.
Discorso analogo per $\text{supess}_G|fg|$.

Esercizio 3.2.5 È falso: ad esempio, con $D = \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ e $f_n(x) = |x| \wedge n$, si ha $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ e $f_n \to f$ puntualmente in $\mathbb{R}$, ma $f \notin \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$.

Esercizio 3.2.6 Non è vero: ad esempio, sia $(X; \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato non completo e sia $g \in \mathcal{M}_D$. Grazie all'esercizio 3.2.1, esiste $f : X \to \mathbb{R}$ non misurabile, tale che $f = g$ q.o. in D. Allora, se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni misurabili che converge a g puntualmente in D, si ha $f_n \to f$ puntualmente q.o. in D, con $f \notin \mathcal{M}_D$.

Esercizio 3.2.7 Buttando via un insieme di misura nulla e sostituendo a f_n la funzione $g_n = \max_{1\leq h\leq n} |f_h|$, possiamo supporre che $0 \leq f_n \leq f_{n+1} < \infty$. Per ipotesi, le f_n sono q.o. finite: dunque, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esiste $k_n \in \mathbb{N}$, con $k_n < k_{n+1}$, tale che

$$\mu(A_n) < \frac{1}{2^n}, \quad \text{ove} \quad A_n = \{x \in D : \ f_n(x) > k_n\}.$$

Sia $A = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty A_n$; si ha $\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{n=k}^\infty A_n\right)$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, da cui $\mu(A) \leq \sum_{n=k}^\infty \frac{1}{2^n} \to 0$ per $k \to \infty$. Dunque si ha $x \notin A$ per q.o. $x \in D$. Ciò significa, per definizione di A^c, che per q.o. $x \in D$ esiste $k_x \in \mathbb{N}^+$ tale che $f_n(x) \leq k_n$ per ogni $n \geq k_x$. Posto allora $\alpha_n = \frac{1}{nk_n}$, se $x \notin A$ si ha $\alpha_n f_n(x) < \frac{1}{n}$ per ogni $n \geq k_x$, e dunque $\alpha_n f_n(x) \to 0$ q.o. in D per $n \to \infty$.

Esercizio 3.2.8 Se $\mu(D) = 0$ e $f \in \mathcal{M}_D$, allora per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $f(x) \leq \alpha$ q.o.in D: infatti ciò vale sicuramente almeno sull'insieme vuoto, e $\mu(D \setminus \emptyset) = \mu(D) = 0$. Ne segue $\text{supess}_D f = -\infty$ e, analogamente, $\text{infess}_D f = +\infty$. Dunque $\mathcal{L}^\infty(D)$ non si può definire.

Esercizio 3.2.9 Anzitutto si ha $f(x) \leq \sup_D f$ per ogni $x \in D$, quindi anche q.o. in D: dunque

$\operatorname{supess}_D f \le \sup_D f$. D'altra parte, se A è un sottoinsieme misurabile di D con $m(D \setminus A) = 0$, tale che $f(x) \le \operatorname{supess}_D f$ per ogni $x \in A$, allora l'insieme A è denso in D, poiché altrimenti $D \setminus A$ conterrebbe un piccolo aperto e avrebbe misura positiva. Dunque, fissato $x \in D$ esiste una successione $\{x_n\} \subset A$ convergente a x per $n \to \infty$. Ne segue

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \le \operatorname{supess}_D f,$$

e pertanto $\sup_D f \le \operatorname{supess}_D f$.

Esercizio 3.2.10 Fissato $k \in \mathbb{N}^+$, nell'intervallo $[-k, k]$ si ha

$$0 = m(\{x \in [-k,k] : \ |f(x)| = \infty\} = \lim_{n\to\infty} m(\{x \in [-k,k] : \ |f(x)| > n\};$$

quindi, se $n \ge n_k$ si ha $m(\{x \in [-k,k] : \ |f(x)| > n\} < 1$; ponendo $E_k = \{x \in [-k,k] : \ |f(x)| \le n\}$, si deduce $m(E_k) \ge 2k - 1 \ge k$.

Esercizi del paragrafo 3.3

Esercizio 3.3.1 Siano $\varphi \in [f]$ e $\psi \in [g]$: allora per l'esercizio 3.2.3 si ha, per q.o. $x \in D$,

$$|\varphi(x)\psi(x)| \le \operatorname{supess}_D |\varphi| \operatorname{supess}_D |\psi| = \|[f]\|_{L^\infty(D)} \|[g]\|_{L^\infty(D)}.$$

Di conseguenza

$$\|[fg]\|_{L^\infty(D)} = \operatorname{supess}_D |\varphi\psi| \le \|[f]\|_{L^\infty(D)} \|[g]\|_{L^\infty(D)}.$$

Esercizio 3.3.2 Sia $j = i|_{C(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})}$. Se $j(f) = 0$, allora $[f] = 0$, ossia $f = 0$ q.o. in $\mathbb{R}$. Ma poiché f è continua, deve essere $f \equiv 0$ in $\mathbb{R}$: infatti, se esistesse $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \ne 0$, la f sarebbe diversa da 0 in un intorno di x di misura positiva, il che è assurdo. Dunque j è iniettiva.

Esercizio 3.3.3 Lo spazio $C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ è chiuso in $L^\infty(\mathbb{R})$. Infatti se $\{f_n\} \subset C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ è una successione di Cauchy in $L^\infty(\mathbb{R})$, in virtù dell'esercizioi 3.2.9 essa è di Cauchy in $C(\mathbb{R})$, e quindi converge uniformemente ad una funzione f continua e limitata, dunque ad un elemento di $C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Invece la chiusura di $C_c(\mathbb{R})$ in $C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ è lo spazio

$$\left\{ f \in C(\mathbb{R}) : \ \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \right\}.$$

Infatti, se f appartiene a $C_c(\mathbb{R})$, essa è limite uniforme della successione $\{f \cdot g_n\}$, ove $g_n \in C_c(\mathbb{R})$ verifica $0 \le g_n \le 1$, $g_n = 1$ su $[-n, n]$ e $g_n = 0$ fuori di $[-n-1, n+1]$.

Esercizio 3.3.4 Se $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, la successione $\{\varphi_n\}$ di funzioni semplici definita nella dimostrazione della proposizione 3.1.7 converge a f uniformemente, come spiegato nell'osservazione 3.1.8. Per rispondere alla seconda domanda, scriviamo $X = \bigcup_{j=1}^\infty X_j$ con $X_j \subseteq X_{j+1}$, e $X_j \in \mathcal{F}$ con $\mu(X_j) < \infty$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Allora la chiusura dello spazio $\mathcal{S}_0$ in $L^\infty(X)$ è l'insieme

$$F = \left\{ f \in L^\infty(X) : \ \lim_{n\to\infty} \sup_{X_n^c} |f| = 0 \right\}.$$

Infatti, se $f \in F$, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}^+$ tale che $|f| < \varepsilon$ su X_n^c per ogni $n \ge \nu$. Fissata $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}$ tale che $\|\varphi_n - f\|_\infty < \varepsilon$ per $n \ge \nu$, successione che esiste per la parte precedente dell'esercizio, poniamo $\psi_n = \varphi_n \chi_{X_n}$: si ha $\psi_n \in \mathcal{S}_0$ e

$$\sup_X |\psi_n - f| = \max \left\{ \sup_{X_n} |\varphi_n - f|, \sup_{X_n^c} |f| \right\} \le \varepsilon \qquad \forall n \ge \nu,$$

cosicché $\psi_n \to f$ in $L^\infty(X)$. Viceversa, sia $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}_0$ tale che $\varphi_n \to f$ in $L^\infty(X)$. Sarà $\varphi_n = 0$ fuori di E_n, ove $E_n \in \mathcal{F}$ con $\mu(E_n) < \infty$. Esiste $k_n \in \mathbb{N}^+$ tale che $E_n \subseteq \bigcup_{k>k_n} X_k = X_{k_n}^c$; quindi, fissato

$\varepsilon > 0$ e sccelto n sufficientemente grande, si ha

$$\varepsilon > \sup_X |\varphi_n - f| = \max\left\{\sup_{E_n} |\varphi_n - f|, \sup_{E_n^c} |f|\right\};$$

dunque $|f| < \varepsilon$ in E_n^c, ed essendo $X_{k_n} \subseteq E_n^c$ si conclude che, per n grande, $|f| < \varepsilon$ fuori di X_n. Pertanto $f \in F$.

Esercizio 3.3.5 Sia $D \in \mathcal{F}$ con $\mu(D) = 0$. Allora ogni $f \in \mathcal{M}_D$ è nulla q.o. in D: infatti si ha $f = 0$ sicuramente sull'insieme vuoto, che verifica $\mu(D \setminus \emptyset) = \mu(D) = 0$. Pertanto l'unico elemento di $L^\infty(D)$ è la classe $[0]$.

Esercizi del paragrafo 3.4

Esercizio 3.4.1 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile q.o. finita; supponiamo dapprima $f \geq 0$. Fissato $\varepsilon > 0$, per $f\chi_{[k,k+1]}$ $(k \in \mathbb{Z})$ vale il teorema di Lusin (teorema 3.4.1), e dunque esiste $g_k \in C_c(\mathbb{R})$ tale che

$$\|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad g_k \geq 0, \quad g_k = 0 \text{ su }]k, k+1[^c, \quad m(\{x \in [k, k+1] : \ f(x) \neq g_k(x)\}) < \frac{\varepsilon}{2^{|k|}}.$$

Sia poi $\varphi_k \in C_c(]k, k+1[)$ tale che $\varphi_k \geq 0$, $\varphi_k = 1$ su $[k + \varepsilon\, 2^{-|k|}, k + 1 - \varepsilon\, 2^{-|k|-1}]$ e $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_k = 1$ in $\mathbb{R}$. Posto $g = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k\varphi_k$, la g è continua perché la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$, inoltre $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ e

$$m(\{x \in \mathbb{R} : \ g(x) \neq f(x)\}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} m(\{x \in [k, k+1] : \ g_k\varphi_k \neq f(x)\}) \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\varepsilon}{2^{|k|}} + \frac{\varepsilon}{2^{|k|}} + \frac{\varepsilon}{2^{|k|+1}}\right) < 3\varepsilon.$$

Se f ha segno variabile, si trovano g^+ e g^- in $C_c(\mathbb{R})$, con le stesse proprietà della g precedente, e in particolare tali che

$$m(\{x \in \mathbb{R} : \ f^+(x) \neq g^+(x)\}) < \varepsilon, \quad m(\{x \in \mathbb{R} : \ f^-(x) \neq g^-(x)\}) < \varepsilon;$$

si deduce allora subito che, posto $g = g^+ - g^-$,

$$\begin{aligned} &m(\{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \neq g(x)\}) = \\ &\quad = m(\{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \geq 0, \ f^+(x) \neq g^+(x)\}) + m(\{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \leq 0, \ f^-(x) \neq g^-(x)\}) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Esercizio 3.4.2 Sia C_n l'insieme che rimane dopo l'n-esimo passo della costruzione dell'insieme di Cantor C_ξ. Ricordiamo che C_n consiste di 2^n intervalli $J_1^n, \ldots, J_{2^n}^n$, che $C_n \supset C_{n+1}$ e che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} C_n = C_\xi$, cosicché $m(C_n) \to m(C_\xi)$ per $n \to \infty$. Dunque, dato $\varepsilon > 0$, possiamo scegliere $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $m(C_n \setminus C_\xi) < \varepsilon$. Fissato questo intero positivo n, definiamo $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ così:

- $g = 0$ fuori di C_n, ossia su $[0, 1] \setminus C_n$;
- $g = 1$ su C_{n+1};
- g lineare a tratti su $C_n \setminus C_{n+1}$ in modo che, detti J_{2h-1}^{n+1}, J_{2h}^{n+1} i due sottointervalli in cui J_i^n viene diviso al passo $n + 1$, e detto I_{nh} l'intervallo tra i due, g decresca linearmente da 1 a 0 nella prima metà di tale intervallo e cresca linearmente da 0 a 1 nella seconda metà.

Allora g è continua e

$$m(\{x \in [0, 1] : \ g(x) \neq \chi_{C_\xi}(x)\}) \leq m(C_n \setminus C_\xi) < \varepsilon.$$

Esercizio 3.4.3 Anzitutto, se $x \notin C$ si ha $d(x, C) > 0$ e quindi risulta definitivamente $f(x) = \max\{1 - n\, d(x, C), 0\} = 0$ per n sufficientemente grande: dunque $f_n(x) \to 0$ q.o. in $[0, 1]$.
Adesso, per ogni $k \in \mathbb{N}$, consideriamo l'insieme $E_k = \{x \in [0, 1] : \ d(x, C) \leq 3^{-k}\}$. Chiaramente, $E_k \supset E_{k+1}$ e $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k = C$: quindi $m(E_k) \to 0$ per $k \to \infty$. Scelto k in modo che $m(E_k) < \varepsilon$, si ha

$f_n(x) = \max\{1 - n\, d(x, C), 0\} \le \max\{1 - n\, 3^{-k}, 0\}$ per ogni $x \in [0,1] \setminus E_k$; quindi $f_n(x) = 0$ per ogni $x \in [0,1] \setminus E_k$ non appena $n > 3^k$. Ne segue che $f_n \to 0$ uniformemente in $[0,1] \setminus E_k$.

Esercizio 3.4.4 Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $F_n = \left\{ \frac{k}{2^n} :\ k = 0, 1, \dots 2^n \right\}$. Definiamo f_n come segue:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in F_n \\ \frac{1}{2^{n-m}} & \text{se } x = \frac{2k-1}{2^{n+1}},\ k = 2^m\, p,\ p \text{ dispari},\ 0 \le m \le n \\ \text{lineare} & \text{sui sottointervalli residui di } [0,1]. \end{cases}$$

Si ha $\{f_n\} \subset C[0,1]$. Se $x \in [0,1]$, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ vi è un unico intervallo $I_n = \left[\frac{h}{2^n}, \frac{h+1}{2^n}\right]$, $0 \le h \le 2^n - 1$, tale che $x \in I_n$; ne segue che

$$f_n(x) \le \max_{I_n} f_n = \left\{ \begin{array}{ll} f_n\left(\dfrac{h+1}{2^n} - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) & \text{se } h = 2^m p,\ p \text{ dispari} \\ f_n\left(\dfrac{h}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) & \text{se } h = 2^m p - 1,\ p \text{ dispari.} \end{array} \right\} = \frac{1}{2^{n-m}}.$$

Notiamo che se, ad esempio, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \le x \le \frac{1}{2}$, allora $f_n(x) \le \frac{1}{2}$, quindi questa stima non fornisce ancora la convergenza puntuale a 0. Tuttavia, se $x = \frac{k}{2^n}$, $0 \le k \le 2^n - 1$, allora per definizione $f_n(x) = 0$; altrimenti, se n è maggiore della distanza di x dai punti $\frac{k}{2^m}$, con $m \le q$, allora $f_n(x) \le \frac{1}{2^{n-q}}$. Ciò assicura che $f_n(x) \to 0$ per ogni $x \in [0,1]$.
Sia ora I un sottointervallo di $[0,1]$. Scelto $m \in \mathbb{N}$ tale che I contenga un intervallo della forma $\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]$, si ha per ogni $n \ge m$

$$f_n\left(\frac{2k+1}{2^m} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^{m-1}},$$

da cui $\sup_I f_n \ge \frac{1}{2^{m-1}}$ per ogni $n \ge m$. Pertanto f_n non converge uniformemente a 0 in I.

Esercizio 3.4.5 (i) Se f è continua, allora dalla definizione di m_δ e M_δ segue subito $f(x) = m(x) = M(x)$. Viceversa, sia $m(x) = M(x)$; fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$m(x) - m_\delta(x) < \varepsilon, \qquad M_\delta(x) - M(x) < \varepsilon.$$

Quindi, se $|t - x| < \delta$, si ottiene

$$-\varepsilon < m_\delta(x) - m(x) \le f(t) - m(x) = f(t) - M(x) \le M_\delta(x) - M(x) < \varepsilon,$$

ovvero

$$\lim_{t \to x} f(t) = m(x) = M(x).$$

(ii) M e m sono misurabili, perché sono limiti puntuali delle successioni monotone $M_{1/n}$ e $m_{1/n}$.

Esercizi del paragrafo 3.5

Esercizio 3.5.1 (i) Basta osservare che

$$\begin{aligned} &\{x \in X :\ |f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| > \delta\} \subseteq \\ &\quad \subseteq \left\{x \in X :\ |f_n(x) - f(x)| > \frac{\delta}{2}\right\} \cup \left\{x \in X :\ |g_n(x) - g(x)| > \frac{\delta}{2}\right\}. \end{aligned}$$

(ii) La tesi segue dalle relazioni

$$\{x \in X :\ |\lambda f_n(x) - \lambda f(x)| > \delta\} = \left\{x \in X :\ |f_n(x) - f(x)| > \frac{\delta}{|\lambda|}\right\} \quad \text{se } \lambda \ne 0,$$

$$\{x \in X :\ |\lambda f_n(x) - \lambda f(x)| > \delta\} = \emptyset \quad \text{se } \lambda = 0.$$

(iii) Segue da

$$\big\{x \in X :\ \big||f_n(x)| - |f(x)|\big| > \delta\big\} \subseteq \{x \in X :\ |f_n(x) - f(x)| > \delta\}.$$

(iv) Si ha

$$\{x \in X :\ |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| > \delta\} \subseteq \left\{x \in X :\ |f_n(x) - f(x)||g_n(x) - g(x)| > \frac{\delta}{3}\right\} \cup$$
$$\cup \left\{x \in X :\ |f(x)||g_n(x) - g(x)| > \frac{\delta}{3}\right\} \cup \left\{x \in X :\ |f_n(x) - f(x)||g(x)| > \frac{\delta}{3}\right\};$$

poi, essendo f e g q.o. finite (proposizione 3.5.2(iii)-(iv)), ed osservando che

$$\left\{x \in X :\ |f_n(x) - f(x)||g_n(x) - g(x)| > \frac{\delta}{3}\right\} \subseteq$$
$$\subseteq \left\{x \in X :\ |f_n(x) - f(x)| > \sqrt{\frac{\delta}{3}}\right\} \cup \left\{x \in X :\ |g_n(x) - g(x)| > \sqrt{\frac{\delta}{3}}\right\},$$

$$\left\{x \in X :\ |f(x)||g_n(x) - g(x)| > \frac{\delta}{3}\right\} \subseteq$$
$$\subseteq \bigcap_{r \in \mathbb{Q}^+} \left[\{x \in X :\ |f(x)| > r\} \cup \left\{x \in X :\ |g_n(x) - g(x)| > \frac{\delta}{3r}\right\}\right],$$

$$\left\{x \in X :\ |f_n(x) - f(x)||g(x)| > \frac{\delta}{3}\right\} \subseteq$$
$$\subseteq \bigcap_{r \in \mathbb{Q}^+} \left[\{x \in X :\ |g(x)| > r\} \cup \left\{x \in X :\ |f_n(x) - f(x)| > \frac{\delta}{3r}\right\}\right],$$

si ottiene la tesi per $n \to \infty$ in virtù della proposizione 1.7.2(ii), dato che $\mu(X) < \infty$.

(v) Si ha

$$\left\{x \in X :\ \left|\frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)}\right| > \delta\right\} \subseteq \bigcap_{r \in \mathbb{Q}^+} \Big[\{x \in X :\ |f_n(x) - f(x)| > r\delta\} \cup$$
$$\cup \{x \in X :\ |f(x)| < \sqrt{r}\} \cup \{x \in X :\ |f_n(x)| < \sqrt{r}\}\Big].$$

Utilizziamo ora l'inclusione (facilmente verificabile ragionando per assurdo)

$$\big\{x \in X :\ |f_n(x)| < \sqrt{r}\big\} \subseteq \left\{x \in X :\ |f(x)| < \frac{3}{2}\sqrt{r}\right\} \cup \left\{x \in X :\ |f(x) - f_n(x)| > \frac{\sqrt{r}}{2}\right\}.$$

Essendo $\mu(X) < \infty$ e $f \neq 0$ q.o., per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\sigma_\varepsilon > 0$ tale che

$$\mu\left(\left\{x \in X :\ |f(x)| < \frac{3}{2}\sqrt{r}\right\}\right) < \varepsilon \qquad \forall r < \sigma_\varepsilon\,,\ \ r \in \mathbb{Q}^+;$$

inoltre, dato che $f_n \to f$ in misura, esiste $N_\varepsilon > 0$ tale che

$$\mu\left(\left\{x \in X :\ |f(x) - f_n(x)| > \frac{\sqrt{r}}{2}\right\}\right) < \varepsilon \qquad \forall n \geq N_\varepsilon\,.$$

Pertanto, dall'inclusione sopra scritta si ottiene $\mu\left(\{x \in X :\ |f_n(x)| < \sqrt{r}\}\right) < 2\varepsilon$ per ogni $n \geq N_\varepsilon$ e $r < \sigma_\varepsilon$, $r \in \mathbb{Q}^+$. Ne segue, scelto $r < \sigma_\varepsilon$, $r \in \mathbb{Q}^+$,

$$\mu\left(\left\{x \in X :\ \left|\frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)}\right| > \delta\right\}\right) \leq \mu(\{x \in X :\ |f_n(x) - f(x)| > r\delta\}) + 3\varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon\,,$$

che è la tesi.

Esercizio 3.5.2 (i) Siano $f_n(x) = g_n(x) = x + \frac{1}{n}$ e $f(x) = g(x) = x$ in $X = [0, \infty[$. Allora $f_n \to f$ in misura, mentre f_n^2 non converge a f^2 in misura, visto che l'insieme

$$\left\{ x \geq 0 : \ \left| \left(x + \frac{1}{n} \right)^2 - x^2 \right| > \delta \right\} = \left\{ x \geq 0 : \ \left| \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \right| > \delta \right\}$$

contiene la semiretta $x > \frac{n\delta}{2} - \frac{1}{2n}$.

(ii) Siano

$$f_n(x) = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{n}\right)^2}, \qquad f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad X = [1, \infty[.$$

Si ha $f_n \to f$ in misura: infatti

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\left(x + \frac{1}{n}\right)^2} > \delta \iff \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} > \delta x^2 \left(x + \frac{1}{n} \right)^2 \implies \frac{2x}{n} + \frac{x}{n^2} > \delta x^4 \iff x < \left(\frac{1}{n\delta} \left(2 + \frac{1}{n} \right) \right)^{\frac{1}{3}},$$

da cui

$$\lim_{n \to \infty} m(\{x \geq 1 : \ |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) = 0.$$

Tuttavia, $\frac{1}{f_n}$ non converge a $\frac{1}{f}$ in misura, come mostrato in (i).

Esercizio 3.5.3 (i) Poniamo $f_n(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2$ e $f(x) = x^2$ in $X = [0, \infty[$. Allora $f_n \to f$ q.o. in X ma, come sappiamo dall'esercizio 3.5.2 (i), f_n non converge in misura a f.

(ii) Poniamo in $X = [0, 1]$

$$f_1 = \chi_{[0,1]}; \ f_2 = \chi_{[0, \frac{1}{2}]}, \ f_3 = \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}; \ldots, f_{2^n + k} = \chi_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1.$$

Allora $f_n \to 0$ in misura, ma f_n non converge q.o. a 0 perché per ogni $x \in [0, 1]$ si ha $f_n(x) = 1$ infinite volte.

Esercizio 3.5.4 Se $f_n \to f$ in misura, allora la successione $\{f_n\}$ è fondamentale in misura (proposizione 3.5.2 (iii)) e quindi, data una sua sottosuccessione, a norma della proposizione 3.5.2 (iv) esiste una ulteriore sottosuccessione che converge q.o. alla funzione f.
Viceversa, sia $\{f_n\}$ una successione tale che ogni sua sottosuccessione abbia una ulteriore sottosuccessione che converge q.o. a f. Supponiamo, per assurdo, che f_n non converga a f in misura; allora esistono $\delta > 0$ e $\beta > 0$ tali che

$$\mu(\{x \in X : \ |f_n(x) - f(x)| > \delta\} \geq \beta \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Scelta una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$, la quale ovviamente verifica

$$\mu(\{x \in X : \ |f_{n_k}(x) - f(x)| > \delta\} \geq \beta \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

sia $\{f_{n_{k_j}}\} \subseteq \{f_{n_k}\}$ tale che $f_{n_{k_j}} \to f$ q.o. per $j \to \infty$. Poiché $\mu(X) < \infty$, per la proposizione 3.5.2 (ii) si ha $f_{n_{k_j}} \to f$ in misura: dunque per $k = k_j$ la relazione precedente non può valere, il che è assurdo.

Esercizio 3.5.5 Poiché g è uniformemente continua, esiste una funzione $\omega : [0, \infty[\to [0, \infty[$ continua, strettamente crescente, con $\omega(0) = 0$, tale che

$$|g(u) - g(v)| \leq \omega(|u - v|) \qquad \forall u, v \geq 0.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} &\mu(\{x \geq 0 : \ |g(f_n(x)) - g(f(x))| > \delta\}) \leq \\ &\quad \leq \mu(\{x \geq 0 : \ \omega(|f_n(x) - f(x)|) > \delta\}) = \mu(\{x \geq 0 : \ |f_n(x) - f(x)| > \omega^{-1}(\delta)\}), \end{aligned}$$

e l'ultimo termine tende a 0 per $n \to \infty$.
Se g è solo continua, la tesi è falsa. Ad esempio, siano $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$, $f(x) = x$ in $X = [0, \infty[$: allora $f_n \to f$ in misura, perché per ogni $\delta > 0$ l'insieme $\{x \geq 0 : \ |f_n(x) - f(x)| > \delta\}$ è vuoto per n grande; tuttavia se $g(u) = u^2$ si osserva che $g \circ f_n$ non tende a $g \circ f$ in misura (esercizio 3.5.2 (ii)).

Capitolo 4

L'integrale

04

4.1 Integrale di funzioni semplici

intfunsem

Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. Introdurremo la nozione di integrale rispetto alla misura μ per una sottoclasse di funzioni msurabili: quelle, appunto, integrabili. Se, in particolare, lo spazio misurato è $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ oppure $(\mathbb{R}^N, \mathcal{M}_N, m_N)$, otterremo l'*integrale di Lebesgue* 1-dimensionale o N-dimensionale.
Cominciamo allora col definire l'integrale per le funzioni semplici. Ricordiamo che, in base all'esempio 3.1.4 (2), ogni funzione semplice φ si può scrivere in modo canonico come

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}\,, \qquad A_i = \{x \in X : \varphi(x) = \alpha_i\},$$

dove gli α_i sono i valori assunti da φ; in particolare gli A_i sono elementi disgiunti di $\mathcal{F}$ e la loro unione è tutto X.
Per introdurre l'integrale, bisognerà distinguere tra funzioni di segno costante (sicuramente integrabili) e di segno variabile (non necessariamente integrabili).

defintsem

Definizione 4.1.1 *Sia $\varphi \in \mathcal{S}$, e sia $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ la sua rappresentazione canonica (con $A_i = \{x \in X : \varphi(x) = \alpha_i\}$).*
Se $\varphi \geq 0$, l' integrale *di φ su X rispetto alla misura μ è il numero non negativo (eventualmente $+\infty$)*

$$\int_X \varphi \, d\mu = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

(si ricordi la convenzione $0 \cdot \infty = 0$).
Se φ assume anche valori negativi, posto

$$\varphi^+ = \max\{\varphi, 0\}, \qquad \varphi^- = -\min\{\varphi, 0\},$$

diciamo che φ è integrabile *su X (rispetto a μ) se almeno uno fra i due integrali $\int_X \varphi^+ \, d\mu$, $\int_X \varphi^- \, d\mu$ è finito; in tal caso l'integrale di φ rispetto alla misura μ è*

$$\int_X \varphi \, d\mu = \int_X \varphi^+ \, d\mu - \int_X \varphi^- \, d\mu.$$

In particolare, dunque, le funzioni semplici non negative sono sempre integrabili.
Se entrambi gli integrali $\int_X \varphi^+ d\mu$, $\int_X \varphi^- d\mu$ sono finiti, diciamo che φ è sommabile *su X (rispetto a μ).*

dopointsem **Osservazioni 4.1.2 (1)** Una funzione semplice φ è sommabile su X se e solo se si ha $\varphi \in \mathcal{S}_0$, ossia φ è nulla al di fuori di un insieme di misura finita. Infatti, sia $\sum_{i=0}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ la rappresentazione canonica di φ: se φ è sommabile, allora tutti gli A_i relativi a valori $\alpha_i \neq 0$ devono avere misura finita, altrimenti ci sarebbe almeno un addendo che vale $\pm\infty$ nella somma $\sum_{i=0}^n \alpha_i \mu(A_i)$. Viceversa, è chiaro che se tutti gli A_i relativi ad $\alpha_i \neq 0$ hanno misura finita allora φ è sommabile.

(2) Se $\varphi \in \mathcal{S}_0$, e se $\sum_{j=0}^m \beta_j \chi_{B_j}$ è una qualunque rappresentazione della funzione φ tale che $\beta_j \in \mathbb{R}$ e $B_j \in \mathcal{F}$, con $\mu(B_j) < \infty$ allorché $\beta_j \neq 0$, allora si ha

$$\sum_{j=0}^m \beta_j \mu(B_j) = \int_X \varphi \, d\mu$$

(esercizio 4.1.1); dunque l'integrale di funzioni di $\mathcal{S}_0$ non dipende dal modo in cui si rappresenta la funzione come combinazione lineare di funzioni caratteristiche di insiemi di misura finita. Si noti che questo non è vero se si toglie la condizione che gli insiemi abbiano misura finita: ad esempio in $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ possiamo scrivere

$$\chi_{[0,1]} = \chi_{[0,\infty[} - \chi_{]1,\infty[}$$

e benché risulti $\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]} \, dm = 1$, la somma $m([0,\infty[\,) - m(]1,\infty[\,)$ non ha senso.

olinintsem **Lemma 4.1.3** *Siano $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ non negative. Allora*

(i) *per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\int_X (\alpha\varphi)\, d\mu = \alpha \int_X \varphi \, d\mu$;*

(ii) *risulta $\int_X (\varphi + \psi)\, d\mu = \int_X \varphi \, d\mu + \int_X \psi \, d\mu$.*

Dimostrazione (i) Se $\alpha \geq 0$ è un'ovvia conseguenza della definizione 4.1.1; se $\alpha < 0$, basta osservare che $(\alpha\varphi)^+ = |\alpha|\varphi^-$ e $(\alpha\varphi)^- = |\alpha|\varphi^+$.
(ii) Siano $\sum_{i=0}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ e $\sum_{j=0}^m \beta_j \chi_{B_j}$ le rappresentazioni canoniche di φ e ψ; sia inoltre $\sum_{h=0}^p \lambda_h \chi_{E_h}$ la rappresentazione canonica di $\varphi + \psi$ (in particolare, si ha $X = \bigcup_{i=0}^n A_i = \bigcup_{j=0}^m B_j = \bigcup_{h=0}^p E_h$). A ciascun valore λ_h, $h = 0, 1, \ldots, p$, corrisponde una coppia, non necessariamente unica, di indici (i, j) (con $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$) tale che $\lambda_h = \alpha_i + \beta_j$. Detto F_h l'insieme di tali coppie di indici, si ha $(i, j) \in F_h$ se e solo se $\lambda_h = \alpha_i + \beta_j$; quindi si può scrivere

$$E_h = \{x \in X : \varphi(x) + \psi(x) = \lambda_h\} = \bigcup_{(i,j) \in F_h} A_i \cap B_j,$$

da cui, per l'additività della misura μ,

$$\mu(E_h) = \sum_{(i,j) \in F_h} \mu(A_i \cap B_j).$$

Si deduce allora, essendo $\bigcup_{h=0}^{p} F_h = \{(i,j) :\ 0 \le i \le n,\ 0 \le j \le m\}$,

$$\begin{aligned}\int_X (\varphi+\psi)\,d\mu &= \sum_{h=0}^{p} \lambda_h \mu(E_h) = \sum_{h=0}^{p} \sum_{(i,j)\in F_h} (\alpha_i+\beta_j)\mu(A_i\cap B_j) = \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \alpha_i \mu(A_i\cap B_j) + \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} \beta_j \mu(A_i\cap B_j) = \\ &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=0}^{m} \beta_j \mu(B_j) = \int_X \varphi\,d\mu + \int_X \psi\,d\mu. \quad \square\end{aligned}$$

Esercizi 4.1

semind

1. Si verifichi che se $\varphi \in \mathcal{S}_0$, e se risulta

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i \chi_{A_i}(x) = \sum_{j=0}^{s} \beta_j \chi_{B_j}(x), \qquad x \in X,$$

con $\mu(A_i) < \infty$ e $\mu(B_j) < \infty$ allorché $\alpha_i \neq 0$ e $\beta_j \neq 0$, allora

$$\sum_{i=0}^{r} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{j=0}^{s} \beta_j \mu(B_j),$$

cosicché l'integrale di una funzione semplice è indipendente dalla rappresentazione usata per descriverla.
[**Traccia:** si osservi che se i B_j sono disgiunti la verifica è facile. Altrimenti, risulta

$$\bigcup_{j=0}^{s} B_j = \bigcup_{h=1}^{s} \bigcup_{0\le i_1<\ldots<i_h\le s} C_{i_1,\ldots,i_h}\,, \qquad C_{i_1,\ldots,i_h} = \left[\bigcap_{q=1}^{h} B_{i_q}\right] \setminus \left[\bigcup_{j\neq i_1,\ldots,i_h} B_j\right];$$

si provi che i $C_{i_1,\ldots,i_h}$ sono disgiunti e che $C_{i_1,\ldots,i_h} \cap B_j = \emptyset$ se $j \neq i_1,\ldots,i_h$, e se ne deduca che

$$\sum_{j=0}^{s} \beta_j \mu(B_j) = \sum_{h=1}^{s} \sum_{j\neq i_1,\ldots,i_h} \sum_{j=0}^{s} \beta_j \mu(C_{i_1,\ldots,i_h}\cap B_j) = \sum_{h=1}^{s} \sum_{j\neq i_1,\ldots,i_h} \sum_{p=1}^{h} \beta_{i_p} \mu(C_{i_1,\ldots,i_h}).$$

Da qui si ricavi l'uguaglianza cercata.]

cifre

2. Siano $\varepsilon_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, le funzioni introdotte nell'esercizio 3.1.8. Si calcoli per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \varepsilon_n\, \chi_{[0,1]}\, dm,$$

ove m è la misura di Lebesgue.

nominosup

3. Sia $W \subset [0,1]$ un insieme non misurabile secondo Lebesgue. Posto

$$\lambda = \sup\left\{\int_0^1 \varphi\, dm,\ \varphi \in \mathcal{S},\ 0 \le \varphi \le \chi_W\right\},$$

si provi che:

(i) $\lambda = \sup\{m(E) :\ E \in \mathcal{M},\ E \subset W\}$;

(ii) $m^*(W) = \inf\{m(F) :\ F \in \mathcal{M},\ F \supset W\} > \lambda$;

(iii) $m^*(W) + m^*([0,1] \setminus W) > 1$.

4.2 Integrale di funzioni misurabili

intfunmis

Estenderemo ora l'integrale ad una vasta sottoclasse delle funzioni misurabili. In tutto il discorso che segue $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è un fissato spazio misurato.

defintX **Definizione 4.2.1** *Sia $f \in \mathcal{M}_X$. Se $f \ge 0$, l'*integrale *di f su X rispetto alla misura μ è il numero (eventualmente $+\infty$)*

$$\int_X f\, d\mu = \sup\left\{\int_X \varphi\, d\mu :\ \varphi \in \mathcal{S},\ 0 \le \varphi \le f\right\}.$$

Se f assume anche valori negativi, posto

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \qquad f^- = -\min\{f, 0\},$$

diciamo che f è integrabile *su X (rispetto a μ) se almeno uno fra i due integrali $\int_X f^+ d\mu$, $\int_X f^- d\mu$ è finito; in tal caso l'integrale di f rispetto alla misura μ è*

$$\int_X f\ d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

In particolare, le funzioni misurabili non negative sono sempre integrabili.
Se entrambi gli integrali $\int_X f^+ d\mu$, $\int_X f^- d\mu$ sono finiti, diciamo che f è sommabile *su X (rispetto a μ).*

defintD **Definizione 4.2.2** *Sia $D \in \mathcal{F}$, sia $f \in \mathcal{M}_D$. Diciamo che f è* integrabile *su D rispetto alla misura μ se, estesa f in modo arbitrario su tutto X, la funzione $f\chi_D$ è integrabile su X; in tal caso si pone*

$$\int_D f\, d\mu = \int_X f\chi_D\, d\mu.$$

Se tale integrale è finito, si dice che f è sommabile *su D (rispetto a μ). Denoteremo con $\mathcal{L}^1(D, \mathcal{F}, \mu)$, o semplicemente con $\mathcal{L}^1(D)$, l'insieme delle funzioni sommabili su D.*

lopodefintD **Osservazioni 4.2.3 (1)** Per le funzioni $\psi \in \mathcal{S}$, la definizione 4.2.1 è in accordo con la definizione 4.1.1.

(2) Se f è non negativa e sommabile su X, allora

$$\int_X f\,d\mu = \sup\left\{\int_X \varphi\,d\mu :\ \varphi \in \mathcal{S}_0,\ 0 \le \varphi \le f\right\}$$

(esercizio 4.2.9).

(3) Se f è una funzione misurabile su X, e se $B \in \mathcal{F}$ con $\mu(B) = 0$, allora f è integrabile su B e $\int_B f\,d\mu = 0$. Infatti, per definizione, gli integrali su B di f^+ e f^- sono entrambi nulli, in quanto ogni funzione semplice non negativa su B ha integrale nullo su B.

(4) Se f non è misurabile, la quantità introdotta nella definizione 4.2.1 ha ancora senso, ma non gode di buone proprietà (si veda l'esercizio 4.2.16).

Analizziamo le proprietà dell'integrale appena definito.

mon+-omog **Proposizione 4.2.4** *Sia $D \in \mathcal{F}$, siano f, g integrabili su D. Valgono i seguenti fatti:*

(i) (monotonia) *se $f \le g$, allora $\int_D f\,d\mu \le \int_D g\,d\mu$;*

(ii) $\left|\int_D f\,d\mu\right| \le \int_D |f|\,d\mu$;

(iii) (omogeneità) $\int_D \alpha f\,d\mu = \alpha \int_D f\,d\mu$ *per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione (i) Se si ha $0 \le f \le g$, la tesi è facile conseguenza delle definizioni 4.2.1 e 4.2.2. Nel caso generale, si osservi che da $f \le g$ segue $f^- \ge g^-$ e $f^+ \le g^+$; dunque, per il caso precedente,

$$\int_D f^+\,d\mu \le \int_D g^+\,d\mu, \quad -\int_D f^-\,d\mu \le -\int_D g^-\,d\mu.$$

Sommando le due disuguaglianze, per ipotesi non si ottiene mai $\pm(\infty - \infty)$, cosicché si deduce la tesi.

(ii) Ovvia conseguenza di (i).

(iii) Se $\alpha \ge 0$ e $f \ge 0$, la tesi segue facilmente dalle definizioni 4.2.1 e 4.2.2 e dal lemma 4.1.3; se $\alpha \ge 0$ e f è arbitraria, scrivendo $f = f^+ - f^-$ e osservando che $(\alpha f)^\pm = \alpha f^\pm$, la tesi segue utilizzando la parte già dimostrata. Se $\alpha \le 0$, basta applicare nuovamente la definizione di integrale, tenendo conto del fatto che $(\alpha f)^+ = |\alpha| f^-$ e $(\alpha f)^- = |\alpha| f^+$. □

Prima di dimostrare l'additività, e quindi la linearità, dell'integrale, proviamo che l'integrale è numerabilmente additivo rispetto all'insieme di integrazione:

numeradd **Proposizione 4.2.5** *Sia f una funzione integrabile su X. Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una famiglia di insiemi misurabili fra loro disgiunti, allora posto $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ si ha*

$$\int_A f\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f\,d\mu.$$

fposmis **Osservazione 4.2.6** Si noti che, essendo ovviamente $\int_\emptyset f\,d\mu = 0$ per ogni f integrabile, nel caso in cui $f \geq 0$ questa proposizione ci dice che la funzione di insieme

$$\lambda(E) = \int_E f\,d\mu, \qquad E \in \mathcal{F},$$

è una misura definita sulla σ-algebra $\mathcal{F}$.

Dimostrazione della proposizione 4.2.5 Se $f = \chi_E$, con $E \in \mathcal{F}$, la tesi segue dalla definizione 4.1.1 e dalla numerabile additività di μ. Se $f \in \mathcal{S}$ e $f \geq 0$, il risultato segue per additività allo stesso modo.
Sia ora f misurabile e non negativa e supponiamo dapprima che f sia sommabile su A. Fissato $\varepsilon > 0$, dalla definizione 4.2.2 segue che esiste $\varphi \in \mathcal{S}$ tale che $0 \leq \varphi \leq f\chi_A$ e

$$\int_A \varphi\,d\mu = \int_X \varphi\,d\mu > \int_X f\chi_A\,d\mu - \varepsilon.$$

Poiché, per quanto già dimostrato,

$$\int_A \varphi\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} \varphi\,d\mu,$$

si deduce, essendo $0 \leq \varphi\chi_{A_n} \leq f\chi_{A_n}$, che

$$\int_A f\,d\mu = \int_X f\chi_A\,d\mu < \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} \varphi\,d\mu + \varepsilon \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f\,d\mu + \varepsilon,$$

e dall'arbitrarietà di ε segue

$$\int_A f\,d\mu \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f\,d\mu.$$

Proviamo ora la disuguaglianza opposta. Per ogni $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, esiste $\psi_n \in \mathcal{S}$ tale che $0 \leq \psi_n \leq f\chi_{A_n}$ e

$$\int_X \psi_n\,d\mu > \int_{A_n} f\,d\mu - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}};$$

posto, per ogni $N \in \mathbb{N}$, $\varphi_N = \sum_{n=0}^N \psi_n$, grazie al lemma 4.1.3 si ha $\varphi_N \in \mathcal{S}$ e $0 \leq \varphi_N \leq f\chi_A$; ne segue

$$\sum_{n=0}^N \int_X \psi_n\,d\mu = \int_X \varphi_N\,d\mu \leq \int_X f\chi_A\,d\mu = \int_A f\,d\mu,$$

da cui

$$\int_A f\,d\mu \geq \sum_{n=0}^N \int_X \psi_n\,d\mu > \sum_{n=0}^N \left(\int_{A_n} f\,d\mu - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) > \sum_{n=0}^N \int_{A_n} f\,d\mu - \varepsilon.$$

Per $N \to \infty$ si ha allora

$$\int_A f\,d\mu \geq \sum_{n=0}^\infty \int_{A_n} f\,d\mu - \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

cioè

$$\int_A f\,d\mu \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f\,d\mu.$$

Ciò conclude la dimostrazione nel caso in cui f è non negativa e sommabile su A. Il caso in cui $f \geq 0$ e $\int_A f\,d\mu = +\infty$ è analogo (fissato $M > 0$, basta selezionare $\varphi \in \mathcal{S}$ tale che $0 \leq \varphi \leq f\chi_A$ e $\int_X \varphi\,d\mu > M$, e poi procedere come prima).
Infine se f è un'arbitraria funzione integrabile, basta applicare la parte già dimostrata a f^+ e f^- e poi sottrarre le uguaglianze ottenute (una delle quali è sicuramente tra quantità finite). □

intfzqoug **Osservazione 4.2.7** Dalla precedente proposizione segue questa utile proprietà: se g è integrabile su D e f è una funzione misurabile su D tale che $f(x) = g(x)$ q.o. in D, ove $D \in \mathcal{F}$, allora f è integrabile su D e $\int_D f\,d\mu = \int_D g\,d\mu$. Infatti, posto $B = \{x \in D : f(x) \neq g(x)\}$, si ha $B \in \mathcal{F}$ e $\mu(B) = 0$; quindi, scrivendo $D = (D \setminus B) \cup B$ e utilizzando la proposizione 4.2.5 si ottiene

$$\int_D f^+\,d\mu = \int_{D\setminus B} f^+\,d\mu + \int_B f^+\,d\mu = \int_{D\setminus B} g^+\,d\mu + \int_B f^+\,d\mu;$$

poiché, per l'osservazione 4.2.3 (3), $\int_B f^+ d\mu = \int_B g^+ d\mu = 0$, si deduce

$$\int_D f^+\,d\mu = \int_{D\setminus B} g^+\,d\mu = \int_D g^+\,d\mu.$$

Analogamente,

$$\int_D f^-\,d\mu = \int_{D\setminus B} g^-\,d\mu = \int_D g^-\,d\mu,$$

da cui, essendo g integrabile su D, la tesi.

additint **Proposizione 4.2.8** *Sia $D \in \mathcal{F}$, siano f, g integrabili su D. Vale la seguente proprietà:*

(additività) *se non si ha $\int_D f\,d\mu = -\int_D g\,d\mu = \pm\infty$, allora*

$$\int_D (f+g)\,d\mu = \int_D f\,d\mu + \int_D g\,d\mu.$$

Notiamo che in effetti $f + g$ non è definita sull'insieme

$$N = \{x \in D : f(x) = -g(x) = \pm\infty\}$$

il quale, per ipotesi, ha misura nulla (si veda anche l'esercizio 4.2.7). Quindi, ponendo ad esempio $f + g = 0$ su N, nell'integrale a primo membro si può sostituire D con $D \setminus N$ senza alterarne il valore, in virtù dell'osservazione precedente. Si osservi anche che, combinando questo risultato con la proprietà di omogeneità (proposizione 4.2.4), si ottiene che l'integrale è un'applicazione lineare:

$$\int_D (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int_D f\,d\mu + \beta \int_D g\,d\mu,$$

purché naturalmente siano ben definiti i due membri.

Dimostrazione Proveremo la tesi distinguendo vari casi.

I - $f, g \geq 0$**.** Siano $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ tali che $0 \leq \varphi \leq f\chi_D$, $0 \leq \psi \leq g\chi_D$: allora $0 \leq \varphi + \psi \leq (f+g)\chi_D$ e dunque, per il lemma 4.1.3,

$$\int_X \varphi \, d\mu + \int_X \psi \, d\mu = \int_X (\varphi + \psi) \, d\mu \leq \int_D (f+g) \, d\mu;$$

per l'arbitrarietà di φ e ψ si ottiene

$$\int_D f \, d\mu + \int_D g \, d\mu \leq \int_D (f+g) \, d\mu.$$

Per provare l'altra disuguaglianza, introduciamo gli insiemi misurabili

$$D^m = \{x \in D : m \leq f(x) + g(x) < m+1\}, \quad m \in \mathbb{N}^+,$$

$$D_m = \left\{x \in D : \frac{1}{m+1} \leq f(x) + g(x) < \frac{1}{m}\right\}, \quad m \in \mathbb{N}^+,$$

$$D^\infty = \{x \in D : f(x) + g(x) = +\infty\},$$

$$D_\infty = \{x \in D : f(x) + g(x) = 0\}.$$

Fissiamo $\beta \in]0,1[$ e scegliamo $\varphi \in \mathcal{S}$ tale che $0 \leq \varphi \leq \beta(f+g)\chi_D$. Siano poi $\{\varphi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ due successioni di funzioni semplici, costruite con la procedura descritta nella proposizione 3.1.7, convergenti puntualmente alle funzioni $f\chi_D$ e $g\chi_D$ rispettivamente. Per l'osservazione 3.1.8, la convergenza delle φ_n e delle ψ_n è uniforme in ciascuno degli insiemi D^m e D_m ($m \neq \infty$). Dunque, poiché

$$(f+g) - \varphi \geq (1-\beta)(f+g) \geq (1-\beta)m \qquad \text{in } D^m,$$

$$(f+g) - \varphi \geq (1-\beta)(f+g) \geq \frac{1-\beta}{m+1} \qquad \text{in } D_m\,,$$

$$\varphi < f + g = +\infty \qquad \text{in } D^\infty,$$

$$\varphi = f + g = 0 \qquad \text{in } D_\infty\,,$$

per ogni $m \in \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\}$ esiste $\nu_m \in \mathbb{N}$ tale che per qualunque $n \geq \nu_m$ risulta

$$\varphi \leq (f+g) - (1-\beta)m \leq \varphi_n + \psi_n \leq f + g \qquad \text{in } D^m,$$

$$\varphi \leq (f+g) - \frac{1-\beta}{m+1} \leq \varphi_n + \psi_n \leq f + g \qquad \text{in } D_m\,,$$

$$\varphi \leq \varphi_n + \psi_n < +\infty = f + g \qquad \text{in } D^\infty,$$

$$\varphi = \varphi_n + \psi_n = 0 = f + g \qquad \text{in } D_\infty\,.$$

Per l'additività dell'integrale sulle funzioni semplici non negative e per la monotonia, si ricava per ogni $m \in \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\}$

$$\begin{aligned}\int_{D^m} \varphi\, d\mu &\leq \int_{D^m} (\varphi_n + \psi_n)\, d\mu = \\ &= \int_{D^m} \varphi_n\, d\mu + \int_{D^m} \psi_n\, d\mu \leq \int_{D^m} f\, d\mu + \int_{D^m} g\, d\mu,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{D_m} \varphi\, d\mu &\leq \int_{D_m} (\varphi_n + \psi_n)\, d\mu = \\ &= \int_{D_m} \varphi_n\, d\mu + \int_{D_m} \psi_n\, d\mu \leq \int_{D_m} f\, d\mu + \int_{D_m} g\, d\mu,\end{aligned}$$

cioè

$$\int_{D^m} \varphi\, d\mu \leq \int_{D^m} f\, d\mu + \int_{D^m} g\, d\mu \quad \forall m \in \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\},$$
$$\int_{D_m} \varphi\, d\mu \leq \int_{D_m} f\, d\mu + \int_{D_m} g\, d\mu \quad \forall m \in \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\}.$$

Sommiamo rispetto a $m \in \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\}$: dato che

$$D = \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}^+} D^m\right) \cup D^\infty \cup \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}^+} D_m\right) \cup D_\infty,$$

per la proposizione 4.2.5 si deduce

$$\int_X \varphi\, d\mu = \int_D \varphi\, d\mu \leq \int_D f\, d\mu + \int_D g\, d\mu,$$

e per l'arbitrarietà di φ,

$$\beta \int_D (f+g)\, d\mu \leq \int_D f\, d\mu + \int_D g\, d\mu.$$

Per $\beta \to 1^-$ si ottiene la disuguaglianza cercata.

II - $f, g \leq 0$**.** In questo caso basta applicare il risultato del caso I alle funzioni $-f, -g$ e poi usare l'omogeneità.

Prima di passare agli altri casi, osserviamo che $f+g$ è sicuramente integrabile su D: infatti si ha $(f+g)^+ \leq f^+ + g^+$ e $(f+g)^- \leq f^- + g^-$, e d'altra parte, per ipotesi e per la parte **I** già dimostrata, una almeno fra le funzioni $f^+ + g^+$ e $f^- + g^-$ è sommabile su D.

III - $f \geq 0,\ g \leq 0$**.** In questo caso una almeno tra f e g è sommabile. Definiamo

$$S^+ = \{x \in D :\ f(x) + g(x) \geq 0\}, \quad S^- = \{x \in D :\ f(x) + g(x) < 0\} :$$

dato che $f\chi_{S^\pm} = (f+g)\chi_{S^\pm} + (-g)\chi_{S^\pm}$, per le parti I e II già dimostrate si ha

$$\int_{S^+} f\,d\mu = \int_{S^+} (f+g)\,d\mu - \int_{S^+} g\,d\mu,$$

$$\int_{S^-} g\,d\mu = \int_{S^-} (f+g)\,d\mu - \int_{S^-} f\,d\mu.$$

Supponiamo ora che, ad esempio, sia sommabile la f. Aggiungiamo ai due membri della prima uguaglianza la quantità $-\int_{S^+} f\,d\mu$, e ai due membri della seconda uguaglianza la quantità $\int_{S^-} f\,d\mu$; sottraiamo poi nella prima la quantità $\int_{S^+}(f+g)\,d\mu$ (che è finita essendo $0 \le f+g \le f$ su S^+). Si ottiene

$$\int_{S^+} f\,d\mu + \int_{S^+} g\,d\mu = \int_{S^+} (f+g)\,d\mu = \int_D (f+g)^+\,d\mu,$$

$$\int_{S^-} f\,d\mu + \int_{S^-} g\,d\mu = \int_{S^-} (f+g)\,d\mu = -\int_D (f+g)^-\,d\mu.$$

A queste stesse uguaglianze si arriva supponendo sommabile g in luogo di f. Sommando le due equazioni (il che è lecito perché $f+g$ è integrabile, al pari di una fra f e g) si ha la tesi, grazie alla proposizione 4.2.5.
Notiamo che se è $f \le 0$ e $g \ge 0$, anziché $f \ge 0$ e $g \le 0$, si ottiene la tesi scambiando i ruoli di f e di g.

IV - f, g di segno qualunque. Poniamo

$$F^+ = \{x \in D : f(x) \ge 0\}, \qquad F^- = \{x \in D : f(x) < 0\},$$
$$G^+ = \{x \in D : g(x) \ge 0\}, \qquad G^- = \{x \in D : g(x) < 0\},$$

e decomponiamo X nell'unione disgiunta

$$X = (F^+ \cap G^+) \cup (F^+ \cap G^-) \cup (F^- \cap G^+) \cup (F^- \cap G^-).$$

Su ciascuno di tali quattro insiemi vale la relazione di additività richiesta, in virtù dei passi precedenti; quindi, tenuto conto dell'integrabilità di $f+g$, la tesi segue grazie alla proposizione 4.2.5. □

moduloint **Osservazione 4.2.9** Se f è una funzione misurabile su X, allora $|f|$ è integrabile su ogni $D \in \mathcal{F}$ e si ha

$$\int_D |f|\,d\mu = \int_D f^+\,d\mu + \int_D f^-\,d\mu.$$

Infatti $|f| = f^+ + f^-$, quindi la tesi segue dall'additività dell'integrale (proposizione 4.2.8).

Esercizi 4.2

fcifran 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ n & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \\ \text{e la sua prima cifra decimale} \\ \text{non nulla è la } n\text{-sima.} \end{array}$$

Si provi che f è misurabile rispetto alla misura di Lebesgue e si calcoli l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} f\, \chi_{[0,1]}\, dm.$$

somXsomD 2. Si verifichi che se f è sommabile su X, allora f è sommabile su D per ogni $D \in \mathcal{F}$.

somfsom|f| 3. Si verifichi che se $D \in \mathcal{F}$ e $f \in \mathcal{M}_D$, allora f è sommabile su D se e solo se lo è $|f|$.

miRiLe 4. Si provi che se f è una funzione definita in $[a, b]$, misurabile secondo Lebesgue e integrabile secondo Riemann in $[a, b]$, allora f è sommabile in $[a, b]$.

intAintAB 5. Siano $A, B \in \mathcal{F}$ con $\mu(B) = 0$. Si provi che se f è integrabile su X, allora

$$\int_A f\, d\mu = \int_{A \cup B} f\, d\mu.$$

domsom 6. Sia $D \in \mathcal{F}$ e sia f misurabile su D. Se esiste una funzione g, sommabile su D, tale che $|f| \le g$ q.o. in D, si provi che anche f è sommabile su D e che

$$\int_D |f|\, d\mu \le \int_D g\, d\mu.$$

miinf0 7. Sia $D \in \mathcal{F}$ e sia f sommabile su D. Si dimostri che

$$\mu(\{x \in D : |f(x)| = +\infty\}) = 0.$$

int00 8. Sia $D \in \mathcal{F}$ e sia f misurabile su D. Si provi che $\int_D |f|\, d\mu = 0$ se e solo se $f = 0$ q.o. in D.

insu 9. Se f è sommabile su X e $f \ge 0$, si verifichi che

$$\int_X f\, d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi\, d\mu : \ \varphi \in \mathcal{S}_0,\ 0 \le \varphi \le f \right\};$$

si provi poi che questo enunciato non vale se f è soltanto integrabile.
[**Traccia:** si utilizzi la funzione $\chi_{]0,\infty[}$ nello spazio misurato $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, m)$, ove m è la misura di Lebesgue e $\mathcal{F}$ è la σ-algebra definita da

$$\mathcal{F} = \mathcal{M}_{]-\infty,0]} \cup \{E \in \mathcal{M} : E = A \cup]0, \infty[\,,\ A \in \mathcal{M}_{]-\infty,0]}\}.]$$

sigmazero 10. Se $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è uno spazio misurato σ-finito, si provi che per ogni funzione f non negativa ed integrabile su X si ha

$$\int_X f\,d\mu = \sup\left\{\int_X \varphi\,d\mu :\ \varphi \in \mathcal{S}_0\,,\ 0 \le \varphi \le f\right\}.$$

intinf 11. Se f è sommabile su X (oppure $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è uno spazio misurato σ-finito) e $f \le 0$, si verifichi che

$$\int_X f\,d\mu = \inf\left\{\int_X \varphi\,d\mu :\ \varphi \in \mathcal{S}_0\,,\ 0 \ge \varphi \ge f\right\}.$$

fsigmaf 12. Sia f sommabile su X; si provi che l'insieme $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ è σ-finito, cioè è unione numerabile di insiemi misurabili $A_n \subseteq A_{n+1}$ di misura finita.

n-1<f<n 13. Sia f misurabile e q.o. finita su X, con $\mu(X) < \infty$. Posto, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $E_n = \{x \in X : n-1 \le |f(x)| < n\}$, si provi che f è sommabile se e solo se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n\ \mu(E_n)$ è convergente. Che succede se $\mu(X) = +\infty$?

nmuFn 14. Sia f sommabile su X. Posto, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \{x \in X : |f(x)| \ge n\}$, si provi che risulta $\lim_{n\to\infty} n\,\mu(F_n) = 0$. È vero il viceversa?

distmis 15. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato con $\mu(X) < \infty$. Si definisca l'insieme

$$M = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ è misurabile e q.o. finita}\}$$

e si consideri l'insieme quoziente $M_0 = M/\simeq$, ove

$$f \simeq g \qquad \Longleftrightarrow \qquad f = g \quad \text{q.o. in } X.$$

Posto

$$d(f,g) = \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\,d\mu, \qquad f, g \in M_0\,,$$

si provi che:

(i) d è una distanza su M_0 e (M_0, d) è uno spazio metrico completo;

(ii) si ha $d(f_n, f) \to 0$ se e solo se $f_n \to f$ in misura.

nominoad 16. Si mostri che la definizione 4.2.1 è applicabile anche a funzioni non misurabili, ma che in tal caso l'integrale non è necessariamente additivo.
[**Traccia:** si considerino $f = \chi_W$ e $g = \chi_{[0,1]\setminus W}$, con $W \subset [0,1]$ non misurabile secondo Lebesgue, e si applichi l'esercizio 4.1.3.]

limsottoint

4.3 Passaggio al limite sotto il segno di integrale

Una delle più importanti caratteristiche della teoria dell'integrazione che stiamo esponendo è il fatto di poter scambiare fra loro le operazioni di limite e di integrazione sotto ipotesi molto blande. Il primo risultato di questo tipo riguarda successioni crescenti di funzioni non negative, ed è di grande importanza perché si applica in modo naturale alle serie di funzioni assolutamente convergenti.

BLevi **Teorema 4.3.1 (di B. Levi, o della convergenza monotona)** *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato, e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili definite su X, tali che $0 \le f_n \le f_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Posto $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Osserviamo che il risultato è falso se si sopprime qualcuna delle ipotesi. Ad esempio, in $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ le funzioni $f_n = -\chi_{[n,\infty[}$ formano una successione crescente ma non positiva, e risulta

$$\int_X f_n \, d\mu = -\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = 0;$$

invece le funzioni $f_n = \chi_{[n,n+1]}$ sono non negative ma non formano una successione crescente, e risulta

$$\int_X f_n \, d\mu = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = 0.$$

Dimostrazione $(\le)$ Evidente conseguenza della monotonia dell'integrale (proposizione 4.2.4).

$(\ge)$ Fissiamo $\psi \in \mathcal{S}$ tale che $0 \le \psi \le f$, e sia $\beta \in]0, 1[$. Gli insiemi $A_n = \{x \in X : f_n(x) \ge \beta\psi(x)\}$ appartengono a $\mathcal{F}$, si ha $A_n \subseteq A_{n+1}$ e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$. Per monotonia ed omogeneità (proposizione 4.2.4) si ha per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\beta \int_{A_n} \psi \, d\mu = \int_{A_n} \beta\psi \, d\mu \le \int_{A_n} f_n \, d\mu \le \int_X f_n \, d\mu.$$

Poiché, per l'osservazione 4.2.6, $\lambda(E) = \int_E \psi d\mu$ è una misura, utilizzando la proposizione 2.1.5 si ricava per $n \to \infty$

$$\beta \int_X \psi \, d\mu = \beta \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \psi \, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \qquad \forall \beta \in]0, 1[.$$

Passando al limite per $\beta \to 1^-$, si ottiene

$$\int_X \psi \, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \qquad \forall \psi \in \mathcal{S} \quad \text{con} \quad 0 \le \psi \le f,$$

da cui la tesi per definizione di integrale. □

Se la successione di funzioni non negative non è crescente, il teorema di B. Levi non è applicabile, ma vi è comunque un criterio di passaggio al limite.

Fatou **Proposizione 4.3.2 (lemma di Fatou)** *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato; sia poi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili su X e non negative. Allora, posto $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ si ha*

$$\int_X f\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Dimostrazione Si ha $f = \sup_n \inf_{m\ge n} f_m$; quindi, posto $g_n = \inf_{m\ge n} f_m$, la successione $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifica le ipotesi del teorema di B. Levi. Ne segue, essendo ovviamente $g_n \le f_n$,

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu. \quad \square$$

Il più importante teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale è però il seguente:

Lebesgue **Teorema 4.3.3 (di Lebesgue o della convergenza dominata)** *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato, e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili su X, tali che:*

(i) $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *per ogni $x \in X$;*

(ii) $|f_n(x)| \le g(x)$ *per ogni $x \in X$, ove g è una funzione sommabile su X.*

Allora

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

Si osservi che la tesi del teorema si può rafforzare: in effetti si può concludere che

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0$$

(basta considerare le funzioni $|f_n - f|$ in luogo delle f_n, ed osservare che esse tendono puntualmente a 0 e sono "dominate" dalla funzione sommabile $2g$).

Dimostrazione Applichiamo il lemma di Fatou alle successioni $\{g + f_n\}$ e $\{g - f_n\}$, entrambe puntualmente convergenti e costituite da funzioni non negative. Si ottiene

$$\int_X (g+f)\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X (g+f_n)\,d\mu = \int_X g\,d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu,$$

$$\int_X (g-f)\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X (g-f_n)\,d\mu = \int_X g\,d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\,\mu.$$

Sottraendo la quantità finita $\int_X g\,d\mu$, si ottiene

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \le \int_X f\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu,$$

cioè la tesi. $\square$

Il teorema di Lebesgue ha anche una versione "continua", di grande importanza nelle applicazioni.

Lebcont **Teorema 4.3.4** *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato, sia $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e sia $f : X \times \mathbb{R} \setminus \{t_0\} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione tale che:*

(i) *$f(\cdot, t)$ è misurabile su X per ogni $t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$;*

(ii) *$|f(x,t)| \le g(x)$ per ogni $x \in X$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$, con g sommabile su X;*

(iii) *$\exists \lim_{t \to t_0} f(x,t) = F(x)$ per ogni $x \in X$.*

Allora

$$\exists \lim_{t \to t_0} \int_X f(\cdot, t)\, d\mu = \int_X F\, d\mu.$$

Dimostrazione Sia $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$ un'arbitraria successione che tende a t_0 per $n \to \infty$; posto $f_n = f(\cdot, t_n)$, la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente a F in X ed è dominata dalla funzione sommabile g. Dunque per il teorema di Lebesgue

$$\exists \lim_{n \to \infty} \int_X f(\cdot, t_n)\, d\mu = \int_X F\, d\mu.$$

Dall'arbitrarietà della successione $\{t_n\}$ segue la tesi. □

derint **Esempio 4.3.5** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che:

(i) $f(\cdot, t)$ è sommabile su $\mathbb{R}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$;

(ii) f è derivabile rispetto a t in ogni punto $(x,t) \in \mathbb{R}^2$;

(iii) $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le \varphi(x)$ per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, ove φ è una funzione sommabile su $\mathbb{R}$.

In queste ipotesi si ha, indicando con m_x la misura di Lebesgue rispetto alla variabile x,

$$\exists \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} f(x,t)\, dm_x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dm_x\,.$$

Infatti, fissato $t \in \mathbb{R}$, i rapporti incrementali

$$f_h(x) = \frac{f(x, t+h) - f(x,t)}{h} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad h \neq 0,$$

verificano le ipotesi del teorema 4.3.4 perché, grazie al teorema del valor medio,

$$|f_h(x)| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi_{t,x,h})\right| \le \varphi(x) \qquad \forall h \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ove $\xi_{t,x,h}$ è un opportuno punto compreso fra t e $t+h$; ne segue che

$$\exists \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} f_h(x)\, dm_x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dm_x\,,$$

che è quanto si voleva.

Esercizi 4.3

serint

1. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili e non negative su X. Si provi che
$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_X f_n\,d\mu=\int_X\sum_{n=0}^{\infty}f_n\,d\mu.$$

Levigiu

2. Si provi questa generalizzazione del teorema 4.3.1: se le funzioni f_n sono misurabili e verificano $f_{n+1}\geq f_n\geq g$, ove g è una funzione sommabile su X, allora posto $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$, si ha
$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu=\int_X f\,d\mu.$$

BLqo

3. Dimostrare che il teorema di B. Levi è ancora valido se si suppone che per ogni $n\in\mathbb{N}$ le relazioni $0\leq f_n\leq f_{n+1}$ siano verificate soltanto q.o. in X.

FLqo

4. Dimostrare che il lemma di Fatou ed il teorema di Lebesgue sono ancora validi supponendo che per ogni $n\in\mathbb{N}$ la relazione puntuale richiesta per f_n sia verificata soltanto q.o. in X, anziché per ogni $x\in X$.

intperser

5. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili su X. Se
$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_X|f_n|\,d\mu<\infty,$$
si provi che $\sum_{n=0}^{\infty}f_n$ è sommabile su X e che
$$\int_X\sum_{n=0}^{\infty}f_n\,d\mu=\sum_{n=0}^{\infty}\int_X f_n\,d\mu.$$

someps

6. Sia $(X,\mathcal{F},\mu)$ uno spazio misurato σ-finito e sia f una funzione non negativa e sommabile. Si provi che per ogni $\varepsilon>0$ esiste un insieme $A_\varepsilon\in\mathcal{F}$ tale che
$$\mu(A_\varepsilon)<\infty,\qquad\int_{X\setminus A_\varepsilon}f\,d\mu<\varepsilon.$$

ptdom

7. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili e non negative su X, e supponiamo che esista una funzione misurabile e non negativa f, tale che $f_n\leq f$ q.o. in X per ogni $n\in\mathbb{N}$ e $f_n(x)\to f(x)$ q.o. in X per $n\to\infty$. Si provi che
$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu=\int_X f\,d\mu.$$

tuttedis

8. Esibire una successione $\{f_n\}$ di funzioni misurabili tale che
$$\int_X\liminf_{n\to\infty}f_n\,d\mu<\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu<\limsup_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu<\int_X\limsup_{n\to\infty}f_n\,d\mu.$$
[**Traccia:** per ogni $n\in\mathbb{N}$ si ponga $f_{2n+1}=\chi_{[1/3,1]}$, $f_{2n+2}=\chi_{[0,1/3]}$.]

Lebgener

9. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni integrabili su X, tale che:

   (i) $f_n(x) \to f(x)$ q.o. in X per $n \to \infty$;
   (ii) $|f_n(x)| \le g_n(x)$ q.o. in X per ogni $n \in \mathbb{N}$;
   (iii) $g_n(x) \to g(x)$ q.o. in X per $n \to \infty$;
   (iv) g_n e g sono sommabili su X e $\int_X g_n \, d\mu \to \int_X g \, d\mu$ per $n \to \infty$.

   Si provi che

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

f1n

10. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. Se f è sommabile su X, si provi che

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_X |f|^{1/n} \, d\mu = \mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}).$$

medvsmis

11. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni sommabili tale che $\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0$; si provi che allora $f_n \to f$ in misura. È vero il viceversa?

SEdom

12. (*Teorema di Severini-Egorov con convergenza dominata*) Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili su X, tali che $f_n(x) \to f(x)$ q.o. in X, e supponiamo che esista g sommabile su X per cui risulti $|f_n(x)| \le g(x)$ q.o. in X per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si provi che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme misurabile E con $\mu(E) < \varepsilon$, tale che $f_n \to f$ uniformemente in E^c per $n \to \infty$.
   [**Traccia:** si ripeta, con le modifiche necessarie, la dimostrazione del teorema 3.4.2.]

Famis

13. (*Lemma di Fatou per la convergenza in misura*) Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili e q.o. finite su X, con $f_n \ge 0$ q.o.; si provi che se $f_n \to f$ in misura, allora

$$\int_X f \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

   [**Traccia:** usando la definizione di minimo limite, si troverà una sottosuccessione di $\{f_n\}$, dalla quale si estrarrà un'ulteriore sottosuccessione a cui applicare il lemma di Fatou...]

misdom

14. Si provi che se $f_n \to f$ in misura, e se esiste una funzione sommabile g tale che $|f_n| \le g$ q.o., allora $\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0$.
   [**Traccia:** si applichi l'esercizio precedente a $2g \pm |f_n - f|$.]

Lebgene

15. Siano f_n, f funzioni sommabili su X, tali che $f_n(x) \to f(x)$ q.o. in X. Si provi che se, inoltre, $\int_X |f_n| \, d\mu \to \int_X |f| \, d\mu$, allora $\int_X |f - f_n| \, d\mu$ tende a 0, e che la tesi è falsa senza quest'ultima ipotesi.

fgsom

16. Sia f una funzione sommabile su $]0,1[$. Provare che esiste una funzione misurabile $g :]0,1[\to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty, \qquad \int_0^1 |f(t)g(t)|dt < \infty.$$

2sigmaa

17. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato e sia f una funzione $\mathcal{F}$-misurabile, sommabile su X; siano poi $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ un'altra σ-algebra su X e $h : X \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{G}$-misurabile, tale che

$$\int_B f\,d\mu = \int_B h\,d\mu \qquad \forall B \in \mathcal{G}.$$

Si provi che per ogni funzione $\mathcal{G}$-misurabile g, tale che gf sia sommabile su X, si ha

$$\int_X gf\,d\mu = \int_X gh\,d\mu.$$

4.4 Confronto fra integrale di Riemann ed integrale di Lebesgue

RieLeb

Consideriamo lo spazio misurato $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$. Come suggerisce l'esercizio 4.2.4, sembra esserci una relazione fra l'integrabilità secondo Riemann e la sommabilità secondo Lebesgue: come vedremo subito, la prima implica la seconda e l'integrale di Riemann di una funzione, se esiste, coincide con quello di Lebesgue. Ciò, fra l'altro, ci permetterà di dire che il calcolo esplicito di un integrale di Lebesgue, quando è possibile, si fa esattamente come siamo da sempre abituati a fare. Questo paragrafo è dedicato al confronto tra le due nozioni di integrale, compreso il caso degli integrali di Riemann impropri; daremo anche una caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Riemann in termini della misura di Lebesgue.
Indicheremo con $\mathcal{R}(a, b)$ l'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann sul generico intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, e con $\mathcal{L}^1(a, b)$ quello delle funzioni sommabili secondo Lebesgue su $[a, b]$; denoteremo rispettivamente con

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_a^b f\,dm$$

gli integrali di f su $[a, b]$ secondo Riemann e secondo Lebesgue.
Per quanto riguarda l'integrale di Riemann su un intervallo, vale il seguente risultato:

Rie=Leb

Proposizione 4.4.1 *Se $f \in \mathcal{R}(a, b)$, allora $f \in \mathcal{L}^1(a, b)$ e*

$$\int_a^b f\,dm = \int_a^b f(x)\,dx;$$

viceversa, esistono funzioni sommabili su $[a, b]$ che non sono integrabili secondo Riemann su $[a, b]$.

Dimostrazione La funzione $\chi_{\mathbb{Q}}$ è sommabile in ogni $[a, b] \subset \mathbb{R}$, con integrale nullo, ma non è integrabile secondo Riemann su alcun intervallo di ampiezza positiva.
Dimostriamo l'enunciato principale. Sia $f \in \mathcal{R}(a, b)$: proviamo per prima cosa che

f è misurabile (rispetto alla misura di Lebesgue). Anzitutto osserviamo che per ogni funzione φ costante a tratti e nulla fuori di $[a,b]$,

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{I_i}\,, \qquad I_i \subseteq [a,b] \quad \text{intervalli disgiunti,}$$

l'integrale di Riemann e quello di Lebesgue su $[a,b]$ coincidono:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b \varphi\,dm = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i m(I_i).$$

Per definizione, poi, f è limitata in $[a,b]$ e si ha

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sup\left\{\int_a^b \varphi\,dm : \varphi \text{ costante a tratti, } \varphi \le f \text{ in } [a,b]\right\} = \\ &= \inf\left\{\int_a^b \psi\,dm : \psi \text{ costante a tratti, } \psi \ge f \text{ in } [a,b]\right\}.\end{aligned}$$

Quindi esistono due successioni $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ di funzioni costanti a tratti tali che $\varphi_n \le f \le \psi_n$ in $[a,b]$ e $\int_a^b(\psi_n - \varphi_n)\,dm < \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Inoltre si può supporre che $\varphi_n \le \varphi_{n+1}$ e $\psi_n \ge \psi_{n+1}$ per ogni n (rimpiazzando φ_n con $\max_{k\le n}\varphi_k$ e ψ_n con $\min_{k\le n}\psi_k$).
Definiamo ora

$$\varphi = \sup_n \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \varphi_n \qquad \psi = \inf_n \psi_n = \lim_{n\to\infty} \psi_n\,.$$

Le funzioni φ e ψ sono misurabili (proposizione 3.1.6), e si ha $\varphi \le f \le \psi$; dimostriamo che $\varphi = \psi$ q.o. in $[a,b]$.
Poiché $0 \le \psi - \varphi \le \psi_n - \varphi_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, per la monotonia dell'integrale deduciamo

$$0 \le \int_a^b (\psi - \varphi)\,dm < \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+;$$

quindi $\psi - \varphi$, essendo non negativa ed avendo integrale nullo, è q.o. nulla in $[a,b]$ per l'esercizio 4.2.8.
Pertanto abbiamo $\varphi = f = \psi$ q.o. in $[a,b]$: dunque f coincide q.o. con una funzione misurabile e quindi, in virtù della completezza della misura di Lebesgue, è essa stessa misurabile (osservazione 3.2.2).
Poichè f è limitata in $[a,b]$, f è sommabile su $[a,b]$. Inoltre, per la monotonia dell'integrale, per ogni coppia di funzioni costanti a tratti φ, ψ, tali che $\varphi \le f \le \psi$ in $[a,b]$, risulta

$$\int_a^b \varphi\,dm \le \int_a^b f\,dm \le \int_a^b \psi\,dm;$$

ne segue, per definizione di integrale di Riemann,

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b f\,dm \le \int_a^b f(x)\,dx,$$

il che prova che gli integrali di Riemann e di Lebesgue di f coincidono. $\square$

Per quanto riguarda gli integrali di Riemann impropri, la situazione è meno facile. Ci limiteremo per semplicità a trattare il caso di integrali impropri su $[0,\infty[$; indicheremo con $\mathcal{R}^*(0,\infty)$ la classe delle funzioni che sono integrabili in senso improprio su tale semiretta: per definizione, si ha $f \in \mathcal{R}^*(0,\infty)$ se e solo se $f \in \mathcal{R}(a,b)$ per ogni $[a,b] \subset [0,\infty[$ ed esiste finito il limite

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b f(x)\,dx,$$

il quale definisce appunto l'integrale improprio $\int_0^\infty f(x)\,dx$.

Rie*=Leb **Proposizione 4.4.2** **(i)** *Se $f \in \mathcal{L}^1(0,\infty)$, allora in generale $f \notin \mathcal{R}^*(0,\infty)$.*

(ii) *Se $f \in \mathcal{L}^1(0,\infty)$, e se $f \in \mathcal{R}(a,b)$ per ogni $[a,b] \subset [0,\infty[$, allora $f \in \mathcal{R}^*(0,\infty)$ e*

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty f\,dm\ .$$

(iii) *Se $f \in \mathcal{R}^*(0,\infty)$ allora in generale $f \notin \mathcal{L}^1(0,\infty)$.*

(iv) *Se $f, |f| \in \mathcal{R}^*(0,\infty)$ allora $f \in \mathcal{L}^1(0,\infty)$ e*

$$\int_0^\infty f\,dm = \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Dimostrazione **(i)** La funzione $\chi_{\mathbb{Q}}$ è sommabile su $[0,\infty[$ con integrale nullo, e non appartiene a $\mathcal{R}^*(0,\infty)$.

(ii) La funzione f è sommabile su $[0,\infty[$, e poiché per ipotesi essa è anche integrabile secondo Riemann su ogni $[a,b] \subset [0,\infty[$, dalla proposizione 4.4.1 segue che

$$\int_0^b f(x)dx = \int_0^b f\ dm \qquad \forall b > 0.$$

Passiamo al limite per $b \to +\infty$: per ogni $x > 0$ si ha

$$\lim_{b\to+\infty} f(x)\chi_{[0,b]}(x) = f(x)\chi_{[0,+\infty[}(x),$$

ed inoltre

$$|f(x)\chi_{[0,b]}(x) \le |f(x)| \qquad \forall x > 0;$$

quindi dalla sommabilità di f e dal teorema 4.3.4 segue che

$$\exists \int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty f\,dm,$$

da cui la tesi.

(iii) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua su $[0,\infty[$; quindi è misurabile e appartiene a $\mathcal{R}(a,b)$ per ogni $[a,b] \subset [0,\infty[$. Inoltre, come si sa, $f \in \mathcal{R}^*(0,\infty)$ mentre $|f| \notin \mathcal{R}^*(0,\infty)$. Ne segue che f non è sommabile su $[0,\infty[$: infatti se fosse $f \in \mathcal{L}^1(0,\infty)$, avremmo anche $|f| \in \mathcal{L}^1(0,\infty)$, e allora da (ii) seguirebbe $|f| \in \mathcal{R}^*(0,\infty)$, cosa che non è vera.

(iv) Se $f, |f| \in \mathcal{R}^*(0,\infty)$, allora in particolare $f, |f| \in \mathcal{R}(a,b)$ per ogni $[a,b] \subset [0,\infty[$; dalla proposizione 4.4.1 segue allora che $f\chi_{[a,b]}$ è misurabile per ogni $[a,b] \subset [0,\infty[$, e quindi f, essendo il limite puntuale di $f\chi_{[0,n]}$ per $n \to \infty$, è misurabile. Inoltre, applicando il teorema di B. Levi (teorema 4.3.1) alla successione $\{|f|\chi_{[0,n]}\}$, si ottiene

$$\int_0^\infty |f|\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_0^n |f|\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_0^n |f(x)|\,dx = \int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

In particolare, tale integrale è finito e pertanto $|f|$ è sommabile su $[0,\infty[$. Di conseguenza f è sommabile su $[0,\infty[$ ed applicando (ii) si ottiene $\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty f\,dm$, che è la tesi. □

È possibile caratterizzare, tramite la misura di Lebesgue, le funzioni di $\mathcal{L}^1(a,b)$ che appartengono alla sottoclasse $\mathcal{R}(a,b)$. Si ha infatti:

RieinLeb **Proposizione 4.4.3** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Si ha $f \in \mathcal{R}(a,b)$ se e solo se l'insieme dei punti di discontinuità di f è misurabile secondo Lebesgue ed ha misura nulla.*

Dimostrazione ($\Longrightarrow$) Sia $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Come abbiamo visto nella dimostrazione della proposizione 4.4.1, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esistono φ_n, ψ_n costanti a tratti in $[a,b]$ tali che

$$\varphi_n \le \varphi_{n+1} \le f \le \psi_{n+1} \le \psi_n \text{ in } [a,b], \qquad \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)\,dm < \frac{1}{n},$$

ed inoltre, posto $\varphi = \sup_n \varphi_n$ e $\psi = \inf_n \psi_n$, si ha $\varphi \le f \le \psi$ in $[a,b]$ e $\varphi = f = \psi$ q.o. in $[a,b]$.
Definiamo ora

$$B = \{x \in [a,b] : \exists n \in \mathbb{N}^+ : x \text{ è punto di discontinuità per } \varphi_n \text{ o per } \psi_n\},$$
$$P = \{x \in [a,b] : \varphi(x) < \psi(x)\};$$

come si è visto P ha misura nulla, ed anche B ha misura nulla essendo al più numerabile. Quindi

$$A \equiv B \cup P \in \mathcal{M} \quad \text{e} \quad m(A) = 0.$$

Dimostriamo che f è discontinua *al più* nei punti di A: ciò proverà la tesi.
Se x è un punto di discontinuità per f, devono esistere $\varepsilon > 0$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tali che

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x, \qquad |f(x_k) - f(x)| \ge \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Per provare che $x \in A$, notiamo che se $x \in B$ allora evidentemente $x \in B \cup P = A$; se invece $x \notin B$, allora x è punto di continuità per tutte le funzioni φ_n, ψ_n. Dato che tali funzioni sono costanti a tratti, ciò implica che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esiste $k_n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\varphi_n(x_k) = \varphi_n(x), \quad \psi_n(x_k) = \psi_n(x) \qquad \forall k \ge k_n.$$

Ne segue, fissando arbitrariamente n e scegliendo $k \geq k_n$,

$$\psi_n(x) - \varphi_n(x) = \begin{cases} \psi_n(x) - \varphi_n(x_k) \geq f(x) - f(x_k) & \text{se } f(x_k) \leq f(x) - \varepsilon \\ \psi_n(x_k) - \varphi_n(x) \geq f(x_k) - f(x) & \text{se } f(x_k) \geq f(x) + \varepsilon. \end{cases}$$

In entrambi i casi si deduce

$$\psi_n(x) - \varphi_n(x) \geq |f(x_k) - f(x)| \geq \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+, \quad \forall k \geq k_n\,,$$

e passando al limite per $n \to \infty$ otteniamo

$$\psi(x) \geq \varphi(x) + \varepsilon > \varphi(x).$$

Pertanto $x \in P$ ed infine, come si voleva, $x \in A$.

($\Longleftarrow$) Sia f limitata in $[a, b]$ e continua salvo che in un insieme di punti di misura di Lebesgue nulla. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo la partizione π_n di $[a, b[$ i cui nodi sono

$$x_i = a + \frac{i}{2^n}(b - a), \qquad i = 0, 1, \ldots, 2^n,$$

e poniamo $I_{in} = [x_{i-1}, x_i[\,,\ i = 1, \ldots, 2^n$; definiamo poi le seguenti funzioni costanti a tratti:

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{2^n} \inf_{I_{in}} f \cdot \chi_{I_{in}}\,, \qquad \psi_n = \sum_{i=1}^{2^n} \sup_{I_{in}} f \cdot \chi_{I_{in}}\,.$$

Dato che, per ogni n, π_{n+1} è più fine di π_n, è chiaro che

$$\inf_{[a,b[} f = \varphi_0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq f \leq \psi_{n+1} \leq \psi_n \leq \psi_0 = \sup_{[a,b[} f.$$

Quindi, posto $\varphi = \sup_n \varphi_n$ e $\psi = \inf_n \psi_n$, si ha per il teorema di Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n\, dm = \int_a^b \varphi\, dm, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n\, dm = \int_a^b \psi\, dm,$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)\, dm = \int_a^b (\psi - \varphi)\, dm.$$

Osserviamo ora che se x è un punto di continuità di f, allora deve essere $\varphi(x) = \psi(x)$. Infatti, se f è continua in x, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x' - x| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x') - f(x)| < \varepsilon\,;$$

allora, per n abbastanza grande, l'unico intervallo I_{in} a cui appartiene x è contenuto in $]x - \delta, x + \delta[$. Di conseguenza si ha, per n abbastanza grande,

$$x' \in I_{in} \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x') - f(x)| < \varepsilon,$$

e dunque

$$\psi_n(x) - \varphi_n(x) = \sup_{I_{in}} f - \inf_{I_{in}} f \leq \varepsilon \qquad \text{definitivamente.}$$

Quindi, a maggior ragione,

$$0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon.$$

Poiché ε è arbitrario, deve essere $\varphi(x) = \psi(x)$.
Per ipotesi, i punti di discontinuità di f formano un insieme di misura nulla: ne segue, essendo $\varphi \leq f \leq \psi$ in $[a, b]$,

$$\varphi = f = \psi \qquad \text{q.o. in } [a, b],$$

cosicché f è misurabile grazie alla completezza della misura di Lebesgue. Inoltre

$$\int_a^b \varphi \, dm = \int_a^b f \, dm = \int_a^b \psi \, dm,$$

ed in particolare

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n) \, dm = 0.$$

Per definizione di integrale di Riemann si conclude che $f \in \mathcal{R}(a, b)$ e

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f \, dm. \quad \square$$

Esercizi 4.4

fnLebno

1. Determinare una successione di funzioni $\{f_n\}$ definite in $[0, 1]$, tali che:

$$\text{(i) } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1], \qquad \text{(ii) } \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \, dm = 1.$$

somilli

2. Determinare una funzione continua f, sommabile su $\mathbb{R}$, ed illimitata sul complementare di ogni compatto.

funzEu

3. Si consideri la funzione Γ di Eulero, già incontrata nel teorema 2.4.7. Si provi che Γ è una funzione di classe C^∞ su $]0, \infty[$, e che

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^\infty x^{p-1} (\log x)^n \, e^{-x} \, dx \qquad \forall p > 0.$$

intelli

4. Si consideri la funzione

$$F(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - a \sin^2 t}}, \qquad 0 < a < 1.$$

(i) Si verifichi che F è di classe C^∞ su $]0, 1[$.

(ii) Si calcolino, se esistono, i limiti

$$\lim_{a\to 0^+} F(a), \qquad \lim_{a\to 1^-} F(a).$$

ontivecchio

5. Sia

$$f_n(x) = \left(\frac{n+x}{n+2x}\right)^n, \qquad x \in [0,\infty[\,, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Dimostrare che $f_n \geq f_{n+1}$ e calcolare $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$; dire inoltre se si può passare al limite sotto il segno di integrale nei due casi seguenti:

$$\text{(i)} \quad \int_0^\infty f_n(x)e^{x/2}\,dm, \qquad \text{(ii)} \quad \int_0^\infty f_n(x)e^{-x/2}\,dm.$$

tantilim

6. Dimostrare le seguenti uguaglianze:

(i) $\int_0^1 \frac{x^p}{1-x}|\log x|\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+p)^2} \quad \forall p > -1,$

(ii) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - t}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{1+(n+1)^2} \quad \forall t \in [-1,1],$

(iii) $\int_0^1 \sin x \log x\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2n(2n)!}\ ,$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n x^{p-1}\,dx = \Gamma(p) \quad \forall p > 0,$

(v) $\int_0^1 \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n-1}}{n^\alpha}\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1+\alpha}}\,, \quad \forall \alpha > 0,$

(vi) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{e^x+1}\,dx = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}\ ,$

(vii) $\int_0^\pi \sum_{n=1}^\infty \frac{n^2 \sin nx}{a^n}\,dx = 2a\,\frac{(1+a^2)}{(a^2-1)^2} \quad \forall a > 1,$

(viii) $\int_0^\infty e^{-x}\cos\sqrt{x}\,dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}\ ,$

(ix) $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty (1+\frac{x}{n})^{-n} x^{-1/n}\,dx = 1,$

(x) $\int_0^1 \left(\frac{\log x}{1-x}\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{3},$

(xi) $\int_0^1 (e^x - 1)(\log x + \frac{1}{x})\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{n^2+n+1}{(n+1)!(n^2+n)}\ ,$

(xii) $\int_0^1 \frac{(x\log x)^2}{1+x^2}\,dx = 2\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\ ,$

(xiii) $\int_0^\infty \frac{\sinh ax}{\sinh bx}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{2a}{(2n+1)^2b^2 - a^2} \quad \forall b > a > 0,$

(xiv) $\int_0^\infty e^{-x^2}\sin x\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n n!}{2(2n+1)!}\,,$

(xv) $\int_0^1 \frac{|\log x|^k}{1+x}\,dx = k!\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$

altrilim 7. Calcolare, se esistono, i limiti

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{1}{x^{-n}+x^2}\,dx, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{nx+x^2}{1+nx^{3/2}}e^{-\sqrt{x}}\,dx.$$

$$\text{(iii)}\ \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\sin n\sqrt{x}\cdot\cos nx\cdot e^{-x}}{nx+x^2}\,dx.$$

limpar 8. Si verifichi che se $a>0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^\infty \frac{n^2x\,e^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,dx = 0.$$

Che succede per $a=0$?

nenvecchio 9. Si provi che per $p,q>0$ risulta

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{p+nq}\,;$$

dedurne che

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} = \log 2, \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}\,, \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3}\log 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,.$$

limcasi 10. Si provi che per $|a|\le 1$ risulta

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1-ax^3}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{a^n}{(3n+1)(3n+2)}\,;$$

dedurne che

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,, \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(6n+1)(6n+2)} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{6}\log 2.$$

funperi 11. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{nx-[nx]}{2^n}\,.$$

Si verifichi che f è periodica di periodo 1, si mostri che f è sommabile su $[0,1]$ e se ne calcoli l'integrale.

interpint 12. Sia $f:]0,\infty[\to\overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile, tale che le funzioni $x^\alpha f(x)$, $x^\beta f(x)$ siano sommabili su $]0,\infty[$, ove α,β sono numeri reali con $\alpha<\beta$. Provare che $x^\gamma f(x)$ è sommabile su $]0,\infty[$ per ogni $\gamma\in]\alpha,\beta[$, e che la funzione $F(\gamma)=\int_0^\infty x^\gamma f(x)\,dm$ è continua in $[\alpha,\beta]$.

limds 13. Poniamo

$$F_n(t) = \frac{n}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{1 + n^2(x-t)^2}\, dm, \qquad t \in \mathbb{R},$$

ove $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Provare che se f ha limite destro e sinistro finiti in un punto $t \in \mathbb{R}$, allora

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = \frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)].$$

CantornonR 14. Sia C_ξ l'insieme di Cantor di parametro $\xi \in]0, \frac{1}{3}[$ (paragrafo 1.6). Le funzioni χ_{C_ξ} sono integrabili secondo Riemann su $[0,1]$?

Riespec 15. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che per ogni $x_0 \in [a,b]$ esista finito il limite

$$g(x_0) \equiv \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Dimostrare che f è limitata, che f è misurabile, e che f è integrabile secondo Riemann.

noRieqo 16. Si costruisca una funzione f sommabile in $[0,1]$ tale che nessuna funzione g, coincidente con f q.o. in $[0,1]$, sia integrabile secondo Riemann.

4.5 Assoluta continuità

asscont

Vogliamo analizzare alcune relazioni che possono intercorrere fra diverse misure definite su una stessa σ-algebra. Consideriamo dunque un insieme X ed una σ-algebra $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X; siano poi λ e μ due misure definite su $\mathcal{F}$.

assolcont **Definizione 4.5.1** *Diciamo che λ è* assolutamente continua *rispetto a μ, e scriviamo $\lambda \ll \mu$, se*

$$E \in \mathcal{F}, \quad \mu(E) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(E) = 0.$$

Una misura λ è quindi assolutamente continua rispetto ad un'altra misura μ se ha (almeno) gli stessi insiemi di misura nulla che ha μ.

concentr **Definizione 4.5.2** *Sia $A \in \mathcal{F}$; diciamo che la misura μ è* concentrata *su A se si ha*

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) \qquad \forall E \in \mathcal{F}.$$

Questa definizione è stata già incontrata nell'esempio 2.1.3 (2). Si può dire, equivalentemente, che μ è concentrata su A se e solo se risulta $\mu(E) = 0$ per ogni $E \in \mathcal{F}$ disgiunto da A. Si noti che l'insieme A non è univocamente determinato: se μ è concentrata su A, allora μ è concentrata anche su tutti gli insiemi di $\mathcal{F}$ che contengono A, ed anche su quelli che differiscono da A per un insieme di misura nulla (esercizio 4.5.1).

Definizione 4.5.3 *Diciamo che λ è* singolare *rispetto a μ, e scriviamo $\lambda \perp \mu$, se esistono due insiemi disgiunti $A, B \in \mathcal{F}$ tali che λ sia concentrata su A e μ sia concentrata su B.*

Notiamo che la relazione di assoluta continuità è riflessiva e transitiva, mentre quella di singolarità è simmetrica. Inoltre le due nozioni sono fra loro "duali", nel senso precisato dalla seguente

acsing **Proposizione 4.5.4** *Siano $\lambda_1, \lambda_2, \mu$ misure sulla σ-algebra $\mathcal{F}$. Valgono i seguenti fatti:*

(i) *se $\lambda_1 \perp \mu$ e $\lambda_2 \perp \mu$, allora $\lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$;*

(ii) *se $\lambda_1 \ll \mu$ e $\lambda_2 \ll \mu$, allora $\lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$;*

(iii) *se $\lambda_1 \ll \mu$ e $\lambda_2 \perp \mu$, allora $\lambda_1 \perp \lambda_2$;*

(iv) *se $\lambda_1 \ll \mu$ e $\lambda_1 \perp \mu$, allora $\lambda_1 = 0$.*

Dimostrazione Vedere l'esercizio 4.5.3. □

Il termine "assoluta continuità", che sembra avere poca affinità con il concetto espresso nella definizione 4.5.1, è giustificato dalla proposizione che segue:

carattac **Proposizione 4.5.5** *Siano λ, μ misure definite sulla σ-algebra $\mathcal{F}$, e supponiamo che $\lambda(X) < +\infty$. Si ha $\lambda \ll \mu$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$E \in \mathcal{F},\ \mu(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \lambda(E) < \varepsilon.$$

Dimostrazione ($\Longrightarrow$) Sia $\lambda \ll \mu$. Ragioniamo per assurdo: negando la tesi, otteniamo che esiste $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si può trovare $E_n \in \mathcal{F}$ per il quale risulta $\mu(E_n) < 2^{-n}$ e $\lambda(E_n) \geq \varepsilon$. Posto allora

$$F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\ , \qquad F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \limsup_{n\to\infty} E_n\ ,$$

si ha

$$\mu(F_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k},$$

da cui $\mu(F_n) \to 0$ per $n \to \infty$; dato che $F \subseteq F_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si deduce $\mu(F) \leq \mu(F_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e pertanto $\mu(F) = 0$.
D'altra parte, essendo $F_n \supseteq E_n$, risulta $\lambda(F_n) \geq \lambda(E_n) \geq \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; e poiché $F_n \supseteq F_{n+1}$, dal fatto che $\lambda(X) < \infty$ e dalla proposizione 2.1.5 segue che

$$\lambda(F) = \lim_{n\to\infty} \lambda(F_n) \geq \varepsilon.$$

Quindi λ non verifica la definizione di assoluta continuità rispetto a μ.

($\Longleftarrow$) Ragionando nuovamente per assurdo, sia $E \in \mathcal{F}$ tale che $\mu(E) = 0$ e $\lambda(E) > 0$: allora, scelto $\varepsilon \in]0, \lambda(E)]$, si ha

$$\mu(E) = 0 < \delta \quad \forall \delta > 0, \quad \text{ma} \quad \lambda(E) \geq \varepsilon,$$

contraddicendo così l'ipotesi. □

Osserviamo che la caratterizzazione fornita dalla proposizione precedente non vale in generale per misure λ non finite (esercizio 4.5.4).

L'esempio tipico di una misura finita ed assolutamente continua rispetto ad una misura assegnata μ è dato dall'integrale di una funzione μ-sommabile. Vale infatti la proprietà seguente (*assoluta continuità dell'integrale*):

acint **Proposizione 4.5.6** *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. Se f è una funzione misurabile su X, allora la misura*

$$\lambda(E) = \int_E |f|\, d\mu, \qquad E \in \mathcal{F},$$

è assolutamente continua rispetto a μ. Se in particolare $f \in \mathcal{L}^1(X)$, allora λ è una misura finita su X.

Dimostrazione Se f è misurabile su X, allora $|f|$ è integrabile e per ogni $E \in \mathcal{F}$ con $\mu(E) = 0$ si ha $\lambda(E) = 0$ grazie all'osservazione 4.2.3 (3). Inoltre, se $f \in \mathcal{L}^1(X)$, allora ovviamente risulta

$$\lambda(X) = \int_X |f|\, d\mu < \infty. \quad \square$$

Uno dei più importanti risultati di teoria della misura è costituito da un fondamentale teorema di decomposizione e "classificazione" delle misure in termini delle nozioni di assoluta continuità e mutua singolarità: il teorema di Lebesgue-Radon-Nikodým. Si tratta in effetti di due enunciati distinti, che però dimostreremo simultaneamente, cosicché il secondo figurerà come un facile corollario del primo. Da quest'ultimo seguirà che se $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è uno spazio misurato σ-finito, allora ogni misura finita λ definita su $\mathcal{F}$, assolutamente continua rispetto a μ, è del tipo

$$\lambda(E) = \int_E |f|\, d\mu$$

per qualche f μ-sommabile su X.
Prima di enunciare i due teoremi dimostriamo un lemma che è la chiave di tutta l'argomentazione.

chiave **Lemma 4.5.7** *Siano μ e ν due misure finite sullo spazio misurabile $(X, \mathcal{F})$. Se $\nu(E) \le \mu(E)$ per ogni $E \in \mathcal{F}$, allora esiste una funzione non negativa $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ tale che*

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{F}.$$

Dimostrazione Faremo tre passi successivi.

1° passo Proviamo che, definita

$$H = \left\{ g \in \mathcal{L}^1(X, \mu) :\ g \ge 0,\ \int_E g\, d\mu \le \nu(E)\ \ \forall E \in \mathcal{F} \right\}$$

e posto $\alpha = \sup_{g \in H} \int_X g\, d\mu$, esiste $f \in H$ tale che

$$\int_X f\, d\mu = \alpha.$$

Sia $0 \le \nu \le \mu$, con μ ovviamente non identicamente nulla (in tal caso si sceglie $f \equiv 0$). Osserviamo anzitutto che la classe H non è vuota, dato che $0 \in H$. Notiamo inoltre che se $g_1, g_2 \in H$ allora $g_1 \vee g_2 \in H$: infatti, posto $A = \{x \in X : g_1(x) \le g_2(x)\}$, si ha per ogni $E \in \mathcal{F}$

$$\int_E g_1 \vee g_2 \, d\mu = \int_{E\cap A} g_2 \, d\mu + \int_{E\cap A^c} g_1 \, d\mu \le \nu(E \cap A) + \nu(E \cap A^c) = \nu(E).$$

Sia ora $\{g_n\} \subset H$ una successione tale che $\int_X g_n \, d\mu \to \alpha$; a meno di sostituire g_n con $\max_{1\le k\le n} g_k$, possiamo supporre che $\{g_n\}$ sia crescente; dunque, per il teorema di B. Levi (teorema 4.3.1) esiste $f \in H$ tale che $g_n \to f$ puntualmente, e $\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$. Ne segue la tesi del 1° passo, e in particolare $\int_X f \, d\mu \le \nu(X)$. L'obiettivo finale è far vedere che la misura finita $\lambda(E) = \nu(E) - \int_E f \, d\mu$ è identicamente nulla. Supponiamo per assurdo che ciò non sia vero, e che quindi $\lambda(X) > 0$. Fissiamo ε tale che $0 < \varepsilon < \frac{\lambda(X)}{\mu(X)}$ e consideriamo le due misure finite λ ed $\varepsilon\,\mu$: sappiamo che $\varepsilon\,\mu(X) < \lambda(X)$.

2° passo Proviamo che esiste $D \in \mathcal{F}$ tale che

$$\varepsilon\,\mu(E) \le \lambda(E) \qquad \forall E \in \mathcal{F},\ E \subseteq D.$$

Se questa proprietà vale per X, non c'è niente da dimostrare. Altrimenti, sia n_1 il minimo intero positivo per cui esiste $D_1 \in \mathcal{F}$ tale che

$$\varepsilon\,\mu(D_1) > \lambda(D_1) + \frac{1}{n_1}\,.$$

Se $X \setminus D_1$ verifica la proprietà del 2° passo, abbiamo finito; altrimenti, sia n_2 il minimo intero positivo per cui esiste $D_2 \in \mathcal{F}$, $D_2 \subseteq X \setminus D_1$, tale che

$$\varepsilon\,\mu(D_2) > \lambda(D_2) + \frac{1}{n_2}\,.$$

Se $X \setminus (D_1 \cup D_2)$ verifica la proprietà del 2° passo, abbiamo finito; altrimenti, andiamo avanti e, noti $n_1, \dots, n_{k-1}$ e $D_1, \dots, D_{k-1}$, sia n_k il minimo intero positivo per cui esiste $D_k \in \mathcal{F}$, $D_k \subseteq X \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} D_j$, tale che

$$\varepsilon\,\mu(D_k) > \lambda(D_k) + \frac{1}{n_k}\,.$$

Questo processo può terminare ad un certo passo k, con $X \setminus \bigcup_{j=1}^{k} D_j$ che verifica la proprietà del 2° passo, oppure vi è una successione $\{D_m\} \subset \mathcal{F}$ di insiemi disgiunti, tali che

$$\varepsilon\,\mu(D_m) > \lambda(D_m) + \frac{1}{n_m}\,, \quad m \in \mathbb{N}^+.$$

Poniamo allora $D = X \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m$, e verifichiamo che D verifica la proprietà del 2° passo. Osserviamo che, essendo $\varepsilon\,\mu(X) < \lambda(X) < \infty$,

$$\varepsilon\,\mu(D) + \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} \mu(D_m) = \varepsilon\,\mu(X) < \lambda(X) = \lambda(D) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(D_m) < \infty;$$

quindi le due serie sono convergenti, e anche la serie $\sum_{m=1}^{\infty}[\varepsilon\,\mu(D_m)-\lambda(D_m)]$, che è a termini positivi, converge. Quindi, per confronto,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n_m}\le\sum_{m=1}^{\infty}[\varepsilon\,\mu(D_m)-\lambda(D_m)]<\infty,$$

e pertanto $n_m\to\infty$ per $m\to\infty$. Notiamo poi che

$$0<\lambda(X)-\varepsilon\,\mu(X)=\lambda(D)-\varepsilon\,\mu(D)-\sum_{m=1}^{\infty}[\varepsilon\,\mu(D_m)-\lambda(D_m)]<\lambda(D)-\varepsilon\,\mu(D),$$

ossia $\varepsilon\,\mu(D)<\lambda(D)$ e in particolare $\lambda(D)>0$. Se, per assurdo, esistesse $A\in\mathcal{F}$, $A\subset D$, tale che $\varepsilon\,\mu(A)>\lambda(A)$, troveremmo $k\in\mathbb{N}^+$ sufficientemente grande in modo che $\varepsilon\,\mu(A)>\lambda(A)+\frac{1}{n_k-1}$. D'altra parte,

$$A\subset D=X\setminus\bigcup_{m=1}^{\infty}D_m\subseteq X\setminus\bigcup_{m=1}^{k-1}D_m\,,$$

e questo contraddice la definizione di n_k, che è il *minimo* intero positivo per cui $\varepsilon\,\mu(A)>\lambda(A)+\frac{1}{n_k}$. Ne segue che per ogni $A\subset D$ vale $\varepsilon\,\mu(A)\le\lambda(A)$, e pertanto D verifica la proprietà del 2° passo.

3° passo Terminiamo la dimostrazione: torniamo alla funzione f tale che $\int_X f\,d\mu=\alpha$. Consideriamo $f+\varepsilon\,\chi_D$: essa è non negativa e per ogni $E\in\mathcal{F}$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_E(f+\varepsilon\,\chi_D)\,d\mu &= \int_E f\,d\mu+\varepsilon\,\mu(E\cap D)=\\
&= \int_{E\cap D}f\,d\mu+\int_{E\cap D^c}f\,d\mu+\varepsilon\,\mu(E\cap D)\le\\
&\le \int_{E\cap D}f\,d\mu+\int_{E\cap D^c}f\,d\mu+\lambda(A\cap D)=\\
&\le \int_{E\cap D}f\,d\mu+\int_{E\cap D^c}f\,d\mu+\nu(E\cap D)-\int_{E\cap D}f\,d\mu=\\
&= \int_{E\cap D^c}f\,d\mu+\nu(E\cap D)\le\\
&\le \nu(E\cap D^c)+\nu(E\cap D)=\nu(E).
\end{aligned}$$

Dunque $f+\varepsilon\,\chi_D\in H$. Tuttavia

$$\int_X(f+\varepsilon\,\chi_D)\,d\mu=\int_X f\,d\mu+\varepsilon\,\mu(D)=\alpha+\varepsilon\,\mu(D);$$

poiché, come sappiamo, $\lambda(D)>0$, si ha a maggior ragione $0<\nu(D)\le\mu(D)$, cosicché dalla relazione precedente segue $\int_X(f+\varepsilon\,\chi_D)\,d\mu>\alpha$: questo contraddice la definizione di $\alpha=\sup_{g\in H}\int_X g\,d\mu$ e conclude la dimostrazione del lemma. □

Veniamo ora al teorema di Lebesgue-Radon-Nikodým.

decomp **Teorema 4.5.8 (di decomposizione di Lebesgue)** *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato σ-finito; sia λ un'altra misura definita su $\mathcal{F}$, anch'essa σ-finita. Allora esiste un'unica coppia di misure σ-finite λ_a, λ_s definite su $\mathcal{F}$, tali che*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s \ , \qquad \lambda_a \ll \mu \ , \qquad \lambda_s \perp \mu \ .$$

La coppia (λ_a, λ_s) è chiamata decomposizione di Lebesgue *di λ relativa a μ.*

Dimostrazione Proviamo anzitutto l'unicità della decomposizione. Supponiamo che (λ'_a, λ'_s) sia un'altra decomposizione di λ con $\lambda'_a \ll \mu$ e $\lambda'_s \perp \mu$; dobbiamo provare che $\lambda_a(E) = \lambda'_a(E)$ e $\lambda_s(E) = \lambda'_s(E)$ per ogni $E \in \mathcal{F}$, e a questo scopo, ricordando la proposizione 2.1.5, è sufficiente provare che tali relazioni valgono per ogni $E \in \mathcal{F}$ con $\lambda(E) < \infty$. Poiché, per ipotesi, $\lambda = \lambda_a + \lambda_s = \lambda'_a + \lambda'_s$, si ha

$$\lambda_a(E) - \lambda'_a(E) = \lambda'_s(E) - \lambda_s(E) \qquad \forall E \in \mathcal{F} \text{ con } \lambda(E) < \infty.$$

Consideriamo gli insiemi B, A_s, A'_s dove sono concentrate rispettivamente le misure $\mu, \lambda_s, \lambda'_s$: a causa della mutua singolarità, deve essere $B \cap (A_s \cup A'_s) = \emptyset$. Di conseguenza per ogni $E \in \mathcal{F}$ con $\lambda(E) < \infty$ risulta:

$$\begin{aligned} \mu(E) = \mu(E \cap B), &\qquad \mu(E \setminus B) = 0; \\ \lambda_s(E \cap B) = \lambda'_s(E \cap B) = 0, &\qquad \lambda_a(E \cap B) = \lambda'_a(E \cap B). \\ \lambda_a(E \setminus B) = \lambda'_a(E \setminus B) = 0, &\qquad \lambda_s(E \setminus B) = \lambda'_s(E \setminus B); \end{aligned}$$

Ne segue, usando l'additività delle misure,

$$\lambda_a(E) = \lambda_a(E \cap B) + \lambda_a(E \setminus B) = \lambda'_a(E \cap B) + \lambda'_a(E \setminus B) = \lambda'_a(E),$$

e similmente si ottiene $\lambda_s(E) = \lambda'_s(E)$. Ciò prova l'unicità della decomposizione.
Passiamo alla dimostrazione dell'esistenza, supponendo dapprima che λ sia finita. Osserviamo anzitutto che esiste una funzione $w \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ tale che $0 < w(x) < 1$ per ogni $x \in X$. Infatti, usando la σ-finitezza di X, se $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ con gli X_n disgiunti e tali che $\mu(X_n) < \infty$, basta porre

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x), \qquad \text{ove} \quad w_n(x) = \frac{2^{-n-1}}{1 + \mu(X_n)} \chi_{X_n}(x).$$

Definiamo una misura ausiliaria ν nel modo seguente:

$$\nu(E) = \lambda(E) + \int_E w \ d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{F};$$

ν è una misura finita su $\mathcal{F}$.
Da questa relazione fra misure discende la seguente, che vale per ogni funzione f $\mathcal{F}$-misurabile e non negativa:

$$\int_X f \, d\nu = \int_X f \, d\lambda + \int_X f \, w \, d\mu.$$

Infatti, per linearità essa vale per tutte le funzioni semplici $\mathcal{F}$-misurabili; il passaggio alle arbitrarie funzioni $\mathcal{F}$-misurabili e non negative si ottiene in virtù dell'osservazione 3.1.8 e del teorema di B. Levi.
Le due misure λ e ν verificano $\lambda \leq \nu$; quindi possiamo applicare ad esse il lemma 4.5.7: otteniamo che esiste $g \in \mathcal{L}^1(X, \nu)$ tale che

$$\lambda(E) = \int_E g \, d\nu \qquad \forall E \in \mathcal{F}.$$

Come si è fatto poco fa, si deduce

$$\int_X f \, d\lambda = \int_B f \, g \, d\nu$$

per ogni funzione f $\mathcal{F}$-misurabile e non negativa. Ne segue, dalla relazione scritta poco sopra,

$$\int_X f \, d\lambda = \int_X f \, g \, d\nu = \int_X f \, g \, d\lambda + \int_X f \, g \, w \, d\mu,$$

da cui, sempre per ogni funzione f $\mathcal{F}$-misurabile e non negativa,

$$\int_X f(1-g) \, d\lambda = \int_X f \, g \, w \, d\mu.$$

Poniamo $A = \{x \in X : \ 0 \leq g(x) < 1\}$, $B = A^c = \{x \in X : \ g(x) \geq 1\}$, e definiamo $\lambda_a(E) = \lambda(E \cap A)$, $\lambda_s(E) = \lambda(E \cap B)$. Scegliendo $f = \chi_B$ si ha

$$\int_B (1-g) \, d\lambda = \int_B g \, w \, d\mu,$$

e poiché i due membri hanno segni opposti, deve essere $\int_B (1-g) \, d\lambda = \int_B g \, w \, d\mu = 0$. Ciò implica $\mu(B) = 0$: dato che λ_s è concentrata su B, si ottiene $\lambda_s \perp \mu$. Scegliendo invece $f = \chi_{E \cap A} \cdot \sum_{k=0}^{m} g^k$, con $E \in \mathcal{F}$, ricaviamo

$$\int_{E \cap A} (1 - g^{m+1}) \, d\lambda = \int_{E \cap A} g \sum_{k=0}^{m} g^k \, w \, d\mu;$$

applicando a sinistra il teorema di Lebesgue e a destra il teorema di B. Levi, si deduce

$$\lambda_a(E) = \lambda(E \cap A) = \int_{E \cap A} \frac{g \, w}{1-g} \, d\mu,$$

e dunque, posto $h = \frac{g \, w}{1-g} \, \chi_A$, si ha $h \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ (come si vede scegliendo $E = X$ e ricordando che λ è una misura finita), $h \geq 0$ e

$$\lambda_a(E) = \int_E h \, d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{F}.$$

In virtù della proposizione 4.5.6, si conclude che $\lambda_a \ll \mu$. La tesi è dimostrata nel caso in cui la misura λ sia finita.

Supponiamo adesso che λ sia σ-finita. In questo caso esiste una successione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ con queste proprietà: gli X_n sono disgiunti, $\lambda(X_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n = X$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\lambda_n(E) = \lambda(E \cap X_n) \qquad \forall E \in \mathcal{F}:$$

le misure λ_n sono finite. Per quanto già dimostrato, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\lambda_n = \lambda_{an} + \lambda_{sn}$, ove $\lambda_{an} \ll \mu$ e $\lambda_{sn} \perp \mu$; inoltre esiste una funzione $h_n \in \mathcal{L}^1(X_n, \mu)$ non negativa, tale che

$$\lambda_{an}(E) = \int_E h_n \, d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{F},\ E \subseteq X_n\,.$$

Utilizzando ancora una volta il teorema di B. Levi è facile allora riconoscere che, posto

$$\lambda_a = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{an}\,, \qquad \lambda_s = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{sn}\,,$$

le funzioni λ_a e λ_s sono misure σ-finite tali che

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \qquad \lambda_a \ll \mu, \qquad \lambda_s \perp \mu,$$

e in particolare, posto $h = \sum_{n=0}^{\infty} h_n$, la funzione h è misurabile, non negativa e si ha

$$\lambda_a(E) = \int_X h \, d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{F}.$$

La tesi è completamente dimostrata. □

RadNik **Teorema 4.5.9 (di Radon-Nikodým)** *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato σ-finito; sia λ un'altra misura definita su $\mathcal{F}$, anch'essa σ-finita. Allora si ha $\lambda \ll \mu$ se e solo se esiste una funzione $\mathcal{F}$-misurabile e non negativa h tale che*

$$\lambda(E) = \int_E h \, d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{F}.$$

Dimostrazione ($\Longleftarrow$) È la proposizione 4.5.6.

($\Longrightarrow$) Poiché $\lambda \ll \mu$, per il teorema 4.5.8 la decomposizione di Lebesgue di λ rispetto a μ è necessariamente data, per unicità, da $\lambda = \lambda + 0$. Dalla dimostrazione del teorema 4.5.8 segue che esiste una funzione non negativa e misurabile h per cui si ha

$$\lambda(E) = \int_E h \, d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{F},$$

il che prova la tesi. Osserviamo che nel caso in cui λ è finita la funzione h risulta μ-sommabile su X. □

Esercizi 4.5

mico

1. Si provi che se μ è una misura concentrata su un insieme $A \in \mathcal{F}$, allora μ è concentrata in ogni insieme $B \in \mathcal{F}$ tale che $\mu(A \setminus B) = 0$, mentre non è concentrata su alcun insieme D tale che $\mu(A \setminus D) > 0$.

misimm

2. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato e sia $f \in \mathcal{M}_X$.

   (i) Si verifichi che $\mathcal{S} = \{B \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ è una σ-algebra di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che contiene i Boreliani ma non è necessariamente contenuta in $\mathcal{M}$.

   (ii) Posto
   $$\lambda_f(B) = \mu(f^{-1}(B)) \qquad \forall B \in \mathcal{S},$$
   si provi che λ_f è una misura su $\mathcal{S}$, che λ_f è concentrata su $f(X)$, e che se μ è completa, oppure finita, allora λ_f è completa, oppure finita. Se μ è σ-finita, è vero che λ_f è σ-finita? (Ricordiamo che, allorché X è uno spazio probabilizzato, la misura λ_f è chiamata *misura immagine*, o *legge*, della variabile aleatoria f; si veda l'esercizio 3.1.7.)

   (iii) Si verifichi che
   $$\int_{\mathbb{R}} \chi_B(t)\, d\lambda_f = \int_X \chi_B(f(x))\, d\mu \qquad \forall B \in \mathcal{S},$$
   e si deduca che se $\mu(X) < \infty$ allora
   $$\int_{\mathbb{R}} g(t)\, d\lambda_f = \int_X g(f(x))\, d\mu \qquad \forall g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{S}, \lambda_f).$$

   (iv) Siano $f, g \in \mathcal{M}_X$ tali che si abbia $\mu(f^{-1}(g(X))) = 0$, oppure $\mu(g^{-1}(f(X))) = 0$. Si provi che allora $\lambda_f \perp \lambda_g$.

   (v) Sia $X = [-1, 1]$ e sia μ la misura di Lebesgue su X. Se $f(x) = \max\{x, 0\}$ e $g(x) = \min\{x, 0\}$, è vero che $\lambda_f \perp \lambda_g$?

propacs

3. Si dimostrino gli enunciati della proposizione 4.5.4.

noacsigma

4. Sia μ la misura di Lebesgue su $]0, 1[$, e poniamo
   $$\lambda(E) = \int_E \frac{dt}{t}, \qquad E \in \mathcal{M},\ E \subseteq]0, 1[\,.$$
   Si provi che λ è assolutamente continua rispetto a μ, ma non vale la condizione espressa nella proposizione 4.5.6.

g0allinf

5. Sia $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\lim_{|x| \to \infty} g(x) = 0$. Si provi che per ogni $f \in L^1\mathbb{R})$ si ha
   $$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} g(x)\, f\left(\frac{x}{n}\right)\, dx = 0.$$

mislegge

6. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato con $\mu(X) < \infty$. Se f_n, f sono funzioni misurabili tali che $f_n \to f$ in misura, si provi che, dette λ_n e λ le leggi di f_n e f rispettivamente, risulta

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda \qquad \forall g \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}).$$

(Se $\mu(X) = 1$, in linguaggio probabilistico si dice che le variabili aleatorie f_n convergono *in legge* alla variabile aleatoria f.)
[**Traccia:** si utilizzi la formula illustrata nell'esercizio 4.5.2(iii).]

confrmis

7. Siano ν, μ misure finite su $(X, \mathcal{F})$, con $\nu \ll \mu$.

   (i) Se esiste f misurabile, tale che $\nu(E) = \int_E f \, d(\mu + \nu)$, per ogni $E \in \mathcal{F}$, allora si ha $0 \le f \le 1$ q.o.;

   (ii) se esiste f misurabile, tale che $\int_X g \, d\nu = \int_X g\, f \, d(\mu+\nu)$ per ogni g misurabile, allora vale $\nu(E) = \int_E \frac{f}{1-f} \, d\mu$ per ogni $E \in \mathcal{F}$.

RNnosigma

8. Si provi che nel teorema di Radon-Nikodým è essenziale che la misura μ sia σ-finita.

4.6 Lo spazio L^1

L1

Poiché due funzioni sommabili che coincidono q.o. hanno lo stesso integrale, conviene identificare fra loro le funzioni q.o. coincidenti, come si è fatto per lo spazio $\mathcal{L}^\infty$.
Sia dunque $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato e introduciamo nello spazio vettoriale $\mathcal{L}^1(X)$ delle funzioni sommabili su X la seguente relazione di equivalenza, già introdotta nel paragrafo 3.2:

$$f \simeq g \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = g(x) \text{ q.o. in } X.$$

L1dritto

Definizione 4.6.1 *Lo spazio quoziente $\mathcal{L}^1(X)/\simeq$ si indica con $L^1(X)$.*

Gli elementi di $L^1(X)$ sono dunque classi di equivalenza di funzioni sommabili su X; la struttura vettoriale di L^1 è la stessa di L^∞ ed è ovvia.

completL1

Teorema 4.6.2 *Lo spazio $L^1(X)$ è uno spazio di Banach con la norma*

$$\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu.$$

Dimostrazione La quantità $\|f\|_1$ dipende solo dalla classe $[f]$ e non dal rappresentante f, in virtù dell'osservazione 4.2.7; le proprietà che fanno di essa una norma sono pressocché ovvie. Proviamo che L^1 è completo rispetto a questa norma.
Sia $\{[f_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in L^1: ciò significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|[f_n] - [f_m]\|_1 = \|[f_n - f_m]\|_1 < \varepsilon \qquad \forall n, m \ge \nu_\varepsilon.$$

Dunque, scelto $\varepsilon = 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$, si costruisce una successione strettamente crescente $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\|[f_{\nu_{k+1}} - f_{\nu_k}]\|_1 < 2^{-k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Scegliamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, un elemento $g_n \in [f_n]$: allora si ha

$$\int_X |g_{\nu_{k+1}} - g_{\nu_k}|\, d\mu < 2^{-k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Notiamo ora che

$$g_{\nu_k} = g_{\nu_0} + \sum_{h=0}^{k-1} (g_{\nu_{h+1}} - g_{\nu_h}) \qquad \forall k \in \mathbb{N}^+,$$

e che la serie $\sum_{h=0}^{\infty}(g_{\nu_{h+1}} - g_{\nu_h})$ converge assolutamente q.o. in X; infatti, per l'esercizio 4.3.1,

$$\int_X \sum_{h=0}^{\infty} |g_{\nu_{h+1}} - g_{\nu_h}|\, d\mu = \sum_{h=0}^{\infty} \int_X |g_{\nu_{h+1}} - g_{\nu_h}|\, d\mu < \sum_{h=0}^{\infty} 2^{-h} = 2,$$

e quindi la funzione $\sum_{h=0}^{\infty} |g_{\nu_{h+1}} - g_{\nu_h}|$, essendo sommabile, è q.o. finita su X (esercizio 4.2.7). Pertanto

$$\exists f(x) \equiv \lim_{k\to\infty} g_{\nu_k}(x) \quad \text{q.o. in } X.$$

Completiamo la definizione di f ponendo $f(x) = 0$ nei punti x in cui la serie sopra scritta non converge: la funzione f così definita risulta allora misurabile su X. Essa è inoltre sommabile, essendo limite puntuale q.o. delle g_{ν_k}, le quali sono dominate dalla funzione sommabile $|g_{\nu_0}| + \sum_{h=0}^{\infty} |g_{\nu_{h+1}} - g_{\nu_h}|$; quindi la funzione f definisce un elemento $[f] \in L^1(X)$. Proviamo che $[f_n] \to [f]$ in L^1: in virtù del lemma di Fatou per ogni $n \geq \nu_\varepsilon$ si ha

$$\begin{aligned} \|[f_n] - [f]\|_1 &= \int_X |g_n - f|\, d\mu \leq \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_X |g_n - g_{\nu_k}|\, d\mu = \liminf_{k\to\infty} \|[f_n] - [f_{\nu_k}]\|_1 \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

il che prova la tesi. □Osserviamo che dalla dimostrazione precedente discende, in particolare, la seguente proprietà:

convqodom **Proposizione 4.6.3** *Se $f_n \to f$ in $L^1(X)$, allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converge q.o. a f in modo dominato, cioè esiste una funzione non negativa $g \in L^1(X)$ tale che $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ q.o. in X.*

Dimostrazione Le g_{ν_k} della dimostrazione precedente convergono q.o. a f e sono dominate dalla funzione sommabile $|g_{\nu_0}| + \sum_{h=0}^{\infty} |g_{\nu_{h+1}} - g_{\nu_h}|$. □

Una generalizzazione di questa proprietà verrà preovata nel capitolo 9 (osservazione 9.1.6).

confusL1 **Osservazione 4.6.4** Nella proposizione precedente si è volutamente confuso il generico elemento di L^1, cioè la classe di equivalenza, con uno dei rappresentanti di tale classe, che è una funzione sommabile. Questo modo di fare semplifica i discorsi e non provoca guai, quindi verrà sistematicamente adottato nel seguito. L'unica differenza che ne risulta è che le relazioni puntuali tra funzioni di L^1 valgono solamente *quasi ovunque*, perché tali "funzioni" sono definite a meno di insiemi di misura nulla.

Esercizi 4.6

L1N 1. Si consideri lo spazio misurato $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ ove $\nu(E)$ è la cardinalità di E. Si caratterizzi lo spazio $L^1(\mathbb{N})$, e si discutano le connessioni fra convergenza puntuale, convergenza uniforme, convergenza in misura e convergenza in L^1.

L1Xdf 2. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato e sia $f \in L^1(X, \mu)$. Posto $\lambda(E) = \int_E |f|\, d\mu$, si provi che risulta $g \in L^1(X, \lambda)$ se e solo se $fg \in L^1(X, \mu)$ e che in tal caso

$$\int_X |g|\, d\lambda = \int_X |fg|\, d\mu.$$

[**Traccia:** provare dapprima il risultato per $g \in \mathcal{S}$...]

intfette 3. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato e sia f integrabile su X. Provare la seguente formula di "integrazione per fette":

$$\int_X |f|\, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\})\, dm.$$

[**Traccia:** si tratti dapprima il caso $f \in \mathcal{S}$, scrivendo f nella forma $\sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{E_i}$, con i numeri $|\alpha_i|$ ordinati in modo crescente e con $E_i = f^{-1}(\alpha_i)$; poi si usi il teorema di B.Levi.]

valint 4. Sia f una funzione non negativa e misurabile secondo Lebesgue su $[0, 1]$, tale che $\int_0^1 f\, dm = 1$. Si provi che per ogni $\lambda \in]0, 1[$ esiste un insieme misurabile $E \subset [0, 1]$ tale che $\int_E f\, dm = \lambda$. È vero questo enunciato nel caso di una funzione definita su un generico spazio misurato $(X, \mathcal{F}, \mu)$?

somm_sigma 5. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato e sia $f \in L^1(X)$. Si provi che $\{x \in X : |f(x)| > 0\}$ è un insieme σ-finito.

fgnonL1 6. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato e sia f una funzione misurabile tale che $0 < \mu(\{x \in X : f(x) > n\} < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si provi che esiste $g \in L^1(X)$ tale che $fg \notin L^1(X)$.

fgL1ginfty 7. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato σ-finito e sia g una funzione misurabile tale che $fg \in L^1(X)$ per ogni $f \in L^1(X)$. Si provi che $g \in L^\infty(X)$ e che la tesi è falsa se X non è σ-finito.

L1eps 8. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato e sia $f \in L^1(X)$. Si provi che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme $A \in \mathcal{F}$ tale che $\mu(A) < \infty$ e $\int_{A^c} |f|\, d\mu < \varepsilon$.

esame

9. Provare che le funzioni f_n definite da

$$f_n(x) = \frac{\sin x}{n(e^{x/n} - 1)\sqrt{x}}, \quad x > 0,$$

appartengono a $L^1(0, \infty)$ (rispetto alla misura di Lebesgue). Si dica se esiste finito il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \, dm.$$

LSprimcont

10. Sia μ la misura di Lebesgue-Stieltjes associata ad una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e crescente. Si provi che se $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ allora la funzione $F(x) = \int_{-\infty}^x f \, d\mu$ è continua su $\mathbb{R}$. È uniformemente continua?

int1nx

11. Poniamo per ogni $n \in \mathbb{N}^+$

$$f_n(x) = \left[\frac{1}{nx}\right] , \qquad x > 0,$$

ove $[y]$ indica la parte intera di y.

(i) Si verifichi che $\{f_n\}$ converge puntualmente a 0 in $]0, \infty[$.

(ii) Si dica se $\{f_n\}$ converge a 0 in $L^1(0, \infty)$ (rispetto alla misura di Lebesgue).

(iii) Si dica se $\{f_n\}$ converge a 0 in misura.

L1nopt

12. Esibire un esempio di successione $\{f_n\}$ che converga in $L^1(X)$ ma tale che per ogni $x \in X$ la successione $\{f_n(x)\}$ non abbia limite.

L1deb

13. Sia $L^1_w(\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni misurabili $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ per le quali esiste $c_f > 0$ tale che

$$m(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > t\}) \le \frac{c_f}{t} \qquad \forall t > 0$$

(la lettera w sta per "weak", cioè "debole").

(i) Si verifichi che $L^1_w(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale.

(ii) Si dimostri che $L^1(\mathbb{R}) \subset L^1_w(\mathbb{R})$ con inclusione stretta.

(iii) Si provi che se $\{f_n\} \subset L^1_w(\mathbb{R})$, se $f_n \to f$ in misura, e se esiste $K > 0$ tale che

$$\sup_{t>0}\{t \cdot m(\{x \in R : |f_n(x)| > t\})\} \le K \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

allora $f \in L^1_w(\mathbb{R})$.

4.7 Teoremi di densità in L^1

densita

Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. È utile sapere se e quando sia possibile approssimare gli elementi di $L^1(X)$, oppure di $L^\infty(X)$, rispetto alla corrispondente norma, mediante funzioni "migliori" in qualche senso. Come vedremo, vi sono svariati risultati di questo tipo. Il primo di questi riguarda un arbitrario spazio misurato.

S0densoL1 **Proposizione 4.7.1** *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. Allora $\mathcal{S}_0$ è denso in $L^1(X)$.*

Dimostrazione Sia $f \in L^1$. Poiché l'insieme dove f è diversa da 0 è σ-finito (esercizio 4.2.12), applicando l'osservazione 3.1.8 (3) possiamo trovare una successione $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_0$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \quad \text{q.o. in } X, \qquad |\varphi_n(x)| \le |f(x)| \quad \text{q.o. in } X$$

(si ricordi l'osservazione 4.6.4). Dato che

$$|\varphi_n(x) - f(x)| \le 2|f(x)| \quad \text{q.o. in } X,$$

il teorema di Lebesgue, nella variante dell'esercizio 4.3.4, fornisce la tesi. □

Osservazione 4.7.2 Come già sappiamo (proposizione 3.1.7 ed osservazione 3.1.8) (2), lo spazio $\mathcal{S}$ è denso in $L^\infty(X)$, ma lo spazio $\mathcal{S}_0$ non lo è, a meno che non sia $\mu(X) < \infty$.

Consideriamo adesso lo spazio misurato $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$. In questo ambito pressocché tutti gli spazi di funzioni regolari risultano densi in $L^1(\mathbb{R})$.

CdensoL1 **Proposizione 4.7.3** *$C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ è denso in $L^1(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione Poiché $\mathcal{S}_0$ è denso in L^1, basterà dimostrare che, data $f \in \mathcal{S}_0$, esiste una funzione continua e sommabile g che è arbitrariamente vicina ad essa, ed a questo scopo è chiaro che è sufficiente considerare il caso $f = \chi_E$, con $E \in \mathcal{M}$ e $m(E) < \infty$. Sia dunque $\varepsilon > 0$; per la proposizione 1.7.3 esistono un aperto A ed un chiuso C tali che $C \subseteq E \subseteq A$ e $m(A \setminus C) < \varepsilon$; in particolare, $m(A) < m(E) + \varepsilon < \infty$. Poniamo, come nella dimostrazione del teorema 3.4.1,

$$g(x) = \frac{\mathrm{d}(x, A^c)}{\mathrm{d}(x, A^c) + \mathrm{d}(x, C)}\,, \qquad x \in \mathbb{R};$$

si ha $0 \le g \le 1$, $g = 1$ su C, $g = 0$ su A^c ed inoltre g è continua. D'altra parte $g \in L^1(\mathbb{R})$ perché

$$\int_{\mathbb{R}} g\, dm = \int_A g\, dm \le m(A) < \infty.$$

La tesi segue allora dal fatto che

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi_E - g|\, dm = \int_{A\setminus C} |\chi_E - g|\, dm \le m(A \setminus C) < \varepsilon. \quad \square$$

CdensoL1X **Osservazione 4.7.4** Lo stesso risultato vale in ogni spazio misurato $(X, \mathcal{F}, \mu)$ dotato delle seguenti proprietà:

(i) X è uno spazio topologico T_4, cioè tale che chiusi disgiunti abbiano intorni disgiunti;

(ii) $\mathcal{F}$ è una σ-algebra contenente gli aperti;

(iii) μ è una misura regolare, cioè per ogni $E \in \mathcal{F}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $A \supseteq E$ tale che $\mu(A \setminus E) < \varepsilon$.

Ad esempio, ciò è vero per $(\mathbb{R}^N, \mathcal{M}_N, m_N)$, qualunque sia $N \in \mathbb{N}^+$, ed in $(\mathbb{R}^N, \mathcal{H}_p, H_p)$, per ogni $N \in \mathbb{N}^+$ e $p \in]0, N]$.

Consideriamo ora lo spazio $C_c(\mathbb{R})$ delle funzioni continue g il cui *supporto*, cioè la chiusura dell'insieme $\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$, è compatto. Indicheremo invece con $C_c^\infty(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni di classe C^∞ a supporto compatto.

C0densoL1 **Proposizione 4.7.5** *$C_c(\mathbb{R})$ è denso in $L^1(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione Basta provare che le funzioni di $C_c(\mathbb{R})$ approssimano nella norma di $L^1(\mathbb{R})$ quelle di $C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Sia $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, e consideriamo le funzioni

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq n \\ n + 1 - |x| & \text{se } |x| \in [n, n+1] \\ 0 & \text{se } |x| \geq n + 1; \end{cases}$$

allora si ha $f\varphi_n \in C_c(\mathbb{R})$, $f\varphi_n \to f$ puntualmente in $\mathbb{R}$, $|f\varphi_n| \leq |f|$ in $\mathbb{R}$; ne segue, per il teorema di Lebesgue, $f\varphi_n \to f$ in $L^1(\mathbb{R})$. $\square$

CinfdensoL1 **Proposizione 4.7.6** *$C_c^\infty(\mathbb{R})$ è denso in $L^1(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione Basta provare che $C_c^\infty(\mathbb{R})$ è denso in $C_c(\mathbb{R})$ rispetto alla norma di $L^1(\mathbb{R})$. Sia $f \in C_c(\mathbb{R})$, e sia $M > 0$ tale che il supporto di f sia contenuto in $]-M, M[$, cosicché $f = 0$ per $|x| \geq M$. Utilizziamo il fatto che lo spazio $C_c^\infty(]-M, M[)$ è denso in $C_c(]-M, M[)$ rispetto alla norma uniforme (una dimostrazione di questo fatto è tratteggiata negli esercizi 4.7.11 e 4.7.12); dunque, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\varphi \in C_c^\infty(]-M, M[)$ tale che

$$\sup_{|x| \leq M} |\varphi(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Ne segue

$$\|\varphi - f\|_1 = \int_{-M}^{M} |\varphi - f| \, dm \leq 2M \sup_{|x| \leq M} |\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad \square$$

Esercizi 4.7

CTdense

1. Si provi che l'insieme delle funzioni che sono costanti a tratti e nulle fuori di un insieme di misura finita è denso in $L^1(\mathbb{R})$.

conttras

2. (*Continuità in L^1 delle traslazioni*) Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Posto, per $h \in \mathbb{R}$, $f_h(x) = f(x+h)$, si provi che:

   (i) $f_h \in L^1(\mathbb{R})$ e $\|f_h\|_1 = \|f\|_1$ per ogni $h \in \mathbb{R}$;

   (ii) $\lim_{h\to 0} \|f_h - f\|_1 = 0$.

   [**Traccia:** utilizzare la densità di $C_c(\mathbb{R})$ in $L^1(\mathbb{R})$.]

Steinhaus

3. (*Teorema di Steinhaus*) Siano A, B sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}$, con misura positiva. Si provi che l'insieme

$$A + B = \{x \in \mathbb{R} : \ x = a + b, \ a \in A, \ b \in B\}$$

   contiene un intervallo.

   [**Traccia:** si consideri la funzione $f(x) = m((x - A) \cap B)$. Utilizzando l'esercizio 4.7.2 si mostri che f è continua; poi, facendo uso del risultato dell'esercizio 1.4.3, e ragionando per assurdo, si provi che esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) > 0$. Da qui si deduca la tesi...]

C3+C3

4. Provare che l'insieme $C_3 + C_3$ coincide con l'intero intervallo $[0, 2]$.

   [**Traccia:** una inclusione è ovvia. Per l'altra, si consideri $(-C_3) \times C_3$, e si verifichi che ciascuna delle rette r_c di equazione $y = x + c$, con $c \in [0, 2]$, interseca almeno uno dei 4^n quadrati Q_{ni}, di area 9^{-n-1}, che costituiscono l'insieme $(-E_n) \times E_n$, ove E_n è ciò che resta dopo il passo n-simo della costruzione di C_3. Si osservi che se $r_c \cap Q_{ni} \neq \emptyset$, allora esiste $Q_{n+1\,j} \subset Q_{ni}$ tale che $r_c \cap Q_{n+1\,j} \neq \emptyset$. Si deduca che esistono una successione di quadrati $\{Q_n\}$, conn $Q_{n+1} \subset Q_n$, ed un punto $z_0 = (x_0, y_0) \in r_c \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n) \subset r_c \cap (-C_3 \times C_3)$; si concluda che $c = y_0 - x_0 \in C_3 + C_3$.]

lambdaf

5. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Posto, per $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $F_\lambda(x) = f(\lambda x)$, si provi che:

   (i) $F_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ e $\|F_\lambda\|_1 = \frac{1}{|\lambda|}\|f\|_1$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

   (ii) $\lim_{\lambda\to 1} \|F_\lambda - f\|_1 = 0$.

limitpar

6. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} x^\alpha n^2 \left(1 - \cos\frac{x}{n}\right) dx,$$

   e calcolarlo.

limitinte

7. Sia $g \in C_0(\mathbb{R})$, ossia $g \in C(\mathbb{R})$ e $\lim_{|x|\to\infty} g(x) = 0$. Si provi che per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} g(x) f\left(\frac{x}{n}\right) dm = 0.$$

RiLe 8. (*Lemma di Riemann-Lebesgue*) Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, si provi che

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos tx \, dm = \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin tx \, dm = 0.$$

mdifficile 9. Sia $E \in \mathcal{M}$ con $m(E) < \infty$. Provare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \frac{1}{2 - \sin nx} \, dm = \frac{m(E)}{\sqrt{3}}.$$

[**Traccia:** anzitutto si ponga $nx = t$, si determini una primitiva del nuovo integrando e si calcoli l'integrale su $[-\pi, \pi]$. Poi, se E è un intervallo, l'integrale si calcola esplicitamente, usando la 2π-periodicità e passando al limite; infine, nel caso generale, si approssimi χ_E con funzioni costanti a tratti (esercizio 4.7.1).]

limmisL1 10. Sia X un insieme, sia $\mathcal{F}$ una σ-algebra di sottoinsiemi di X, e sia $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione crescente di misure definite su $\mathcal{F}$. Definita la misura $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(E)$ per $E \in \mathcal{F}$, si provi che:

(i) se $f \in L^1(X, \mu)$ allora $f \in L^1(X, \mu_n)$ per ogni n, e

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f \, d\mu_n;$$

(ii) in generale $L^1(X, \mu) \neq \bigcap_{n=0}^{\infty} L^1(X, \mu_n)$.

poBe 11. Fissata $f \in C[0, 1]$, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ l'n-simo *polinomio di Bernstein* di f è definito da

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Si verifichi che $P_n(0) = f(0)$ e $P_n(1) = f(1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

(ii) Si mostri che

$$P_n(t) - f(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right] \quad \forall t \in [0, 1].$$

(iii) Si provino le seguenti identità ($x \in \mathbb{R}$):

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx \ ,$$

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 \ ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 + nx \ .$$

(iv) Fissato $\delta > 0$ e posto, per ogni $t \in [0,1]$,

$$A_t = \left\{ k \in \mathbb{N} : \ 0 \le k \le n, \ \left| \frac{k}{n} - t \right| \ge \delta \right\},$$

$$B_t = \left\{ k \in \mathbb{N} : \ 0 \le k \le n, \ \left| \frac{k}{n} - t \right| < \delta \right\},$$

si dimostrino le due disuguaglianze

$$\left| \sum_{k \in A_t} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right] \right| \le$$

$$\le \sum_{k \in A_t} \frac{(k-nt)^2}{\delta^2 n^2} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} 2\|f\|_\infty \le \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2 n^2} [nt(1-t)] \le \frac{\|f\|_\infty}{2\delta^2 n},$$

$$\left| \sum_{k \in B_t} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right] \right| \le \varepsilon \qquad \text{se } \delta \le \delta_\varepsilon,$$

e si concluda che $P_n \to f$ uniformemente in $[0,1]$ per $n \to \infty$.

(v) Si deduca che, per ogni $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $C^\infty[a,b]$ è denso in $C[a,b]$ nella norma uniforme.

Cinfdenso

12. Sia $f \in C_c(\,]a,b[\,)$ e sia $\delta \in]0,(b-a)/4[$ tale che $f(x) = 0$ per $x \le a + 2\delta$ e per $x \ge b - 2\delta$. Sia poi $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di polinomi che converge uniformemente a f in $[a,b]$. Utilizzando le funzioni

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x(1-x)}\right) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus]0,1[, \end{cases} \qquad \psi(x) = \frac{\int_x^1 \varphi \, dm}{\int_0^1 \varphi \, dm}, \quad x \ge 0,$$

ed infine

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le a + \delta \\ \psi\left(\frac{a+2\delta-x}{\delta}\right) & \text{se } a+\delta < x < a+2\delta \\ 1 & \text{se } a+2\delta \le x \le b-2\delta \\ \psi\left(\frac{x-b+2\delta}{\delta}\right) & \text{se } b-2\delta < x < b-\delta \\ 0 & \text{se } x \ge b-\delta, \end{cases}$$

si provi che $\{\eta Q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\,]a,b[\,)$ e che tale successione converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$; si concluda che $C_c^\infty(\,]a,b[\,)$ è denso in $C_c(\,]a,b[\,)$ nella norma uniforme.

Soluzioni degli esercizi del capitolo 4

sol04

Esercizi del paragrafo 4.1

Esercizio 4.1.1 Partiamo dalla relazione $\varphi(x) = \sum_{j=0}^s \beta_j \chi_{B_j}(x)$, $x \in X$. Detti $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ i valori distinti di φ, e posto $D_h = \varphi^{-1}(\gamma_h)$, $h = 1, \dots, t$, gli insiemi $D_1, \dots, D_t$ sono misurabili e disgiunti.

Proviamo che

$$\sum_{j=1}^{s} \beta_j \mu(B_j) = \sum_{h=1}^{t} \gamma_h \mu(D_h).$$

Se gli insiemi B_i sono fra loro disgiunti, osservato che se $B_i \cap D_h \neq \emptyset$ allora $\beta_i = \gamma_h$, risulta

$$\sum_{j=1}^{s} \beta_j \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{h=1}^{t} \beta_j \mu(B_j \cap D_h) = \sum_{h=1}^{t} \sum_{j=1}^{s} \gamma_h \mu(B_j \cap D_h) = \sum_{h=1}^{t} \gamma_h \mu(D_h).$$

Nel caso generale, osservato che, se $B_{j_1} \cap B_{j_2} \cap \cdots \cap B_{j_k} \cap D_h \neq \emptyset$, allora si ha $\beta_{j_1} + \ldots + \beta_{j_k} = \gamma_h$, possiamo scrivere l'unione dei B_j come unione disgiunta, nel modo seguente:

$$\bigcup_{j=1}^{s} B_j = \bigcup_{k=1}^{s} \bigcup_{1 \leq i_2 < \cdots < i_k \leq s} C_{i_1 \cdots i_k} \text{ , ove } C_{i_1 \cdots i_k} = \left[\bigcap_{q=1}^{k} B_{i_q} \right] \setminus \left[\bigcup_{j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}} B_j \right].$$

Gli insiemi $C_{i_1 \cdots i_k}$ sono tutti disgiunti. Per maggior chiarezza, esplicitiamo il caso $s = 3$:

$$\begin{aligned} B_1 \cup B_2 \cup B_3 &= \big[B_1 \cap B_2 \cap B_3\big] \cup \big[(B_1 \cap B_2) \setminus B_3\big] \cup \big[(B_1 \cap B_3) \setminus B_2\big] \cup \big[(B_2 \cap B_3) \setminus B_1\big] \cup \\ &\cup \big[B_1 \setminus (B_2 \cup B_3)\big] \cup \big[B_2 \setminus (B_1 \cup B_3)\big] \cup \big[B_3 \setminus (B_1 \cup B_2)\big] = \\ &= \bigcup_{k=1}^{3} \bigcup_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq 3} C_{i_1 \cdots i_k}, \end{aligned}$$

ove:

- per $k = 1$ vi è il solo indice i_1, con $C_{i_1} = B_{i_1} \setminus (B_{j_1} \cap B_{j_2})$, $i_1 = 1, 2, 3$, $j_1, j_2 \notin \{i_1\}$;
- per $k = 2$ vi sono due indici $i_1 < i_2$, con $C_{i_1 i_2} = (B_{i_1} \cap B_{i_2}) \setminus B_j$, $(i_1, i_2) = (1, 2), (1, 3), (2, 3)$, $j \notin \{i_1, i_2\}$;
- per $k = 3$ vi sono tre indici $i_1 < i_2 < i_3$, con $C_{i_1 i_2 i_3} = B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap B_{i_3}$, $(i_1, i_2, i_3) = (1, 2, 3)$ e nessun indice j.

Ciò premesso, tornando al caso generale si ha

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{s} \beta_j \mu(B_j) &= \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq s} \beta_j \mu(B_j \cap C_{i_1 \cdots i_k}) = \\ &= \sum_{k=1}^{s} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq s} \sum_{j=1}^{s} \beta_j \mu(C_{i_1 \cdots i_k} \cap B_j) = \\ &= \sum_{k=1}^{s} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq s} \sum_{j \in \{i_1, \ldots, i_k\}} \beta_j \mu(C_{i_1 \cdots i_k}) = \\ &= \sum_{k=1}^{s} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq s} (\beta_{i_1} + \cdots + \beta_{i_k}) \mu(C_{i_1 \cdots i_k}) = \\ &= \sum_{h=1}^{t} \sum_{k=1}^{s} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq s} (\beta_{i_1} + \cdots + \beta_{i_k}) \mu(C_{i_1 \cdots i_k} \cap D_h) = \\ &= \sum_{h=1}^{t} \sum_{k=1}^{s} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq s} \gamma_h \mu(C_{i_1 \cdots i_k} \cap D_h) = \sum_{h=1}^{t} \gamma_h \mu(D_h). \end{aligned}$$

Allo stesso risultato, naturalmente, si arriva partendo dalla somma $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$, e costruendo come prima gli insiemi $C_{i_1 \cdots i_k}$ relativi agli A_i, nel caso che questi ultimi non siano fra loro disgiunti.

Esercizio 4.1.2 Risulta, per ogni $x \in [0,1]$,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{b^n}, \qquad \varepsilon_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}.$$

La funzione ε_n assume in x il valore s, con $0 \le s \le b-1$, se e solo se x appartiene ad uno degli intervalli di ampiezza $1/b^n$ (che sono in numero di b^{n-1}), con primo estremo della forma $\frac{kb+s}{b^n}$ e secondo estremo della forma $\frac{kb+s+1}{b^n}$, ove $k \in \{0, 1, \dots, b^{n-1}-1\}$. Quindi possiamo scrivere

$$\int_{\mathbb{R}} \varepsilon_n \, \chi_{[0,1]} \, dm = \int_0^1 \varepsilon_n \, dm = \sum_{k=0}^{b^{n-1}-1} \sum_{s=0}^{b-1} \int_{\frac{kb+s}{b^n}}^{\frac{kb+s+1}{b^n}} s \, dm = b^{n-1} \sum_{s=0}^{b-1} \frac{s}{b^n} = \frac{b-1}{2} \, .$$

Esercizio 4.1.3 (i) Dato che le φ coinvolte nella definizione di λ sono misurabili, non superiori a 1 in W e nulle fuori di W, per ciascuna di esse l'insieme $G = \{x \in [0,1] : \ \varphi(x) > 0\}$ è incluso in W e misurabile. L'estremo superiore cresce se sostituiamo φ con χ_G, e quindi

$$\lambda \le \sup\{m(E) : \ E \in \mathcal{M}, \ E \subset W\}.$$

D'altra parte, poiché per tutti gli E coinvolti si ha $\chi_E \in \mathcal{S}$ e $0 \le \chi_E \le \chi_W$, risulta anche

$$\lambda \ge \sup\{m(E) : \ E \in \mathcal{M}, \ E \subset W\}.$$

(ii) Segue dall'esercizio 1.7.6.

(iii) Segue dall'esercizio 1.8.4.

Esercizi del paragrafo 4.2

Esercizio 4.2.1 Si ha $f(x) = n$ se e solo se $x \notin \mathbb{Q}$ e $10^n x = 0, x_{n+1} \dots$ con $x_{n+1} \in \{1, \dots, 9\}$, ossia $10^n x \in \left[\frac{1}{10}, 1\right]$. In definitiva

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} n \, \chi_{[10^{-n-1}, 10^{-n}] \setminus \mathbb{Q}} \, ,$$

quindi f è limite puntuale di funzioni semplici e pertanto è misurabile. Inoltre, essendo $m(\mathbb{Q}) = 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f \, \chi_{[0,1]} \, dm &= \int_0^1 f \, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{10^{-n-1}}^{10^{-n}} n \, dm = \sum_{n=1}^{\infty} n \, \frac{9}{10^{n+1}} = \frac{9}{100} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^{n-1}} = \\ &= \frac{9}{100} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k |_{x=\frac{1}{10}} = \frac{9}{100} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} x^{k+1} |_{x=\frac{1}{10}} = \frac{9}{100} \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} |_{x=\frac{1}{10}} = \\ &= \frac{9}{100} \frac{d}{dx} \frac{x}{1-x} |_{x=\frac{1}{10}} = \frac{9}{100} \frac{1}{(1-x)^2} |_{x=\frac{1}{10}} = \frac{1}{9} \, . \end{aligned}$$

Esercizio 4.2.2 Poiché f è sommabile su X,

$$\lambda := \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\mu : \ \varphi \in \mathcal{S}, \ 0 \le \varphi \le f^+ \right\} < \infty.$$

Ne segue

$$\sup \left\{ \int_X \varphi \, d\mu : \ \varphi \in \mathcal{S}, \ 0 \le \varphi \le f^+ \, \chi_D \right\} \le \lambda < \infty,$$

e lo stesso vale per f^-. Dunque f è sommabile su D.

Esercizio 4.2.3 Risulta f sommabile su D se e solo se f^+, f^- sono sommabili su D, e ciò avviene se e solo se $|f| = f^+ + f^-$ è sommabile su D.

Esercizio 4.2.4 Se f è misurabile e integrabile secondo Riemann, allora f è limitata in $[a,b]$ e quindi è sommabile su $[a,b]$.

Esercizio 4.2.5 Si ha

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_{B\cap A^c} f\,d\mu,$$

ma il secondo integrale è nullo perché $\mu(B\cap A^c)=0$.

Esercizio 4.2.6 Si ha

$$\sup\left\{\int_X \varphi\,d\mu:\ \varphi\in\mathcal{S},\ 0\le\varphi\le|f|\,\chi_D\right\} \le \sup\left\{\int_X \varphi\,d\mu:\ \varphi\in\mathcal{S},\ 0\le\varphi\le g\,\chi_D\right\} = \int_D g\,d\mu<\infty.$$

Dunque, per definizione, f è sommabile su D e $\int_D |f|\,d\mu \le \int_D g\,d\mu$.

Esercizio 4.2.7 Si ha

$$\{x\in D:\ |f(x)|=\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x\in D:\ |f(x)|>n\};$$

ma poiché

$$n\,\mu(\{x\in D:\ |f(x)|>n\}) \le \int_{\{x\in D:\ |f(x)|>n\}} |f|\,d\mu \le \int_D |f|\,d\mu<\infty,$$

risulta $\mu(\{x\in D:\ |f(x)|>n\})\le\frac{C}{n}$ e pertanto

$$\mu(\{x\in D:\ |f(x)|=\infty\}) = \lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in D:\ |f(x)|>n\})=0.$$

Esercizio 4.2.8 Ovviamente, se $f=0$ q.o. in D, allora $\int_D|f|\,d\mu=0$. Viceversa, se $\int_D|f|\,d\mu=0$ allora è nullo l'integrale di ogni funzione $\varphi\in\mathcal{S}$ con $0\le\varphi\le|f|\,\chi_D$. D'altra parte, essendo

$$\{x\in D:|f(x)|>0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+}\left\{x\in D:|f(x)|>\frac{1}{n}\right\},$$

vale la relazione

$$\mu(\{x\in D:|f(x)|>0\}) = \lim_{n\to\infty}\mu\left(\left\{x\in D:|f(x)|>\frac{1}{n}\right\}\right).$$

Gli insiemi a secondo membro hanno tutti misura nulla, altrimenti la funzione $\varphi_n\in\mathcal{S}$ definita da

$$\varphi_n = \frac{1}{n}\,\chi_{\left\{x\in D:\ |f(x)|>\frac{1}{n}\right\}}$$

verificherebbe $0\le\varphi_n\le|f|\chi_D$ e $\int_D\varphi_n\,d\mu>0$: assurdo. Ne segue $\mu(\{x\in D:\ |f(x)|>0\})=0$, ossia $f=0$ q.o. in D.

Esercizio 4.2.9 Se f è sommabile e non negativa, allora per ogni $\varphi\in\mathcal{S}$ con $0\le\varphi\le f$ si ha $\int_X\varphi\,d\mu<\infty$. Ma ognuna di queste φ è una combinazione lineare finita di oggetti del tipo $\alpha_i\chi_{A_i}$: se uno degli A_i ha misura infinita, allora deve essere $\alpha_i=0$. Dunque, tutte le φ devono appartenere a $\mathcal{S}_0$. Pertanto in tal caso

$$\int_X f\,d\mu = \sup\left\{\int_X\varphi\,d\mu:\ \varphi\in\mathcal{S}_0,\ 0\le\varphi\le f\right\}.$$

Invece, consideriamo la funzione $f=\chi_{[0,\infty[}$, che è integrabile in $(\mathbb{R},\mathcal{F},m)$ con $\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu=\infty$. Dato che in $\mathcal{F}$ non ci sono insiemi di misura finita che intersechino $[0,\infty[$, le funzioni $\varphi\in\mathcal{S}_0$ tali che $0\le\varphi\le f$ devono essere nulle in $]-\infty,0[$ (perché in tale semiretta è nulla la f), ed anche in $[0,\infty[$, poiché lì non ci sono sottoinsiemi di misura finita. Dunque

$$\sup\left\{\int_{\mathbb{R}}\varphi\,d\mu:\ \varphi\in\mathcal{S}_0,\ 0\le\varphi\le f\right\}=0<\infty=\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu.$$

Esercizio 4.2.10 Poiché X è σ-finito, si ha $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, con gli Y_n disgiunti e di misura finita. Se f è non negativa ed integrabile su X allora, per la proposizione 4.2.5,

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{Y_n} f\,d\mu$$

ed anche, posto $Z_n = \bigcup_{k=1}^{n} Y_k$,

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{Y_n} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{Z_n} f\,d\mu.$$

Sia allora $\varepsilon > 0$: esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\int_{Z_\nu} f\,d\mu \geq \int_X f\,d\mu - \varepsilon.$$

Per definizione di $\int_{Z_\nu} f\,d\mu$, esiste $\varphi \in \mathcal{S}$ tale che $0 \leq \varphi \leq f\,\chi_{Z_\nu}$ e $\int_X \varphi\,d\mu \geq \int_{Z_\nu} f\,d\mu - \varepsilon$. Tale φ appartiene a $\mathcal{S}_0$ e verifica

$$\int_X \varphi\,d\mu \geq \int_x f\,d\mu - 2\varepsilon,$$

e ciò implica

$$\int_X f\,d\mu = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}} \varphi\,d\mu :\ \varphi \in \mathcal{S}_0,\ 0 \leq \varphi \leq f\right\}.$$

Esercizio 4.2.11 Basta applicare a $-f$ gli enunciati degli esercizi 4.2.9 e 4.2.10, e sostituire l'estremo superiore con l'estremo inferiore.

Esercizio 4.2.12 Si ha

$$\{x \in X :\ f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X :\ |f(x)| > \frac{1}{n}\right\},$$

e risulta

$$\frac{1}{n}\,\mu\left(\left\{x \in X :\ |f(x)| > \frac{1}{n}\right\}\right) \leq \int_{\left\{x\in X:\ |f(x)|>\frac{1}{n}\right\}} |f|\,d\mu \leq \int_X |f|\,d\mu < \infty :$$

dunque per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ l'insieme $\left\{x \in X :\ |f(x)| > \frac{1}{n}\right\}$ ha misura finita.

Esercizio 4.2.13 Poiché f è q.o. finita, si ha

$$\int_X |f|\,d\mu = \int_E |f|\,d\mu, \quad \text{ove} \quad E = \{x \in X :\ |f(x)| < \infty\}.$$

Se la serie converge, osservando che gli E_n sono disgiunti e che la loro unione è E, dalla proposizione 4.2.5 segue

$$\int_X |f|\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|\,d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mu(E_n) < \infty.$$

Viceversa, se f è sommabile, allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\,\mu(E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|\,d\mu = \int_X |f|\,d\mu < \infty.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\,\mu(E_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \int_X |f|\,d\mu + \mu(X) < \infty.$$

Se $\mu(X) = \infty$, la prima implicazione vale ancora, con la stessa dimostrazione, ma la seconda è falsa: ad esempio, con $f(x) = e^{-x}$, e $X = [0, \infty[$, la f è sommabile ma, essendo $E_1 = X$ ed $E_n = \emptyset$ per ogni $n > 1$, la serie ha un unico addendo non nullo che vale $+\infty$, e dunque diverge.

Esercizio 4.2.14 Dalla dimostrazione dell'esercizio 4.2.13 segue che

$$\int_X |f|\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|\, d\mu, \quad \text{ove} \quad E_n = \{x \in X :\ n-1 \le |f(x)| < n\}.$$

In particolare, essendo gli E_n disgiunti, ed osservato che $F_n = \{x \in X :\ |f(x)| \ge n\} = [\bigcup_{k=1}^{n} E_k]^c$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{F_n^c} |f|\, d\mu = \int_X |f|\, d\mu.$$

Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{F_n} |f|\, d\mu = 0.$$

Da ciò segue

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mu(F_n) \le \lim_{n\to\infty} \int_{F_n} |f|\, d\mu = 0.$$

Il viceversa è falso: sia ad esempio $\mu = m$ su $X =]0,1[$, e scegliamo

$$f = \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)\chi_{I_k}, \quad \text{ove} \quad I_k = \left[\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}, \frac{1}{k\log k}\right].$$

Allora, essendo $f(x) \ge n$ se e solo se $x \in \bigcup_{k=n-1}^{\infty} I_k = \left]0, \frac{1}{(n-1)\log(n-1)}\right]$, risulta

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mu(F_n) \le \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n-1)\log(n-1)} = 0;$$

d'altra parte, utilizzando la proposizione 4.2.5,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f\, dm &= \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\frac{1}{(n+1)\log(n+1)}}^{\frac{1}{n\log n}} f\, dm = \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)\left(\frac{1}{n\log n} - \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}\right) = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) \ge \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n} = \infty.\end{aligned}$$

Esercizio 4.2.15 Utilizzando la crescenza e subadditività di $x \mapsto \frac{x}{1+x}$, è facile verificare che d è una distanza su M_0. Inoltre, se $\{f_n\} \subseteq M_0$ è una successione di Cauchy rispetto a d, allora fissati $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu(\{x \in X :\ |f_n(x) - f_k(x)| > \delta\}) \cdot \frac{\delta}{1+\delta} \le \int_X \frac{|f_n(x) - f_k(x)|}{1 + |f_n(x) - f_k(x)|}\, d\mu < \varepsilon \quad \forall n, k \ge \nu,$$

da cui

$$\mu(\{x \in X :\ |f_n(x) - f_k(x)| > \delta\}) \le \frac{1+\delta}{\delta}\,\varepsilon \qquad \forall n, k \ge \nu;$$

perciò $\{f_n\}$ è fondamentale in misura. Ne segue, per la proposizione 3.5.2 (iv), che esiste $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile e q.o finita, tale che $f_n \to f$ in misura. Ricaviamo allora

$$\begin{aligned}&\int_X \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|}\, d\mu = \\ &\quad = \int_{\{x\in X:\ |f_n(x)-f(x)|\le\delta\}} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|}\, d\mu + \int_{\{x\in X:\ |f_n(x)-f(x)|>\delta\}} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|}\, d\mu \le \\ &\quad \le \frac{\delta}{1+\delta}\,\mu(X) + \mu(\{x \in X :\ |f_n(x) - f(x)| > \delta\}).\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu \le \frac{\delta}{1+\delta}\,\mu(X),$$

e siccome δ è arbitrario, si ha $d(f_n,f)\to 0$ per $n\to\infty$. Dunque (M,d) è completo.
Viceversa, se $d(f_n,f)\to 0$ per $n\to\infty$, allora fissato $\delta>0$ si ha

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{1+\delta}\,\mu(\{x\in X:\ |f_n(x)-f_(x)|>\delta\} &\le \int_{\{x\in X:\ |f_n(x)-f(x)|>\delta\}} \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu \le\\ &\le \int_X \frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\,d\mu = d(f_n,f),\end{aligned}$$

e quindi $f_n\to f$ in misura.

Esercizio 4.2.16 Sia $\varepsilon>0$. Per definizione di misura esterna, esiste $F\in\mathcal{M}$ tale che $F\supset W$ e

$$m^*(W)\le m(F)<m^*(W)+\varepsilon.$$

Posto poi

$$\lambda=\sup\{m(E):\ E\in\mathcal{M},\ E\subset[0,1]\setminus W\},$$

esiste $G\in\mathcal{M}$, $G\subset[0,1]\setminus W$, tale che $\lambda-\varepsilon<m(G)\le\lambda$. Allora, posto $K=F\cap\big([0,1]\setminus G\big)$, si ha $W\subset K\subseteq F$, $G\subseteq[0,1]\setminus K\subset[0,1]\setminus W$ e dunque, a maggior ragione,

$$m^*(W)\le m(K)\le m(F)<m^*(W)+\varepsilon,\qquad \lambda-\varepsilon<m(G)\le m([0,1]\setminus K)\le\lambda.$$

Ne segue

$$m^*(W)+\lambda-\varepsilon<m(K)+m([0,1]\setminus K)=1<m^*(W)+\varepsilon+\lambda.$$

Per l'arbitrarietà di ε, si ha $\lambda+m^*(W)=1$. D'altra parte, per la definizione 4.2.1 applicata a $\chi_{[0,1]\setminus W}$, si ha

$$\lambda=\int_0^1 \chi_{[0,1]\setminus W}\,dm$$

e analogamente, utilizzando l'esercizio 1.7.6,

$$\int_0^1 \chi_W\,dm=\sup\{m(H):\ H\in\mathcal{M},\ H\subset W\}<m^*(W).$$

Quindi

$$1=\lambda+m^*(W)>\int_0^1 \chi_{[0,1]\setminus W}\,dm+\int_0^1\chi_W\,dm.$$

Ciò mostra la non additività dell'integrale sulle funzioni che non sono misurabili.

Esercizi del paragrafo 4.3

Esercizio 4.3.1 Poiché le f_n sono non negative, le somme parziali $\sum_{n=0}^N f_n$ verificano le ipotesi del teorema di B. Levi (teorema 4.3.1). Quindi

$$\sum_{n=0}^\infty\int_X f_n\,d\mu=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^N\int_X f_n\,d\mu=\lim_{N\to\infty}\int_X\sum_{n=0}^N f_n\,d\mu=\int_X\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^N f_n\,d\mu=\int_X\sum_{n=0}^\infty f_n\,d\mu.$$

Esercizio 4.3.2 Applicando il teorema di B. Levi (teorema 4.3.1) alle funzioni f_n-g, che verificano $0\le f_n(x)-g(x)\le f_{n+1}(x)-g(x)$ per ogni $x\in X$, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\int_X(f_n-g)\,d\mu=\int_X(f-g)\,d\mu;$$

sommando ad entrambi i membri la quantità $\int_X g\,d\mu$, che è finita, si ottiene la tesi.

Esercizio 4.3.3 Supponiamo che sia $0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ q.o in X: Allora gli insiemi

$$A_n = \{x \in X :\ f_n(x) < 0\}, \qquad B_n = \{x \in X :\ f_{n+1}(x) < f_n(x)\}$$

hanno misura nulla per ogni $n \in \mathbb{N}$: dunque anche

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cup B_n)$$

ha misura nulla, e vale $0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ per ogni $x \in E^c$ e $n \in \mathbb{N}$. Dal teorema di B. Levi (teorema 4.3.1) segue che

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X\setminus E} f_n\,d\mu = \int_{X\setminus E} f\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

Esercizio 4.3.4 Supponiamo che sia $0 \le f_n \le f_{n+1}$ q.o. in X. Allora gli insiemi

$$A_n = \{x \in X :\ f_n(x) < 0\}, \qquad B_n = \{x \in X :\ f_{n+1}(x) < f_n(x)\}$$

hanno misura nulla per ogni $n \in \mathbb{N}$: dunque anche $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m$ ha misura nulla, e vale $0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ per ogni $x \in G^c$ e $n \in \mathbb{N}$. Dall'esercizio 4.3.4 segue che

$$\int_X f\,d\mu = \int_{X\setminus G} f\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_{X\setminus G} f_n\,d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Poi, analogamente, supponiamo che $f_n(x) \to f(x)$ q.o.in X per $n \to \infty$ e che $|f_n(x)| \le g(x)$ q.o. in X per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora gli insiemi

$$A = \left\{x \in X :\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ne f(x) \text{ o non esiste}\right\}, \quad B_n = \{x \in X :\ |f_n(x)| > g(x)\}$$

hanno misura nulla per ogni $n \in \mathbb{N}$: dunque anche

$$E = A \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

ha misura nulla, e vale $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in E^c$ e $|f_n(x)| \le g(x)$ per ogni $x \in E^c$ e $n \in \mathbb{N}$. Dal teorema di Lebesgue (teorema 4.3.3) segue che

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X\setminus E} f_n\,d\mu = \int_{X\setminus E} f\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

Esercizio 4.3.5 Per l'esercizio 4.3.1, si ha

$$\int_X \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|\,d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_X |f_n|\,d\mu < \infty,$$

cosicché la funzione $g = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ è sommabile e quindi finita q.o. (esercizio 4.2.7). Sia $F_N = \sum_{n=0}^{N} f_n$: risulta $|F_N| \le g$ q.o in X per ogni $N \in \mathbb{N}$; inoltre, posto $F = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$, la funzione F è finita q.o. e sommabile in X, perché tale è g, e $F_N(x) \to F(x)$ q.o. in X per $N \to \infty$. Pertanto, per l'esercizio 4.3.4,

$$\lim_{N\to\infty} \int_X F_N\,d\mu = \int_X F\,d\mu, \quad \text{cioè} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X \sum_{n=0}^{\infty} f_n\,d\mu.$$

Esercizio 4.3.6 Per ipotesi si ha $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, con $A_n \in \mathcal{F}$, $A_n \subseteq A_{n+1}$ e $\mu(A_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Per il teorema di B. Levi (teorema 4.3.1) si ha

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\,d\mu.$$

Quindi, fissato $\varepsilon > 0$ e scelto $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$\int_X f\,d\mu - \int_{A_n} f\,d\mu < \varepsilon,$$

la tesi vale con $A_\varepsilon = A_{n_\varepsilon}$.

Esercizio 4.3.7 Dato che $f_n \to f$ q.o. in X, per l'esercizio 4.3.4 e per il fatto che $f_n \le f$ q.o., si ha

$$\int_X f\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \le \int_X f\,d\mu,$$

ossia

$$\int_X f\,d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

D'altra parte, grazie al teorema di B. Levi (teorema 4.3.1,)

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \le \limsup_{n\to\infty} \int_X \max\{f_0, f_1, \dots, f_n\}\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

Ciò implica

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Esercizio 4.3.8 In $X = [0,1]$, consideriamo la successione $\{f_n\}$ così definita:

$$f_{2k} = \chi_{[0,\frac{1}{3}[}\,, \qquad f_{2k+1} = \chi_{[\frac{1}{3},1]}\,, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Allora

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \qquad \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = 1,$$

e inoltre

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu = 0, \quad \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \frac{1}{3}\,, \quad \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \frac{2}{3}\,, \quad \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n\,d\mu = 1.$$

Esercizio 4.3.9 Si considerano le funzioni g_n+f_n e g_n-f_n: risulta $g_n(x)+f_n(x) \ge 0$ e $g_n(x)-f_n(x) \ge 0$ q.o. in X, $g_n(x) + f_n(x) \to g(x) + f(x)$ e $g_n(x) - f_n(x) \to g(x) - f(x)$ q.o. in X per $n \to \infty$. Per il lemma di Fatou (proposizione 4.3.2), tenuto conto dell'esercizio 4.3.4, si ha

$$\int_X (g+f)\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X (g_n+f_n)\,d\mu = \int_X g\,d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu,$$

$$\int_X (g-f)\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X (g_n-f_n)\,d\mu = \int_X g\,d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Sottraendo in entrambe le disuguaglianze la quantità finita $\int_X g\,d\mu$, si ottiene facilmente la tesi.

Esercizio 4.3.10 Risulta

$$\int_X |f|^{1/n}\,d\mu = \int_{\{x\in X:\ 0<|f(x)|<1\}} |f|^{1/n}\,d\mu \ + \int_{\{x\in X:\ |f(x)|=1\}} 1\,d\mu + \int_{\{x\in X:\ |f(x)|>1\}} |f|^{1/n}\,d\mu.$$

Il primo termine, per convergenza monotona (teorema 4.3.1), converge a $\mu(\{x \in X :\ 0 < |f(x)| < 1\})$; il secondo coincide con $\mu(\{x \in X :\ |f(x)| = 1\})$; infine il terzo, per convergenza dominata (teorema 4.3.3), converge a $\mu(\{x \in X :\ |f(x)| > 1\})$. Dunque

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_X |f|^{1/n}\,d\mu = \\
&\quad = \mu(\{x \in X :\ 0 < |f(x)| < 1\}) + \mu(\{x \in X :\ |f(x)| = 1\}) + \mu(\{x \in X :\ |f(x)| > 1\}) = \\
&\quad = \mu(\{x \in X :\ |f(x)| \neq 0\}).
\end{aligned}$$

Esercizio 4.3.11 Risulta per ogni $\delta > 0$

$$\delta\,\mu(\{x \in X :\ |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) \le \int_X !f_n - f|\,d\mu \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Quindi $f_n \to f$ in misura.
Il viceversa è falso: ad esempio, le funzioni $f_n = n\,\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$, $x \in [0,1]$, convergono a 0 in misura, ma $\int_0^1 f_n\,dx = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

Esercizio 4.3.12 Il punto chiave della dimostrazione del teorema di Severini-Egorov è far vedere che per l'insieme

$$E_{k,m} = \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{ x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k} \right\}$$

verifica

$$\lim_{m\to\infty} \mu(E_{k,m}^c) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Se $\mu(X) < \infty$, questa deduzione è facile. Nel nostro caso, osserviamo che

$$E_{k,m}^c = \bigcup_{n=m}^{\infty} \left\{ x \in X :\ |f_n(x) - f(x)| \ge \frac{1}{k} \right\} \subseteq \left\{ x \in X :\ g(x) \ge \frac{1}{2k} \right\} \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

e poiché

$$\mu\left(\left\{ x \in X :\ g(x) \ge \frac{1}{2k} \right\} \right) \le 2k \int_X g\,d\mu < \infty,$$

deve essere in particolare

$$\mu(E_{k,0}^c) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \left\{ x \in X :\ |f_n(x) - f(x)| \ge \frac{1}{k} \right\} \right) \le 2k \int_X g\,d\mu < \infty.$$

Ciò ci autorizza a dedurre, come nella dimostrazione del teorema 3.4.2, che

$$\lim_{m\to\infty} \mu(E_{k,m}^c) = \mu\left(\bigcap_{m=0}^{\infty} E_{k,m}^c \right) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Da questo punto in poi, si procede come nella dimostrazione originale.

Esercizio 4.3.13 Per definizione di minimo limite, esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_{n_k}\,d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu;$$

inoltre, dato che $f_{n_k} \to f$ in misura, per la proposizione 3.5.2 (iv) esiste un'ulteriore sottosuccessione $\{f_{n_{k_j}}\} \subseteq \{f_{n_k}\}$ tale che $f_{n_{k_j}} \to f$ q.o. in X; per il lemma di Fatou (proposizione 4.3.2) si ha

$$\int_X f\,d\mu \le \liminf_{j\to\infty} \int_X f_{n_{k_j}}\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X f_{n_k}\,d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Esercizio 4.3.14 Le successioni $\{2g + |f_n - f|\}$ e $\{2g - |f_n - f|\}$ sonoi non negative e convergono a $2g$ in misura. Per l'esercizio 4.3.13 si deduce

$$\int_X 2g\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X \left[2g + |f_n - f|\right] d\mu, \quad \int_X 2g\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X \left[2g - |f_n - f|\right] d\mu.$$

Essendo g sommabile, si ricava

$$0 \le \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu, \quad 0 \le -\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu,$$

da cui la tesi.

Esercizio 4.3.15 Si ha $|f_n - f| \to 0$ q.o. in X, $|f_n - f| \le |f_n| + |f|$ q.o. in X e $\int_X (|f_n| + |f|)\, d\mu \to 2\int_X |f|\, d\mu$; inoltre quest'ultimo integrale è finito. Dall'esercizio 4.3.9 segue la tesi.
Se manca l'ipotesi $\int_X |f_n|\, d\mu \to \int_X |f|\, d\mu$, la tesi è falsa, come mostra l'esempio $(X, \mu) = (\mathbb{R}, m)$ e $f_n = \chi_{[n,n+1]}$.

Esercizio 4.3.16 Posto, per $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{x \in]0,1[:\ n \le |f(x)| < n+1\}$. Si ha

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+} n\, m(A_n) \le \int_0^1 |f(t)|\, dt \le \sum_{n\in\mathbb{N}^+} (n+1)\, m(A_n) \le 2 \sum_{n\in\mathbb{N}^+} n\, \alpha_n\,,$$

e in particolare $\sum_{n\in\mathbb{N}^+} n\, m(A_n) < \infty$. Per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, sia $n_k > n_{k-1}$ tale che $\sum_{n>n_k} n\, \alpha_n < 2^{-k}$, e definiamo $\beta_n = k$ se $n_k < n \le n_{k+1}$. Poniamo infine $g(x) = \beta_n$ per $x \in A_n$. Risulta allora

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+} n\, m(A_n)\, \beta_n = \sum_{k\in\mathbb{N}^+} \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} k\, n\, m(A_n) \le \sum_{k\in\mathbb{N}^+} k \sum_{n=n_k+1}^{\infty} n\, m(A_n) \le \sum_{k\in\mathbb{N}^+} k\, 2^{-k} < \infty;$$

ne segue

$$\int_0^1 |f(t)g(t)|\, dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} |f(t)g(t)|\, dt \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n (n+1) m(A_n) \le \beta_0\, m(A_0) + 2 \sum_{n\in\mathbb{N}^+} n\, \beta_n\, m(A_n) < \infty.$$

Esercizio 4.3.17 Dall'ipotesi segue facilmente che se $f \ge 0$ allora $h \ge 0$: infatti se $h < 0$ in B, con $\mu(B) > 0$, si ha subito l'assurdo $\int_B f\, d\mu \ge 0 > \int_B h\, d\mu$. Similmente, se $f \le 0$ allora $h \le 0$. Quindi, scrivendo $f = f^+ - f^-$, si ricava che h^+, h^- sono sommabili su X e dunque h è sommabile su X. Ciò premesso, fissata una funzione $\mathcal{G}$-misurabile g, con gf sommabile su X, esiste una successione di funzioni semplici $\mathcal{G}$-misurabili $\{\varphi_n\}$ tali che $\varphi_n \to g$ puntualmente $\mathcal{G}$-q.o. in modo dominato. Allora, per il teorema di Lebesgue,

$$\int_X gf\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n f\, d\mu;$$

dall'ipootesi segue facilmente che $\int_X \varphi_n f\, d\mu = \int_X \varphi_n h\, d\mu$, e dunque

$$\int_X gf\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n h\, d\mu = \int_X gh\, d\mu.$$

Esercizi del paragrafo 4.4

Esercizio 4.4.1 Le funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} n\, x^n & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 1, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},$$

convergono puntualmente a 0 in $[0,1]$, e tuttavia

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Esercizio 4.4.2 Consideriamo le funzioni ausiliarie

$$g_k(x) = \begin{cases} 2k^4(x-k) & \text{se } k < x \le k + \frac{1}{2k^3} \\ 2k^4\left(k + \frac{1}{k^3} - x\right) & \text{se } k + \frac{1}{2k^3} < x < k + \frac{1}{k^3} \\ 0 & \text{se } x \in [0,\infty[\, \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}^+} \left[k, k + \frac{1}{k^3}\right], \end{cases}$$

e definiamo

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x), \qquad x \ge 0.$$

La f è continua, poiché le g_k sono continue e in ciascun intervallo $[k, k+1]$ un solo addendo della somma è non nullo; inoltre si ha $f\left(k + \frac{1}{2k^3}\right) = k$: quindi f è illimitata nel complementare di ogni compatto. Inoltre, per l'esercizio 4.3.1,

$$\int_0^\infty f\,dm = \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty g_k\,dm = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2k^2} = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

Esercizio 4.4.3 Sia $p > 0$. Per $0 < |h| < p/2$ si ha

$$\frac{\Gamma(p+h) - \Gamma(p)}{h} = \int_0^\infty \frac{x^h - 1}{h}\, x^{p-1}\, e^{-x}\, dx.$$

L'integrando, per $h \to 0$, tende a $(\log x) x^{p-1}\, e^x$. Proviamo che la convergenza è dominata. Anzitutto osserviamo che, per $t > 0$,

$$\frac{e^t - 1}{t} = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^\infty \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^\infty \frac{t^{n-1}}{n!} \le \sum_{n=1}^\infty \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = e^t,$$

mentre se $t < 0$

$$\left|\frac{e^t - 1}{t}\right| = \frac{1 - e^t}{|t|} = \frac{1}{|t|}\left[-\sum_{n=1}^\infty \frac{t^n}{n!}\right] = \frac{1}{|t|}\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{|t|^n}{n!} = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\,\frac{|t|^{n-1}}{n!} \le 1.$$

Dunque, essendo

$$\frac{x^h - 1}{h} = \frac{e^{h\log x} - 1}{h},$$

si ha, quando $h \log x > 0$,

$$\left|\frac{x^h - 1}{h}\right| \le e^{h\log x} = x^h \le x^{-p/2} \vee x^{p/2},$$

mentre, nel caso $h \log x < 0$,

$$\left|\frac{x^h - 1}{h}\right| \le 1.$$

In ogni caso quindi l'integrando $\frac{x^h - 1}{h}\, x^{p-1}\, e^{-x}$ è dominato in valore assoluto da una funzione sommabile in $[0, \infty[$. Pertanto

$$\Gamma'(p) = \int_0^\infty (\log x)\, x^{p-1}\, e^{-x}\, dx \qquad \forall p > 0,$$

e induttivamente, allo stesso modo, si trova

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^\infty (\ln x)^n\, x^{p-1}\, e^{-x}\, dx \qquad \forall p > 0.$$

Esercizio 4.4.4 (i) Sia $a \in]0, 1[$. Per $0 < a + h < 1$ si ha

$$\frac{F(a+h) - F(a)}{h} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - (a+h)\sin^2 t}} - \frac{1}{\sqrt{1 - a\sin^2 t}}\right] dt.$$

L'integrando converge per $h \to 0$ a

$$\frac{1}{2}\frac{\sin^2 t}{(1 - a\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}};$$

inoltre, scelto $\delta > 0$ tale che $0 < \max\{a, a+h\} < \delta < 1$, esiste un punto ξ con $|\xi - a| < |h|$, tale che

$$\frac{1}{h}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - (a+h)\sin^2 t}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi\sin^2 t}}\right] = \frac{1}{2}\frac{\sin^2 t}{(1 - \xi\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}} \le \frac{1}{2}\frac{\sin^2 t}{(1 - \delta\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}},$$

e la funzione all'ultimo membro è sommabile in $[0, \frac{\pi}{2}]$. Dunque per il teorema di Lebesgue (teorema 4.3.3) si ottiene per ogni $a \in]0,1[$

$$F'(a) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{(1 - a\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}, dt.$$

Allo stesso modo, induttivamente, si ha

$$F^{(n)}(a) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{(1 - a\sin^{2n} t)^{\frac{2n+1}{2}}}\, dt \qquad \forall a \in]0,1[\,.$$

(ii) Per $a \to 0^+$ l'integrando decresce, ed è dominato dalla funzione $\frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-\delta\sin^2 t}^{\frac{3}{2}}}$, che è sommabile in $[0,1]$. Quindi

$$\lim_{a\to 0^+} F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Invece per $a \to 1^-$ l'integrando cresce, e dunque per il teorema di B. Levi (teorema 4.3.1)

$$\lim_{a\to 1^-} F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos t} = +\infty.$$

Esercizio 4.4.5 Si ha

$$f_n(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{n+x}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{q_n(x)}\right)^n}, \quad \text{ove} \quad q_n(x) = \frac{n+x}{x}\,.$$

Inoltre

$$\left(1 + \frac{1}{q_n(x)}\right)^n = \sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}\frac{1}{q_n(x)^h} = \sum_{h=0}^{n}\binom{n+1}{h}\left(1 - \frac{h}{n+1}\right)\frac{1}{q_n(x)^h}\,.$$

Essendo $1 - ha \le (1-a)^h$ per ogni $a \in [0,1[$ e $h > 0$, si ricava

$$\left(1 + \frac{1}{q_n(x)}\right)^n \le \sum_{h=0}^{n}\binom{n+1}{h}\left[\frac{1}{q_n(x)}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right]^h.$$

D'altra parte risulta

$$\frac{1}{q_n(x)}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{q_{n+1}(x)}\,:$$

infatti, con facili conti, tale disuguaglianza equivale a

$$\frac{n}{n+x} < \frac{n+1}{n+1+x}\,,$$

la quale è vera per ogni $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}^+$. Dunque

$$\left(1 + \frac{1}{q_n(x)}\right)^n < \sum_{h=0}^{n}\binom{n+1}{h}\frac{1}{q_{n+1}(x)^h} \le \sum_{h=0}^{n+1}\binom{n+1}{h}\frac{1}{q_{n+1}(x)^h} = \left(1 + \frac{1}{q_{n+1}(x)}\right)^{n+1}.$$

Quindi risulta $f_n(x) > f_{n+1}(x)$ e, in particolare,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1 + \frac{x}{n+x}\right)^n} = \frac{1}{e^x} = e^{-x} \qquad \forall x > 0.$$

Applicando il teorema di B. Levi (teorema 4.3.1) alla successione $\{f_1 - f_n\}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}(f_1(x) - f_n(x))\, e^{-x/2}\, dx = \int_0^{\infty} f_1(x)e^{-x/2}\, dx - \int_0^{\infty} e^{-\frac{3}{2}x}\, dx,$$

da cui, essendo $\int_0^\infty f_1(x)e^{-x/2}\,dx < \infty$, si ottiene nel caso (ii)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,e^{-x/2}\,dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,e^{-x/2}\,dx = \int_0^\infty e^{-\frac{3}{2}x}\,dx = \frac{2}{3}.$$

Invece nel caso (i), visto che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ l'integrando tende a $+\infty$ per $x \to \infty$, risulta

$$\int_0^\infty f_n(x)e^{x/2}\,dx = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}^+, \qquad \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,e^{-x/2}\,dx = \int_0^\infty e^{-x/2}\,dx = 2.$$

Esercizio 4.4.6 (i) Si ha

$$\int_0^1 \frac{x^p}{1-x}|\log x|\,dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^\infty x^{p+k}|\log x|\,dx.$$

Per convergenza monotona (teorema 4.3.1) si ottiene

$$\int_0^1 \frac{x^p}{1-x}|\log x|\,dx = \sum_{k=0}^\infty \int_0^1 x^{p+k}|\log x|\,dx = -\sum_{k=0}^\infty \int_0^1 x^{p+k}\log x\,dx,$$

ed integrando per parti

$$\int_0^1 \frac{x^p}{1-x}|\log x|\,dx = \sum_{k=0}^\infty \int_0^1 \frac{x^{p+k}}{p+k+1}\,dx = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(p+k+1)^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(p+n)^2}\,.$$

(ii) Si ha per $|t| \le 1$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - t}\,dx = \int_0^\infty \sin x\,e^{-x}\sum_{n=0}^\infty t^n\,e^{-nx}\,dx.$$

Poniamo

$$f_N(x) = \sin x\,e^{-x}\sum_{n=0}^N t^n\,e^{-nx}\,:$$

si ha

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = \frac{\sin x}{e^x - t} \qquad \forall x > 0,$$

ed inoltre

$$|f_N(x)| \le |\sin x|e^{-x}\sum_{n=0}^N |t|^n\,e^{-nx} = |\sin x|\,e^{-x}\,\frac{1-|t|^{N+1}e^{-(N+1)x}}{1-|t|e^{-x}} \le \frac{|\sin x|}{e^x - |t|};$$

dato che la funzione all'ultimo membro è sommabile in $[0,\infty[$, per convergenza dominata (teorema 4.3.3) si ottiene

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{e^x - t}\,dx = \lim_{N\to\infty} f_N(x) = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty t^n \sin x\,e^{-(n+1)x}\,dx.$$

Infine, integrando due volte per parti si trova facilmente

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{e^x - t}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{1+(n+1)^2} = \sum_{k=1}^\infty \frac{t^{k-1}}{1+k^2}\,.$$

(iii) Risulta

$$\sin x \log x = \log x \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall x \in]0,1],$$

ed anche

$$\left|\log x \sum_{n=0}^{N}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\log x|\, x^{2n+1}}{(2n+1)!} = |\log x|\, \sinh x \quad \forall x \in]0,1], \quad \forall N \in \mathbb{N}^+.$$

Quindi, per convergenza dominata (teorema 4.3.3), si ottiene, integrando per parti,

$$\int_0^1 \sin x\, \log x\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 x^{2n+1} \log x\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!(2n+2)}\,,$$

da cui la tesi.

(iv) Si ha

$$f_n(x) = \chi_{[0,n]}\, x^{p-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n, \qquad x \in [0, \infty[\,,$$

e ricordando dall'analisi 1 che $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$ per ogni $n > x$, la successione $\{f_n\}$ è non negativa e definitivamente crescente. Per convergenza monotona si ha allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n x^{p-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\, dx = \int_0^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = \int_0^{\infty} x^{p-1}\, e^{-x}\, dx = \Gamma(p).$$

(v) Posto per $N \ge 2$

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n-1}}{n^\alpha}, \qquad x \in [0,1],$$

si ha $0 \le f_N < f_{N+1}$. Dunque, per convergenza monotona,

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 f_N(x)\, dx = \int_0^1 \lim_{N\to\infty} f_N(x)\, dx,$$

ossia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \int_0^1 x^{n-1}\, dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^\alpha}\, dx,$$

da cui la tesi calcolando l'integrale a primo membro.

(vi) Si ha

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{e^x + 1}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \cos x}{1 + e^{-x}}\, dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-kx}\, dx.$$

Le somme parziali della serie sono dominate: infatti per ogni $n \in \mathbb{N}^+$

$$e^{-x} |\cos x| \left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-kx}\right| = e^{-x} |\cos x| \frac{1 + (-1)^n e^{-(n+1)x}}{1 + e^{-x}} \le 2e^{-x} |\cos x|,$$

e la funzione all'ultimo membro è sommabile in $[0, \infty[$. Dunque, per il teorema di Lebesgue,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{e^x + 1}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\infty} \cos x\, e^{-(k+1)x}\, dx.$$

Integrando due volte per parti si trova facilmente che

$$\int_0^{\infty} \cos x\, e^{-hx}\, dx = \frac{h}{h^2 + 1} \quad \forall h \in \mathbb{N}^+,$$

da cui

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{e^x + 1}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{(k+1)^2 + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + 1}\,.$$

(vii) Ovviamente la serie sotto integrale converge, essendo $a > 1$. Si ha

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{n^2 \sin nx}{a^n}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{a^n} \qquad \forall N \in \mathbb{N}^+,$$

e la serie a secondo membro, che è costante, è ovviamente sommabile sull'intervallo limitato $[0, \pi]$. Ne segue, per convergenza dominata,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin nx}{a^n}\, dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{n^2 \sin nx}{a^n}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n}[1-(-1)^n] = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{a^{2k+1}} = \\
&= \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{a^{2n-2}} = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d}{dx} x^{2n-1}\right]_{x=1/a} = \frac{2}{a}\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1}\right]_{x=1/a} = \\
&= \frac{2}{a}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}\right]_{x=1/a} = \frac{2}{a}\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{1-x^2}\right]_{x=1/a} = \frac{2}{a}\left[\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\right]_{x=1/a} = \\
&= 2a\,\frac{a^2+1}{(a^2-1)^2}\,.
\end{aligned}$$

(viii) Poniamo

$$f_N(x) = e^{-x}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}, \quad x \in [0, \infty[\,:$$

si ha $f_N(x) \to e^{-x}\cos\sqrt{x}$ per $N \to \infty$, e

$$|f_N(x)| \le e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = e^{-x}\cosh\sqrt{x} \le e^{-x+\sqrt{x}} \qquad \forall N \in \mathbb{N};$$

la funzione $e^{-x+\sqrt{x}}$ è sommabile in $[0, \infty[\,$, in quanto

$$\int_0^\infty e^{-x+\sqrt{x}}\, dx = e^{1/4}\int_0^\infty e^{-(\sqrt{x}-1/2)^2}\, dx = 2e^{1/4}\int_0^\infty t\, e^{-(t-1/2)^2}\, dt < \infty.$$

Dunque, per convergenza dominata, integrando n volte per parti,

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos\sqrt{x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^\infty e^{-x}\, x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n!}{(2n)!}\,.$$

(ix) L'integrando converge alla funzione e^{-x}, ed è dominato, per $n \ge 2$, come segue:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} x^{-1/n} \le \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{se } x \in]0,1[\\ \left(1+\frac{x}{2}\right)^{-2} \le 4x^{-2} & \text{se } x \in [1,\infty[\,, \end{cases}$$

ove abbiamo fatto uso della crescenza di $n \mapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ per $x > 0$. Dunque, per convergenza dominata, l'integrale converge al valore $\int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1$.

(x) Risulta

$$\int_0^1 \left(\frac{\log x}{1-x}\right)^2 dx = \int_0^1 (\log x)^2 \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}\, dx = \int_0^1 (\log x)^2 \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n\, dx = \int_0^1 (\log x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}\, dx;$$

per convergenza monotona si ricava

$$\int_0^1 \left(\frac{\log x}{1-x}\right)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^1 (\log x)^2\, x^{n-1}\, dx.$$

Integrando per parti due volte, si ottiene facilmente

$$\int_0^1 \left(\frac{\log x}{1-x}\right)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}\,.$$

(xi) Si ha ovviamente

$$\int_0^1 (e^x-1)\left(\log x + \frac{1}{x}\right) dx = -\int_0^1 (e^x-1)|\log x|\,dx + \int_0^1 \frac{e^x-1}{x}\,dx,$$

ed entrambi gli integrali a secondo membro convergono. Il primo integrale, cambiato di segno, è

$$\int_0^1 (e^x-1)|\log x|\,dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}|\log x|\,dx,$$

e per convergenza monotona si trova, integrando per parti,

$$\int_0^1 (e^x-1)|\log x|\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(-\log x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2\,n!};$$

dunque

$$\int_0^1 (e^x-1)\log x\,dx = -\int_0^1 (e^x-1)|\log x|\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2\,n!}\,.$$

Il secondo integrale, ancora per convergenza dominata, diventa

$$\int_0^1 \frac{e^x-1}{x}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\int_0^1 x^{n-1}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot n!}\,.$$

In definitiva

$$\int_0^1 (e^x-1)\left(\log x + \frac{1}{x}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[-\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n^2+n+1}{n^2+n}\,.$$

(xii) Si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2(\log x)^2}{1+x^2}\,dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+2}(\log x)^2\,dx = \int_0^1 \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2n+2}(\log x)^2\,dx = \\ &= \int_0^1 \lim_{N\to\infty} \frac{1-(-1)^{N+1}x^{2N+1}}{1+x^2}\,x^2(\log x)^2\,dx.\end{aligned}$$

Dato che, per ogni $N \in \mathbb{N}^+$ e $x \in]0,1]$,

$$\left|\frac{1-(-1)^{N+1}x^{2N+1}}{1+x^2}\,x^2(\log x)^2\right| \le \frac{2x^2(\log x)^2}{1+x^2},$$

e dato che la funzione a secondo membro è sommabile, per convergenza dominata si ottiene, con due integrazioni per parti,

$$\int_0^1 \frac{x^2(\log x)^2}{1+x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{2n+2}(\log x)^2\,dx = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{(2n+3)^2}\,dx = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)^3}\,.$$

(xiii) Essendo $b > a > 0$, possiamo scrivere

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh ax}{\sinh bx}\,dx = \int_0^{\infty} e^{(a-b)x}\frac{1-e^{-2ax}}{1-e^{-2bx}}\,dx = \int_0^{\infty}(e^{(a-b)x} - e^{-(a+b)x})\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2bnx}\,dx.$$

La serie dentro l'integrale è a termini positivi. Quindi, per convergenza monotona,

$$\int_0^\infty \frac{\sinh ax}{\sinh bx}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty (e^{(a-b)x} - e^{-(a+b)x})e^{-2bnx}\,dx.$$

Calcolando l'integrale si ottiene

$$\int_0^\infty \frac{\sinh ax}{\sinh bx}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \left[\frac{1}{2bn+b-a} - \frac{1}{2bn+b+a}\right] = \sum_{n=0}^\infty \frac{2a}{(2n+1)^2b^2 - a^2}\,.$$

(xiv) Partiamo dalla relazione

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\sin x\,dx = \int_0^\infty e^{-x^2}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,dx.$$

Dato che

$$\left|\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \le \sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh x,$$

l'integrando è dominato, perché per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha

$$e^{-x^2}\left|\sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \le e^{-x^2}\sinh x,$$

e la funzione a secondo membro è sommabile in $[0,\infty[$. Pertanto, per convergenza dominata,

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\sin x\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n+1}dx = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^\infty e^{-t}t^n dt.$$

Integrando n volte per parti, si conclude che

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\sin x\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n\,n!}{(2n+1)!}\,.$$

(xv) Risulta

$$\int_0^1 \frac{|\log x|^k}{1+x}\,dx = \int_0^1 |\log x|^k \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^n\,dx.$$

D'altronde, per ogni $N \in \mathbb{N}^+$ si ha la stima

$$|\log x|^k\left|\sum_{n=0}^N (-1)^n x^n\right| = |\log x|^k \frac{1-(-1)^{N+1}x^{N+1}}{1+x} \le \frac{2}{1+x}|\log x|^k,$$

e la funzione all'ultimo membro è sommabile in $]0,1]$. Quindi, per convergenza dominata,

$$\int_0^1 \frac{|\log x|^k}{1+x}\,dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^1 x^n(-\log x)^k\,dx.$$

Poiché, integrando per parti,

$$\int_0^1 x^n(-\log x)^k\,dx = \frac{k}{n+1}\int_0^1 x^n(-\log x)^{k-1}\,dx,$$

otteniamo iterativamente

$$\int_0^1 x^n(-\log x)^k\,dx = \frac{k!}{(n+1)^k}\int_0^1 x^n\,dx = \frac{k!}{(n+1)^{k+1}}\,,$$

e quindi

$$\int_0^1 \frac{|\log x|^k}{1+x}\,dx = k!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{k+1}}\,,$$

da cui la tesi.

Esercizio 4.4.7 (i) Possiamo scrivere l'integrale nella forma

$$\int_0^{\infty}\chi_{[0,n]}(x)\frac{1}{x^{-n}+x^2}\,dx.$$

Bisogna distinguere i casi $x\in]0,1[$ e $x\in[1,\infty[$. Per $n\to\infty$ l'integrando converge puntualmente a 0 per $x\in]0,1[$, mentre converge puntualmente a $1/x^2$ per $x\in[1,\infty[$. Inoltre esso è dominato dalla costante 1 quando $x\in]0,1[$, mentre è dominato dalla funzione $1/x^2$ per $x\in[1,\infty[$. Se ne deduce, per convergenza dominata, che

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{x^{-n}+x^2}=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{dx}{x^{-n}+x^2}=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=1,$$

da cui naturalmente

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\chi_{[0,n]}(x)\frac{1}{x^{-n}+x^2}\,dx=1.$$

(ii) Risulta

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nx+x^2}{1+nx^{3/2}}e^{-\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\,e^{-\sqrt{x}},\qquad \frac{nx+x^2}{1+nx^{3/2}}e^{-\sqrt{x}}\le\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+x^2\right)\,e^{-\sqrt{x}}.$$

e la funzione scritta sopra a destra è sommabile in $[0,\infty[$. Quindi, per convergenza dominata,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{nx+x^2}{1+nx^{3/2}}e^{-\sqrt{x}}\,dx=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,e^{-\sqrt{x}}\,dx=2\int_0^{\infty}e^{-t}\,dt=2.$$

(iii) Il modulo dell'integrando per $n\to\infty$ converge puntualmente a 0; inoltre, essendo $\sin t\le t$ per $t\ge 0$, esso è dominato dalla funzione sommabile $\frac{1}{\sqrt{x}}\,e^{-x}$. Pertanto, per convergenza dominata,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin n\sqrt{x}\,\cdot\,\cos nx\,\cdot\,e^{-x}}{nx+x^2}\,dx=0.$$

Esercizio 4.4.8 Se $a>0$, l'integrando converge puntualmente a 0 per $n\to\infty$. Inoltre

$$\frac{n^2x}{1+x^2}\,e^{-n^2x^2}\le\frac{1}{x(1+x^2)}\sup_{t\ge 0}t^2\,e^{-t^2}$$

e la funzione a secondo membro è sommabile in $[a,\infty[$ per ogni $a>0$. Quindi, per convergenza dominata, il limite proposto vale 0.
Se invece $a=0$, posto $t=n^2x^2$ si ha

$$\int_0^{\infty}\frac{n^2x}{1+x^2}\,e^{-n^2x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{1+\frac{t}{n^2}}\,dt,$$

e per convergenza monotona si ottiene

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{n^2x}{1+x^2}\,e^{-n^2x^2}\,dx=\frac{1}{2}\,.$$

Esercizio 4.4.9 Possiamo scrivere l'integrando nella forma

$$\frac{x^{p-1}}{1+x^q}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{p-1+nq};$$

essendo per ogni $N \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{p-1+nq}\right| = x^{p-1}\frac{1-(-1)^{N+1}x^{(N+1)q}}{1+x^q} \le 2x^{p-1},$$

ed osservato che la funzione $2x^{p-1}$ è sommabile in $[0,1]$, si ha per convergenza dominata

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^1 x^{p-1+nq}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p+nq}\,.$$

Scegliendo $p=q=1$ si trova

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \log 2;$$

scegliendo invece $p=1$ e $q=2$ si ricava

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4};$$

infine, scegliendo $p=1$ e $q=3$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1\left[\frac{1}{1+x}+\frac{2-x}{1-x+x^2}\right]dx = \\
&= \frac{1}{3}\log 2 + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{2-x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \left[\text{posto } s = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\log 2 + \frac{2}{3\sqrt{3}}\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}s}{1+s^2}\,ds = \frac{1}{3}\log 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\pi}{3} + 0 = \frac{1}{3}\log 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.4.10 Si ha per $|a| \le 1$ e $x \in [0,1]$

$$\frac{1-x}{1-ax^3} = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a^n x^{3n},$$

e dunque, per convergenza monotona,

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1-ax^3}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \int_0^1 (1-x)x^{3n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{(3n+1)(3n+2)}\,.$$

Scegliendo adesso $a=1$ si trova

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)} &= \int_0^1 \frac{1-x}{1-x^3}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = \\
&= \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{ds}{1+s^2} = \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}$$

Scegliendo invece $a=-1$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)(3n+2)} &= \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1\left[\frac{2}{1+x}-\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right]dx = \\
&= \frac{2}{3}\log 2 - \frac{1}{3}\log 2 = \frac{1}{3}\log 2.
\end{aligned}$$

Di conseguenza, sommando le due serie,

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\log 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{(3n+1)(3n+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(6k+1)(6k+2)}\,,$$

da cui la tesi.

Esercizio 4.4.11 Si ha

$$f(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx+n-[nx+n]}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx+n-[nx]-n}{2^n} = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

dunque f è 1-periodica. Poi, essendo $0 \le f \le 1$, f è sommabile su $[0,1]$; inoltre, per convergenza monotona,

$$\int_0^1 f\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^1 (nx-[nx])\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n} \int_0^n (t-[t])\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}\, n \int_0^1 s\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\,.$$

Esercizio 4.4.12 Dato che $x^\alpha f(x)$ e $x^\beta f(x)$ sono sommabili su $[0,\infty[$, fissato $\gamma \in]\alpha,\beta[$ e scrivendo $\gamma = (1-t)\alpha + t\beta$ con $t \in]0,1[$, si ha

$$\int_0^\infty x^\gamma |f(x)|dx = \int_0^\infty x^{(1-t)\alpha} |f(x)|^{1-t} \cdot x^{t\beta} |f(x)|^t\,dx.$$

Utilizzando la disuguaglianza di Young $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, valida per $a,b \ge 0$ e $p,q > 0$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e scegliendo $p = \frac{1}{1-t}$, $q = \frac{1}{t}$, si ha

$$\int_0^\infty x^\gamma |f(x)|dx \le \int_0^\infty \left[(1-t)x^\alpha |f(x)| + t x^\beta |f(x)|\right] dx < \infty.$$

Inoltre, se $\gamma_0 \in [\alpha,\beta]$, per $\gamma \to \gamma_0$ si ha $x^\gamma f(x) \to x^{\gamma_0} f(x)$ per ogni $x > 0$, e inoltre

$$x^\gamma |f(x)| \le \begin{cases} x^\alpha |f(x)| & \text{se } x \in [0,1] \\ x^\beta |f(x)| & \text{se } x \in [1,\infty[\,. \end{cases}$$

Dunque, per convergenza dominata,

$$\lim_{\gamma\to\gamma_0} F(\gamma) = \lim_{\gamma\to\gamma_0} \int_0^\infty x^\gamma f(x)\,dx = \int_0^\infty x^{\gamma_0} f(x)\,dx = F(\gamma_0).$$

Esercizio 4.4.13 Si ha, posto $s = n(t-x)$,

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{1+n^2(t-x)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{t} \frac{f(x)}{1+n^2(t-x)^2}\,dx + \int_t^\infty \frac{f(x)}{1+n^2(t-x)^2}\,dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(t+s/n)}{1+s^2}\,ds + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{f(t+s/n)}{1+s^2}\,ds. \end{aligned}$$

Entrambi gli integrandi convergono puntualmente, rispettivamente a $\frac{1}{\pi}\frac{f(t^+)}{1+s^2}$ e a $\frac{1}{\pi}\frac{f(t^-)}{1+s^2}$; inoltre essi sono dominati dalla funzione $\frac{\|f\|_\infty}{\pi(1+s^2)}$. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = \frac{f(t^+)}{\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{1+s^2} + \frac{f(t^-)}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{ds}{1+s^2} = \frac{1}{2}\left[f(t^-) + f(t^+)\right].$$

Esercizio 4.4.14 Sia $\xi \in]0,\frac{1}{3}[$. Poiché l'insieme C_ξ è privo di punti interni, per ogni suddivisione σ di $[0,1]$, detti $I_1,\dots,I_m$ gli intervalli della suddivisione, per la somma inferiore si ottiene

$$s(\chi_{C_\xi},\sigma) = \sum_{k=1}^{m} \left[\inf_{I_k} \chi_{C_\xi}\right] \ell(I_k) = 0.$$

D'altra parte, per la somma superiore, definita la funzione

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} \left[\sup_{I_k} \chi_{C_\xi} \right] \chi_{I_k} ,$$

si osserva che φ è semplice, dunque misurabile, e verifica $\varphi \geq \chi_{C_\xi}$. Inoltre, per costruzione,

$$S(\chi_{C_\xi}, \sigma) = \sum_{k=1}^{m} \left[\sup_{I_K} \chi_{C_\xi} \right] \ell(I_k) = \int_0^1 \varphi \, dm \geq \int_0^1 \chi_{C_\xi} \, dm = m(C_\xi) = \frac{1-3\xi}{1-2\xi} > 0.$$

Per l'arbitrarietà di σ si deduce allora

$$\inf_\sigma S(\chi_{C_\xi}, \sigma) \geq \frac{1-3\xi}{1-2\xi} > 0 = \sup_\sigma s(\chi_{C_\xi}, \sigma).$$

Pertanto χ_{C_ξ} non è integrabile secondo Riemann se $\xi < \frac{1}{3}$.

Esercizio 4.4.15 Proviamo anzitutto che f è limitata. Supponiamo per assurdo che esista una successione $\{x_n\} \subset [a,b]$ tale che $|f(x_n)| > n$. Per compattezza, esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ che converge ad un punto $x_0 \in [a,b]$. Per ipotesi allora $f(x_{n_k}) \to g(x_0)$ per $k \to \infty$, ma ciò è assurdo, dato che $|f(x_{n_k})| > n_k$ mentre $g(x_0)$ è un numero reale.
Per provare che f è integrabile secondo Riemann, conviene prima mostrare che g è continua. Sia $x_0 \in [a,b]$ e sia $\{x_n\} \subset [a,b]$ una successione convergente a x_0: dobbiamo provare che $g(x_n) \to g(x_0)$ per $n \to \infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\{y_k^{(n)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una qualunque successione che tende a x_n per $k \to \infty$: allora, per ipotesi, $f(y_k^{(n)}) \to g(x_n)$ per $k \to \infty$. Fissato n, sia k_n un indice tale che, detto $z_n = y_{k_n}^{(n)}$, si abbia $|z_n - x_n| < 1/n$ e $|f(z_n) - g(x_n)| < 1/n$. Ne segue

$$|z_n - x_0| \leq |z_n - x_n| + |x_n - x_0| < \frac{1}{n} + |x_n - x_0| \to 0 \qquad \text{per } n \to \infty,$$

da cui, per ipotesi, $f(z_n) \to g(x_0)$ per $n \to \infty$. In definitiva

$$|g(x_n) - g(x_0)| \leq |g(x_n) - f(z_n)| + |f(z_n) - g(x_0)| < \frac{1}{n} + |f(z_n) - g(x_0)| \to 0 \quad \text{per } n \to \infty,$$

e dunque g è continua.
Sia adesso $A = \{x \in [a,b] : \ f \text{ è discontinua in } x\}$: dobbiamo provare, a norma della proposizione 4.4.3, che A ha misura di Lebesgue nulla. Osservato che f è continua in x se e solo se $f(x) = g(x)$, si ha

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} A_n \,, \qquad A_n = \left\{ x \in [a,b] : \ |f(x) - g(x)| > \frac{1}{n} \right\}.$$

Proveremo che ciascun A_n è un insieme finito: da ciò seguirà la tesi. Se A_n fosse infinito, per compattezza di $[a,b]$ esisterebbe una successione $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset A_n$ convergente ad un punto $x_0 \in [a,b]$. Per ogni k risulterebbe $|f(x_k) - g(x_k)| > 1/n$; d'altra parte, per $k \to \infty$ si avrebbe per ipotesi $f(x_k) \to g(x_0)$ mentre, per continuità, $g(x_k) \to g(x_0)$: ne seguirebbe, al limite, $0 \geq 1/n$, assurdo.

Esercizio 4.4.16 Sia $C_{1/4}$ l'insieme di Cantor di misura $1/2$. La funzione $\chi_{C_{1/4}}$ è sommabile ed è discontinua in ogni punto di $C_{1/4}$. Dunque, per la proposizione 4.4.3, non può esistere alcuna $g \in \mathcal{R}[0,1]$ che coincida con f q.o. in $[0,1]$.

Esercizi del paragrafo 4.5

Esercizio 4.5.1 Sia $B \in \mathcal{F}$ tale che $\mu(A \setminus B) = 0$. Allora per ogni $E \in \mathcal{F}$ si ha, essendo μ concentrata in A:

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) = \mu(E \cap (A \cap B)) + \mu(E \cap (A \setminus B)) = \mu(E \cap A \cap B) \leq \mu(E \cap B) \leq \mu(E),$$

da cui n$\mu(E) = \mu(E \cap B)$. Quindi μ è concentrata in B.
Sia ora $D \in \mathcal{F}$ tale che $\mu(A \setminus D) > 0$. Allora, scelto $E = A \setminus D$, si ha $\mu(E) = \mu(A \setminus D) > 0$, mentre $\mu(E \cap D) = \mu((A \setminus D) \cap D) = \mu(\emptyset) = 0$, cosicché μ non è concentrata in D.

Esercizio 4.5.2 (i) La classe $\mathcal{S}$ contiene gli intervalli, perché

$$f^{-1}([a,b]) = \{x \in X : \ f(x) \le b\} \cap \{x \in X : \ f(x) \ge a\} \in \mathcal{F}.$$

Di conseguenza $\mathcal{S}$ contiene gli aperti (esercizio 1.3.4), e pertanto contiene $\mathcal{B}$. Nel caso in cui $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$ e μ è la misura cardinalità, si ha $f^{-1}(E) \in \mathcal{F}$ per ogni $E \subseteq \mathbb{R}$: quindi $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, e dunque in questo caso $\mathcal{S}$ non è contenuta in $\mathcal{M}$.
(ii) Si ha $\lambda_f(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$, e se $\{E_n\} \subseteq \mathcal{F}$ è una successione di insiemi disgiunti, allora

$$\lambda_f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(E_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(f^{-1}(E_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_f(E_n),$$

poiché anche gli insiemi $f^{-1}(E_n)$ sono disgiunti. Dunque λ_f è una misura. Se $A \cap f(X) = \emptyset$, allora $f^{-1}(A) = \emptyset$ e pertanto $\lambda_f(A) = 0$. Perciò λ_f è concentrata su $f(X)$. Se μ è completa, sia $E \in \mathcal{S}$ tale che $\lambda_f(E) = 0$: se $F \subset E$, si ha $f^{-1}(F) \subseteq f^{-1}(E)$ e $\mu(f^{-1}(E)) = \lambda_f(E) = 0$; per completezza di μ, segue $F \in \mathcal{S}$ e $\lambda_f(F) = \mu(f^{-1}(F)) = 0$, il che prova la completezza di λ_f. Se μ è finita, allora $\lambda_f(X) = \mu(f^{-1}(X)) < \infty$ e quindi λ_f è finita. Infine, se μ è σ-finita non è detto che λ_f lo sia: ad esempio, sia $f : X \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 0$ per ogni $x \in X$: allora, benché si abbia

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\,, \qquad X_n \in \mathcal{F}, \qquad \mu(X_n) < \infty, \qquad X_n \cap X_m = \emptyset \quad \forall n \ne m,$$

per ogni $B \subset \mathbb{R}$ si ha

$$\lambda_f(B) = \mu(f^{-1}(B)) = \begin{cases} \mu(\emptyset) = 0 & \text{se } 0 \notin B, \\ \mu(X) = \infty & \text{se } 0 \in B. \end{cases}$$

Dunque $\lambda_f(\mathbb{R}) = \infty$ ma non è possibile decomporre $\mathbb{R}$ come unione numerabile di sottoinsiemi disgiunti di misura finita: se $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$, uno solo degli R_n, quello che contiene 0, avrà misura infinita mentre tutti gli altri avranno misura nulla.
(iii) Per le funzioni caratteristiche χ_B, $B \in \mathcal{S}$, si ha, essendo $\chi_{f^{-1}(B)}(x) = \chi_B(f(x))$ per ogni $x \in X$,

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_B \, d\lambda_f = \lambda_f(B) = \mu(f^{-1}(B)) = \int_X \chi_{f^{-1}(B)} \, d\mu = \int_X \chi_B \circ f \, d\mu.$$

Per additività, lo stesso vale per le funzioni semplici $\sum_{i=1}^p \alpha_i \chi_{B_i}$. Poi, se $\mu(X) < \infty$, fissata g sommabile esiste una successione $\{\varphi_n\}$ di funzioni semplici convergente a g in modo dominato (in quanto $\varphi_n^+ \le g^+$ e $\varphi_n^- \le g^-$, proposizione 3.1.7 e osservazione 3.1.8 (3)). Dunque

$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda_f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \, d\lambda_f = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \circ f \, d\mu = \int_x g \circ f \, d\mu.$$

(iv) Sappiamo da (ii) che λ_f è concentrata su $f(X)$ e λ_gè concentrata su $g(X)$. Quindi, se risulta $\mu(f^{-1}(g(X))) = \lambda_f(g(X)) = 0$, allora $\lambda_f \perp \lambda_g$, mentre se si ha $\mu(g^{-1}(f(X))) = \lambda_g(f(X)) = 0$, allora $\lambda_g \perp \lambda_f$.
(v) Risulta $\lambda_f \perp \lambda_g$. Infatti, $f([-1,1]) = [0,1]$, $g([-1,1]) = [-1,0]$, e

$$\mu(g^{-1}(f([-1,1]))) = \mu(g^{-1}([0,1])) = \mu(\{0\}) = 0,$$
$$\mu(f^{-1}(g([-1,1]))) = \mu(f^{-1}([-1,0])) = \mu(\{0\}) = 0.$$

Da (iv) segue la tesi.

Esercizio 4.5.3 (i) Se λ_1 e λ_2 sono singolari rispetto a μ, allora esistono $A, B \in \mathcal{F}$ tali che $\lambda_1(A) = 0 = \mu(A^c)$ e $\lambda_2(B) = 0 = \mu(B^c)$. Dunque $\lambda_1(A \cap B) + \lambda_2(A \cap B) = 0 = \mu((A \cap B)^c)$, e quindi $\lambda_1 + \lambda_2$

è singolare rispetto a μ.

(ii) Se λ_1 e λ_2 sono assolutamente continue rispetto a μ, allora per ogni $A \in \mathcal{F}$ con $\mu(A) = 0$ si ha anche $\lambda_1(A) = \lambda_2(A) = 0$ e dunque $\lambda_1(A) + \lambda_2(A) = 0$, ossia $\lambda_1 + \lambda_2$ è assolutamente continua rispetto a μ.

(iii) Supponiamo $\lambda_1 \ll \mu$ e $\lambda_2 \perp \mu$. Allora esiste $A \in \mathcal{F}$ tale che $\lambda_2(A) = 0 = \mu(A^c)$. Quindi, per assoluta continuità, $\lambda_1(A^c) = 0$, e ciò mostra che λ_1 è singolare rispetto a λ_2.

(iv) Sia $\lambda_1 \ll \mu$ e $\lambda_1 \perp \mu$. Allora esiste $A \in \mathcal{F}$ tale che $\lambda_1(A) = 0 = \mu(A^c)$. Per assoluta continuità, $\lambda_1(A^c) = 0$, e quindi $\lambda_1(X) = \lambda_1(A) + \lambda_1(A^c) = 0$. Pertanto $\lambda_1 = 0$.

Esercizio 4.5.4 Se $E \subset]0,1[$, $E \in \mathcal{F}$ e $\mu(E) = 0$, allora $\lambda(E) = \int_E \frac{dt}{t} = 0$. Però, dato $\varepsilon > 0$, sia $0 < \delta < \varepsilon \wedge 1$ e scegliamo $E = [\delta^2, \delta]$; allora $m(E) < \varepsilon$, ma

$$\lambda(E) = \int_{\delta^2}^{\delta} \frac{dt}{t} = \log \frac{1}{\delta} \to +\infty \quad \text{per } \delta \to 0^+ ,$$

violando la condizione espressa nella proposizione 4.5.6.

Esercizio 4.5.5 Se $f \equiv 0$ la tesi è ovvia. Altrimenti, anzitutto scriviamo

$$\frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} g(x)\, f\left(\frac{x}{n}\right)\, dx = \int_{\mathbb{R}} g(nt)\, f(t)\, dt.$$

Per l'assoluta continuità dell'integrale, fissato $\sigma > 0$ esiste $\varepsilon_\sigma > 0$ tale che

$$\int_{|x| \le \varepsilon_\sigma} |f(x)|\, dx < \frac{\sigma}{2\|g\|_\infty} .$$

Esiste poi $M_\sigma > 0$ tale che $|g(x)| < \frac{\sigma}{2\|f\|_1}$ per $|x| > M_\sigma$. Scelto allora $n_\sigma > \frac{M_\sigma}{\varepsilon_\sigma}$, per ogni $n > n_\sigma$ si ha (notando che $nt \ge n_\sigma \varepsilon_\sigma > M_\sigma$ per ogni $t \ge \varepsilon_\sigma$)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} g(nt)\, f(t)\, dt \right| &\le \int_{|t| < \varepsilon_\sigma} |g(nt)|\, |f(t)|\, dt + \int_{|t| \ge \varepsilon_\sigma} |g(nt)|\, |f(t)|\, dt \le \\ &\le \frac{\|g\|_\infty\, \sigma}{2\|g\|_\infty} + \int_{|t| \ge \varepsilon_\sigma} \frac{\sigma}{2\|f\|_1} |f(t)|\, dt < \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma. \end{aligned}$$

Esercizio 4.5.6 Supponiamo che $f_n \to f$ in misura. Allora, per l'esercizio 4.5.2)(iii),

$$\int_{\mathbb{R}} g\, d\lambda_n = \int_X g \circ f_n\, d\mu = \int_{\{x \in X:\ |f_n(x) - f(x)| \le \delta\}} g \circ f_n\, d\mu + \int_{\{x \in X:\ |f_n(x) - f(x)| > \delta\}} g \circ f_n\, d\mu,$$

Il secondo integrale all'ultimo membro si maggiora con

$$\|g\|_\infty \mu(\{x \in X :\ |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) < \varepsilon \qquad \text{se } \delta = \delta_\varepsilon ;$$

nel primo integrale, l'integrando converge in misura a $g \circ f$, visto che

$$\{x \in X :\ |g \circ f_n(x) - g \circ f(x)| > \delta\} \subseteq \left\{ x \in X :\ |f_n(x) - f(x)| > \frac{\delta}{\|g\|_\infty} \right\},$$

e inoltre, essendo $\mu(X) < \infty$, la convergenza è dominata da $\|g\|_\infty$; quindi, per l'esercizio 4.3.14, il primo integrale tende a $\int_X g \circ f\, d\mu$. Ne segue la tesi.

Esercizio 4.5.7 (i) Dall'ipotesi segue

$$\int_E (1 - f)\, d\nu = \int_E f\, d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{F}.$$

Scegliendo $E = \{x \in X :\ f(x) \le 0\}$ si ricava

$$\nu(E) \le \int_E (1 - f)\, d\nu = \int_E f\, d\mu \le 0,$$

il che implica, per evitare l'assurdo, $\nu(E) = \mu(E) = 0$, da cui $f > 0$ q.o.; d'altra parte, scegliendo $E = \{x \in X : \ f(x) \geq 1\}$, si ottiene

$$0 \geq \int_E (1-f)\, d\nu = \int_E f\, d\mu \geq \mu(E),$$

e analogamente deve essere $\mu(E) = \nu(E) = 0$, ossia $f < 1$ q.o., per evitare l'assurdo.

(ii) Per ipotesi si ha

$$\int_E g\,(1-f)\, d\nu = \int_E g\, f\, d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{F}.$$

Scegliamo stavolta $g = \frac{\chi_E}{1-f}$, funzione che è finita q.o.: si trova

$$\nu(E) = \int_E \frac{f}{1-f}\, d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{F},$$

e la tesi è provata.

Esercizio 4.5.8 Siano $X = [0,1]$ e $\mathcal{F}$ la classe degli insiemi misurabili secondo Lebesgue contenuti in $[0,1]$; scegliamo come μ la misura che conta i punti, e come λ la misura di Lebesgue. Si ha ovviamente $m \ll \mu$ e μ non è σ-finita. Se esistesse $f \geq 0$, $\mathcal{F}$-misurabile, tale che $\lambda(E) = \int_E f\, d\mu$ per ogni $E \in \mathcal{F}$, avremmo

$$0 = \lambda(\{x\}) = \int_{\{x\}} f\, d\mu = f(x) \qquad \forall x \in [0,1],$$

da cui $f \equiv 0$; ne seguirebbe $\lambda = 0$, assurdo.

Esercizi del paragrafo 4.6

Esercizio 4.6.1 Lo spazio $L^1(\mathbb{N})$ è costituito dalle funzioni $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ossia delle successioni reali $\{a_k\}_{k \in n\mathbb{N}}$ ove $a_k = a(k)$, tali che $\int_{\mathbb{N}} !a(k)|\, d\nu = \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k| < \infty$, vale a dire dalle serie assolutamente convergenti. Risulta

$a_n \to a$ puntualmente se $\lim_{n\to\infty} |a_n(k) - a(k)| = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$;

$a_n \to a$ uniformemente se $\lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_n(k) - a(k)| = 0$;

$a_n \to a$ in misura se per ogni $\delta > 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} \nu(\{k \in \mathbb{N} : \ |a_n(k) - a(k)| > \delta\}) = 0$,
quindi se e solo se $a_n \to a$ uniformemente;

$a_n \to a$ in L^1 se $\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_n(k) - a(k)| = 0$.

Dunque, la convergenza in L^1 implica la convergenza in misura, che equivale alla convergenza uniforme, la quale implica la convergenza puntuale. La convergenza puntuale non implica la uniforme, come mostra l'esempio $a_n(k) = \frac{k}{n}$, con $a(k) = 0$, e la convergenza uniforme non implica la convergenza in L^1, a causa dell'esempio

$$a_n(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k < n+1 \text{ oppure } k > 2n \\ \frac{1}{n} & \text{se } n+1 \leq k \leq 2n, \end{cases} \qquad a(k) = 0.$$

Esercizio 4.6.2 Se g è una funzione semplice, $g = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}$, allora

$$\int_X |g| d\lambda = \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \lambda(A_i) = \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \int_{A_i} |f| d\mu = \int_X \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \chi_{A_i} |f| d\mu = \int_X |gf| d\mu.$$

Se $g \in L^1/X, \mu)$, esiste una successione di funzioni semplici non negative $\{\varphi_n\}$ che converge puntualmente a $|g|$ in modo crescente (proposizione 3.1.7). Si ha allora

$$\int_X \varphi_n\, d\lambda = \int_X \varphi_n |f| d\mu \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

e per $n \to \infty$ si ha la tesi grazie al teorema di B. Levi.

Esercizio 4.6.3 L'integrale a destra ha senso, essendo $t \mapsto \mu(\{x \in X : \ |f(x)| > t\})$ una funzione decrescente e dunque misurabile. Sia g una funzione semplice, $g = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$ con $|\alpha_1| < |\alpha_2| < \cdots < |\alpha_k|$ e $A_i = g^{-1}(\alpha_i)$. Poniamo anche, per comodità, $\alpha_0 = 0$. Allora

$$\int_0^\infty \mu(\{x \in X : \ |g(x)| > t\})\, dt = \sum_{h=1}^{k} \int_{|\alpha_{h-1}|}^{|\alpha_h|} \mu(\{x \in X : \ |g(x)| > t\})\, dt.$$

D'altronde per $t \in]|\alpha_{h-1}|, |\alpha_h|]$ risulta $|g(x)| > t$ se e solo se $x \in A_h \cup A_{h+1} \cup \cdots \cup A_k$; quindi

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mu(\{x \in X : \ |g(x)| > t\})\, dt &= \sum_{h=1}^{k} \int_{|\alpha_{h-1}|}^{|\alpha_h|} \sum_{i=h}^{k} \mu(A_i) = \sum_{h=1}^{k} (|\alpha_h| - |\alpha_{h-1}|) \sum_{i=h}^{k} \mu(A_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) \sum_{h=1}^{i} (|\alpha_h| - |\alpha_{h-1}|) = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| \mu(A_i) = \int_X g\, d\mu. \end{aligned}$$

Se ora $f \in L^1(X, \mu)$, esiste una successione di funzioni semplici non negative $\{\varphi_n\}$ che converge puntualmente a $|g|$ in modo crescente (proposizione 3.1.7). Si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^\infty \mu(\{x \in X : \ |\varphi_n(x)| > t\})\, dt = \int_X \varphi_n\, d\mu,$$

e passando al limite per $n \to \infty$ la tesi segue dal teorema di B. Levi, essendo

$$\{x \in X : \ |g(x)| > t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : \ |\varphi_n(x)| > t\}.$$

Esercizio 4.6.4 Per $t \in [0,1]$ poniamo $g(t) = \int_0^t f\, dm$. La funzione g è crescente e, grazie alla proposizione 4.5.6, è anche continua. Dato che $g(0) = 0$ e $g(1) = 1$, esiste $t \in]0,1[$ tale che $g(t) = \lambda$: dunque $E = [0,t]$ è l'insieme cercato.
Per un generico spazio misurato $(X, \mathcal{F}, \mu)$, questo risultato è falso. Ad esempio, sia $\mathcal{F} = \{X, \emptyset\}$, sia $\mu(X) = 1$ e $\mu(\emptyset) = 0$: la funzione $f \equiv 1$ è misurabile, si ha $\int_X f\, d\mu = 1$ e, ovviamente, $\int_\emptyset f\, d\mu = 0$, ma non esiste alcun insieme $E \in \mathcal{F}$ tale che $0 < \int_E f\, d\mu < 1$.

Esercizio 4.6.5 Si ha

$$\{x \in X : \ |f(x)| > 0\} = \{x \in X : \ |f(x)| > 1\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \left\{ x \in X : \ \frac{1}{n} \geq |f(x)| > \frac{1}{n+1} \right\},$$

e questi insiemi sono disgiunti e di misura finita, essendo ad esempio

$$\begin{aligned} \mu\left(\left\{ x \in X : \ \frac{1}{n} \geq |f(x)| > \frac{1}{n+1} \right\} \right) &\leq \mu\left(\left\{ x \in X : \ |f(x)| > \frac{1}{n+1} \right\} \right) \leq \\ &\leq (n+1) \int_{\left\{x \in X : \ |f(x)| > \frac{1}{n+1}\right\}} |f|\, d\mu \leq (n+1) \int_X |f|\, d\mu < \infty. \end{aligned}$$

Esercizio 4.6.6 Poniamo $E_n = \{x \in X : \ f(x) > n\}$. Si ha $E_{n+1} \subseteq E_n$; se in particolare risulta $\mu(E_n \setminus E_{n+1}) = 0$ definitivamente, allora si ha anche $\mu(E_n \setminus \{x \in X : \ f(x) = \infty\}) = 0$, ossia $f(x) = \infty$ q.o. in E_n: in questo caso la tesi segue scegliendo $g = \chi_{E_n}$. Altrimenti sarà $\mu(E_n \setminus E_{n+1}) > 0$ per infiniti indici, e quindi (sostituendo eventualmente $\{n\}$ con un'opportuna sottosuccessione strettamente crescente $\{k_n\} \subset \{n\}$) possiamo supporre $\mu(E_n \setminus E_{n+1}) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poniamo allora

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\, \mu(E_n \setminus E_{n+1})}\, \chi_{E_n \setminus E_{n+1}}(x) :$$

risulta $g \in L^1(X)$ perché $\int_X g\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, ma

$$\int_X |gf|\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n \setminus E_{n+1}} g|f|\,d\mu \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Esercizio 4.6.7 Sia $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, con $X_n \subset X_{n+1}$, $X_n \in \mathcal{F}$ e $\mu(X_n) < \infty$. Supponiamo per assurdo che $g \notin L^\infty(X)$: posto $B_n = \{x \in X :\ |g(x)| > n\}$, si ha allora $\mu(B_n) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dato che $\mu(B_n \cap X_k) \to \mu(B_n) > 0$ per $k \to \infty$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $k_n \in \mathbb{N}^+$ tale che $\mu(B_n \cap X_{k_n}) > 0$. Quindi, se $A_n = B_n \cap X_{k_n}$, si ha $0 < \mu(A_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Scegliamo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\,\mu(A_n)}\,\chi_{A_n}(x),$$

risulta

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\,\mu(A_n)} \int_{A_n} 1\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

ma

$$\int_X |fg|\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\,\mu(A_n)} \int_{A_n} |g|\,d\mu \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

il che contraddice l'ipotesi. Dunque $g \in L^\infty(X)$.
Se X non è σ-finito, il risultato è falso: scegliamo $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ e $\mu(E) = 0$ se E è numerabile, $\mu(E) = \infty$ altrimenti. Allora ogni funzione f è misurabile, e f è sommabile se e solo se $\int_{\mathbb{R}} |f|\,d\mu = 0$, poiché se f è sommabile gli insiemi $\{x \in \mathbb{R} :\ |f(x)| > \frac{1}{n}\}$, dovendo avere misura finita, hanno tutti misura nulla. In definitiva, le funzioni sommabili devono essere diverse da 0 solo su un insieme al più numerabile. Se scegliamo $g(x) = x$, si ha $g \notin L^\infty$, perché $\{x \in \mathbb{R} :\ x > n\}$ ha misura infinita; d'altra parte, se $f \in L^1$ la funzione fg è diversa da 0 solo su un insieme al più numerabile, e dunque di misura nulla; pertanto $fg \in L^1$ per ogni $f \in L^1$, benché $g \notin L^\infty$.

Esercizio 4.6.8 Poiché $X_0 = \{x \in X :\ |f(x)| > 0\}$ è σ-finito in virtù dell'esercizio 4.6.5, si ha $X_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} X_n$, con $X_n \subseteq X_{n+1}$ e $\mu(X_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Per il teorema di B. Levi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_n} |f|\,d\mu = \int_{X_0} |f|\,d\mu = \int_X |f|\,d\mu :$$

quindi, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un indice n_ε tale che

$$\int_{X_n^c} |f|\,d\mu = \int_X |f|\,d\mu - \int_{X_n} |f|\,d\mu < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_\varepsilon\,.$$

La tesi segue prendendo ad esempio $A = X_{n_\varepsilon}$.

Esercizio 4.6.9 Scrivendo

$$f_n(x) = \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\frac{e^{x/n}-1}{x/n}}\,,$$

si vede subito che $f_n(x) \to \frac{\sin x}{x^{3/2}}$ puntualmente; poi, osservando che $e^t - 1 > t$ per ogni $t > 0$, si riconosce che

$$|f_n(x)| \leq \frac{|\sin x|}{x^{3/2}}.$$

Dato che

$$\frac{|\sin x|}{x^{3/2}} \leq \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } x \in [0,1] \\ \dfrac{1}{x^{3/2}} & \text{se } x \in]1,\infty[\,, \end{cases}$$

la convergenza delle f_n è dominata. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n\,dm=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx,$$

ed il limite è finito.

Esercizio 4.6.10 Poiché $f\in L^1(\mathbb{R},\mathcal{B},\mu)$, per assoluta continuità (proposizione 4.5.6), fissato $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che, per $x<x'$ si ha $\int_x^{x'}|f|\,d\mu<\varepsilon$ non appena $\mu([x,x'])=|g(x')-g(x)|<\delta$. Dato che g è continua, ciò accadrà se $x'-x<\sigma$, per un opportuno $\sigma>0$; pertanto F è continua. Questo però non basta a garantire l'uniforme continuità di F, dato che g non è in generale uniformemente continua. Ad esempio, se $g(x)=e^x$ e $f\geq 0$, allora

$$F(x')-F(x)=\int_x^{x'}f\,d\mu=\int_x^{x'}|f(t)|\,e^t\,dt\geq e^x\int_x^{x'}|f(t)|\,dt,$$

il che mostra che F non è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.

Esercizio 4.6.11 (i) Essendo $0\leq f_n(x)\leq\frac{1}{nx}$, è chiaro che $f_n\to 0$ puntualmente.
(ii) Essendo per $k\geq 2$

$$f_n(x)=k\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{1}{nk}\leq x<\frac{1}{n(k-1)}\,,$$

si ottiene

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=\sum_{k=2}^\infty\int_{\frac{1}{nk}}^{\frac{1}{n(k-1)}}k\,dx=\frac{1}{n}\sum_{k=2}^\infty\frac{1}{k-1}=\infty:$$

quindi $f_n\notin L^1(0,\infty)$ e non ci può essere convergenza in L^1.
(iii) Se $\delta\in\,]0,1[\,$,

$$m(\{x\in[0,1]:\ f_n(x)>\delta\})\leq m\left(\left\{x\in[0,1]:\ \frac{1}{nx}>\delta\right\}\right)=m\left(\left[0,\frac{1}{n\delta}\right[\right)=\frac{1}{n\delta}\,,$$

e pertanto $f_n\to 0$ in misura.

Esercizio 4.6.12 Poniamo, per $h\in\mathbb{N}^+$ e $n=2^h-1+p$, con $p=0,1,\dots,2^h-1$,

$$\varphi_n=1-\chi_{\left[\frac{p}{2^h},\frac{p+1}{2^h}\right]}\,.$$

Quindi, per $h=1$, $p=0,1$, $n=1,2$,

$$\varphi_1=1-\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}\,,\quad\varphi_2=1-\chi_{\left[\frac{1}{2},1\right]};$$

per $h=2$, $p=0,1,2,3$, $n=3,4,5,6$,

$$\varphi_3=1-\chi_{\left[0,\frac{1}{4}\right]}\,,\quad\varphi_4=1-\chi_{\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]}\,,\quad\varphi_5=1-\chi_{\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]}\,,\quad\varphi_6=1-\chi_{\left[\frac{3}{4},1\right]}\,,$$

eccetera. Allora $\varphi_n(x)$ non converge puntualmente, perché i suoi valori oscillano fra 0 e 1, però

$$\int_0^1\varphi_n\,dx=\frac{1}{2^h}\qquad\text{per } n=2^h-1,\dots,2^{h+1}-2,$$

e pertanto $\varphi_n\to 0$ in $L^1(0,1)$.

Esercizio 4.6.13 (i) Se $f\in L^1_w(\mathbb{R})$ allora $\lambda f\in L^1_w(\mathbb{R})$: infatti, se $\lambda=0$

$$m(\{x\in\mathbb{R}:\ 0>t\})=m(\emptyset)=0\quad\forall t>0,$$

mentre se $\lambda \neq 0$

$$m(\{x \in \mathbb{R} :\ |\lambda f(x)| > t\}) = m\left(\left\{x \in \mathbb{R} :\ |f(x)| > \frac{t}{|\lambda|}\right\}\right) \leq c_f \frac{|\lambda|}{t} \quad \forall t > 0.$$

Inoltre, se $f, g \in L^1_w(\mathbb{R})$ allora $f + g \in L^1_w(\mathbb{R})$: infatti,

$$\begin{aligned} &m(\{x \in \mathbb{R} :\ |f(x) + g(x)| > t\}) \leq \\ &\quad \leq m\left(\left\{x \in \mathbb{R} :\ |f(x)| > \frac{t}{2}\right\}\right) + m\left(\left\{x \in \mathbb{R} :\ |g(x)| > \frac{t}{2}\right\}\right) \leq \frac{2c_f}{t} + \frac{2c_g}{t}\,. \end{aligned}$$

(ii) Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, allora $f \in L^1_w(\mathbb{R})$ perché

$$t\, m(\{x \in \mathbb{R} :\ |f(x)| > t\}) \leq \int_{\mathbb{R}} |f|\, dx.$$

L'inclusione è stretta: infatti $f(x) = \frac{1}{|x|}$ non appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, ma sta in $L^1_w(\mathbb{R})$ perché verifica

$$m\left(\left\{x \in \mathbb{R} :\ \frac{1}{|x|} > t\right\}\right) = m\left(\left[-\frac{1}{t}, \frac{1}{t}\right]\right) = \frac{2}{t}\,.$$

(iii) Sia $t > 0$. Allora, poiché $f_n \to f$ in misura,

$$\begin{aligned} &m(\{x \in \mathbb{R} :\ |f(x)| > t\}) \leq \\ &\quad \leq m\left(\left\{x \in \mathbb{R} :\ |f_n(x)| > \frac{t}{2}\right\}\right) + m\left(\left\{x \in \mathbb{R} :\ |f(x) - f_n(x)| > \frac{t}{2}\right\}\right) \leq \frac{2K}{t} + \mathrm{o}(1), \end{aligned}$$

ove $K = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t>0}\{t \cdot m(\{x \in \mathbb{R} :\ |f_n(x)| > t\})\}$. Dunque, comunque si fissi $t > 0$, si può scegliere $n_t \in \mathbb{N}$ tale che, per $n \geq n_t$,

$$m(\{x \in \mathbb{R} :\ |f(x)| > t\}) \leq \frac{2K + 1}{t}\,,$$

da cui $f \in L^1_w(\mathbb{R})$.

Esercizi del paragrafo 4.7

Esercizio 4.7.1 Poiché $C_c(\mathbb{R})$ è denso in $L^1(\mathbb{R})$ (proposizione 4.7.5), basta provare che le funzioni costanti a tratti, nulle al di fuori di un insieme di misura finita, sono dense in $C_c(\mathbb{R})$ nella norma di $L^1(\mathbb{R})$. Sia dunque g una funzione continua, nulla fuori di un intervallo $[a, b]$. Allora esiste una successione di funzioni costanti a tratti, $\{\varphi_n\}$, nulle fuori di $[a, b]$, tale che $\varphi_n \to g$ uniformemente, essendo g limitata; in particolare, quindi, $\|\varphi_n - g\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0$ per $n \to \infty$.

Esercizio 4.7.2 (i) Per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ si ha $f_h \in L^1(\mathbb{R})$ e

$$\|f_h\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |f(x + h)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\,.$$

(ii) Supponiamo dapprima $f \in C_c(\mathbb{R})$: esiste $M > 0$ tale che $f(x) = 0$ per $|x| > M$. Per uniforme continuità, dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ per il quale si ha $|f_h(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M+1}$ per $|h| < \delta$. Ne segue, per $|h| < \delta \wedge \frac{1}{2}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f_h(x) - f(x)|\, dx = \int_{-M-\frac{1}{2}}^{M+\frac{1}{2}} |f_h(x) - f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2M + 1}\,(2M + 1) = \varepsilon.$$

La tesi è provata per $f \in C_c(\mathbb{R})$. Dato che $C_c(\mathbb{R})$ è denso in $L^1(\mathbb{R})$, fissata $f \in L^1(\mathbb{R})$ e scelta $g \in C_c(\mathbb{R})$ tale che $\|g - f\|_{L^1(\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon}{3}$, per quanto provato sopra esiste $\delta > 0$ per il quale $\|g_h - g\|_{L^1(\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon}{3}$ per $|h| < \delta$; quindi, essendo $\|g_h - f_h\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|g - f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, ricaviamo per $|h| < \delta$

$$\|f_h - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f_h - g_h\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|g_h - g\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|g - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 3\,\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

che è la tesi.

Esercizio 4.7.3 Possiamo supporre $m(A) < \infty$ e $m(B) < \infty$. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, verifichiamo che la funzione $f(x) = m((x - A) \cap B)$ è continua in x_0: si ha infatti per $x \to x_0$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |m((x-A)\cap B) - m((x_0 - A)\cap B)| = m\left|\int_{\mathbb{R}} [\chi_A(x-t) - \chi_A(x_0 - t)]\,\chi_B(t)\,dt\right| = \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}} [\chi_A(s + x - x_0) - \chi_A(s)]\,\chi_{x_0 - B}(s)\,ds\right| \le \|\chi_A(\cdot + x - x_0) - \chi_A(\cdot)\|_1\,, \end{aligned}$$

e l'ultimo membro tende a 0 in virtù della continuità delle traslazioni in L^1.
Adesso proviamo che esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) > 0$. Poiché $-A$ e B hanno misura positiva, esistono $w \in -A$ e $z \in B$ tali che le densità di $-A$ in w e di B in z valgono 1 (si veda l'esercizio 1.4.3 per la definizione): dunque

$$1 = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}\, m((-A)\cap [w-h, w+h]) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}\, m(B \cap [z-h, z+h]),$$

e per traslazione

$$1 = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}\, m((z - w - A)\cap [z-h, z+h]).$$

Ciò detto, se fosse $f(z-w) = m((z-w-A)\cap B) = 0$, potremmo scrivere, fissato $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ e scelto $|h| < h_\varepsilon$ opportuno,

$$2h = m([z-h, z+h]) \ge m((z-w-A)\cap [z-h, z+h]) + m(B\cap [z-h, z+h]) \ge 4h(1-\varepsilon),$$

da cui $1 \ge 2(1-\varepsilon) > 1$, che è impossibile. Dunque $m((z-w-A)\cap B) > 0$ e pertanto, detto $x = z - w$, si ha $f(x) > 0$.
Per continuità, esiste $\delta > 0$ tale che $m((y-A)\cap B) > 0$ per ogni $y \in [x-\delta, x+\delta]$; fissato un tale y, scelto $z \in (y-A)\cap B$ si ha $z \in B$ mentre il punto $w = z - y$ appartiene a $-A$. Ne segue $y = -w + z \in A + B$. Si conclude perciò che $[x - \delta, x + \delta] \subseteq A + B$.

Esercizio 4.7.4 Sia E_n ciò che resta dopo il passo n-simo della costruzione di C_3, cioè dopo aver buttato via i 2^n intervalli di ampiezza 3^{-n-1}. Consideriamo l'insieme $(-C_3) \times C_3$: fissiamo $c \in [0, 2]$ e sia $r_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = x + c\}$. È facile rendersi conto che la retta r_c interseca almeno uno dei 4^n quadrati $Q_{n\,i}$, di area 9^{-n-1}, che compongono $(-E_n) \times E_n$. Similmente, tale retta interseca anche almeno uno dei sottoquadrati $Q_{n+1\,j} \subset Q_{n\,i}$ rimasti dopo il passo $(n+1)$-simo. Quindi esiste una successione di quadrati $\{Q_n\}$, di area 9^{-n-1}, con $Q_{n+1} \subset Q_n$, tali che $r_c \cap Q_n \ne \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. L'intersezione dei Q_n è costituita da un singolo punto $z_0 = (x_0, y_0)$, il quale dunque deve appartenere a r_c. Ne segue $c = y_0 - x_0 \in C_3 + C_3$. Ciò prova che $[0, 2] \subseteq C_3 + C_3$; l'altra inclusione è ovvia.

Esercizio 4.7.5 (i) Per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ si ha $F_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ e

$$\|F_\lambda\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda x)|\,dx = \frac{1}{|\lambda|}\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt = \frac{1}{|\lambda|}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\,.$$

(ii) Sia $f \in C_c(\mathbb{R})$ tale che $f(x) = 0$ per $|x| > M$. Risulta, per uniforme continuità di f, $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ per $|y - x| < \delta$: ne segue

$$F_\lambda(x) \to f(x) \ \text{ uniformemente in } \mathbb{R} \ \text{ per } \lambda \to 1.$$

Infatti, osserviamo che, se $|\lambda - 1| < 1$, sia F_λ che f sono nulle per $|x| > 2M$. Inoltre, è lecito supporre $\delta < 2M$: ne segue che, quando $|\lambda - 1| < \frac{\delta}{2M}$, si ha per $|x| \le 2M$

$$|\lambda x - x| = |\lambda - 1||x| < \frac{\delta}{2M}\,2M = \delta,$$

da cui $|F_\lambda(x) - f(x)| < \varepsilon$ per $|x| \le 2M$ e dunque per $x \in \mathbb{R}$. Se ne deduce, per $|\lambda - 1| < \frac{\delta}{2M}$,

$$\|F_\lambda - f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-2M}^{2M} |f(\lambda x) - f(x)|\,dx < 4M\varepsilon.$$

Ciò prova che $\|F_\lambda - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0$ per $\lambda \to 1$.

Esercizio 4.7.6 Poiché

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24n^2} < \frac{1-\cos\frac{x}{n}}{\frac{x^2}{n^2}} < \frac{1}{2}\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} x^\alpha\, n^2 \left(1-\cos\frac{x}{n}\right) dx = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} x^{\alpha+2}\, dx,$$

ed il limite è finito se e solo se $\alpha + 2 > -1$, ossia $\alpha > 3$. Inoltre, per convergenza dominata, il limite è in tal caso

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x^{\alpha+2}\, dx = \frac{(2\pi)^{\alpha+3}}{2(\alpha+3)}\,.$$

Esercizio 4.7.7 Poiché $f \in L^1(\mathbb{R})$, per assoluta continuità, dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $\int_{-\delta}^{\delta} |f(t)|dt < \varepsilon$. Inoltre, essendo $g \in C_0(\mathbb{R})$, esiste $n_\delta \in \mathbb{N}^+$ tale che $|g(nt)| < \varepsilon$ se $|t| > \delta$ e $n \geq n_\delta$. Quindi, se $n \geq n_\delta$

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} g(x) f\left(\frac{x}{n}\right)\, dm\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} g(nt) f(t)\, dt\right| \leq \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta} \|g\|_\infty |f(t)|\, dt + \int_{|t|\geq\delta} |g(nt)f(t)|\, dt < \varepsilon\|g\|_\infty + \varepsilon\|f\|_{L^1}\,,\end{aligned}$$

da cui la tesi.

Esercizio 4.7.8 Supponiamo dapprima $f \in C_c^1(\mathbb{R})$, con $f(x) = 0$ per $|x| > M$. Allora

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos tx\, dx = \int_{-M}^{M} f(x)\cos tx\, dx = -\frac{1}{t}\int_{-M}^{M} f'(x)\sin tx\, dx,$$

da cui

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos tx\, dx\right| \leq \frac{1}{t}\int_{-M}^{M} |f'(x)\sin tx|\, dx \leq \frac{2M\|f'\|_\infty}{t},$$

e dunque l'integrale a primo membro tende a 0 per $t \to \infty$.
Sia ora $f \in L^1(\mathbb{R})$. Per la proposizione 4.7.6, dato $\varepsilon > 0$ esiste $g \in C_c^1(\mathbb{R})$ tale che $\|f - g\|_{L^1(\mathbb{R})} < \varepsilon$. Quindi

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos tx\, dx - \int_{\mathbb{R}} g(x)\cos tx\, dx\right| \leq \|f-g\|_{L^1(\mathbb{R})} < \varepsilon,$$

da cui

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos tx\, dx\right| \leq \varepsilon + \frac{2M\|g'\|_\infty}{t}\,.$$

Pertanto

$$\limsup_{t\to\infty} \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos tx\, dx\right| \leq \varepsilon,$$

e per l'arbitrarietà di ε si ha la tesi.
La dimostrazione per l'integrale $\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin tx\, dx$ è del tutto analoga.

Esercizio 4.7.9 Cerchiamo una primitiva di $\frac{1}{2-\sin nx}$. Anzitutto si ha, posto $t = nx$,

$$\int \frac{dx}{2-\sin nx} = \frac{1}{n}\int \frac{dt}{2-\sin t}.$$

Inoltre, posto $u = \tan\frac{t}{2}$,

$$\int \frac{dt}{2-\sin t} = \int \frac{dt}{2-2\frac{\tan\frac{t}{2}}{1+\tan^2\frac{t}{2}}} = \int \frac{2\,du}{(1+u^2)\left(2-\frac{2u}{1+u^2}\right)} = \int \frac{du}{u^2-u+1}\,.$$

Essendo $u^2+u+1=\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, si ricava

$$\int\frac{dt}{2-\sin t}=\int\frac{du}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\int\frac{du}{1+\left(\frac{u-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2},$$

e dunque, posto $v=\frac{u-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, si trova la primitiva cercata, a parte il fattore $\frac{1}{n}$:

$$\int\frac{dt}{2-\sin t}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{4}{3}\int\frac{dv}{1+v^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{u-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{t}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Calcoliamo adesso l'integrale su $[-\pi,\pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{2-\sin t}=\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{t}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{2}{\sqrt{3}}[\arctan(+\infty)-\arctan(-\infty)]=\frac{2\pi}{\sqrt{3}},$$

da cui

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2-\sin nx}=\frac{1}{n}\int_{-n\pi}^{n\pi}\frac{dt}{2-\sin t}=\frac{n}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{2-\sin t}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\quad\forall n\in\mathbb{N}^+.$$

Adesso calcoliamo l'integrale su $[a,b]$. Siano $k\in\mathbb{Z}$ e $p\in\mathbb{N}$ tali che $2(k-1)\pi<na\le 2k\pi<2(k+p)\pi\le nb<2(k+p+1)\pi$. Allora, usando la 2π-periodicità dell'integrando,

$$\int_a^b\frac{dx}{2-\sin nx}=\frac{1}{n}\int_{na}^{nb}\frac{dt}{2-\sin t}=\frac{1}{n}\left[\int_{na}^{2k\pi}\frac{dt}{2-\sin t}+p\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{2-\sin t}+\int_{2(k+p)\pi}^{nb}\frac{dt}{2-\sin t}\right];$$

il secondo termine all'ultimo membro vale $\frac{p}{n}\,\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, mentre il primo ed il terzo si maggiorano con

$$\frac{1}{n}\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}\frac{dt}{2-\sin t}++\frac{1}{n}\int_{2(k+p)\pi}^{2(k+p+1)\pi}\frac{dt}{2-\sin t}$$

e quindi la loro somma è non superiore a $\frac{4\pi}{n\sqrt{3}}$. Poi, essendo $p=\left[\frac{n(b-a)}{2\pi}\right]$, si ha $\left|\frac{p}{n}-\frac{b-a}{2\pi}\right|\le\frac{1}{n}$. Dunque si ricava facilmente

$$\left|\int_a^b\frac{dx}{2-\sin nx}-\frac{b-a}{\sqrt{3}}\right|\le\left|\int_a^b\frac{dx}{2-\sin nx}-\frac{p}{n}\,\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right|+\left|\frac{p}{n}\,\frac{2\pi}{\sqrt{3}}-\frac{b-a}{\sqrt{3}}\right|\le\frac{6\pi}{n\sqrt{3}};$$

si noti che questa stima è indipendente dall'ampiezza $b-a$ dell'intervallo di integrazione.
Sia ora $E\in\mathcal{M}$, $E\subseteq[-\pi,\pi]$. Scriviamo

$$\int_E\frac{dx}{2-\sin nx}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\chi_E(x)\,dx}{2-\sin nx},$$

ed osserviamo che, per l'esercizio 4.7.1, esiste una successione di funzioni costanti a tratti

$$\varphi_k=\sum_{i=1}^{p_k}\alpha_{ik}\chi_{[a_{ik},b_{ik}]}$$

che converge puntualmente e in $L^1(-\pi,\pi)$ alla χ_E. Allora

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\chi_E(x)\,dx}{2-\sin nx}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{[\chi_E(x)-\varphi_k(x)]\,dx}{2-\sin nx}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi_k(x)\,dx}{2-\sin nx};$$

per il secondo integrale si ha, per quanto già provato,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi_k(x)\,dx}{2-\sin nx} = \sum_{i=1}^{p_k} \alpha_{ik} \frac{b_{ik}-a_{ik}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi_k - \chi_E]\,dx + \frac{m(E)}{\sqrt{3}}\,.$$

Perciò

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\chi_E(x)\,dx}{2-\sin nx} - \frac{m(E)}{\sqrt{3}} \right| &\le \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\chi_E(x)-\varphi_k(x)|\,dx}{2-\sin nx} + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_k - \chi_E|\,dx \le \\ &\le \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_k - \chi_E|\,dx \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Per $k \to \infty$ si ottiene la tesi.

Esercizio 4.7.10 (i) Se $\int_X |f|\,d\mu < \infty$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\int_X |f|\,d\mu_n \le \int_X |f|\,d\mu < \infty,$$

Quindi $L^1(X,\mu) \subseteq L^1(X,\mu_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, la successione degli integrali di $|f|$ rispetto a μ_n è crescente: quindi essa ha limite, e dalla disuguaglianza sopra scritta segue

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f|\,d\mu_n \le \int_X |f|\,d\mu.$$

D'altra parte, per ogni funzione semplice $\varphi = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \chi_{E_i}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi\,d\mu_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\,\mu_n(E_i) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\,\mu(E_i) = \int_X \varphi\,d\mu.$$

Dunque, data $f \in L^1(X,\mu)$ e scelta $\varphi \in \mathcal{S}$ tale che $\int_X \big||f|-\varphi\big|\,d\mu < \varepsilon$, si ha

$$\int_X |f|\,d\mu = \int_X [|f|-\varphi]\,d\mu + \left[\int_X \varphi\,d\mu - \int_X \varphi\,d\mu_n\right] + \int_X [\varphi - |f|]d\mu_n + \int_X |f|\,d\mu_n\,,$$

da cui

$$\int_X |f|\,d\mu \le 2\varepsilon + \lim_{n\to\infty} \left[\int_X \varphi\,d\mu - \int_X \varphi\,d\mu_n\right] + \lim_{n\to\infty} \int_X |f|\,d\mu_n = 2\varepsilon + \lim_{n\to\infty} \int_X |f|\,d\mu_n\,.$$

Ne segue la tesi.

(ii) Scegliendo $\mu = m$ su $[0,1]$, $\mu_n(E) = m(E \cap [\frac{1}{n},1])$, $f(x) = \frac{1}{x}$, si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,d\mu_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x}\,dx = \log n < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}^+, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \infty.$$

Esercizio 4.7.11 (i) Si ha

$$P_n(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 0^k 1^{n-k} f(0) = 1 \cdot f(0) = f(0),$$

poiché nella somma rimane soltanto l'addendo $k = 0$. Similmente

$$P_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 0^{n-k} f(1) = 1 \cdot f(1) = f(1)$$

(resta solo l'addendo $k = n$).

(ii) Risulta, essendo $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}=1$,

$$P_n(t)-f(t)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(t)\right].$$

(iii) Poiché

$$k\binom{n}{k}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}=n\,\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=n\binom{n-1}{k-1},$$

si ha

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}=nt\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}t^{k-1}(1-t)^{n-k}=nt\sum_{h=0}^{n-1}\binom{n-1}{h}t^h(1-t)^{n-h-1}=nt.$$

Similmente, essendo

$$k(k-1)\binom{n}{k}=n(k-1)\binom{n-1}{k-1}=n(n-1)\binom{n-2}{k-2},$$

si trova

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} &= n(n-1)t^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}t^{k-2}(1-t)^{n-k}=\\ &= n(n-1)t^2\sum_{h=0}^{n-2}\binom{n-2}{h}t^h(1-t)^{n-h-2}=n(n-1)t^2.\end{aligned}$$

Infine, per somma, visto che $k^2=k(k-1)+k$, si ricava

$$\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}=n(n-1)t^2+nt.$$

(iv) Siano $\delta>0$ e $t\in[0,1]$: poiché risulta $\left|\frac{k}{n}-t\right|\geq\delta$ per $k\in A_t$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k\in A_t}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(t)\right]\right| &\leq 2\|f\|_\infty\sum_{k\in A_t}\frac{\left|\frac{k}{n}-t\right|^2}{\delta^2}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}=\\ &=\frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2n^2}\sum_{k\in A_t}(k^2-2knt+n^2t^2)\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\leq\frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2n^2}[n(n-1)t^2+nt-2n^2t^2+n^2t^2]=\\ &=\frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2n^2}nt(1-t)\leq\frac{\|f\|_\infty}{\delta^2n}\,.\end{aligned}$$

D'altra parte, fissato $\varepsilon>0$ e scelto $\delta>0$ tale che $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ quando $|x-y|<\delta$, essendo $\left|\frac{k}{n}-t\right|<\delta$ per $k\in B_t$, si ha

$$\left|\sum_{k\in B_t}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(t)\right]\right|\leq\varepsilon\sum_{k\in B_t}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\leq\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}=\varepsilon.$$

Pertanto, se $n\in\mathbb{N}^+$ è sufficientemente grande,

$$|P_n(t)-f(t)|<2\varepsilon\qquad\forall t\in[0,1].$$

(v) Dato che ogni polinomio appartiene a $C^\infty[0,1]$, ogni $f\in C[0,1]$ è approssimabile in norma uniforme con funzioni di $C^\infty[0,1]$. D'altra parte, se $f\in C[a,b]$, la funzione $g(t)=f(a+t(b-a))$ appartiene a $C[0,1]$ e quindi i suoi polinomi di Bernstein $P_n(t)$ convergono a $g(t)$ uniformemente in $[0,1]$; quindi i

polinomi $Q_n(x) = P_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ convergono a $f(x)$ uniformemente in $[a,b]$.

Esercizio 4.7.12 Osserviamo che $Q_n \in C^\infty[a,b]$, mentre $\eta \in C_0^\infty(\,]a,b[\,)$: infatti η si raccorda ai valori 0 e 1 mediante la funzione ψ, che ha tutte le sue derivate nulle nei punti di raccordo. Pertanto $\eta Q_n \in C_c^\infty(\,]a,b[\,)$. Risulta poi

$$|\eta(t)Q_n(t) - f(t)| \leq \begin{cases} 0 & \text{su } [a,a+\delta] \cup [b-\delta,b] \\ |Q_n(t) - f(t)| & \text{su } [a+\delta, b-\delta], \end{cases}$$

cosicché $\eta\, Q_n \to f$ uniformemente in $[a,b]$.

Capitolo 5

Misure prodotto

05

5.1 Rettangoli misurabili

rettmis

Abbiamo già introdotto (paragrafo 2.2) la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$, ma non siamo ancora in grado, come vorremmo, di ricondurre il calcolo degli integrali multipli a N integrazioni semplici successive, né di stabilire quando sia lecito scambiare l'ordine di integrazione. Tutto ciò è reso possibile, come si vedrà, dalla costruzione delle misure negli spazi prodotto.
Siano dunque $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ due spazi misurati. Nel prodotto cartesiano $X \times Y$ introduciamo la classe $\mathcal{R}$ dei *rettangoli misurabili*:

$$\mathcal{R} = \{E \subseteq X \times Y : \ E = A \times B, \ A \in \mathcal{F}, \ B \in \mathcal{G}\}.$$

La classe $\mathcal{R}$ non è né una σ-algebra né un'algebra, perché non è chiusa rispetto all'unione e nemmeno rispetto al passaggio al complementare; essa è soltanto chiusa rispetto all'intersezione, dato che

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Inoltre $\mathcal{R}$ è una classe troppo ristretta di sottoinsiemi di $X \times Y$: nel caso $X = Y = \mathbb{R}$, ad esempio, vorremmo poter annoverare tra gli insiemi misurabili di $\mathbb{R}^2$ i triangoli, i cerchi, e tanti altri insiemi che non sono elementi di $\mathcal{R}$.
D'altra parte, su $\mathcal{R}$ possiamo definire una misura prodotto in modo naturale: se $E = A \times B \in \mathcal{R}$, poniamo (con la solita convenzione $0 \cdot \infty = 0$)

$$\lambda(E) = \lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Indichiamo con $\mathcal{A}$ l'algebra generata da $\mathcal{R}$, cioè la più piccola algebra contenente i rettangoli misurabili: è facile, anche se noioso, verificare che $\mathcal{A}$ è costituita da tutte le unioni finite di elementi di $\mathcal{R}$; altrettanto noioso, ma sempre facile, è provare che $\mathcal{A}$ è costituita da tutte le unioni finite di elementi *disgiunti* di $\mathcal{R}$ (esercizi 5.1.1, 5.1.2 e 5.1.3).
Ci sarà utile la seguente nozione:

clmonot **Definizione 5.1.1** *Una famiglia $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di un insieme qualunque Z è detta* classe monotona *se:*

(i) *per ogni* $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ *tale che* $P_n \subseteq P_{n+1}$ *si ha* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n \in \mathcal{M}$*;*

(ii) *per ogni* $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ *tale che* $P_n \supseteq P_{n+1}$ *si ha* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n \in \mathcal{M}$*.*

Osserviamo che ogni σ-algebra è una classe monotona ma che il viceversa è falso (esercizi 5.1.6 e 5.1.7). Inoltre l'intersezione di una famiglia arbitraria di classi monotone è ancora una classe monotona.
Introduciamo adesso la σ-algebra di sottoinsiemi di $X \times Y$ su cui costruiremo la misura prodotto, ponendo

$$\mathcal{F} \times \mathcal{G} = \text{ la minima } \sigma\text{-algebra contenente } \mathcal{R}.$$

Ovviamente, $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ è anche la minima σ-algebra contenente $\mathcal{A}$.
Vedremo in seguito che la funzione λ si può estendere alla σ-algebra $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$, e che tale estensione è una misura, che verrà denominata *misura prodotto* di μ e ν ed indicata col simbolo $\mu \times \nu$.

Esercizi 5.1

ufidi1 1. Si provi che se $E = A \times B \in \mathcal{R}$, allora E^c è unione finita di elementi disgiunti di $\mathcal{R}$.

ufidi2 2. Si provi che se $R_1, \ldots, R_m \in \mathcal{R}$, allora $\bigcup_{i=1}^m R_i$ è unione finita di elementi disgiunti di $\mathcal{R}$.

mialR 3. Sia $\mathcal{A}$ la più piccola algebra contenente la classe $\mathcal{R}$. Si provi che

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left\{ \bigcup_{i=1}^m R_i : R_1, \ldots, R_m \in \mathcal{R},\ m \in \mathbb{N}^+ \right\} = \\ &= \left\{ \bigcup_{i=1}^m R_i : R_1, \ldots, R_m \in \mathcal{R} \text{ disgiunti},\ m \in \mathbb{N}^+ \right\}. \end{aligned}$$

lambdana 4. Sia $\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ per ogni $A \times B \in \mathcal{R}$; si provi che se $R \in \mathcal{R}$ è l'unione finita o numerabile di elementi disgiunti $R_i \in \mathcal{R}$, allora

$$\lambda(R) = \sum_i \lambda(R_i).$$

estensi 5. Si estenda all'algebra $\mathcal{A}$, definita nell'esercizio 5.1.3, la funzione λ definita nell'esercizio 5.1.4, ponendo

$$\lambda(A) = \sum_{i=1}^m \lambda(R_i) \qquad \text{se } A = \bigcup_{i=1}^m R_i, \quad R_i \in \mathcal{R} \text{ disgiunti.}$$

Si verifichi che questa è una buona definizione, ossia non dipende dal modo in cui si decompone A in rettangoli disgiunti; si provi poi che se $A \in \mathcal{A}$ è l'unione finita o numerabile di elementi disgiunti $A_i \in \mathcal{A}$, allora

$$\lambda(A) = \sum_i \lambda(A_i).$$

nomosigma

6. Provare che la famiglia di tutti gli intervalli di $\mathbb{R}$ (compreso l'insieme vuoto ed i singoli punti $\{x\}$) è una classe monotona che non è una σ-algebra.

omocosigma

7. Trovare una classe monotona di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che sia chiusa rispetto al passaggio al complementare ma non sia una σ-algebra.

5.2 Insiemi misurabili in $X \times Y$

insmis

Analizziamo adesso le proprietà della σ-algebra $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ (cioè della minima σ-algebra che contiene la classe $\mathcal{R}$ dei rettangoli misurabili) e dei suoi elementi. Cominciamo con un'utile caratterizzazione di $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$:

minclmonot

Proposizione 5.2.1 *Siano $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ spazi misurati. Allora la σ-algebra $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ è la minima classe monotona che contiene l'algebra $\mathcal{A}$ generata dalla famiglia $\mathcal{R}$ dei rettangoli misurabili di $X \times Y$.*

Dimostrazione Indichiamo con $\mathcal{M}$ la minima classe monotona contenente $\mathcal{A}$; poiché ogni σ-algebra è una classe monotona, è chiaro che $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Per provare l'uguaglianza, basterà mostrare che anche $\mathcal{M}$ è una σ-algebra, essendo $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ la *minima* σ-algebra contenente $\mathcal{A}$.
Cominciamo col dimostrare il seguente

Lemma 5.2.2 *Se $P, Q \in \mathcal{M}$, allora $P \setminus Q, P \cup Q \in \mathcal{M}$.*

Dimostrazione Per ogni $P \subseteq X \times Y$ sia

$$\Omega(P) = \{Q \subseteq X \times Y : \ Q \setminus P, \ P \setminus Q, \ P \cup Q \in \mathcal{M}\}.$$

Allora si verificano facilmente i seguenti fatti:

(a) $Q \in \Omega(P)$ se e solo se $P \in \Omega(Q)$ (a causa della simmetria nella definizione di $\Omega(P)$);

(b) $\Omega(P)$ è una classe monotona per ogni $P \subseteq X \times Y$ (perché tale è $\mathcal{M}$);

(c) $\mathcal{A} \subseteq \Omega(P)$ per ogni $P \in \mathcal{A}$ (infatti, se $P \in \mathcal{A}$ e $Q \in \mathcal{A}$, allora, essendo $\mathcal{A}$ un'algebra, si ha $P \setminus Q, Q \setminus P, P \cup Q \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$: dunque se $P \in \mathcal{A}$ risulta $Q \in \Omega(P)$ per ogni $Q \in \mathcal{A}$, ossia $\mathcal{A} \subseteq \Omega(P)$);

(d) $\mathcal{M} \subseteq \Omega(P)$ per ogni $P \in \mathcal{A}$ (per (b), (c) e per la mimimalità di $\mathcal{M}$);

(e) $\mathcal{M} \subseteq \Omega(Q)$ per ogni $Q \in \mathcal{M}$ (infatti se $Q \in \mathcal{M}$ si ha, per (d), $Q \in \Omega(P)$ per ogni $P \in \mathcal{A}$, ossia, per (a), $P \in \Omega(Q)$ per ogni $P \in \mathcal{A}$, il che significa $\mathcal{A} \subseteq \Omega(Q)$: dunque, per (b) e per definizione di $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \subseteq \Omega(Q)$).

L'enunciato (e) fornisce allora la dimostrazione del lemma. □

È facile adesso provare che $\mathcal{M}$ è una σ-algebra. Anzitutto, $X \times Y \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$; poi, per il lemma precedente, se $Q \in \mathcal{M}$ si ha $Q^c = (X \times Y) \setminus Q \in \mathcal{M}$. Infine, sia $\{P_n\}$ una

successione di elementi di $\mathcal{M}$: posto, per ogni N, $Q_N = \bigcup_{n=0}^{N} P_n$, si ha $Q_N \in \mathcal{M}$ (per il lemma precedente) e $Q_N \subseteq Q_{N+1}$, da cui, per la monotonia della classe $\mathcal{M}$,

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} P_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} Q_n \in \mathcal{M}.$$

Ciò conclude la dimostrazione della proposizione 5.2.1. □

Passiamo ora ad esaminare gli elementi di $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Se $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$, definiamo gli insiemi "proiezione" di E su X e su Y:

Definizione 5.2.3 *Sia $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Le* proiezioni *di E su Y sono gli insiemi*

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}, \qquad x \in X;$$

le proiezioni *di E su X sono gli insiemi*

$$E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}, \qquad y \in Y.$$

È immediato constatare che gli insiemi E_x verificano per ogni $x \in X$

$$(E^c)_x = (E_x)^c, \quad \left(\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha\right)_x = \bigcup_{\alpha\in A} (E_\alpha)_x\,, \quad \left(\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha\right)_x = \bigcap_{\alpha\in A} (E_\alpha)_x\,,$$

ed analoghe relazioni valgono per gli insiemi E^y, per ogni $y \in Y$.

proimis **Proposizione 5.2.4** *Se $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$, allora $E_x \in \mathcal{G}$ per ogni $x \in X$ ed $E^y \in \mathcal{F}$ per ogni $y \in Y$.*

Dimostrazione Poniamo

$$\mathcal{U} = \{E \subseteq X \times Y : E_x \in \mathcal{G} \ \ \forall x \in X\}, \quad \mathcal{V} = \{E \subseteq X \times Y : E^y \in \mathcal{F} \ \ \forall y \in Y\}.$$

Grazie alle proprietà degli insiemi E_x, E^y sopra scritte, si verifica subito che $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ sono σ-algebre; d'altra parte entrambe contengono $\mathcal{R}$, in quanto se $Q = A \times B \in \mathcal{R}$, allora

$$Q_x = \begin{cases} B & \text{se } x \in A \\ \emptyset & \text{se } x \in X \setminus A, \end{cases} \qquad Q^y = \begin{cases} A & \text{se } y \in B \\ \emptyset & \text{se } y \in Y \setminus B, \end{cases}$$

e pertanto $Q_x \in \mathcal{G}$ per ogni $x \in X$ e $Q^y \in \mathcal{F}$ per ogni $y \in Y$, ossia $Q \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.
Ne segue $\mathcal{U}, \mathcal{V} \supseteq \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ per definizione di $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$, cioè la tesi. □

La proposizione precedente garantisce la misurabilità delle proiezioni su X e su Y di qualunque insieme $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ (si noti che il viceversa è falso, come mostra l'esercizio 5.2.3); dunque possiamo calcolare $\nu(E_x)$ per ogni $x \in X$ e $\mu(E^y)$ per ogni $y \in Y$. Con il fondamentale teorema che segue si mostra che, sotto ragionevoli ipotesi sugli spazi misurati, le quantità $\nu(E_x)$ e $\mu(E^y)$ sono funzioni misurabili della variabile da cui dipendono, e per di più hanno integrali uguali; ciò ci consentirà di definire la misura prodotto $\mu \times \nu$ sugli elementi di $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$.

calcolomxn **Teorema 5.2.5** *Siano $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ spazi misurati σ-finiti, e sia $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Allora:*

(i) *la funzione $\Gamma_E : X \to [0, \infty]$, data da $\Gamma_E(x) = \nu(E_x)$ per ogni $x \in X$, è $\mathcal{F}$-misurabile;*

(ii) *la funzione $\Gamma^E : Y \to [0, \infty]$, data da $\Gamma^E(y) = \mu(E^y)$ per ogni $y \in Y$, è $\mathcal{G}$-misurabile;*

(iii) *vale la relazione*

$$\int_X \Gamma_E \, d\mu = \int_Y \Gamma^E \, d\nu.$$

Si noti che la tesi di questo teorema ci dice che

$$\int_X \left[\int_Y \chi_E(x, y) d\nu \right] d\mu = \int_X \Gamma_E(x) \, d\mu = \int_Y \Gamma^E(y) \, d\nu = \int_Y \left[\int_X \chi_E(x, y) d\mu \right] d\nu,$$

quindi abbiamo potuto scambiare l'ordine di integrazione. Questo ci permette anche, come vedremo fra poco, di *definire* la misura $\mu \times \nu(E)$ come il valore comune di tali integrali.

Dimostrazione Anzitutto, se $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ allora, come si è già osservato, le proiezioni E_x, E^y appartengono rispettivamente a $\mathcal{G}$ e $\mathcal{F}$, cosicché le funzioni Γ_E, Γ^E sono ben definite.
Sia Ω la famiglia degli elementi $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ che verificano la tesi del teorema: proveremo che Ω è una classe monotona che contiene l'algebra $\mathcal{A}$ generata dalla famiglia $\mathcal{R}$ dei rettangoli misurabili di $X \times Y$; dalla proposizione 5.2.1 seguirà che $\Omega \supseteq \mathcal{F} \times \mathcal{G}$, e quindi la tesi.
Dividiamo la dimostrazione in quattro passi.

(i) $\Omega \supseteq \mathcal{A}$. Infatti, se anzitutto $Q = A \times B \in \mathcal{R}$, allora risulta

$$\Gamma_Q(x) = \nu(B)\chi_A(x), \qquad \Gamma^Q(y) = \mu(A)\chi_B(y),$$

quindi la prima funzione è $\mathcal{F}$-misurabile e la seconda è $\mathcal{G}$-misurabile; inoltre

$$\int_X \Gamma_Q \, d\mu = \mu(A)\nu(B) = \int_Y \Gamma^Q \, d\nu,$$

e dunque $Q \in \Omega$. Sia ora $A \in \mathcal{A}$: per l'esercizio 5.1.3, si ha $A = \bigcup_{i=1}^k R_i$ con gli R_i elementi disgiunti di $\mathcal{R}$. Si verifica allora facilmente che $\Gamma_A = \sum_{i=1}^k \Gamma_{R_i}$ e $\Gamma^A = \sum_{i=1}^k \Gamma^{R_i}$; quindi la $\mathcal{F}$-misurabilità di Γ_A e la $\mathcal{G}$-misurabilità di Γ^A, nonché l'uguaglianza $\int_X \Gamma_A \, d\mu = \int_Y \Gamma^A \, d\nu$, si ottengono per additività. Ciò prova che $A \in \Omega$, ossia $\mathcal{A} \subseteq \Omega$.

(ii) Se $\{Q_n\}$ è una successione di elementi di Ω tale che $Q_n \subseteq Q_{n+1}$, allora $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n \in \Omega$. Infatti, posto $Q = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$ si ha, per la proposizione 2.1.5, $\Gamma_Q(x) = \lim_{n \to \infty} \Gamma_{Q_n}(x)$ e $\Gamma^Q(y) = \lim_{n \to \infty} \Gamma^{Q_n}(y)$, quindi (proposizione 3.1.6) la prima funzione è $\mathcal{F}$-misurabile e la seconda è $\mathcal{G}$-misurabile; l'uguaglianza dei due integrali segue dal teorema di B. Levi.

Ciò prova che $Q \in \Omega$.

(iii) Se $\{Q_n\}$ è una successione di elementi disgiunti di Ω, allora $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n \in \Omega$. Infatti, posto $Q = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n$ si ha, per numerabile additività, $\Gamma_Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_{Q_n}$ e $\Gamma^Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Gamma^{Q_n}$, da cui, analogamente a (ii), si ottiene $Q \in \Omega$.

(iv) Se $\{Q_n\}$ è una successione di elementi di Ω tale che $Q_n \supseteq Q_{n+1}$, allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_n \in \Omega$. Per provare ciò, posto $Q = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_n$, distinguiamo due casi.

(a) Se $\mu(X) < \infty$ e $\nu(Y) < \infty$, allora $\nu((Q_0)_x) \le \nu(Y) < \infty$ e $\mu((Q_0)^y) \le \mu(X) < \infty$. Nuovamente per la proposizione 2.1.5, si ha $\Gamma_Q(x) \to \Gamma_{Q_n}(x)$ e $\Gamma^Q(y) \to \Gamma^{Q_n}(y)$ per $n \to \infty$; quindi la prima funzione è $\mathcal{F}$-misurabile e la seconda è $\mathcal{G}$-misurabile. Inoltre, l'uguaglianza degli integrali si ottiene in virtù del teorema di Lebesgue, il quale è applicabile perché

$$\Gamma_{Q_n}(x) \le \Gamma_{Q_0}(x) \quad \forall x \in X, \qquad \Gamma^{Q_n}(y) \le \Gamma^{Q_0}(y) \quad \forall y \in Y,$$

$$\left.\begin{array}{l} \int_X \Gamma_{Q_0}\, d\mu \le \int_X \Gamma_{X\times Y}\, d\mu \\ \int_Y \Gamma^{Q_0}\, d\nu \le \int_Y \Gamma^{X\times Y}\, d\nu \end{array}\right\} = \mu(X)\nu(Y) < \infty.$$

Dunque in questo caso si ha $Q \in \Omega$.

(b) Se invece $\mu(X) = \infty$ oppure $\nu(Y) = \infty$, utilizziamo il fatto che, essendo i due spazi misurati σ-finiti, esistono due successioni di insiemi disgiunti $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, $\{Y_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$, tali che $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} X_k$, $Y = \bigcup_{m=0}^{\infty} Y_m$, $\mu(X_k) < \infty$ per ogni k e $\nu(Y_m) < \infty$ per ogni m. Pertanto $X \times Y = \bigcup_{k,m\in\mathbb{N}} (X_k \times Y_m)$ e tale unione è disgiunta.
Poniamo $Q_{nkm} = Q_n \cap (X_k \times Y_m)$ e dimostriamo anzitutto che $\{Q_{nkm}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$. Consideriamo la famiglia

$$\Lambda = \{P \in \mathcal{F}\times\mathcal{G} : P \cap (X_k \times Y_m) \in \Omega \quad \forall k, m \in \mathbb{N}\} :$$

essa è una classe monotona contenente $\mathcal{A}$, come segue subito da (i), (ii) e dal caso (a) già provato. Quindi, per la minimalità di $\mathcal{F}\times\mathcal{G}$, si ha $\Lambda = \mathcal{F}\times\mathcal{G}$ e dunque $\Omega \subseteq \Lambda$: ciò mostra che $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Lambda$ e dunque, come si voleva, $\{Q_{nkm}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$.
Ciò premesso, si deduce che anche $Q = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_n$ appartiene a Λ, ossia $Q \cap (X_k \times Y_m) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_{nkm} \in \Omega$. Da (iii) concludiamo allora che Q, essendo l'unione disgiunta dei $Q \cap (X_k \times Y_m)$, sta anch'esso in Ω.

Da (ii) e (iv) segue che Ω è una classe monotona; per (i), essa contiene $\mathcal{A}$. La tesi è provata. □

misprod **Definizione 5.2.6** *Siano $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ spazi misurati σ-finiti. La* misura prodotto *$\mu\times\nu$ è definita come segue:*

$$\mu\times\nu(E) = \int_X \Gamma_E\, d\mu = \int_Y \Gamma^E\, d\nu \qquad \forall E \in \mathcal{F}\times\mathcal{G},$$

ove le funzioni Γ_E, Γ^E sono definite nel teorema 5.2.5.

Si noti che $\mu \times \nu$ è davvero una misura: risulta $\mu \times \nu(\emptyset) = 0$ (infatti $\Gamma_\emptyset$ e $\Gamma^\emptyset$ sono identicamente nulle), e se $\{E_n\}$ è una successione di elementi disgiunti di $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$, allora posto $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ si ha $\Gamma_E = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_{E_n}$ e $\Gamma^E = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Gamma^{E_n}$, e dunque l'uguaglianza $\mu \times \nu(E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu \times \nu(E_n)$ segue dal teorema di B. Levi. Si osservi inoltre che $\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ per ogni $A \times B \in \mathcal{R}$, come si è visto nel passo (i) della dimostrazione del teorema 5.2.5.

oncompleta **Osservazione 5.2.7** La misura prodotto $\mu \times \nu$ non è in generale completa, neanche se μ e ν lo sono: ad esempio, se $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{G} = \mathcal{M}$ e $\mu = \nu = m$, la misura prodotto $m \times m$ non è completa. Infatti, sia $V \subset [0,1]$ un insieme non misurabile, e sia $B \neq \emptyset$ un insieme misurabile di misura nulla: allora $V \times B \notin \mathcal{M} \times \mathcal{M}$, perché altrimenti, per la proposizione 5.2.4, scelto $y \in B$ la proiezione $(V \times B)^y = V$ sarebbe un elemento di $\mathcal{M}$. D'altra parte, $V \times B \subset [0,1] \times B$, e quest'ultimo insieme è $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$-misurabile con misura nulla. Peraltro, è immediato verificare che $V \times B \in \mathcal{M}_2$, essendo $m_2^*(V \times B) = 0$.

Esercizi 5.2

BNBkh 1. Siano $k, h, N \in \mathbb{N}^+$ con $k + h = N$. Indicando con $\mathcal{B}_N$ la σ-algebra dei Boreliani di $\mathbb{R}^N$, si provi l'uguaglianza

$$\mathcal{B}_N = \mathcal{B}_k \times \mathcal{B}_h.$$

[**Traccia:** $(\subseteq)$ si verifichi che gli aperti di $\mathbb{R}^N$ appartengono a $\mathcal{B}_k \times \mathcal{B}_h$;

$(\supseteq)$ si provi che per ogni aperto $B \subseteq \mathbb{R}^h$ la classe $\mathcal{U}_B = \{A \subseteq \mathbb{R}^k : A \times B \in \mathcal{B}_N\}$ è una σ-algebra che contiene gli aperti di $\mathbb{R}^k$. Poi, analogamente, si provi che per ogni $A \in \mathcal{B}_k$ la classe $\mathcal{V}_A = \{B \subseteq \mathbb{R}^h : A \times B \in \mathcal{B}_N\}$ è una σ-algebra che contiene gli aperti di $\mathbb{R}^h$.]

B2neqM2 2. Dimostrare che la σ-algebra dei Boreliani di $\mathbb{R}^2$ è strettamente contenuta nella σ-algebra $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$.

nomipromi 3. Sia $F \subset [0,1]$ un insieme tale che $F \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{B}$. Si provi che l'insieme $E = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in F\}$ appartiene a $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, che le sue proiezioni E_x e E^y sono elementi di $\mathcal{B}$ per ogni $x, y \in [0,1]$, ma che $E \notin \mathcal{B}_2$.
[**Traccia:** per mostrare che $E \notin \mathcal{B}_2$, si consideri l'applicazione $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix} \qquad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

e si definisca $\mathcal{C} = \{B \subset [0,1]^2 : \ T(B) \in \mathcal{B}_2\}$. Si verifichi che $\mathcal{C}$ è una σ-algebra contenente $\mathcal{B}_2$ e si deduca la tesi.]

contBore 4. Sia $g : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $g(x,\cdot)$ sia continua in $[0,1]$ per ogni $x \in [0,1]$, oppure, in alternativa, che $g(\cdot, y)$ sia continua su $[0,1]$ per ogni $y \in [0,1]$. Si provi che g è una funzione Boreliana, cioè tale che $\{(x,y) : g(x,y) > \alpha\} \in \mathcal{B}_2$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

[**Traccia:** supposta vera la seconda ipotesi, si approssimi la g con le seguenti funzioni g_n: posto $a_i = \frac{i}{n}$, si definisca

$$g_n(x,y) = \frac{a_i - x}{a_i - a_{i-1}} g(a_{i-1}, y) + \frac{x - a_{i-1}}{a_i - a_{i-1}} g(a_i, y) \quad \forall (x,y) \in [a_{i-1}, a_i] \times [0,1].]$$

seznonmis

5. Poniamo $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{F} = \{E \subseteq [0,1] : E \in \mathcal{M}\}$ e $\mathcal{G} = \mathcal{P}([0,1])$; siano poi $\mu = m$ e λ definita da

$$\lambda(E) = \text{cardinalità di } E \cap V \qquad \forall E \in \mathcal{G},$$

ove V è un insieme non misurabile di $[0,1]$. Si verifichi che, scelto $\Delta = \{(x,y) \in [0,1]\times[0,1] : x = y\}$, le funzioni $\Gamma_\Delta, \Gamma^\Delta$ non sono entrambe misurabili. Giustificare il risultato.

est_mis

6. Siano $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ spazi misurati σ-finiti, e sia $\lambda : \mathcal{F} \times \mathcal{G} \to [0, \infty]$ una misura tale che $\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ per ogni rettangolo $A \times B$ con $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{G}$. Si provi che $\lambda = \mu \times \nu$.

omo_mis

7. Consideriamo lo spazio misurato $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M} \times \mathcal{M}, m \times m)$. Fissato $\lambda > 0$, per ogni $E = I \times J \in \mathcal{R}$ poniamo $\mu_\lambda(E) = \lambda\, \ell(I)\, \ell(J)$. Si verifichi che $\mu_\lambda(E) = \mu_\lambda(I \times J) = \ell((I)\, \ell(\lambda\, J)$; si provi poi che per ogni $E \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$, posto $E_\lambda = \{(x,y) : \ (x, \lambda y) \in E\}$, si ha $E_\lambda \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ e $m \times m(E_\lambda) = \mu_\lambda(E) = \lambda\, m \times m(E)$.

5.3 Teoremi di integrazione successiva

FubTon

Il nostro prossimo obiettivo è quello di provare che per una vasta famiglia di funzioni integrabili nello spazio misurato $(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mu \times \nu)$ si ha una formula di integrazione "una variabile per volta, in ordine arbitrario". Il passo più faticoso è già stato fatto: in effetti il teorema 5.2.5 e la definizione 5.2.6 ci dicono che la formula in questione è valida per le funzioni caratteristiche di insiemi $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$-misurabili. Si tratta ora di estendere tale risultato ad una classe più ampia di funzioni.
Anzitutto, per ogni funzione $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ definiamo le *sezioni* f_x, f^y di f nel modo seguente: se x è un fissato elemento di X, la funzione f_x è data da

$$f_x : Y \to \overline{\mathbb{R}}, \quad f_x(y) = f(x,y) \quad \forall y \in Y,$$

e se y è un fissato elemento di Y, la funzione f_y è data da

$$f^y : X \to \overline{\mathbb{R}}, \quad f^y(x) = f(x,y) \quad \forall x \in X.$$

Se f è continua, è chiaro che le sezioni f_x, f^y sono continue. Anche la misurabilità viene preservata; infatti si ha:

Proposizione 5.3.1 *Se $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ è $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$-misurabile, allora per ogni $x \in X$ la funzione f_x è $\mathcal{G}$-misurabile, e per ogni $y \in Y$ la funzione f^y è $\mathcal{F}$-misurabile.*

Dimostrazione Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha, per ipotesi,

$$E_\alpha = \{(x,y) \in X \times Y : f(x,y) > \alpha\} \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}.$$

In virtù della proposizione 5.2.4, si deduce

$$\{y \in Y : f_x(y) > \alpha\} = (E_\alpha)_x \in \mathcal{G}, \qquad \{x \in X : f^y(x) > \alpha\} = (E_\alpha)^y \in \mathcal{F},$$

che è la tesi. □

Veniamo ai teoremi sullo scambio dell'ordine di integrazione. Il primo riguarda funzioni misurabili non negative, anche non sommabili, il secondo riguarda funzioni sommabili, di segno qualunque.

Tonelli **Teorema 5.3.2 (di Tonelli)** *Siano $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ spazi misurati σ-finiti, e sia f una funzione $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$-misurabile e non negativa. Allora:*

(i) *f_x è $\mathcal{G}$-misurabile per ogni $x \in X$ e f^y è $\mathcal{F}$-misurabile per ogni $y \in Y$;*

(ii) *la funzione $x \mapsto \int_Y f_x d\nu$ è $\mathcal{F}$-misurabile e la funzione $y \mapsto \int_X f^y d\mu$ è $\mathcal{G}$-misurabile;*

(iii) *si hanno le uguaglianze*

$$\int_X \left[\int_Y f_x d\nu\right] d\mu = \int_{X\times Y} f \; d\mu \times \nu = \int_Y \left[\int_X f^y d\mu\right] d\nu.$$

Dimostrazione (i) Già dimostrato nella proposizione precedente.

(ii)-(iii) Se $f = \chi_E$, con $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$, allora la tesi è stata già provata nel teorema 5.2.5. Per linearità, lo stesso risultato vale per ogni funzione f semplice rispetto alla σ-algebra $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ e non negativa. Infine se f è una funzione $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$-misurabile non negativa, per la proposizione 3.1.7 esiste una successione crescente $\{\varphi_n\}$ di funzioni semplici non negative che converge puntualmente a f in $X \times Y$. Per il teorema di B. Levi si ha allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} \varphi_n \, d\mu \times \nu = \int_{X\times Y} f \, d\mu \times \nu;$$

d'altra parte, essendo $\{(\varphi_n)_x\}$ e $\{(\varphi_n)^y\}$ due successioni crescenti di funzioni semplici (la prima rispetto a $\mathcal{G}$, la seconda rispetto a $\mathcal{F}$) non negative, che convergono puntualmente rispettivamente a f_x in Y ed a f^y in X, applicando nuovamente il teorema di B. Levi si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_Y (\varphi_n)_x d\nu = \int_Y f_x d\nu \quad \forall x \in X, \quad \lim_{n\to\infty} \int_X (\varphi_n)^y d\mu = \int_X f^y d\mu \quad \forall y \in Y.$$

Applicando ancora una volta il teorema di B. Levi deduciamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \left[\int_Y (\varphi_n)_x d\nu\right] d\mu = \int_X \left[\int_Y f_x d\nu\right] d\mu,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_Y \left[\int_X (\varphi_n)^y d\mu\right] d\nu = \int_Y \left[\int_X f^y d\mu\right] d\nu,$$

e dato che le φ_n soddisfano la tesi del teorema, la stessa proprietà si deduce per la f. □

Fubini **Teorema 5.3.3 (di Fubini)** *Siano $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ spazi misurati σ-finiti, e sia f una funzione $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$-misurabile e sommabile su $X \times Y$. Allora:*

(i) *f_x è sommabile su Y per μ-q.o. $x \in X$ e f^y è sommabile su X per ν-q.o. $y \in Y$;*

(ii) *la funzione $x \mapsto \int_Y f_x d\nu$ è sommabile su X e la funzione $y \mapsto \int_X f^y d\mu$ è sommabile su Y;*

(iii) *si hanno le uguaglianze*

$$\int_X \left[\int_Y f_x \, d\nu \right] d\mu = \int_{X \times Y} f \, d\mu \times \nu = \int_Y \left[\int_X f^y \, d\mu \right] d\nu.$$

Dimostrazione Le funzioni f^+, f^- soddisfano le ipotesi del teorema di Tonelli; quindi le funzioni $(f^\pm)_x$ sono $\mathcal{G}$-misurabili per ogni $x \in X$, le funzioni $x \mapsto \int_Y (f^\pm)_x d\nu$ sono $\mathcal{F}$-misurabili e

$$\int_X \left[\int_Y (f^\pm)_x \, d\nu \right] d\mu = \int_{X \times Y} f^\pm \, d\mu \times \nu.$$

In particolare, essendo il secondo membro finito per ipotesi, le funzioni $x \mapsto \int_Y (f^\pm)_x d\nu$ sono sommabili su X; ciò a sua volta implica che

$$\int_Y (f^\pm)_x \, d\nu < +\infty \text{ per } \mu\text{-q.o. } x \in X,$$

ossia che $(f^+)_x$ e $(f^-)_x$ sono sommabili su Y per μ-q.o. $x \in X$.
In modo assolutamente uguale si verifica che per $(f^+)^y, (f^-)^y$ valgono gli analoghi risultati. Ciò mostra che f^+, f^- verificano la tesi del teorema. Per sottrazione, $f = f^+ - f^-$ verifica (i), e dato che gli integrali sono finiti, f verifica anche (ii) e (iii). □

Le ipotesi dei teoremi di Tonelli e Fubini sono essenzialmente minimali, come mostrano i seguenti esempi.

controFT **Esempi 5.3.4 (1)** Nel teorema di Fubini la f deve essere sommabile, o almeno integrabile (esercizio 5.3.10): in caso contrario, può capitare che l'integrale doppio non esista mentre esistono finiti e diversi i due integrali iterati. Ad esempio, se $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{G} = \mathcal{M}$ e $\mu = \nu = m$, consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad (x,y) \in [0,1] \times [0,1],$$

che è continua in tutti i punti tranne che nell'origine, quindi è certamente $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$-misurabile. Essa non è integrabile: infatti, applicando a f^+ il teorema di Tonelli si ha

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]\times[0,1]} f^+ \, dm \times m &= \int_0^1 \left[\int_0^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy \right] dx \geq \\ &\geq \int_0^1 \left[\int_0^x \frac{x^2 - y^2}{4x^4} \, dy \right] dx = \int_0^1 \frac{1}{6x} \, dx = +\infty, \end{aligned}$$

e similmente

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} f^- \, dm \times m = \int_0^1 \left[\int_0^y \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \, dx \right] dy \geq \int_0^1 \frac{1}{6y} \, dy = +\infty.$$

Per questa funzione i due integrali iterati esistono finiti e diversi fra loro: infatti, come si verifica facilmente,

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \, dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \, \frac{y}{x^2+y^2} \, dy \right] dx = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \, dx \right] dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \, \frac{-x}{x^2+y^2} \, dx \right] dy = -\frac{\pi}{4}.$$

(2) Nel teorema di Tonelli la f deve essere non negativa, o almeno integrabile (esercizio 5.3.10). Ciò è provato dalla funzione f dell'esempio precedente, che è a segno variabile e non è integrabile.

(3) Abbiamo definito la misura prodotto solo nel caso in cui μ e ν sono entrambe misure σ-finite. In effetti si può fare a meno di questa ipotesi, introducendo $\mu \times \nu$ per altra via (esercizio 5.4.8), ma comunque il teorema di Tonelli non vale senza la σ-finitezza: consideriamo ad esempio $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{M}$, $\mathcal{G} = \mathcal{P}([0,1])$, e siano $\mu = m$ e ν la misura "cardinalità", che ovviamente non è σ-finita. Allora, posto $\Delta = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : x = y\}$, per la funzione χ_Δ si ha

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 (\chi_\Delta)^y \, dm \right] d\nu = \int_0^1 m(\{y\}) \, d\nu = 0,$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 (\chi_\Delta)_x \, d\nu \right] dm = \int_0^1 \nu(\{x\}) \, dm = 1.$$

Esercizi 5.3

intsinxsux

1. Provare che

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

[**Traccia:** utilizzare l'uguaglianza $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt} dt$ ed i teoremi di Tonelli e Fubini.]

intexp

2. Dimostrare che la funzione $f(x,y) = ye^{-(1+x^2)y^2}$ è sommabile nel primo quadrante $[0,\infty[\,\times[0,\infty[$, e dedurre che

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

intcosrad

3. Provare le uguaglianze

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

[**Traccia:** si calcoli dapprima l'integrale $\int_0^\infty e^{-xy^2} dy$...]

intvari

4. Provare che

$$\int_0^\infty \frac{(\sin x)^2}{x}\, e^{-x}\, dx = \frac{1}{4}\log 5, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x}\, e^{-x}\, dx = \arctan 2.$$

arctgxsux2

5. Si consideri la funzione

$$f(x,y,t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)}, \quad x \in [0,1],\ y \in [0,1],\ t > 0.$$

Si provi che $f \in L^1(]0,1[\times]0,1[\times]0,\infty[\,)$ e se ne deduca che

$$\int_0^\infty \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt = \pi \log 2.$$

fxgy

6. Siano $(X,\mathcal{F},\mu)$ e $(Y,\mathcal{G},\nu)$ spazi misurati. Se $f \in L^1(X)$ e $g \in L^1(Y)$, si mostri che $(x,y) \mapsto f(x)g(y)$ appartiene a $L^1(X\times Y)$ e che

$$\|fg\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

liv_eccez

7. Sia $(X,\mathcal{F},\mu)$ uno spazio misurato σ-finito, sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mathcal{F}$-misurabile. Si provi che se $t \in \mathbb{R}$ risulta $\mu(\{x \in X : f(x) = t\}) = 0$ ad eccezione al più di un insieme numerabile di valori di t.

sgramis

8. Sia $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$. Si provi che f è $\mathcal{M}$-misurabile se e solo se l'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times[0,\infty[:\ y \le f(x)\}$ appartiene a $\mathcal{M}\times\mathcal{M}$, e che in tal caso si ha

$$\int_{\mathbb{R}} f\, dm = m \times m(E) = \int_0^\infty m(\{x \in \mathbb{R} :\ y \le f(x)\})\, dy;$$

si confronti questo risultato con quello dell'esercizio 4.6.3.

intfraz

9. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Per $\alpha > 0$ si definisca

$$g_\alpha(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \qquad x \ge 0;$$

si provi che

$$\alpha \int_0^y g_\alpha(x)\, dx = g_{\alpha+1}(y) \qquad \forall y \ge 0.$$

FTint

10. Dimostrare che sia nel teorema di Tonelli che nel teorema di Fubini il terzo enunciato vale per ogni funzione *integrabile* su $X\times Y$ rispetto alla misura $\mu\times\nu$. [**Traccia:** si utilizzi la linearità dell'integrale.]

fznonint

11. Si verifichi che la funzione $f(x,y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$ non è integrabile rispetto alla misura $m\times m$ in $[0,1]\times[1,\infty[$.

fznonint2

12. Posto

$$f(x) = \frac{1}{x} - 1 \ \ \forall x \in]0,2], \quad g(x,y) = f(x)f(y) \ \ \forall (x,y) \in]0,2]\times]0,2],$$

si provi che f è integrabile in $]0,2]$, mentre g non è integrabile in $]0,2]\times]0,2]$.

LSintparti

13. Siano f, g funzioni continue e crescenti definite su $\mathbb{R}$. Dette $\mu_f\,, \mu_g$ le rispettive misure di Lebesgue-Stieltjes, provare la formula

$$\int_a^b f\, d\mu_g + \int_a^b g\, d\mu_f = f(b)g(b) - f(a)g(a) \quad \forall [a,b] \subset \mathbb{R}.$$

intmismis

14. Sia $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,1]}$ una famiglia di σ-algebre di sottoinsiemi di un fissato insieme X. Per ogni $t \in [0,1]$, sia μ_t una misura su $(X, \mathcal{F}_t)$; posto $\mathcal{F} = \bigcap_{t\in[0,1]} \mathcal{F}_t$, supponiamo che per ogni $E \in \mathcal{F}$ la funzione $t \mapsto \mu_t(E)$ sia misurabile secondo Lebesgue.

    (i) Si provi che la funzione

$$\mu(E) = \int_0^1 \mu_t(E)\ dt$$

    è una misura su $(X, \mathcal{F})$;

    (ii) si descriva esplicitamente la misura μ nei casi seguenti:

        (a) $X = [0,1]$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{M}$, $\mu_t =$ misura di Dirac concentrata nel punto t,

        (b) $X = [0,1]$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{M}$, $\mu_t(E) = m(E \cap [0,t])$.

grafmis

15. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato e sia f una funzione misurabile a valori reali. Si provi che il grafico di f è misurabile rispetto alla σ-algebra $\mathcal{F} \times \mathcal{M}$. Si noti che, per gli esercizi 4.6.3 e 5.3.8, si ha $\mu \times m(G_f) = 0$.

5.4 Completamento delle misure prodotto

mplmisprod

Come abbiamo visto (osservazione 5.2.7), le misure prodotto non sono in generale complete. In particolare non è completa la misura prodotto $m \times m$, ove m è la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$, né, più generalmente, lo sono le misure prodotto $m_k \times m_h$: ciò significa che per adesso non possiamo applicare i teoremi di Tonelli e Fubini al calcolo di integrali di funzioni misurabili secondo Lebesgue e sommabili in $\mathbb{R}^N$.
Se vogliamo una misura completa nello spazio prodotto, occorre in generale prendere il *completamento* della misura prodotto: ricordiamo che il completamento di una generica misura λ (o meglio, di uno spazio misurato $(Z, \mathcal{C}, \lambda)$) è stato descritto nell'esercizio 2.1.1, e consiste nell'introdurre nello spazio Z la σ-algebra "completata"

$$\overline{\mathcal{C}} = \{E \subseteq Z : \ E = A \cup B, \ A \in \mathcal{C}, \ B \subseteq F, \ F \in \mathcal{C}, \ \lambda(F) = 0\},$$

sulla quale si definisce la misura $\overline{\lambda}$ ponendo $\overline{\lambda}(E) = \lambda(A)$. La funzione $\overline{\lambda}$ risulta ben definita, ed è una misura completa su $\overline{\mathcal{C}}$ che estende la misura di partenza λ.
Per quanto riguarda il prodotto di misure di Lebesgue, il legame fra la misura prodotto $m_k \times m_h$ e la misura $(k+h)$-dimensionale m_{k+h} è descritto nella seguente

complLeb **Proposizione 5.4.1** *Se $k, h \in \mathbb{N}^+$ e $N = k + h$, allora la misura di Lebesgue m_N è il completamento della misura prodotto $m_k \times m_h$.*

Dimostrazione Anzitutto osserviamo che (esercizio 5.2.1)

$$\mathcal{B}_N = \mathcal{B}_k \times \mathcal{B}_h \subseteq \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h$$

(dove $\mathcal{B}_p$ è la famiglia dei Boreliani di $\mathbb{R}^p$ e $\mathcal{M}_p$ denota la famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^p$).
Notiamo adesso che per ogni aperto $A \in \mathbb{R}^N$ la misura $m_N(A)$ (ben definita in quanto $\mathcal{B}_N \subset \mathcal{M}_N$) coincide con $m_k \times m_h(A)$ (ben definita per quanto appena visto): infatti se A è un N-parallelepipedo ciò segue dalla definizione di m_N, m_k e m_h; il caso generale è conseguenza del fatto che A è unione numerabile di N-parallelepipedi P_n disgiunti, cosicché

$$m_N(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m_N(P_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m_k \times m_h(P_n) = m_k \times m_h(A).$$

Proviamo ora che

$$\mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h \subseteq \mathcal{M}_N.$$

Sia $E \times F \in \mathcal{R} \subset \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h$, cioè $E \in \mathcal{M}_k$ e $F \in \mathcal{M}_h$, e supponiamo per cominciare che si abbia $m_k(E) < \infty$ e $m_h(F) < \infty$. Tenuto conto della proposizione 1.7.3 (che vale anche per m_N), per provare che $E \times F \in \mathcal{M}_N$ basta far vedere che si possono trovare un aperto A ed un chiuso C tali che $C \subseteq E \times F \subseteq A$, e per i quali $m_N(A \setminus C)$ sia arbitrariamente piccola. Fissato $\varepsilon > 0$, selezioniamo un aperto U ed un chiuso G in $\mathbb{R}^k$, nonché un aperto V ed un chiuso H in $\mathbb{R}^h$, in modo che risulti

$$G \subseteq E \subseteq U, \quad m_k(U \setminus G) < \varepsilon; \qquad H \subseteq F \subseteq V, \quad m_h(V \setminus H) < \varepsilon.$$

Allora $U \times V$ è aperto in $\mathbb{R}^N$, $G \times H$ è chiuso in $\mathbb{R}^N$, si ha $G \times H \subseteq E \times F \subseteq U \times V$ ed inoltre

$$m_N((U \times V) \setminus (G \times H)) \leq m_N((U \setminus G) \times V) + m_N(U \times (V \setminus H));$$

d'altra parte

$$m_N((U \setminus G) \times V) = m_k \times m_h((U \setminus G) \times V) = m_k(U \setminus G)m_h(V) < \varepsilon(m_h(F) + \varepsilon),$$

ed analogamente

$$m_N(U \times (V \setminus H)) = m_k \times m_h(U \times (V \setminus H)) = m_k(U)m_h(V \setminus H) < \varepsilon(m_k(E) + \varepsilon).$$

Ciò prova che $E \times F \in \mathcal{M}_N$ quando $m_k(E)$ e $m_h(F)$ sono finite. Si noti che risulta anche $m_N(E \times F) = m_k(E)m_h(F)$: infatti per monotonia si ha

$$m_N(G \times H) \leq m_N(E \times F) \leq m_N(U \times V),$$

$$m_k \times m_h(G \times H) \leq m_k \times m_h(E \times F) \leq m_k \times m_h(U \times V);$$

ma dato che il primo ed il terzo membro della prima disuguaglianza coincidono rispettivamente con il primo ed il terzo membro della seconda, otteniamo

$$|m_N(E \times F) - m_k \times m_h(E \times F)| \leq m_N(U \times V) - m_N(G \times H) \leq C\varepsilon,$$

ove ε è arbitrario e $C = m_k(E) + m_h(F) + 2\varepsilon$. Dunque $m_N(E \times F) = m_k \times m_h(E \times F) = m_k(E)m_h(F)$.
Nel caso che almeno una fra $m_k(E)$ e $m_h(F)$ sia infinita, $E \times F$ è comunque unione numerabile di insiemi disgiunti $E_n \times F_m$ con $m_k(E_n) < \infty$ e $m_h(F_m) < \infty$, i quali sono tutti in $\mathcal{M}_N$ per quanto visto: dunque anche in questo caso $E \times F \in \mathcal{M}_N$ e, per numerabile additività, si ha ancora $m_N(E \times F) = m_k \times m_h(E \times F) = m_k(E)m_h(F)$. Abbiamo così provato che $\mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h \subseteq \mathcal{M}_N$ e che m_N e $m_k \times m_h$ coincidono su $\mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h$. Proviamo infine che m_N è il completamento di $m_k \times m_h$. Se $E \in \mathcal{M}_N$, per la proposizione 1.7.3 esistono $D, B \in \mathcal{B}_N$ tali che $D \subseteq E \subseteq B$ e $m_N(B \setminus D) = 0$; quindi possiamo scrivere $E = D \cup (E \setminus D)$, e si ha

$$D \in \mathcal{B}_N \subseteq \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h, \quad E \setminus D \subseteq B \setminus D, \quad B \setminus D \in \mathcal{B}_N \subseteq \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h,$$

e $m_k \times m_h(B \setminus D) = m_N(B \setminus D) = 0$. Ciò prova che $E \in \overline{\mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h}$.
Viceversa, sia $E \in \overline{\mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h}$: allora si ha $E = A \cup B$, con

$$A \in \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h \subseteq \mathcal{M}_N, \quad B \subseteq F, \quad F \in \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h \subseteq \mathcal{M}_N$$

e $m_k \times m_h(F) = m_N(F) = 0$. Per la completezza di m_N, si deduce $B \in \mathcal{M}_N$ e $m_N(B) = 0$, e dunque $E = A \cup B \in \mathcal{M}_N$; ciò mostra che $\mathcal{M}_N = \overline{\mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_h}$. Inoltre

$$m_N(E) = m_N(A) = m_k \times m_h(A) = \overline{m_k \times m_h}(E),$$

cosicché m_N coincide con $\overline{m_k \times m_h}$. □

I teoremi di Fubini e Tonelli continuano a valere, con lievi modifiche, per il completamento delle misure prodotto, a patto di partire con spazi di misura completi, oltre che σ-finiti. Si ha infatti:

Toncompl **Teorema 5.4.2 (di Tonelli)** *Siano $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ spazi misurati σ-finiti e completi, e sia f una funzione $\overline{\mathcal{F} \times \mathcal{G}}$-misurabile e non negativa. Allora:*

(i) *f_x è $\mathcal{G}$-misurabile per μ-q.o. $x \in X$ e f^y è $\mathcal{F}$-misurabile per ν-q.o. $y \in Y$;*

(ii) *la funzione $x \mapsto \int_Y f_x \, d\nu$ è $\mathcal{F}$-misurabile e la funzione $y \mapsto \int_X f^y \, d\mu$ è $\mathcal{G}$-misurabile;*

(iii) *si hanno le uguaglianze*

$$\int_X \left[\int_Y f_x \, d\nu \right] d\mu = \int_{X \times Y} f \, d\overline{\mu \times \nu} = \int_Y \left[\int_X f^y \, d\mu \right] d\nu.$$

Dimostrazione Cominciamo con il seguente

f=h+g **Lemma 5.4.3** *Siano $(X,\mathcal{F},\mu)$ e $(Y,\mathcal{G},\nu)$ spazi misurati σ-finiti e completi, e sia f una funzione $\overline{\mathcal{F}\times\mathcal{G}}$-misurabile. Allora esistono due funzioni g, h, ove g è $\mathcal{F}\times\mathcal{G}$-misurabile e h è $\overline{\mathcal{F}\times\mathcal{G}}$-misurabile e nulla per $\overline{\mu\times\nu}$-q.o. $(x,y)\in X\times Y$, tali che $f(x,y)=g(x,y)+h(x,y)$ per ogni $(x,y)\in X\times Y$.*

Dimostrazione È chiaro che se il risultato vale per f^+ e per f^-, esso si deduce anche per f: quindi si può supporre $f\geq 0$. Allora per la proposizione 3.1.7 esiste una successione crescente $\{\varphi_n\}$ di funzioni semplici (rispetto a $\overline{\mathcal{F}\times\mathcal{G}}$), tale che $\varphi_n(x,y)\to f(x,y)$ per ogni $(x,y)\in X\times Y$; quindi possiamo scrivere

$$f=\varphi_0+\sum_{n=0}^{\infty}(\varphi_{n+1}-\varphi_n)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\chi_{E_k}$$

per opportuni numeri $c_k\geq 0$ ed opportuni insiemi $E_k\in\overline{\mathcal{F}\times\mathcal{G}}$. Sarà $E_k=A_k\cup B_k$, ove $A_k\in\mathcal{F}\times\mathcal{G}$, $B_k\subseteq F_k$, $F_k\in\mathcal{F}\times\mathcal{G}$, $\mu\times\nu(F_k)=0$ per ogni $k\in\mathbb{N}$. Definiamo

$$g=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\chi_{A_k},\qquad h=f-g;$$

allora g è $\mathcal{F}\times\mathcal{G}$-misurabile e h è $\overline{\mathcal{F}\times\mathcal{G}}$-misurabile, cosicché l'insieme

$$P=\{(x,y)\in X\times Y: h(x,y)\neq 0\}$$

appartiene a $\overline{\mathcal{F}\times\mathcal{G}}$ e si ha

$$P\subseteq\bigcup_{k=0}^{\infty}(E_k\setminus A_k)\subseteq\bigcup_{k=0}^{\infty}B_k\subseteq\bigcup_{k=0}^{\infty}F_k\ .$$

Essendo $\mu\times\nu(\bigcup_{k=0}^{\infty}F_k)\leq\sum_{k=0}^{\infty}\mu\times\nu(F_k)=0$, si conclude che h è $\overline{\mu\times\nu}$-q.o. nulla in $X\times Y$. Ciò prova il lemma, essendo $f=g+h$. □

Proviamo ora il teorema 5.4.2. La funzione f, per il lemma precedente, può scriversi come $f=g+h$, con g funzione $\mathcal{F}\times\mathcal{G}$- misurabile e h funzione $\overline{\mathcal{F}\times\mathcal{G}}$-misurabile e nulla per $\overline{\mu\times\nu}$-q.o. $(x,y)\in X\times Y$. Osserviamo che nella dimostrazione del lemma 5.4.3 abbiamo mostrato, più precisamente, che si ha

$$P=\{(x,y)\in X\times Y: h(x,y)\neq 0\}\subseteq Q,$$

ove $Q=\bigcup_{k=0}^{\infty}F_k\in\mathcal{F}\times\mathcal{G}$ e $\mu\times\nu(Q)=0$. Quindi, per il teorema 5.2.5,

$$\int_X\Gamma_Q\,d\mu=\int_Y\Gamma^Q d\nu=\mu\times\nu(Q)=0.$$

Siano

$$H=\{x\in X:\Gamma_Q(x)=\nu(Q_x)>0\},\quad K=\{y\in Y:\Gamma^Q(y)=\mu(Q^y)>0\}:$$

dalle uguaglianze precedenti segue che $\mu(H)=0$ e $\nu(K)=0$.
Ora per ogni $x\notin H$ (ossia per μ-q.o. $x\in X$) si ha $\nu(Q_x)=0$; dato che $P_x\subseteq Q_x$, la completezza di ν implica che per μ-q.o. $x\in X$ risulta $P_x\in\mathcal{G}$ e $\nu(P_x)=0$. Essendo poi $h_x(y)=0$ per ogni $y\notin P_x$ (ovvero per ν-q.o. $y\in Y$), otteniamo che per μ-q.o. $x\in X$ si ha, grazie alla completezza di ν, che h_x è $\mathcal{G}$-misurabile e h_x è ν-q.o. nulla in Y. Un analogo risultato si ottiene per h^y. Ciò prova che:

(a) per μ-q.o. $x \in X$ si ha $f_x = g_x$ ν-q.o. in Y;

(b) per ν-q.o. $y \in Y$ si ha $f^y = g^y$ μ-q.o. in X.

Dato che g_x è $\mathcal{G}$-misurabile e g^y è $\mathcal{F}$-misurabile per il teorema 5.3.2, dalla completezza di μ e ν segue (osservazione 3.2.2) la parte (i) del teorema. Inoltre da (a) e (b) segue che

$$\int_Y f_x \, d\nu = \int_Y g_x \, d\nu \quad \text{per } \mu\text{-q.o. } x \in X,$$
$$\int_X f^y \, d\mu = \int_X g^y \, d\mu \quad \text{per } \nu\text{-q.o. } y \in Y,$$

e ciò prova, sempre per il teorema 5.3.2 e l'osservazione 3.2.2, la parte (ii) del teorema. Infine la parte (iii) si ricava integrando rispettivamente su X e su Y le ultime due uguaglianze, ed osservando che, poiché f e g coincidono $\overline{\mu \times \nu}$-q.o. in $X \times Y$, risulta

$$\int_{X\times Y} f \, d\overline{\mu \times \nu} = \int_{X\times Y} g \, d\overline{\mu \times \nu} = \int_{X\times Y} g \, d\mu \times \nu.$$

Il teorema 5.4.2 è completamente dimostrato. □

Fubcompl **Teorema 5.4.4 (di Fubini)** *Siano $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ spazi misurati σ-finiti e completi, e sia f una funzione $\overline{\mathcal{F} \times \mathcal{G}}$-misurabile e sommabile su $X \times Y$. Allora:*

(i) *f_x è sommabile su Y per μ-q.o. $x \in X$ e f^y è sommabile su X per ν-q.o. $y \in Y$;*

(ii) *la funzione $x \mapsto \int_Y f_x \, d\nu$ è sommabile su X e la funzione $y \mapsto \int_X f^y \, d\mu$ è sommabile su Y;*

(iii) *si hanno le uguaglianze*

$$\int_X \left[\int_Y f_x \, d\nu\right] d\mu = \int_{X\times Y} f \, d\overline{\mu \times \nu} = \int_Y \left[\int_X f^y \, d\mu\right] d\nu.$$

Dimostrazione Per le funzioni f^+ e f^- sono validi i risultati del teorema 5.4.2. Allora per sottrazione si ottiene che f_x è $\mathcal{G}$-misurabile per μ-q.o. $x \in X$, e che f^y è $\mathcal{F}$-misurabile per ν-q.o. $y \in Y$; inoltre le funzioni $x \mapsto \int_Y (f^+)_x d\nu$ e $x \mapsto \int_Y (f^-)_x d\nu$ sono $\mathcal{F}$-misurabili e le funzioni $y \mapsto \int_X (f^+)^y d\mu$ e $y \mapsto \int_X (f^-)^y d\mu$ sono $\mathcal{G}$-misurabili, ed infine f^+ e f^- verificano le uguaglianze (iii) nelle quali, essendo f sommabile su $X \times Y$, tutti gli integrali sono finiti. Dunque f^+ e f^- (e, per sottrazione, anche f) verificano (ii): in particolare (esercizio 4.2.7) $\int_Y f_x \, d\nu$ è finito per μ-q.o. $x \in X$ e $\int_X f^y \, d\mu$ è finito per ν-q.o. $y \in Y$. Di conseguenza, per μ-q.o. $x \in X$ la funzione f_x è sommabile su Y e per ν-q.o. $y \in Y$ la funzione f^y è sommabile su X; dunque f verifica (i). Tornando a (iii), sottraendo le relazioni verificate da f^+ e da f^-, il che è lecito trattandosi di quantità finite, si ottiene che f verifica (iii). □

Dalla proposizione 5.4.1 e dai due teoremi precedenti si deduce, in particolare, che se $f : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ è $\mathcal{M}_2$-misurabile e non negativa, oppure sommabile, allora si ha

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, dm_2 = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \, dm(y)\right] dm(x) = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \, dm(x)\right] dm(y).$$

Qesto fatto si estende in modo ovvio agli integrali in $\mathbb{R}^N$, i quali sono dunque decomponibili in N integrali iterati. Abbiamo dunque un metodo per il calcolo effettivo degli integrali multipli, che naturalmente per funzioni continue su insiemi "buoni" si riduce al sistema consueto usato per gli integrali multipli di Riemann, sia propri che impropri. Per questa ragione, gli integrali rispetto alla misura di Lebesgue verranno d'ora in poi scritti nel modo consueto: $\int_D f(x)\,dx$ anziché $\int_D f\,dm$.

Esercizi 5.4

BinclMstr 1. Si provi che se $k, h \in \mathbb{N}^+$ e $k + h = N$ allora le inclusioni

$$\mathcal{B}_N \subseteq \mathcal{M}_h \times \mathcal{M}_k \subseteq \mathcal{M}_N$$

sono strette.

B+0=M 2. Sia $\mathcal{C}$ una σ-algebra di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ contenente i Boreliani, nonché tutti gli insiemi $E \in \mathcal{M}_N$ tali che $m_N(E) = 0$. Si provi che $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{M}_N$.

misgraf 3. Si provi che ogni funzione $\mathcal{M}$-misurabile $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ ha grafico $\mathcal{M}_2$-misurabile con misura m_2 nulla, ma che il viceversa è falso.

Eprimo 4. Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}$ poniamo $E' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in E\}$. Provare che se $E \in \mathcal{M}$ allora $E' \in \mathcal{M}_2$.

convo 5. *(Convoluzioni)* Si provino i fatti seguenti:

(i) se f è $\mathcal{M}$-misurabile, allora $(x, y) \mapsto f(x - y)$ è $\mathcal{M}_2$-misurabile;

(ii) se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, allora la *convoluzione* $f \star g$, definita da

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

è una funzione di $L^1(\mathbb{R})$ e si ha $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$;

(iii) l'operazione di convoluzione è commutativa, associativa e distributiva rispetto alla somma;

(iv) se $f \in C^k_c(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $f \star g \in C^k(\mathbb{R})$ e $(f \star g)^{(k)} = f^{(k)} \star g$.

mediaL1 6. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Posto per $\varepsilon > 0$

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R},$$

si provi che $f_\varepsilon \to f$ in $L^1(\mathbb{R})$ per $\varepsilon \to 0^+$.

apprconvo 7. Sia $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ con $\varphi \geq 0$, $\varphi = 0$ fuori della palla unitaria e $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi\,dm_N = 1$; per ogni $\varepsilon > 0$ sia $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\,\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ (la funzione φ_ε si chiama *mollificatrice*). Posto, per $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $f_\varepsilon(x) = f \star \varphi_\varepsilon(x)$, si provi che $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, e che $f_\varepsilon \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$ per $\varepsilon \to 0^+$; si mostri anche che se f è uniformemente continua su $\mathbb{R}^N$ allora $f_\varepsilon \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}^N$.

miproalt

8. Siano $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ spazi misurati. Poniamo per ogni $E \subseteq X \times Y$

$$\lambda^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)\nu(B_n) : \ E \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty}(A_n \times B_n),\ A_n \in \mathcal{F},\ B_n \in \mathcal{G}\right\}.$$

(i) Si provi che λ^* è una misura esterna, ossia è non negativa, monotona e numerabilmente subadditiva.

(ii) Posto

$$\mathcal{C} = \{E \subseteq X \times Y : \ \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c) \ \ \forall A \subseteq X \times Y\},$$

si provi che $\mathcal{C}$ è una σ-algebra contenente i rettangoli misurabili di $X \times Y$.

(iii) Si provi che la restrizione λ di λ^* a $\mathcal{C}$ è una misura completa.

(iv) Si provi che

$$\mathcal{C} = \overline{\mathcal{F} \times \mathcal{G}}, \qquad \lambda = \overline{\mu \times \nu}.$$

diaginfi

9. Sia λ la misura costruita nell'esercizio 5.4.8, essendo $\mu = m$ la misura di Lebesgue in $[0,1]$ e ν la misura "cardinalità" in $[0,1]$ (esempio 5.3.4 (3)). Posto $\Delta = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x = y\}$, si provi che $\lambda(\Delta) = +\infty$.
[**Traccia:** supposto per assurdo $\lambda(\Delta) < \infty$, si provi che esistono $R_n \in \mathcal{R}$, disgiunti, tali che $\Delta \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(R_n) < \lambda(\Delta) + 1$ e $R_n = A_n \times A_n$ con gli A_n disgiunti e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = [0,1]$. Posto poi $\mathbb{N}_1 = \{n : m(A_n) > 0\}$, si deduca che $m(\bigcup_{n\in N_1} A_n) = 0$ e quindi l'assurdo.]

fvsff

10. Sia f una funzione misurabile secondo Lebesgue in $[a,b]$. Si provi che $f \in L^1(a,b)$ se e solo se la funzione $G(x,y) = f(x)f(y)$ appartiene a $L^1([a,b] \times [a,b])$, e che in tal caso si ha

$$\|G\|_1 = \|f\|_1^2 \ .$$

Soluzioni degli esercizi del capitolo 5

sol05

Esercizi del paragrafo 5.1

Esercizio 5.1.1 Sia $E = A \times B \in \mathcal{R}$ con $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{G}$. Allora $A^c \in \mathcal{F}$, $B^c \in \mathcal{G}$ e quindi $E^c = (A^c \times B) \cup (A^c \times B^c) \cup (A \times B^c)$ è unione finita e disgiunta di elementi di $\mathcal{R}$.

Esercizio 5.1.2 Siano $R_1, \ldots, R_m \in \mathcal{R}$. Per provare che la loro unione è unione finita e disgiunta di elementi di $\mathcal{R}$, ragioniamo per induzione. Se $m = 2$, la tesi segue osservando che

$$R_1 \cup R_2 = (R_1 \cap R_2^c) \cup (R_1 \cap R_2) \cup (R_2 \cap R_1^c);$$

d'altra parte, la classe $\mathcal{R}$ è chiusa per intersezioni e passaggio al complementare (in virtù dell'esercizio 5.1.1), e dunque i tre insiemi a secondo membro sono unione finita e disgiunta di elementi di $\mathcal{R}$. Se $1 < k \leq m$, e se $\bigcup_{i=1}^{k-1} R_i$ è unione finita e disgiunta di elementi $S_1, \ldots, S_{p_k}$ di $\mathcal{R}$, allora

$$\bigcup_{i=1}^{k} R_i = \bigcup_{i=1}^{k-1}(R_i \cup R_k) = \bigcup_{i=1}^{p_k}(S_i \cup R_k) = \bigcup_{i=1}^{p_k}(S_i \cap R_k) \cup \bigcup_{i=1}^{p_k}(S_i \cap R_k^c) \cup \bigcap_{i=1}^{p_k}(R_k \cap S_i^c).$$

Utilizzando nuovamente il farro che la classe $\mathcal{R}$ è chiusa per intersezioni e passaggio al complementare, $\bigcup_{i=1}^{k} R_i$ è unione finita e disgiunta di elementi di $\mathcal{R}$. Ne segue la tesi.

Esercizio 5.1.3 Poniamo

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{m} R_i : \ R_1, \dots, R_m \in \mathcal{R}, \ m \in \mathbb{N}^+ \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{m} R_i : \ R_1, \dots, R_m \in \mathcal{R} \text{ disgiunti}, \ m \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

Dato che $\mathcal{A}$ è un'algebra che contiene $\mathcal{R}$, $\mathcal{A}$ deve contenere le unioni finite di elementi di $\mathcal{R}$, e quindi deve essere $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. D'altronde $\mathcal{B}$ contiene $\mathcal{R}$ ed è un'algebra: infatti $\mathcal{B}$ è ovviamente chiusa per unioni finite. Proviamo che è anche chiusa per passaggio al complementare: se $\bigcup_{i=1}^{m} R_i \in \mathcal{B}$, allora $\left(\bigcup_{i=1}^{m} R_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{m} R_i^c$. D'altra parte, per l'esercizio 5.1.1, $(R_i)^c$ è unione finita e disgiunta di elementi $S_{i1}, \dots, S_{ik_i} \in \mathcal{R}$, per cui si ha

$$\bigcap_{i=1}^{m} (R_i)^c = \bigcap_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{k_i} S_{ij} = \bigcup_{j_1=1}^{k_1} \cdots \bigcup_{j_m=1}^{k_m} \left(S_{ij_1} \cap \cdots \cap S_{mj_m} \right),$$

e $S_{ij_1} \cap \cdots \cap S_{mj_m} \in \mathcal{R}$. Dunque $\mathcal{B}$ è un'algebra: per minimalità di $\mathcal{A}$ si ha $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ e pertanto $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Inoltre, per l'esercizio 5.1.2, si ha $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$: essendo l'inclusione opposta evidente, si conclude che $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$.

Esercizio 5.1.4 Sia $R = A \times B \in \mathcal{R}$ tale che $R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$, con gli R_n disgiunti e $R_n = A_n \times B_n \in \mathcal{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $\lambda(R) = \mu(A)\nu(B)$; mostriamo che

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)\nu(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(R_n).$$

Risulta infatti

$$\chi_A(x)\chi_B(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{A_n}(x)\chi_{B_n}(y) \qquad \forall (x,y) \in X \times Y;$$

dunque, integrando su Y rispetto a ν si trova, grazie al teorema di B. Levi (teorema 4.3.1),

$$\chi_A(x)\nu(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{A_n}(x)\nu(B_n),$$

ed integrando su X rispetto a μ si trova, sempre per il teorema di B. Levi,

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)\nu(B_n).$$

Ne segue la tesi.

Esercizio 5.1.5 Sia $A \in \mathcal{A}$, $A = \bigcup_{i=1}^{m} R_i$, con $R_i \in \mathcal{R}$ fra loro disgiunti. La definizione

$$\lambda(A) = \sum_{i=1}^{m} \lambda(R_i)$$

è buona, perché se è anche $A = \bigcup_{j=1}^{k} S_j$, con $S_j \in \mathcal{R}$ fra loro disgiunti, allora, grazie all'additività di λ sui disgiunti (esercizio 5.1.4),

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda(S_j) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} \lambda(S_j \cap R_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \lambda(R_i \cap S_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda(R_i).$$

Sia ora $A \in \mathcal{A}$, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, con $A_n \in \mathcal{A}$ disgiunti; supposto $A_n = \bigcup_{i=1}^{p_n} R_{ni}$, con gli $R_{ni} \in \mathcal{R}$ disgiunti, allora

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{p_n} R_{ni}$$

è l'unione numerabile di rettangoli R_{ni} disgiunti. Dall'esercizio 5.1.4 segue

$$\lambda(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{p_n} \lambda(R_{ni}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n).$$

Esercizio 5.1.6 Sia $\mathcal{I}$ la famiglia di tutti gli intervalli di $\mathbb{R}$. Sia $\{I_n\} \subseteq \mathcal{I}$ tale che $I_n \subseteq I_{n+1}$: allora $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \in \mathcal{I}$. Infatti, supponiamo che I_n abbia estremi a_n, b_n (con $-\infty \le a_n$ e $b_n \le +\infty$); allora $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset [\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n, \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n]$. Poi, se $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n < t < \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n$, allora esistono a_m, b_k tali che $a_m < t < b_k$. Supposto ad esempio $m > k$, si ha $t \in I_m$ perché $b_k \le b_m$. Dunque $]\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n, \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n[\subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, e pertanto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \in \mathcal{I}$.
Sia ora $\{I_n\} \subseteq \mathcal{I}$ tale che $I_n \supseteq I_{n+1}$: allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \in \mathcal{I}$. Infatti, usando gli stessi simboli, si ha stavolta $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \subseteq [\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n, \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n]$. Se tali estremi sono uguali, allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ è vuoto oppure è costituito da un solo punto (e quindi appartiene a $\mathcal{I}$); se invece $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n < \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$, e t è un punto compreso tra di essi, allora $t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, cosicché $]\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n, \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n[\subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, da cui $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \in \mathcal{I}$.
Abbiamo così mostrato che $\mathcal{I}$ è una classe monotona. Tuttavia $\mathcal{I}$ non è una σ-algebra, dato che, ad esempio, $[1,2] \cup [3,4] \notin \mathcal{I}$.

Esercizio 5.1.7 Consideriamo la famiglia $\mathcal{S}$ costituita da $\mathbb{R}$, da $\emptyset$ e da tutte le semirette di $\mathbb{R}$. Chiaramente, $\mathcal{S}$ è chiusa per passaggio al complementare. Proviamo che $\mathcal{S}$ è una classe monotona. Se $\{E_n\} \subseteq \mathcal{S}$ e $E_n \subseteq E_{n+1}$, allora $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ è ancora una semiretta, oppure è tutto $\mathbb{R}$ (o anche $\emptyset$, se gli E_n sono tutti vuoti), quindi appartiene a $\mathcal{S}$; similmente, se $\{E_n\} \subseteq \mathcal{S}$ e $E_n \supseteq E_{n+1}$, allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ è ancora una semiretta, oppure è l'insieme vuoto (o anche $\mathbb{R}$, se tutti gli E_n sono uguali a $\mathbb{R}$), quindi appartiene a $\mathcal{S}$. Dunque $\mathcal{S}$ è una classe monotona. Però non è una σ-algebra, dato che $]-\infty, 0] \cup [1, \infty[$ non appartiene a $\mathcal{S}$.

Esercizi del paragrafo 5.2

Esercizio 5.2.1 Proviamo che $\mathcal{B}_N \subseteq \mathcal{B}_h \times \mathcal{B}_k$. Poiché i rettangoli $A \times B$, con $A \subseteq \mathbb{R}^h$ e $B \subseteq \mathbb{R}^k$ aperti, stanno in $\mathcal{B}_h \times \mathcal{B}_k$, e le unioni numerabili di questi formano tutti gli aperti di $\mathbb{R}^N$, si deduce che gli aperti di $\mathbb{R}^N$ appartengono a $\mathcal{B}_h \times \mathcal{B}_k$. Ne segue l'inclusione cercata, grazie alla minimalità di $\mathcal{B}_N$ tra le σ-algebre che contengono gli aperti di $\mathbb{R}^N$.
Proviamo che $\mathcal{B}_h \times \mathcal{B}_k \subseteq \mathcal{B}_N$. Se $B \subseteq \mathbb{R}^k$ è un aperto, la classe

$$\mathcal{U}_B = \{A \subseteq \mathbb{R}^h : \ A \times B \in \mathcal{B}_N\}$$

è una σ-algebra, come si verifica facilmente, e contiene gli aperti di $\mathbb{R}^h$ perché gli aperti di $\mathbb{R}^N$ sono Boreliani. Quindi $\mathcal{B}_h \subseteq \mathcal{U}_B$ per ogni aperto $B \subseteq \mathbb{R}^k$. Similmente, se $A \in \mathcal{B}_h$, la classe

$$\mathcal{V}_A = \{B \subseteq \mathbb{R}^k : \ A \times B \in \mathcal{B}_N\}$$

è ovviamente una σ-algebra e contiene gli aperti di $\mathbb{R}^k$: infatti, se $B \subseteq \mathbb{R}^k$ è aperto, allora dal fatto che $A \in \mathcal{B}_h \subseteq \mathcal{U}_B$ segue $A \times B \in \mathcal{B}_N$. Se ne deduce che $\mathcal{B}_k \subseteq \mathcal{V}_A$ per ogni $A \in \mathcal{B}_h$. Perciò, se $A \times B \in \mathcal{B}_h \times \mathcal{B}_k$, allora $A \times B \in \mathcal{B}_h \times \mathcal{V}_A$, da cui $A \times B \in \mathcal{B}_N$.

Esercizio 5.2.2 Risulta $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ per l'esercizio 5.2.1. Consideriamo un insieme $F \subset \mathbb{R}$, tale che $F \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{B}$ e $m(F) < \infty$, e prendiamo l'insieme $F \times F \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$. Allora $F \times F \notin \mathcal{B} \times \mathcal{B}$: infatti, in caso contrario le proiezioni $(F \times F)_x$ e $(F \times F)^y$ apparterrebbero a $\mathcal{B}$, mentre invece, ad esempio,

$$(F \times F)_x = F \notin \mathcal{B} \qquad \forall x \in F.$$

Esercizio 5.2.3 Sia $F \subset [0,1]$ tale che $F \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{B}$, e sia

$$E = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in F\}.$$

Mostriamo che $E \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$. Posto $\Delta = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [0,1]\}$, si ha

$$\Delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n\,, \quad \text{ove} \quad \Delta_n = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \times \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \right),$$

ed inoltre $\Delta_n \supset \Delta_{n+1}$, $\Delta_n \in \mathcal{B}\times\mathcal{B}$. Quindi $\Delta \in \mathcal{B}\times\mathcal{B}$, e infine

$$E = \Delta \cap (F\times F) \in \mathcal{M}\times\mathcal{M}.$$

D'altra parte, $E_x, E^y \in \mathcal{B}$, perché

$$E_x = \begin{cases} \{x\} & \text{se } x\in F \\ \emptyset & \text{se } x\notin F, \end{cases}, \qquad E^y = \begin{cases} \{y\} & \text{se } y\in F \\ \emptyset & \text{se } y\notin F. \end{cases}$$

Per concludere, proviamo che $E\notin\mathcal{B}_2$. Per assurdo, supponiamo che $E\in\mathcal{B}_2$ e consideriamo l'applicazione lineare $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definita da

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x+y\\-x+y\end{pmatrix} \qquad \forall\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2.$$

La T è biunivoca e trasforma aperti in aperti; posto

$$\mathcal{C} = \{B\subseteq[0,1]^2 :\ T(B)\in\mathcal{B}_2\},$$

la classe $\mathcal{C}$ è una σ-algebra e contiene gli aperti. Quindi $\mathcal{C}$ contiene $\mathcal{B}_2$, ossia $T(B)\in\mathcal{B}_2$ per ogni $B\in\mathcal{B}_2$ contenuto in $[0,1]^2$. Dunque, avendo supposto $E\in\mathcal{B}_2$, si ha $T(E)\in\mathcal{B}_2$. Ma risulta $T(E) = F\times\{0\}$ e $(F\times\{0\})^y = F\notin\mathcal{B}$ quando $y=0$: ciò, in virtù della proposizione 5.2.4, implica $T(E)\notin\mathcal{B}_2$, il che è assurdo. Pertanto $E\notin\mathcal{B}_2$.

Esercizio 5.2.4 Supponiamo che sia vera la seconda ipotesi, ossia che $g(\cdot,y)$ sia continua. Poniamo $a_i = \frac{i}{n}$ e

$$g_n(x,y) = \frac{a_i - x}{a_i - a_{i-1}}g(a_{i-1},y) + \frac{x-a_{i-1}}{a_i-a_{i-1}}g(a_i,y) \quad \forall (x,y)\in[a_{i-1},a_i]\times[0,1];$$

allora $g_n\to g$ puntualmente in $[0,1]^2$. Infatti, dato $x\in[0,1]$ e scelto $i_x\in\{1,\dots,n\}$ tale che $\frac{i_x-1}{n}\le x\le\frac{i_x}{n}$, si ha per ogni $y\in[0,1]$

$$\begin{aligned} |g_n(x,y)-g(x,y)| &= \left|\frac{a_{i_x}-x}{a_{i_x}-a_{i_x-1}}[g(a_{i_x-1},y)-g(x,y)] + \frac{x-a_{i_x-1}}{a_{i_x}-a_{i_x-1}}[g(a_{i_x},y)-g(x,y)]\right| \le \\ &\le \max\left\{\left|g\left(a_{i_x}-1,y\right)-g(x,y)\right|, \left|g\left(a_{i_x},y\right)-g(x,y)\right|\right\}; \end{aligned}$$

per n sufficientemente grande, l'ultimo membro è arbitrariamente piccolo grazie alla continuità di $g(\cdot,y)$.
Dalla convergenza puntuale di g_n a g si deduce che per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$ risulta

$$\{(x,y)\in[0,1]^2 :\ g(x,y)>\alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{(x,y)\in[0,1]^2 :\ g_n(x,y)>\alpha\};$$

ne segue che l'insieme $\{(x,y)\in[0,1]^2 :\ g(x,y)>\alpha\}$ è unione di aperti e quindi è aperto: in particolare, esso appartiene a $\mathcal{B}_2$.

Esercizio 5.2.5 Essendo $\Delta = \{(x,y)\in[0,1]^2 :\ x=y\}$, si ha $\Delta_x = \{x\}$ per ogni $x\in[0,1]$ e $\Delta^y = \{y\}$ per ogni $y\in[0,1]$, da cui

$$\Gamma_\Delta(x) = \lambda(\Delta_x) = \lambda(\{x\}) = \chi_V(x) \quad \forall x\in[0,1], \qquad \Gamma^\Delta(y) = \mu(\Delta^y) = \mu(\{y\}) = 0 \quad \forall y\in[0,1].$$

Dunque Γ_Δ non è $\mathcal{F}$-misurabile. Questo non è assurdo, poiché la misura λ non è σ-finita, dato che l'insieme V è più che numerabile.

Esercizio 5.2.6 Dato che X e Y sono σ-finiti, esiste una successione di rettangoli misurabili $Z_n = X_n\times Y_n$, con $\mu(X_n)<\infty$ e $\nu(Y_n)<\infty$, tali che $X\times Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$.
Poiché λ e $\mu\times\nu$ coincidono sulla classe $\mathcal{R}$ dei rettangoli misurabili, esse devono coincidere sull'algebra $\mathcal{A}$ generata da $\mathcal{R}$. Sia

$$\mathcal{V} = \{E\in\mathcal{F}\times\mathcal{G} :\ \lambda(E) = \mu\times\nu(E)\};$$

si ha $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}$. Proveremo che $\mathcal{V}$ è una classe monotona.
Se $\{E_k\} \subseteq \mathcal{V}$ è una successione crescente, allora, grazie alla proposizione 2.1.5 (i), si ha $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathcal{V}$. Poi, se $\{F_k\}$ è una successione decrescente e $F = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k$, allora anche $\{F_k \cap Z_n\}$ è decrescente (rispetto a k); quindi, per la proposizione 2.1.5 (ii), otteniamo $F \cap Z_n \in \mathcal{V}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dato che la successione $\{F \cap Z_n\} \subseteq \mathcal{V}$ è crescente, al limite per $n \to \infty$ ricaviamo $F \in \mathcal{V}$. Pertanto, $\mathcal{V}$ è una classe monotona.
Essendo $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{G}$, e ricordando che $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ è la *minima* classe monotona contenente $\mathcal{A}$ (proposizione 5.2.1), si deduce che $\mathcal{F} \times \mathcal{G} = \mathcal{V}$, e dunque λ e $\mu \times \nu$ coincidono su $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$.

Esercizio 5.2.7 Per definizione, le misure μ_λ e $\lambda\,(m \times m)$ coincidono su $\mathcal{R}$: quindi, per l'esercizio 5.2.6, esse coincidono su $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$. Sia $E \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ e poniamo $E_\lambda = \{(x, y) : \ (x, \lambda y) \in E\}$. Dalla proposizione 1.7.3, che si estende senza difficoltà al caso di $m \times m$ sostituendo i rettangoli agli intervalli, segue che esistono una successione decrescente di aperti $A_n \supseteq E$ ed una successione crescente di chiusi $C_n \subseteq E$, tali che

$$m\times m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} m\times m(A_n) = m\times m(E), \quad m\times m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} m\times m(C_n) = m\times m(E).$$

Di conseguenza

$$\lambda\, m \times m(E) = \lambda \lim_{n\to\infty} m \times m(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_\lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} ((A_n)_\lambda) \geq (m \times m)^*)(E_\lambda),$$

e similmente

$$\lambda\, m \times m(E) = \lambda \lim_{n\to\infty} m \times m(C_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_\lambda(C_n) = \lim_{n\to\infty} ((C_n)_\lambda) \leq (m \times m)^*)(E_\lambda).$$

Ne segue, usando ancora la proposizione 1.7.3, che $E_\lambda \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$, mentre le due relazioni sopra scritte ci dicono che $m \times m(E_\lambda) = \lambda\, m \times m(E)$.

Esercizi del paragrafo 5.3

Esercizio 5.3.1 Si ha per ogni $b > 0$

$$\int_0^b \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^b \left[\int_0^\infty e^{-xt}\, dt\right] \sin x\, dx.$$

Posto $g(x, t) = e^{-xt} \sin x$, verifichiamo che g è sommabile su $[0, \infty[\times [0, b]$: infatti, per il teorema di Tonelli (teorema 5.3.2),

$$\int_0^b \int_0^\infty |g|\, dtdx = \int_0^b \int_0^\infty e^{-xt} |\sin x|\, dtdx = \int_0^b \frac{|\sin x|}{x}\, dx \leq 1 + \int_1^b \frac{dx}{x} = 1 + \log b < \infty.$$

Di conseguenza, per il teorema di Fubini (teorema 5.3.3),

$$\int_0^b \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^b \left[\int_0^\infty e^{-xt}\, dt\right] \sin x\, dx = \int_0^\infty \int_0^b e^{-xt} \sin x\, dxdt.$$

Calcoliamo l'integrale interno: si ha facilmente, con due integrazioni per parti,

$$\int_0^b e^{-xt} \sin x\, dx = 1 - e^{-bt}(\cos b + t\, \sin b) - t^2 \int_0^b e^{-xt} \sin x\, dx,$$

da cui

$$\int_0^b e^{-xt} \sin x\, dx = \frac{1}{1 + t^2}[1 - e^{-bt}(\cos b + t\, \sin b)].$$

Perciò

$$\int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}[1-e^{-bt}(\cos b + t\,\sin b)]\,dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{e^{-bt}}{1+t^2}(\cos b + t\,\sin b)\,dt.$$

Per $b \to \infty$, in virtù del teorema di Lebesgue (teorema 4.3.3), si ricava la tesi.

Esercizio 5.3.2 La funzione f è continua e non negativa su $[0,\infty[^{\,2}$: quindi per il teorema di Tonelli (teorema 5.3.2) si ha

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\,dxdy &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty y\,e^{-y^2(1+x^2)}dy\right]dx = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[-\frac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2}\right]_0^\infty dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty y\,e^{-y^2}e^{-y^2x^2}dx\right]dy = \int_0^\infty y\,e^{-y^2}\left[\int_0^\infty \frac{1}{y}e^{-t^2}dt\right]dy = \left[\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right]^2,$$

da cui la tesi.

Esercizio 5.3.3 Osservato che, per l'esercizio 5.3.2,

$$\int_0^\infty e^{-xy^2}dy = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}},$$

possiamo scrivere per ogni fissato $b > 0$

$$\int_0^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^b \left[\int_0^\infty \sin x\,e^{-xy^2}dy\right]dx.$$

La funzione integranda cambia segno, ma è sommabile poiché, per il teorema di Tonelli (teorema 5.3.2),

$$\int_0^b \left[\int_0^\infty |\sin x|\,e^{-xy^2}dy\right]dx \le \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt \le C\sqrt{b};$$

quindi, per il teorema di Fubini (teorema 5.3.3)

$$\int_0^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^b \left[\int_0^\infty \sin x\,e^{-xy^2}dy\right]dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \left[\int_0^b \sin x\,e^{-yx^2}dx\right]dy,$$

e con una doppia integrazione per parti si trova

$$\int_0^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \left[\frac{1}{1+y^4} - \frac{y\,e^{-by^2}}{1+y^4}\left(\frac{\cos b}{y^2} + \sin b\right)\right]dy.$$

Per $b \to \infty$ l'ultimo termine a secondo membro ha limite 0 per convergenza dominata (teorema 4.3.3); ne segue

$$\exists \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4}\,.$$

In modo completamente analogo, dunque omettendo il calcolo esplicito, si ottiene lo stesso risultato per il secondo limite, sostituendo $\sin x$ con $\cos x$:

$$\exists \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4}\,.$$

Rimane da calcolare l'integrale $\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4}$. Risulta, con $t = 1/y$,

$$\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4} = \int_0^\infty \frac{t^2\,dt}{1+t^4}\,,$$

da cui

$$\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{y^2\,dy}{1+y^4};$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4} &= \frac{1}{4}\int_0^\infty \left[\frac{1}{y^2+\sqrt{2}\,y+1} + \frac{1}{y^2-\sqrt{2}\,y+1}\right] dy = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{1+\left(\frac{y+1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}\right)^2}\,dy + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{1+\left(\frac{y-1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}\right)^2}\,dy = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_1^\infty \frac{ds}{1+s^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^\infty \frac{ds}{1+s^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}$$

In definitiva

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Esercizio 5.3.4 Proviamo la prima relazione. Utilizzando il teorema di Tonelli (teorema 5.3.2) si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{(\sin x)^2}{x}\,e^{-x}\,dx &= \int_0^\infty \left[\int_1^\infty e^{-tx}\,dt\right]\sin^2 x\,dx = \int_1^\infty \left[\int_0^\infty e^{-tx}\,\sin^2 x\,dx\right] dt = \\
&= \int_1^\infty \left(\left[-\frac{e^{-tx}}{t}\,\sin^2 x\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{t}\cdot 2\sin x\cos x\,dx\right) dt = \\
&= \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{t}\left[\int_0^\infty e^{-\frac{ts}{2}}\sin s\,ds\right] dt.
\end{aligned}$$

D'altra parte, integrando due volte per parti si trova

$$\int_0^\infty e^{-\frac{ts}{2}}\sin s\,ds = \frac{4}{4+t^2}\,,$$

da cui

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{(\sin x)^2}{x}\,e^{-x}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{4}{t(4+t^2)}\,dt = \frac{1}{4}\int_1^\infty \left[\frac{2}{t} - \frac{2t}{t^2+4}\right] dt = \\
&= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left[\int_1^n \frac{2}{t}\,dt - \int_1^{n^2}\frac{ds}{s+4}\right] = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left[\log n^2 - \log\frac{n^2+4}{5}\right] = \\
&= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\log\frac{5n^2}{n^2+4} = \frac{1}{4}\log 5.
\end{aligned}$$

Proviamo la seconda relazione. Risulta

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x}\,e^{-x}\,dx = \int_0^\infty \left[\int_1^\infty \sin 2x\,e^{-tx}\,dt\right] dx;$$

nell'ultimo integrale doppio l'integrando è sommabile, in quanto

$$\int_0^\infty \left[\int_1^\infty |\sin 2x|\,e^{-tx}\,dt\right] dx = \int_0^\infty \frac{|\sin 2x|}{x}\,e^{-x}\,dx \le 2\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 2.$$

Dunque, per il teorema di Fubini (teorema 5.3.3),

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x}\, e^{-x}\, dx &= \int_1^\infty \left[\int_0^\infty \sin 2x\, e^{-tx}\, dx\right] dt = \frac{1}{2}\int_1^\infty \left[\int_0^\infty e^{-\frac{ts}{2}}\, \sin s\, ds\right] dt = \\ &= \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{4}{4+t^2}\, dt = \int_{1/2}^\infty \frac{ds}{1+s^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{2} = \arctan 2.\end{aligned}$$

Esercizio 5.3.5 Poiché f è continua e positiva, si può scambiare l'ordine di integrazione a volontà. Con facili calcoli,

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \left[\int_0^1 \left(\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)} dt\right) dy\right] dx = \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(\int_0^\infty \frac{1}{x^2-y^2}\left[\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{y^2}{1+y^2t^2}\right] dt\right) dy\right] dx = \\ &= \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{x^2-y^2}\left[\int_0^\infty (x-y)\,\frac{ds}{1+s^2}\right] dxdy = \frac{\pi}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{x+y} = \pi\log 2.\end{aligned}$$

Adesso integriamo in un altro ordine:

$$\begin{aligned}\pi\log 2 &= \int_0^\infty \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)} dx\right) dy\right] dt = \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^1 \frac{1}{t(1+y^2t^2)} \arctan t\, dy\right] dt = \int_0^\infty \frac{\arctan^2 t}{t^2}\, dt,\end{aligned}$$

il che prova la tesi.

Esercizio 5.3.6 Supponiamo che gli spazi X e Y siano σ-finiti. Le funzioni $|f|$ e $|g|$ sono ovviamente non negative, e sono misurabili in $X\times Y$, essendo

$$\{(x,y)\in X\times Y:\ |f(x)|>t\} = \{x\in X:\ |f(x)|>t\}\times Y,$$

e analogamente

$$\{(x,y)\in X\times Y:\ |g(y)|>t\} = X\times\{y\in Y:\ |g(y)|>t\}.$$

Allora anche $|f(x)g(y)|$ è misurabile in $X\times Y$ e dunque possiamo scrivere, grazie al teorema di Tonelli,

$$\int_{X\times Y} |f(x)g(y)|\, d\mu d\nu = \int_X |f(x)|\left[\int_Y |g(y)|d\nu\right] d\mu = \left[\int_y |g(y)|d\nu\right]\left[\int_X |f(x)|d\mu\right],$$

che è la tesi nel caso σ-finito. Il caso generale segue dall'esercizio 4.6.5, secondo il quale il sottoinsieme di $X\times Y$ sul quale $|f(x)g(y)|\neq 0$ è σ-finito.

Esercizio 5.3.7 Dato che X è σ-finito, risulta $X=\bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$, con $\mu(X_k)<\infty$. Per $t\in\mathbb{R}$ poniamo $E_t=\{x\in X:\ f(x)=t\}$: notiamo che $E_t\cap E_s=\emptyset$ se $t\neq s$. Fissato $k\in\mathbb{N}$, definiamo

$$T_k = \{t\in\mathbb{R}:\ \mu(E_t\cap X_k)>0\}, \qquad T_{nk} = \left\{t\in\mathbb{R}:\ \mu(E_t\cap X_k)>\frac{1}{n}\right\}.$$

Detta $\gamma_{nk}\leq\infty$ la cardinalità di T_{nk}, si ha

$$\infty > \mu(X_k) \geq \mu\left(X_k\cap\bigcup_{t\in T_{nk}} E_t\right) = \mu\left(\bigcup_{t\in T_{nk}}(E_t\cap X_k)\right) = \sum_{t\in T_{nk}}\mu(E_t\cap X_k) \geq \frac{\gamma_{nk}}{n},$$

da cui $\gamma_{nk}<\infty$ per ogni $n\in\mathbb{N}^+$, ossia T_{nk} è un insieme finito. Ne segue che $T_k=\bigcup_{k\in\mathbb{N}} T_{nk}$ è un insieme al più numerabile, e dunque l'insieme dei punti $t\in\mathbb{R}$ tali che $\mu(E_t\cap X_k)>0$ è al più numerabile per ogni $k\in\mathbb{N}$. Ne segue che l'insieme dei punti $t\in\mathbb{R}$ per i quali $\mu(E_t)>0$, ossia l'unione

dei T_k al variare di $k \in \mathbb{N}$, è anch'esso al più numerabile.

Esercizio 5.3.8 Sia f misurabile. Se f è semplice, $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}$, con gli A_i disgiunti, si ha $E = \bigcup_{i=1}^m (A_i \times [0, \alpha_i])$ e quindi E è $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$-misurabile. Se f è un'arbitraria funzione misurabile non negativa, esiste una successione di funzioni semplici non negative $\{\varphi_n\}$ che convergono puntualmente a f in modo crescente. Per quanto visto, gli insiemi $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[: \ y \leq \varphi_n(x)\}$ sono $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$-misurabili: dunque anche $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ lo è.
Viceversa, supponiamo che E sia $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$-misurabile e siano $c \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^+$. Per l'esercizio 5.2.7, l'insieme

$$E_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[: \ \left(x, \frac{y}{n}\right) \in E\right\}$$

è $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$-misurabile. Quindi anche

$$\begin{aligned} E_n - (0, nc) &= \left\{(x, y - nc) : \ (x, y) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[, \ \left(x, \frac{y}{n}\right) \in E\right\} = \\ &= \left\{(x, z) : \ (x, z + nc) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[, \ \left(x, c + \frac{z}{n}\right) \in E\right\} \end{aligned}$$

è $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$-misurabile. Essendo

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) > c\} \times [0, \infty[&= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[: \ f(x) > c\} = \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \left\{(x, z) : \ \ (x, z + nc) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[, \ \left(x, c + \frac{z}{n}\right) \in E\right\}, \end{aligned}$$

si conclude che $\{x \in \mathbb{R} : \ f(x) > c\} \times [0, \infty[$ è $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$-misurabile; ne segue, per la proposizione 5.2.4, che $\{x \in \mathbb{R} : \ f(x) > c\}$ è $\mathcal{M}$-misurabile.
In tal caso si ha inoltre, per il teorema di Tonelli,

$$m \times m(E) = \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \chi_E(x, y) \, dydx = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x, y) \, dxdy;$$

d'altronde,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x, y) \, dxdy = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \geq y\}}(x) \, dxdy = \int_0^\infty m(\{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \geq y\}) \, dy,$$

mentre

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \chi_E(x, y) \, dydx = \int_{\mathbb{R}} \int_0^{f(x)} dydx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx.$$

Tenuto conto dell'esercizio 5.3.7, il risultato di questo esercizio coincide con quello dell'esercizio 4.6.3.

Esercizio 5.3.9 Se f non ha segno costante, si prova la tesi con f^+ e f^-, e poi si sottraggono i due risultati. Dunque si può supporre $f \geq 0$. La funzione $g_\alpha(x)$ è ben definita, misurabile e non negativa. Quindi, per il teorema di Tonelli, per ogni $y \geq 0$ si ha

$$\begin{aligned} \int_0^y g_\alpha(x) \, dx &= \int_0^y \int_0^x (x - t)^{\alpha - 1} f(t) \, dtdx = \\ &= \int_0^y f(t) \int_t^y (x - t)^{\alpha - 1} \, dxdt = \int_0^y f(t) \, \frac{(y - t)^\alpha}{\alpha} \, dt = \frac{1}{\alpha} g_{\alpha+1}(y). \end{aligned}$$

Esercizio 5.3.10 Nel teorema di Tonelli (teorema 5.3.2) si suppone che l'integrando sia una funzione misurabile e non negativa: quindi se f è integrabile, si applica il teorema a f^+ e f^-, e si possono sottrarre i risultati perché almeno uno di essi è una quantità finita.
Nel teorema di Fubini si suppone che l'integrando sia sommabile: quindi, se f è integrabile, una fra f^+ e f^- è sommabile, e per essa vale la tesi; l'altra è una funzione misurabile non negativa, e applicando il teorema di Tonelli vale la tesi (con risultato possibilmente infinito). Si possono comunque sottrarre i due risultati, ottenendo le formule cercate.

Esercizio 5.3.11 Se f fosse $m \times m$-integrabile, per il teorema di Fubini, tenuto conto dell'esercizio 5.3.10, potremmo scambiare l'ordine di integrazione. Ma si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[\int_1^\infty \left(e^{-xy} - 2\,e^{-2xy}\right) dx\right] dy &= \int_0^1 \left[\int_1^\infty e^{-xy}\,dx - \int_2^\infty e^{-ty}\,dt\right] dy = \\ &= \int_0^1 \left[\int_1^2 e^{-xy}\,dx\right] dy = \int_0^1 \frac{e^{-y} - e^{-2y}}{y}\,dy = \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-y}-1}{y}\,dy - \int_0^2 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt = \int_1^2 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt,\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \left[\int_0^1 \left(e^{-xy} - 2\,e^{-2xy}\right) dy\right] dx &= \int_1^\infty \left[\int_0^1 e^{-xy}\,dy - \int_0^2 e^{-xt}\,dt\right] dx = \\ &= -\int_1^\infty \left[\int_1^2 e^{-xy}\,dx\right] dy = -\int_1^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\,dx = \\ &= -\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt + \int_2^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt = -\int_1^2 \frac{e^{-t}}{t}\,dt.\end{aligned}$$

Pertanto i due integrali sono finiti, ma non uguali: la loro differenza è uguale a $\log 2$. Dunque f non è $m \times m$-integrabile.

Esercizio 5.3.12 La funzione f è integrabile in $[0,2]$, perché f è positiva in $[0,1]$ e negativa in $[1,2]$, e risulta

$$\int_0^2 f^+ dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx = +\infty, \qquad \int_0^2 f^- dx = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = 1 - \log 2,$$

da cui $\int_0^2 f\,dx = +\infty$.
Invece la funzione $g(xy) = f(x)f(y)$ è positiva in $[0,1]\times[0,1]$ e in $[1,2]\times[1,2]$, ed è negativa in $[0,1]\times[1,2]$ e in $[1,2]\times[0,1]$. Ne segue

$$\int_{[0,2]\times[0,2]} g^+\,dxdy = \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right) dxdy + \int_1^2\int_1^2 \left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{y}\right) dxdy = +\infty,$$

e analogamente

$$\int_{[0,2]\times[0,2]} g^-\,dxdy = \int_0^1\int_1^2 \left(\frac{1}{x}-1\right)\left(1-\frac{1}{y}\right) dydx + \int_1^2\int_0^1 \left(1-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}-1\right) dxdy = +\infty.$$

Quindi g non è integrabile in $[0,2]\times[0,2]$.

Esercizio 5.3.13 Le funzioni f e g sono rispettivamente μ_g- e μ_f-misurabili, poiché gli insiemi $\{x \in \mathbb{R} :\ f(x) > \alpha\}$ e $\{x \in \mathbb{R} :\ g(x) > \beta\}$ sono aperti. Sia $\sigma = \mu_f \times \mu_g$ la misura prodotto, e poniamo $E = \{(x,y) \in [a,b]^2 :\ y \le x\}$. L'insieme E è σ-misurabile perché

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left[a + \frac{k}{2^n}(b-a), b\right] \times \left[a, a + \frac{k+1}{2^n}(b-a)\right],$$

cosicché χ_E è σ-misurabile. Allora, grazie al teorema di Tonelli (e in particolare al teorema 5.2.5),

$$\int_{[a,b]^2} \chi_E\,d\sigma = \int_a^b \mu_g(E_x)\,d\mu_f = \int_a^b \mu_f(E^y)\,d\mu_g\,.$$

Ma $E_x = [a,x]$, $E^y = [y,b]$, per cui

$$\int_{[a,b]^2} \chi_E\,d\sigma = \int_a^b [g(x) - g(a)]\,d\mu_f = \int_a^b [f(b) - f(y)]\,d\mu_g\,.$$

Dall'ultima uguaglianza si deduce

$$\int_a^b g(x)\,d\mu_f + \int_a^b f(y)\,d\mu_g = g(a)[f(b)-f(a)] + f(b)[g(b)-g(a)] = g(b)f(b) - g(a)f(a).$$

Esercizio 5.3.14 (i) Proviamo che μ è una misura. Ovviamente,

$$\mu(\emptyset) = \int_0^1 \mu_t(\emptyset)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0.$$

Se $\{E_n\}$ è una famiglia disgiunta di elementi di $\mathcal{F}$,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \int_0^1 \mu_t\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)\,dt = \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_t(E_n)\,dt,$$

e per il teorema di B. Levi

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_0^1 \mu_t(E_n)\,dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Dunque μ è una misura.
(ii) Nel caso (a), si ha $X=[0,1]$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{M}$ e

$$\mu_t(E) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se } t\in E \\ 0 & \text{se } t\notin E \end{array} \right\} = \chi_E(t) \qquad \forall E\in\mathcal{M}.$$

Pertanto $t\mapsto \mu_t(E)$ è misurabile e

$$\mu(E) = \int_0^1 \chi_E(t)\,dt = m(E).$$

Nel caso (b), si ha $X=[0,1]$, $\mathcal{F}_t=\mathcal{M}$ e $\mu_t(E) = m(E\cap[0,t])$: in particolare, $t\mapsto\mu_t(E)$ è misurabile. Ne segue

$$\mu_t(E) = \int_0^1 \chi_E(x)\chi_{[0,t]}(x)\,dx = \int_0^1 \chi_E(x)\chi_{[x,1]}(t)\,dx,$$

e quindi, grazie al teorema di Tonelli,

$$\mu(E) = \int_0^1 \left[\int_0^1 \chi_E(x)\chi_{[x,1]}(t)\,dx\right] dt = \int_0^1 \chi_E(x)\left[\int_0^1 \chi_{[x,1]}(t)\,dt\right] dx = \int_E (1-x)\,dx.$$

Esercizio 5.3.15 Supponiamo dapprima $f\geq 0$. Poniamo

$$E_f = \{(x,y):\ x\in X,\ y\leq f(x)\}, \qquad \Gamma_f = \{(x,y):\ x\in X,\ y<f(x)\}.$$

Se f è una funzione semplice, $F=\sum_{i=1}^p \alpha_i\,\chi_{A_i}$, si ha $E_f = \bigcup_{i=1}^p (A_i\times[0,\alpha_i])$ e $\Gamma_f = \bigcup_{i=1}^p (A_i\times[0,\alpha_i[\,)$. Quindi E_fe Γ_f appartengono a $\mathcal{F}\times\mathcal{M}$. Se f è misurabile, esiste una successione $\{\varphi_n\}$ di funzioni semplici tale che $\varphi_n\to f$ in modo crescente; allora

$$E_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{\varphi_n}\,, \qquad \Gamma_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_{\varphi_n}\,,$$

e pertanto E_f e Γ_f appartengono a $\mathcal{F}\times\mathcal{M}$. Se ne deduce che il grafico G_f di f è misurabile, essendo $G_f = E_f\setminus\Gamma_f$.
Se $f\leq 0$ si procede allo stesso modo. Infine, se f cambia segno, per quanto visto prima G_{f^+} e G_{f^-} sono misurabili; dato che

$$G_f = (G_{f^+}\setminus\{(x,0):\ x\in X\})\cup(-G_{f^-}\setminus\{(x,0):\ x\in X\}),$$

si deduce che G_f è a sua volta misurabile.

Esercizi del paragrafo 5.4

Esercizio 5.4.1 Proviamo che l'inclusione $\mathcal{B}_N \subseteq \mathcal{M}_h \times \mathcal{M}_k$ è stretta. Sia $E \in \mathcal{M}_h \setminus \mathcal{B}_h$ (per il caso $h = 2$ si veda l'esercizio 5.2.2): allora $E \times \mathbb{R}^k \in \mathcal{M}_h \times \mathcal{M}_k$, in quanto $\mathcal{M}_h \times \mathcal{M}_k$ è la minima σ-algebra che contiene gli insiemi $A \times B$ con $A \in \mathcal{M}_h$ e $B \in \mathcal{M}_k$. Se fosse $E \times \mathbb{R}^k \in \mathcal{B}_N$, allora avremmo $E \times \mathbb{R}^k \in \mathcal{B}_h \times \mathcal{B}_k$ per l'esercizio 5.2.1; dalla proposizione 5.2.4 ricaveremmo allora $(E \times \mathbb{R}^k)^y = E$ per ogni $y \in \mathbb{R}^k$, da cui $E \in \mathcal{B}_h$, il che è impossibile. Perciò $E \times \mathbb{R}^k \notin \mathcal{B}_N$.
Proviamo che l'inclusione $\mathcal{M}_h \times \mathcal{M}_k \subseteq \mathcal{M}_N$ è stretta: per il caso $h = k = 1$ si veda l'esercizio 2.2.1. Sia $V \notin \mathcal{M}_h$, $V \subset [0,1]^h$, e sia $W \in \mathcal{M}_k$ con $m_k(W) = 0$ ma $W \neq \emptyset$. Allora $V \times W$ appartiene a $\mathcal{M}_N$, in quanto m_N è completa (proposizione 5.4.1) e $V \times W \subset [0,1]^h \times W$ con $m_N([0,1]^h \times W) = 0$. D'altra parte $V \times W \notin \mathcal{M}_h \times \mathcal{M}_k$, perché $(V \times W)^y = V \notin \mathcal{M}_h$ per ogni $y \in W$.

Esercizio 5.4.2 Essendo, per definizione, $m_N = m_N^*|_{\mathcal{M}_N}$, fissato $E \in \mathcal{M}_N$ esiste $B \in \mathcal{B}_N$, intesezione numerabile di aperti, tale che $E \subset B$ e $m_N(B \setminus E) = 0$. Dato che $E = B \setminus (B \setminus E)$, con $B \in \mathcal{B}_N \subseteq \mathcal{C}$, e $m_N(B \setminus E) = 0$, si ha $B \setminus E \in \mathcal{C}$ e pertanto $E \in \mathcal{C}$.

Esercizio 5.4.3 Sia f misurabile non negativa. In virtù dell'esercizio 5.3.8, l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq f(x)\}$ è $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$-misurabile, e lo stesso vale per $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y < f(x)\}$, come si verifica con la stessa dimostrazione svolta per quell'esercizio; dunque il grafico di f, differenza fra i due, è a sua volta $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$-misurabile. In particolare esso è $\mathcal{M}_2$-misurabile.
Viceversa, sia $V \subset \mathbb{R}$ un insieme non misurabile e sia $f = \chi_V$. Allora f non è misurabile, ma il suo grafico è l'insieme $(V \times \{1\}) \cup (V^c \times \{0\})$, il quale, pur non appartenendo a $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, appartiene a $\mathcal{M}_2$, essendo sottoinsieme dell'insieme $\{(x,1) : \ x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,0) : \ x \in \mathbb{R}\}$, che ha misura m_2 nulla.

Esercizio 5.4.4 Si ha $E' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in E\} = L^{-1}(\mathbb{R} \times E)$, ove $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è l'applicazione lineare $L(x,y) = (x, x-y)$, che è un diffeomorfismo: dunque L^{-1} preserva la m_2-misurabilità. Infatti, se $F \in \mathcal{M}_2$, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un aperto A ed un chiuso C tali che $C \subseteq F \subseteq A$ e $m_2(A \setminus C) < \varepsilon$; ne segue che $L^{-1}(A)$ è aperto, $L^{-1}(C)$ è chiuso, $L^{-1}(C) \subseteq L^{-1}(F) \subseteq L^{-1}(A)$ e $m_2(L(^{-1}A) \setminus L^{-1}(C)) = m_2(L^{-1}(A \setminus C)) < K\varepsilon$ con $K > 0$ opportuno (per la formula del cambiamento di variabili per integrali di Riemann, dimostrata in Analisi 2). Pertanto $L^{-1}(F) \in \mathcal{M}_2$.

Esercizio 5.4.5 (i) Se $f = \chi_E$, con $E \in \mathcal{M}$, allora $f(x-y) = \chi_{E'}$, ove $E' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in E\}$ e quindi vale la tesi grazie all'esercizio 5.4.4. Se $f \in \mathcal{S}$, la tesi vale per additività. Se f è misurabile e non negativa, la tesi è vera per approssimazione con funzioni semplici in modo crescente, e infine se f è misurabile la tesi segue dalla relazione $f = f^+ - f^-$.
(ii) Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Allora per il teorema di Tonelli

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f \star g(x)|\, dx &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y)\, dy \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) g(y)|\, dy dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, dx dy = \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \int_R |f(z)|\, dz dy,\end{aligned}$$

da cui $\|f \star g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$.
(iii) La convoluzione è commutativa:

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} f(z) g(x-z)\, dz = g \star f(x);$$

è associativa:

$$\begin{aligned}(f \star g) \star h(x) &= \int_{\mathbb{R}} f \star g(x-y) h(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y-z) g(z) h(y)\, dz dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x-u) g(u-y) h(y)\, du dy = \int_{\mathbb{R}} f(x-u) \int_{\mathbb{R}} g(u-y) h(y)\, dy du = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x-u) g \star h(u)\, du = f \star (g \star h)(x);\end{aligned}$$

è distributiva:

$$\begin{aligned} f\star(g+h)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)[g(y)+h(y)]\,dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}} f(x-y)h(y)\,dy = f\star g(x) + f\star h(x). \end{aligned}$$

(iv) Se $f \in C^k_c(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$ allora, per convergenza dominata da $\|f'\|_\infty |g(y)|$, si ha

$$\begin{aligned} (f\star g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x+h-y)-f(x-y)}{h}\,g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h-y)-f(x-y)}{h}\,g(y)\,dy = \\ &= (f'\star g)(x). \end{aligned}$$

Le derivate successive si ottengono analogamente.

Esercizio 5.4.6 Dobbiamo mostrare che

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}[f(t)-f(x)]\,dt\right| dx = 0.$$

Sia $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}[f(t)-f(x)]\,dt$. Allora, ponendo $s = \frac{t-x}{\varepsilon}$ si ha $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[f(x+\varepsilon s)-f(x)]\,ds$. Dunque dobbiamo mostrare che

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[f(x+\varepsilon s)-f(x)]\,ds\right| dx = 0,$$

e sarà sufficiente far vedere che

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|f(x+\varepsilon s)-f(x)|\,ds dx = 0.$$

La funzione $(x,s)\mapsto f(x+\varepsilon s)$ è misurabile, in quanto, come facile conseguenza dell'esercizio 5.4.4, gli insiemi $\{(x,s):\ x+\varepsilon s \in \{y\in\mathbb{R}: f(y)>\alpha\}\}$ sono misurabili per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$. Quindi $(x,s)\mapsto |f(x+\varepsilon s)-f(x)|$ è misurabile e non negativa in $]-1,1[\times\mathbb{R}$. Dunque, per il teorema di Tonelli,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{-1}^{1}|f(x+\varepsilon s)-f(x)|\,ds dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{\mathbb{R}}|f(x+\varepsilon s)-f(x)|\,dx ds.$$

Sia $\varphi_\varepsilon(s) = \int_{\mathbb{R}}|f(x+\varepsilon s)-f(x)|\,dx$: per la continuità delle traslazioni in $L^1(\mathbb{R})$ (esercizio 4.7.2), si ha $\varphi_\varepsilon(s)\to 0$ per ogni $s\in[-1,1]$. Inoltre

$$\varphi_\varepsilon(s) \le \int_{\mathbb{R}}|f(x+\varepsilon s)|\,dx + \int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx = 2\|f\|_1 \in L^1(-1,1).$$

Dunque, per convergenza dominata,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\|\varphi_\varepsilon\|_1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|f(x+\varepsilon s)-f(x)|\,ds dx = 0.$$

Esercizio 5.4.7 La funzione $f_\varepsilon = f\star\varphi_\varepsilon$ è di classe C^∞ in virtù dell'esercizio 5.4.5 (iv). Inoltre, detta B la palla unitaria,

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x)-f(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy - f(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)dy - f(x) = \\ &= \int_B f(x-\varepsilon z)\varphi(z)\,dz - f(x) = \int_B [f(x-\varepsilon z)-f(x)]\varphi(z)\,dz. \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon(x) - f(x)|dx &\leq \int_{\mathbb{R}}\int_B |f(x-\varepsilon z) - f(x)|\varphi(z)\,dzdx = \int_B\int_{\mathbb{R}} |f(x-\varepsilon z) - f(x)|\varphi(z)\,dxdz = \\ &= \int_B \varphi(z)\|f(\cdot - \varepsilon z) - f(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}\,dz.\end{aligned}$$

L'integrando tende a 0 per $\varepsilon \to 0^+$ grazie alla continuità delle traslazioni in L^1 (esercizio 4.7.2), ed è dominato dalla costante $2\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\|\varphi\|_\infty$, che è sommabile in B: quindi $f_\varepsilon \to f$ in $L^1(\mathbb{R})$.
Infine, se f è uniformemente continua, dato $\sigma > 0$ esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che

$$|f(x-\varepsilon z) - f(x)| \leq \sigma \qquad \forall z \in B, \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0].$$

Di conseguenza, lo stesso calcolo fatto in precedenza mostra che

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \int_B \varphi(z)|f(x-\varepsilon z) - f(x)|\,dz \leq \sigma \int_B \varphi(z)\,dz = \sigma \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0].$$

Esercizio 5.4.8 (i) Ovviamente $\lambda^* \geq 0$. Essa è monotona crescente perché è l'estremo inferiore di quantità che crescono rispetto all'inclusione. Verifichiamo la subadditività numerabile: se $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di sottoinsiemi di $X \times Y$, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste una successione $\{A_{nk} \times B_{nk}\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $A_{nk} \in \mathcal{F}$ e $B_{nk} \in \mathcal{G}$, tale che

$$E_k \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_{nk} \times B_{nk}), \qquad \lambda^*(E_k) > \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_{nk})\nu(B_{nk}) - \frac{\varepsilon}{2^k}\,.$$

Allora

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \subseteq \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} (A_{nk} \times B_{nk}),$$

e

$$\lambda^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) \leq \sum_{n,k\in\mathbb{N}} \mu(A_{nk})\nu(B_{nk}) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\lambda^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda^*(E_k) + 2\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε si ha la tesi.

(ii) Il fatto che la classe

$$\mathcal{C} = \{E \subseteq X \times Y :\ \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)\ \ \forall A \subseteq X \times Y\}$$

sia una σ-algebra si prova con la stessa dimostrazione svolta nel paragrafo 1.4. Inoltre, $\mathcal{C}$ contiene i rettangoli di $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$: infatti sia $E \times F \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ e sia $G \subseteq X \times Y$ un insieme qualunque. Scegliamo una successione $\{A_n \times B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$G \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \times B_n), \quad \lambda^*(G) > \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)\nu(B_n) - \varepsilon = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu \times \nu(A_n \times B_n) - \varepsilon.$$

Allora

$$\lambda^*(G \cap (E\times F)) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\times\nu((A_n\times B_n)\cap(E\times F)), \quad \lambda^*(G\cap(E\times F)^c) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\times\nu((A_n\times B_n)\cap(E\times F)^c),$$

da cui, essendo $\mu \times \nu$ una misura,

$$\lambda^*(G \cap (E \times F)) + \lambda^*(G \cap (E \times F)^c) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu \times \nu(A_n \times B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)\nu(B_n) < \lambda^*(G) + \varepsilon,$$

con $\varepsilon > 0$ arbitrario.

(iii) Sia $E \in \mathcal{C}$ con $\lambda(E) = \lambda^*(E) = 0$, e sia $N \subseteq E$. Per ogni $G \subseteq X \times Y$, essendo $\lambda^*(G \cap N) \leq \lambda^*(E) = 0$, risulta

$$\lambda^*(G \cap N^c) + \lambda^*(G \cap N) = \lambda^*(G \cap N^c) \leq \lambda^*(G),$$

da cui $N \in \mathcal{C}$.

(iv) Dobbiamo dimostrare che

$$\mathcal{C} = \overline{\mathcal{F} \times \mathcal{G}} = \{E \subseteq X \times Y : E = A \cup B,\ A \in \mathcal{F} \times \mathcal{G},\ B \subseteq F,\ F \in \mathcal{F} \times \mathcal{G},\ \mu \times \nu(F) = 0\}.$$

Sia $E \in \overline{\mathcal{F} \times \mathcal{G}}$: allora $E = A \cup B$, con $B \subseteq F$, $A, F \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ e $\mu \times \nu(F) = 0$; dunque $B \in \mathcal{C}$, come si è visto nella dimostrazione di (iii), e $A \in \mathcal{F} \times \mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}$, poiché $\mathcal{C}$ contiene i rettangoli (per (ii)) e $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ è la minima σ-algebra con tale proprietà. Perciò $E = A \cup B \in \mathcal{C}$.
Viceversa, sia $E \in \mathcal{C}$: allora $E^c \in \mathcal{C}$. Inoltre, per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ esiste $\{A_{nk} \times B_{nk}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ tale che

$$E^c \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_{nk} \times B_{nk}), \quad \lambda^*(E^c) > \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_{nk} \times B_{nk}) - \frac{1}{k};$$

quindi, posto $D = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^+} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_{nk} \times B_{nk})$, si ha $E^c \subseteq D$, $D \in \mathcal{C}$; inoltre, essendo

$$\lambda(E^c) \leq \lambda(D) \leq \liminf_{k\to\infty} \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_{nk} \times B_{nk})\right] \leq \lambda^*(E^c) = \lambda(E^c),$$

si conclude che $\lambda(D) = \lambda(E^c)$. Pertanto $\lambda(D \setminus E^c) = \lambda(D \cap E) = 0$. Dunque $E = D^c \cup (E \cap D)$, con $D^c \in \mathcal{C}$ e $\lambda(E \cap D) = 0$. Ne segue $E \in \overline{\mathcal{F} \times \mathcal{G}}$.
Infine, λ è completa ed è il completamento di $\mu \times \nu$: infatti, se $E \in \overline{\mathcal{F} \times \mathcal{G}}$, allora $E = A \cup B$ con $B \subseteq F$, $A, F \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ e $\mu \times \nu(F) = 0$: quindi

$$\overline{\mu \times \nu}(E) = \mu \times \nu(A) = \lambda(A) = \lambda(E).$$

Esercizio 5.4.9 Supponiamo per assurdo che $\lambda(\Delta) < \infty$: allora esiste una successione $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $R_n = A_n \times A_n$, e A_n insiemi disgiunti la cui unione è $[0, 1]$, tale che

$$\Delta \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n\,, \qquad m \times \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)\nu(A_n) < \lambda(\Delta) + \varepsilon.$$

Sia $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ l'insieme degli indici n per i quali $m(A_n) > 0$: allora se $n \in \mathbb{N}_1$ si ha $0 < m(A_n)\nu(A_n) < \lambda(\Delta) + \varepsilon < \infty$, e dunque deve essere $\nu(A_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}_1$, ossia A_n è un insieme finito per ogni $n \in \mathbb{N}_1$. Ma allora $m(A_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}_1$, ossia $\mathbb{N}_1 = \emptyset$. Ne segue $m(A_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; ma questo è assurdo, perché $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = [0, 1]$. Pertanto si ha $\lambda(\Delta) = \infty$.

Esercizio 5.4.10 Supponiamo che $f \in L^1(a, b)$: allora $G \in L^1(\,]a, b[\times]a, b[\,)$, in quanto

$$\int_a^b \int_a^b |G(x, y)|\, dxdy = \int_a^b \int_a^b |f(x)f(y)|\, dxdy = \|f\|^2_{L^1(a,b)}\,.$$

Viceversa, supooniamo $G \in L^1(\,]a, b[\times]a, b[\,)$: allora

$$\int_a^b |f(x)|\, dx \int_a^b |f(y)|\, dy = \int_a^b \int_a^b |G(x, y)|\, dxdy < \infty;$$

dunque $f \in L^1(a, b)$ e $\|f\|_{L^1(a,b)} = \|G\|^{1/2}_{L^1(\,]a,b[\times]a,b[\,)}$.

Capitolo 6

Derivazione

06

6.1 Teorema fondamentale del calcolo integrale

teofondci

Vogliamo analizzare le connessioni fra l'integrazione secondo Lebesgue in $\mathbb{R}$ e l'operazione di derivazione di funzioni reali: in particolare, cercheremo un analogo, per l'integrale di Lebesgue, di ciò che è il teorema fondamentale del calcolo integrale rispetto all'integrazione secondo Riemann. Ricordiamo che se f è una funzione continua in $[a,b]$, allora si ha

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \qquad \forall x \in [a,b],$$

e che se f è una funzione di classe C^1 su $[a,b]$ allora risulta

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,b].$$

In altre parole, le operazioni di derivata e di integrale commutano fra loro nell'ambito delle funzioni sufficientemente regolari in $[a,b]$ che si annullano nel primo estremo.
Sia ora $f \in L^1(a,b)$. Posto $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, ci domandiamo:

(i) F è derivabile, almeno q.o., in $[a,b]$?

(ii) sarà $F'(x) = f(x)$, almeno q.o., in $[a,b]$?

Viceversa, se g è derivabile in $[a,b]$ e la sua derivata è sommabile in $[a,b]$, ci chiediamo:

(iii) risulterà $\int_a^x g'(t)dt = g(x) - g(a)$ in $[a,b]$?

Per rispondere a queste domande dovremo introdurre alcune nozioni ed alcune classi di funzioni interessanti di per sé, sulle quali comunque insisteremo soltanto lo stretto necessario. Gli sviluppi matematici che partono da questa problematica sono innumerevoli, profondi ed assai raffinati, ma al di là della portata del nostro corso.

Esercizi 6.1

intchi

1. Stabilire in quali punti esiste la derivata della funzione

$$f(x) = \int_0^x \chi_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}[}(t)\ dt, \qquad x \in [0,1],$$

e calcolarla.

contmaider

2. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, sia f_n la funzione definita da

$$f_n(x) = \inf\left\{\left|x - \frac{m}{10^n}\right| : m \in \mathbb{N}\right\}, \qquad x \in [0,1].$$

Si provi che la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad x \in [0,1],$$

è continua, ma non è derivabile in alcun punto di $[0,1]$.
[**Traccia:** si verifichi che la serie è uniformemente convergente. Fissato poi $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 10^{-n}$, ove $\alpha_n \in \{0,1,\dots,9\}$ e lo sviluppo decimale è infinito, per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ si ponga

$$x_k = \begin{cases} x - 10^{-k} & \text{se } \alpha_k = 4,9 \\ x + 10^{-k} & \text{se } \alpha_k = 0,1,2,3,5,6,7,8. \end{cases}$$

Si verifichi che $f_n(x) = f_n(x_k)$ per $n \geq k$, mentre $f_n(x) - f_n(x_k) = \pm(x - x_k)$ per $n < k$. Se ne deduca che $f(x) - f(x_k) = p_k \cdot (x_k - x)$, ove p_k, qualunque sia il suo segno, è un intero con la stessa parità di k; si concluda che, per $k \to \infty$, $x_k \to x$ mentre $p_k = -\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}$ non ha limite.]

6.2 Punti di Lebesgue

ptLeb

Data una qualunque funzione f sommabile su $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, le sue proprietà di misurabilità e di sommabilità non cambiano se essa viene modificata su un insieme di misura nulla. In questo paragrafo ci poniamo il problema di trovare, se possibile, una versione "canonica" di f, che ne ottimizzi la regolarità buttando via, ad esempio, le discontinuità eliminabili.
Cominciamo con la seguente

puntoLeb

Definizione 6.2.1 *Sia f sommabile su $\mathbb{R}^N$. Un punto $x \in \mathbb{R}^N$ si dice* punto di Lebesgue *per f se $f(x) \in \mathbb{R}$ e*

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{m_N(B_r)} \int_{B(x,r)} |f(\cdot) - f(x)|\, dm_N = 0,$$

ove $B(x,r)$ è la palla di centro x e raggio r in $\mathbb{R}^N$ e $m_N(B_r)$ è la sua misura (ovviamente indipendente dal centro).

Osserviamo che se f è continua, allora ogni punto $x \in \mathbb{R}^N$ è di Lebesgue per f, ma per una generica f sommabile non è detto a priori che i punti di Lebesgue esistano. In effetti però si ha:

qoLeb **Teorema 6.2.2** *Se f è sommabile su $\mathbb{R}^N$, allora q.o. $x \in \mathbb{R}^N$ è punto di Lebesgue per f.*

Dimostrazione Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ introduciamo le seguenti quantità:

$$A_r f(x) = \frac{1}{m_N(B_r)} \int_{B(x,r)} |f(\cdot) - f(x)|\, dm_N, \qquad r > 0,$$

$$Af(x) = \limsup_{r \to 0^+} A_r f(x),$$

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m_N(B_r)} \int_{B(x,r)} |f|\, dm_N.$$

Dobbiamo dimostrare che

$$m_N(\{x \in \mathbb{R}^N : Af(x) > 0\}) = 0,$$

ed a questo scopo basterà provare che

$$m_N^*(\{x \in \mathbb{R}^N : Af(x) > t\}) = 0 \qquad \forall t > 0,$$

in quanto da questo fatto e dalla subadditività di m_N^* segue che l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^N : Af(x) > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^+} \left\{ x \in \mathbb{R}^N : Af(x) > \frac{1}{k} \right\}$$

ha misura esterna nulla (e quindi è misurabile, con misura nulla).
Sia dunque $t > 0$. Fissato $n \in \mathbb{N}^+$, sia $g_n \in C_c(\mathbb{R}^N)$ una funzione tale che

$$\|f - g_n\|_1 < \frac{1}{n}$$

(proposizione 4.7.5). Si noti che si ha $Ag_n \equiv 0$ in $\mathbb{R}^N$. Utilizzando il fatto che

$$Af(x) \le A(f - g_n)(x) + Ag_n(x) = A(f - g_n)(x),$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned} Af(x) &\le A(f-g_n)(x) \le \\ &\le \limsup_{r \to 0^+} \frac{1}{m_N(B_r)} \int_{B(x,r)} |f - g_n|\, dm_N + |f(x) - g_n(x)| \le \\ &\le M(f-g_n)(x) + |f(x) - g_n(x)| \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\begin{aligned} &m_N^*(\{x \in \mathbb{R}^N : Af(x) > 2t\}) \le \\ &\quad \le m_N(\{x \in \mathbb{R}^N : M(f-g_n)(x) > t\}) + m_N(\{x \in \mathbb{R}^N : |f(x) - g_n(x)| > t\})\,; \end{aligned}$$

osserviamo che i due insiemi a secondo membro sono misurabili, il secondo per la misurabilità di f e g_n, il primo perché è addirittura un aperto (esercizio 6.2.1).
Il secondo addendo si stima facilmente:

$$m_N(\{x \in \mathbb{R}^N : |f(x) - g_n(x)| > t\}) \leq \frac{1}{t}\|f - g_n\|_1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+;$$

per maggiorare il primo addendo ci occorre un enunciato apposito.

Proposizione 6.2.3 *Se $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $t > 0$, allora*

$$m_N(\{x \in \mathbb{R}^N : M\varphi(x) > t\}) \leq \frac{3^N}{t}\|\varphi\|_1.$$

Dimostrazione Sia K un arbitrario compatto contenuto nell'insieme $\{x \in \mathbb{R}^N : M\varphi(x) > t\}$. Ogni punto $x \in K$ è allora il centro di una palla aperta $B_x = B(x, r_x)$ tale che

$$\int_{B_x} |\varphi|\, dm_N > t \cdot m_N(B_x);$$

poiché le palle $\{B_x\}_{x\in K}$ ricoprono K, esisterà una famiglia finita di palle $\{B_{x_1}, \ldots, B_{x_p}\}$ estratta da $\{B_x\}_{x\in K}$, tale che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B_{x_i}.$$

Proveremo ora che si può trovare una ulteriore sottofamiglia $\{B_{x_{i_1}}, \ldots, B_{x_{i_k}}\}$ contenuta nella precedente, ove $B_{x_{i_j}} = B(x_{i_j}, r_{i_j})$, tale che:

(i) le palle $B(x_{i_j}, r_{i_j})$, $j = 1, \ldots k$, sono tutte disgiunte;

(ii) $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B(x_{i_j}, 3r_{i_j})$;

(iii) $m_N(K) \leq 3^N \sum_{j=1}^{k} m_N(B(x_{i_j}, r_{i_j}))$.

Per provare ciò, non è restrittivo supporre che si abbia $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_p$. Scegliamo $i_1 = 1$ e buttiamo via tutte le palle $B(x_i, r_i)$, con $i > i_1$, che intersecano $B(x_{i_1}, r_{i_1})$. Sia ora $B(x_{i_2}, r_{i_2})$ la prima palla, secondo l'ordinamento degli indici, che è disgiunta da $B(x_{i_1}, r_{i_1})$ (ammesso che ci sia). Nuovamente, buttiamo via le palle $B(x_i, r_i)$, con $i > i_2$, che intersecano $B(x_{i_2}, r_{i_2})$, e prendiamo come terza palla $B(x_{i_3}, r_{i_3})$ la prima che è disgiunta da $B_(x_{i_2}, r_{i_2})$. Procedendo in questa maniera, dopo un numero finito di passi si esauriscono le palle a disposizione ed il processo si arresta. Il risultato è la famiglia $\{B(x_{i_1}, r_{i_1}), \ldots, B(x_{i_k}, r_{i_k})\}$, che per costruzione è fatta di palle tra loro disgiunte. Dunque vale (i). Inoltre notiamo che se $B(x_i, r_i)$ è una della palle scartate, allora deve essere $B(x_i, r_i) \cap B(x_{i_j}, r_{i_j}) \neq \emptyset$ per qualche $j = 1, \ldots, k$ con $i > i_j$; in particolare si ha $r_i \leq r_{i_j}$ e di conseguenza $B(x_i, r_i) \subseteq B(x_{i_j}, 3r_{i_j})$. La stessa inclusione vale ovviamente se $B(x_i, r_i)$ è invece una delle palle $B(x_{i_j}, r_{i_j})$. Per l'arbitrarietà di $B(x_i, r_i)$, si conclude che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, r_i) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B(x_{i_j}, 3r_{i_j}),$$

ossia vale (ii). Infine, (iii) è facile conseguenza di (ii) in quanto

$$m_N(B(x_{i_j}, 3r_{i_j})) = 3^N m_N(B(x_{i_j}, r_{i_j})).$$

Dunque, denotando per semplicità con B_j le palle $B(x_{i_j}, r_{i_j})$,

$$m_N(K) \leq 3^N \sum_{j=1}^{k} m_N(B_j) \leq \frac{3^N}{t} \sum_{j=1}^{k} \int_{B_j} |\varphi| \, dm_N,$$

ed essendo le palle B_j disgiunte, si conclude che

$$m_N(K) \leq \frac{3^N}{t} \|\varphi\|_1.$$

Questa disuguaglianza vale per ogni compatto K contenuto nell'insieme $\{x \in \mathbb{R}^N : M\varphi(x) > t\}$; dato che ogni chiuso $F \subseteq \mathbb{R}^N$ è unione al più numerabile dei compatti $F \cap \overline{B(0,k)}$, $k \in \mathbb{N}^+$, la stessa disuguaglianza vale per ogni chiuso contenuto in $\{x \in \mathbb{R}^N : M\varphi(x) > t\}$. Poiché tale insieme è misurabile, ne segue la tesi. □

Torniamo alla dimostrazione del teorema. Per quanto abbiamo visto, possiamo dedurre che

$$\begin{aligned} &m_N^*(\{x \in \mathbb{R}^N : Af(x) > 2t\}) \leq \\ &\quad \leq m_N(\{x \in \mathbb{R}^N : M(f - g_n)(x) > t\}) + m_N(\{x \in \mathbb{R}^N : |f(x) - g_n(x)| > t\}) \leq \\ &\quad \leq \frac{1 + 3^N}{t} \|f - g_n\|_1, \end{aligned}$$

e dunque, per come si è scelta g_n ,

$$m_N^*(\{x \in \mathbb{R}^N : Af(x) > 2t\}) \leq \frac{1 + 3^N}{nt} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Passando al limite per $n \to \infty$ otteniamo

$$m_N^*(\{x \in \mathbb{R}^N : Af(x) > 2t\}) = 0,$$

da cui la tesi del teorema. □

Dal teorema precedente otteniamo subito la risposta alle domande (i) e (ii) che ci siamo posti alla fine del paragrafo 6.1.

Corollario 6.2.4 *Se f è sommabile in $\mathbb{R}$, e $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$, allora si ha $F'(x) = f(x)$ in ogni punto x di Lebesgue per f, ossia q.o. in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione Sia x un punto di Lebesgue per f. Per ogni successione reale infinitesima $\{\delta_n\}$, tale che $\delta_n \neq 0$ per ogni n, si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x + \delta_n) - F(x)}{\delta_n} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t)\, dt - f(x) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} |f(t) - f(x)|\, dt \leq \frac{1}{|\delta_n|} \int_{x-|\delta_n|}^{x+|\delta_n|} |f(t) - f(x)|\, dt = \\ &= \frac{2}{m(B(x, |\delta_n|))} \int_{B(x,|\delta_n|)} |f(t) - f(x)|\, dt \to 0 \quad \text{per } n \to \infty \end{aligned}$$

in virtù della definizione 6.2.1. Per l'arbitrarietà della successione $\{\delta_n\}$, si ha la tesi. □

derivint **Corollario 6.2.5** *Se f è sommabile in $[a,b]$, allora*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \qquad \text{q.o. in } [a,b].$$

Dimostrazione Basta prolungare f a 0 fuori di $[a,b]$ ed applicare il corollario precedente a $f\chi_{[a,b]}$. □

Osservazione 6.2.6 È possibile definire la nozione di punto di Lebesgue di un arbitrario elemento di $L^1(\mathbb{R}^N)$, e non solo di una arbitraria funzione sommabile su $\mathbb{R}^N$; in altre parole, la definizione 6.2.1 può essere modificata in modo da dipendere solo dalla classe di equivalenza in L^1, e non dal particolare rappresentante. Questa variante è descritta nell'esercizio 6.2.2.

Esercizi 6.2

Mfape 1. Provare che se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ allora per ogni $t > 0$ l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^N : Mf(x) > t\}$$

è aperto in $\mathbb{R}^N$.

rapcan 2. Sia $F \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Diciamo che un punto $x \in \mathbb{R}^N$ è di Lebesgue per F, e scriviamo $x \in L(F)$, se esistono $y_x \in \mathbb{R}$ e $g \in F$ tali che

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m_N(B_r)} \int_{B(x,r)} |g - y_x|\,dm_N = 0.$$

(i) Si provi che se $x \in L(F)$ allora il limite sopra scritto è 0 per ogni $g \in F$.

(ii) Si provi che se $g \in F$ e x è punto di Lebesgue per g secondo la definizione 6.2.1, allora $x \in L(F)$; se ne deduca che $\mathbb{R}^N \setminus L(F)$ ha misura nulla.

(iii) Posto

$$f(x) = \begin{cases} y_x & \text{se } x \in L(F) \\ 0 & \text{se } x \notin L(F), \end{cases}$$

si provi che $f \in F$; si provi anche che se $g \in F$ e x è punto di Lebesgue per g secondo la definizione 6.2.1, allora $f(x) = g(x)$; se ne deduca che $L(F)$ è l'unione di tutti i punti di Lebesgue delle $g \in F$, e che f è il rappresentante "canonico" della classe F.

fleMf 3. Dimostrare che se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ allora $f(x) \le Mf(x)$ q.o. in $\mathbb{R}^N$.

densitaE2 4. Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è un insieme misurabile, la *densità* di E nel punto x è definita da

$$\delta_E(x) = \lim_{r\to 0^+} \frac{m_N(E \cap B(x,r))}{m_N(B(x,r))}$$

nei punti dove il limite esiste (si confronti con l'esercizio 1.4.3). Si provi che

$$\delta_E(x) = 1 \quad \text{q.o. in } E, \qquad \delta_E(x) = 0 \quad \text{q.o. in } E^c.$$

6.3 Derivabilità delle funzioni monotone

derivLeb

La risposta alla domanda (iii) che ci siamo posti nel paragrafo 6.1 è, come vedremo, alquanto articolata. Per cominciare, analizziamo a questo riguardo il comportamento delle funzioni monotone.
Una funzione monotona in un intervallo $[a, b]$ può avere infiniti punti di discontinuità (ma mai più di un'infinità numerabile, come mostra l'esercizio 6.3.1): un esempio è la funzione $f(x) = \frac{[1/x]}{1+[1/x]}$, $x \in]0, 1]$. Nondimeno, le funzioni monotone godono di una proprietà sorprendente, espressa nel fondamentale e classico risultato che andiamo ad esporre.

teoderiv **Teorema 6.3.1 (di derivazione di Lebesgue)** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente. Allora f è derivabile q.o. in $[a, b]$, f' è sommabile in $[a, b]$ e*

$$\int_a^b f' \, dm \leq f(b) - f(a).$$

Dimostrazione Tutto si basa sul seguente lemma di ricoprimento:

Vitali **Lemma 6.3.2 (di Vitali)** *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con $m^*(E) < \infty$, e sia $\mathcal{F}$ una famiglia di intervalli chiusi dotati di queste proprietà:*

(a) *$\mathcal{F}$ è un ricoprimento di E;*

(b) *per ogni $x \in E$ e per ogni $\delta > 0$ esiste $I \in \mathcal{F}$ tale che $x \in I$ e $m(I) < \delta$.*

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $I_1, \ldots, I_N \in \mathcal{F}$, disgiunti, tali che

$$m^* \left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} I_i \right) < \varepsilon.$$

Dimostrazione Sia A un aperto contenente E, tale che $m(A) < \infty$; si può supporre allora che sia $I \subset A$ per ogni $I \in \mathcal{F}$. Costruiamo una sottofamiglia disgiunta $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}^+} \subseteq \mathcal{F}$ nel modo seguente. Scegliamo $I_1 \in \mathcal{F}$ in modo arbitrario; se $E \subseteq I_1$, ci fermiamo perché il singolo intervallo I_1 soddisfa la tesi del lemma, essendo $m^*(E \setminus I_1) = m^*(\emptyset) = 0$. Altrimenti, esiste $x \in E \setminus I_1$; quindi, per le proprietà (a) e (b), esiste almeno un intervallo $I \in \mathcal{F}$ tale che $I \cap I_1 = \emptyset$. Posto allora

$$k_1 = \sup\{m(I) : I \in \mathcal{F}, \ I \cap I_1 = \emptyset\},$$

si ha $0 < k_1 \leq m(A) < \infty$. Si può dunque scegliere $I_2 \in \mathcal{F}$, disgiunto da I_1, tale che

$$m(I_2) > \frac{1}{2} k_1 \, .$$

Induttivamente, costruiti $I_1, \ldots I_n$ disgiunti, e supposto che non risulti $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ (nel qual caso avremmo ottenuto la tesi del lemma), si osserva che per le proprietà (a) e (b) esistono intervalli $I \in \mathcal{F}$ disgiunti da $I_1, \ldots, I_n$. Dunque, posto

$$k_n = \sup\{m(I) : I \in \mathcal{F}, \ I \cap I_i = \emptyset \text{ per } i = 1, \ldots, n\},$$

risulta $0 < k_n \le k_{n-1} \le \cdots \le k_1 \le m(A) < \infty$. Pertanto si può scegliere $I_{n+1} \in \mathcal{F}$, disgiunto da $I_1, \ldots, I_n$ e tale che

$$m(I_{n+1}) > \frac{1}{2}\, k_n\,.$$

Se non accade mai che $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ (nel qual caso abbiamo la tesi del lemma), otteniamo una successione $\{I_n\} \subseteq \mathcal{F}$ costituita da intervalli disgiunti, l'n-esimo dei quali ha misura maggiore di $\frac{1}{2}k_{n-1}$. Poiché $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} I_n \subseteq A$, si ha anche $\sum_{n\in\mathbb{N}^+} m(I_n) \le m(A) < \infty$.
Sia ora $\varepsilon > 0$: esiste $N \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} m(I_n) < \frac{\varepsilon}{5}\,.$$

Poniamo $F = E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} I_i$, e dimostriamo che si ha $m^*(F) < \varepsilon$: ciò concluderà la dimostrazione. Sia $x \in F$: poiché x non appartiene al chiuso $\bigcup_{i=1}^{N} I_i$, esiste $I \in \mathcal{F}$ tale che $x \in I$ e $I \subseteq A \setminus \bigcup_{i=1}^{N} I_i$. D'altra parte, I deve intersecare qualcuno degli I_n con $n > N$, poiché in caso contrario per definizione di k_n avremmo

$$m(I) \le k_n < 2m(I_{n+1}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

e per $n \to \infty$ otteniamo $m(I) = 0$, il che è assurdo, dato che x appartiene all'intervallo I. Pertanto esiste $n > N$ tale che $I \cap I_n \neq \emptyset$ e $I \cap I_k = \emptyset$ per $k = 1, \ldots, n-1$. Detto x_n il punto medio di I_n, si ha allora

$$|x - x_n| \le m(I) + \frac{1}{2}\, m(I_n) \le k_{n-1} + \frac{1}{2}\, m(I_n) < 2m(I_n) + \frac{1}{2}\, m(I_n) = \frac{5}{2}\, m(I_n).$$

Indicando con J_n l'intervallo chiuso di centro x_n e ampiezza quintupla di quella di I_n, risulta quindi $x \in J_n$: abbiamo così mostrato che $F \subseteq \bigcup_{n=N+1}^{\infty} J_n$, da cui

$$m^*(F) \le \sum_{n=N+1}^{\infty} m(J_n) = 5 \sum_{n=N+1}^{\infty} m(I_n) < \varepsilon. \quad \square$$

Torniamo alla dimostrazione del teorema. Per $x \in]a,b[$ consideriamo i quattro *numeri derivati* (o *derivate del Dini*) così definiti:

$$D^+f(x) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,, \quad D_+f(x) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,,$$

$$D^-f(x) = \limsup_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,, \quad D_-f(x) = \liminf_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,.$$

Ovviamente si ha sempre $D_+f(x) \le D^+f(x)$ e $D_-f(x) \le D^-f(x)$; proveremo che per q.o. $x \in]a,b[$ risulta $D_+f(x) = D^+f(x) = D_-f(x) = D^-f(x)$ e che per q.o. $x \in]a,b[$ tale valore è finito: e dunque esso è la derivata $f'(x)$.
Per mostrare l'uguaglianza dei quattro numeri derivati basterà far vedere che

$$D^+f(x) \le D_-f(x) \text{ q.o. in }]a,b[\,, \qquad D^-f(x) \le D_+f(x) \text{ q.o. in }]a,b[\,;$$

proveremo in effetti soltanto la prima disuguaglianza perché l'altra è del tutto analoga (cambia solo il segno dell'incremento h).
Sia

$$E = \{x \in]a,b[: D^+f(x) > D_-f(x)\};$$

sarà allora $E = \bigcup_{\alpha,\beta\in\mathbb{Q}} E_{\alpha\beta}$, dove

$$E_{\alpha\beta} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \alpha \geq \beta \\ \{x \in]a,b[: D_-f(x) < \alpha < \beta < D^+f(x)\} & \text{se } \alpha < \beta; \end{cases}$$

quindi basterà mostrare che

$$m^*(E_{\alpha\beta}) = 0 \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \text{ con } \alpha < \beta.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$: esiste un aperto B, contenente $E_{\alpha\beta}$, tale che $m(B) < m^*(E_{\alpha\beta}) + \varepsilon$. Se $x \in E_{\alpha\beta}$, si ha

$$D_-f(x) = \liminf_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} < \alpha,$$

quindi per ogni $\delta > 0$ esiste $h_\delta \in]0,\delta]$ tale che

$$[x-h_\delta, x] \subset B, \qquad f(x) - f(x-h_\delta) < \alpha h_\delta\,.$$

La famiglia di intervalli $\{[x-h_\delta, x] :\ x \in E_{\alpha\beta},\ \delta > 0\}$ è un ricoprimento di $E_{\alpha\beta}$ che verifica le ipotesi del lemma di Vitali ed è costituito da sottoinsiemi di B. Dal lemma 6.3.2 segue che esistono $[x_1-h_1, x_1], \ldots, [x_N-h_N, x_N]$ disgiunti, tali che

$$\bigcup_{i=1}^N [x_i-h_i, x_i] \subset B, \qquad m^*\left(E_{\alpha\beta} \setminus \bigcup_{i=1}^N [x_i-h_i, x_i]\right) < \varepsilon.$$

Perciò l'aperto $A = \bigcup_{i=1}^N]x_i-h_i, x_i[$ è contenuto in B e verifica $m^*(E_{\alpha\beta} \setminus A) < \varepsilon$; inoltre si ha, applicando ad A la definizione di misurabilità:

$$m^*(A \cap E_{\alpha\beta}) = m^*(E_{\alpha\beta}) - m^*(E_{\alpha\beta} \setminus A) > m^*(E_{\alpha\beta}) - \varepsilon.$$

Consideriamo ora l'insieme $A \cap E_{\alpha\beta}$ e ripetiamo lo stesso ragionamento: se $y \in A \cap E_{\alpha\beta}$ si ha

$$D^+f(x) = \limsup_{k\to 0^+} \frac{f(x+k)-f(x)}{k} > \beta,$$

quindi per ogni $\delta > 0$ esiste $k_\delta \in]0,\delta]$ tale che

$$[y, y+k_\delta] \subset A, \qquad f(y+k_\delta) - f(y) > \beta k_\delta\,.$$

La famiglia di intervalli $\{[y, y+k_\delta] :\ y \in A \cap E_{\alpha\beta},\ \delta > 0\}$ è un ricoprimento di $A \cap E_{\alpha\beta}$ che verifica le ipotesi del lemma di Vitali ed è costituita da sottoinsiemi di A. Dal lemma 6.3.2 segue che esistono $[y_1, y_1+k_1], \ldots, [y_M, y_M+k_M]$ disgiunti, tali che

$$\bigcup_{j=1}^M [y_j, y_j+k_j] \subset A, \qquad m^*\left((A \cap E_{\alpha\beta}) \setminus \bigcup_{j=1}^M [y_j, y_j+k_j]\right) < \varepsilon.$$

Perciò l'aperto $C = \bigcup_{j=1}^{M}]y_j, y_j + k_j[$ è contenuto in A e verifica $m^*((A \cap E_{\alpha\beta}) \setminus C) < \varepsilon$. Tenuto conto della precedente stima per $m^*(A \cap E_{\alpha\beta})$, ne deduciamo, per la misurabilità di C,

$$\begin{aligned} m(C) &\geq m^*(C \cap A \cap E_{\alpha\beta}) = m^*(A \cap E_{\alpha\beta}) - m^*((A \cap E_{\alpha\beta}) \setminus C) > \\ &> m^*(A \cap E_{\alpha\beta}) - \varepsilon > m^*(E_{\alpha\beta}) - 2\varepsilon, \end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{j=1}^{M} (f(y_j + k_j) - f(y_j)) > \beta \sum_{j=1}^{M} k_j = \beta m(C) \geq \beta(m^*(E_{\alpha\beta}) - 2\varepsilon).$$

D'altra parte, essendo $C \subseteq A$, per ogni fissato $j \in \{1, \ldots, M\}$ esiste un unico $i \in \{1, \ldots, N\}$ tale che $]y_j, y_j + k_j[\subseteq]x_i - h_i, x_i[$; dal fatto che f è crescente segue allora

$$\sum_{j=1}^{M} (f(y_j + k_j) - f(y_j)) \leq \sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - f(x_i - h_i)),$$

il che implica

$$\beta(m^*(E_{\alpha\beta}) - 2\varepsilon) < \alpha(m^*(E_{\alpha\beta}) + \varepsilon),$$

cioè

$$m^*(E_{\alpha\beta}) < \varepsilon \frac{\alpha + 2\beta}{\beta - \alpha}\,.$$

Poiché ε è arbitrario, si ottiene che $m^*(E_{\alpha\beta}) = 0$. Ne segue che $E = \bigcup_{\alpha,\beta \in \mathbb{Q}} E_{\alpha\beta}$ ha misura nulla, ossia risulta $D^+ f(x) \leq D_- f(x)$ q.o. in $]a, b[$, come si voleva dimostrare. In modo analogo, come già osservato, si trova che $D^- f(x) \leq D_+ f(x)$ q.o. in $]a, b[$. Abbiamo provato che per q.o. $x \in]a, b[$ esiste la funzione

$$g(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}\,;$$

resta da far vedere che $|g(x)| < \infty$ per q.o. $x \in]a, b[$.
Dopo aver esteso la funzione f oltre b ponendo $f(x) = f(b)$ per ogni $x \geq b$, definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}^+$

$$g_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}\,, \qquad x \in [a, b].$$

Chiaramente, $g_n(x) \to g(x)$ q.o. in $[a, b]$; inoltre le g_n sono misurabili (perché tale è f, essendo monotona), e dunque g è una funzione misurabile, oltre che non negativa dal momento che f è crescente. Dal lemma di Fatou segue perciò, ricordando che

$f(x) = f(b)$ per $x > b$,

$$\begin{aligned}
\int_a^b g\,dm &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}\,dm = \\
&= \liminf_{n\to\infty} n\left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f\,dm - \int_a^b f\,dm\right] = \\
&= \liminf_{n\to\infty} n\left[\int_{b}^{b+\frac{1}{n}} f\,dm - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f\,dm\right] \leq \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} n\left[\int_{b}^{b+\frac{1}{n}} f(b)\,dm - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(a)\,dm\right] = f(b) - f(a).
\end{aligned}$$

Quindi g è sommabile in $[a,b]$ e in particolare g è q.o. finita in $[a,b]$. Ciò significa che f è q.o. derivabile in $[a,b]$ e che f' è sommabile: in particolare

$$\int_a^b f'dm \leq f(b) - f(a).$$

Ciò conclude la dimostrazione del teorema di Lebesgue. □

Osservazioni 6.3.3 (1) La disuguaglianza $\int_a^b f'\,dm \leq f(b) - f(a)$ può essere stretta, come si vedrà; nel paragrafo 6.5 caratterizzeremo la classe delle funzioni per le quali vale il segno di uguaglianza.

(2) Se f è monotona decrescente, applicando il teorema di Lebesgue a $-f$ si ottiene che f è derivabile q.o., che f' è sommabile e che $\int_a^b f'dm \geq f(b) - f(a)$.

Esercizi 6.3

numpdisc

1. Si provi che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione monotona, allora f ha al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità. Si provi inoltre che se f è crescente e continua a sinistra, e μ è la misura di Lebesgue-Stieltjes associata a g (esempio 2.1.3 (3)), allora f è continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ se e solo se $\mu(\{x_0\}) = 0$.

funzstrana

2. Si costruisca una funzione $f : \mathbb{R} \to]0,1[$ strettamente crescente, continua a destra, continua nei punti irrazionali e discontinua nei punti razionali.

gloccost

3. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente, continua a sinistra e localmente costante, tranne che in un'infinità numerabile di punti; provare che, detta μ la misura di Lebesgue-Stieltjes associata a g, ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è μ-misurabile.

nude1

4. Si calcolino i quattro numeri derivati nel punto 0 per la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

nddiv 5. Si verifichi che, assegnati $a < b$ e $c < d$, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax \sin^2 \frac{1}{x} + bx \cos^2 \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ cx \sin^2 \frac{1}{x} + dx \cos^2 \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

soddisfa $D_+f(0) = a$, $D^+f(0) = b$, $D_-f(0) = c$, $D^-f(0) = d$.

nude2 6. Si calcolino i quattro numeri derivati nel generico punto $x \in \mathbb{R}$ per la funzione $\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$.

nudemis 7. Provare che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua, allora le funzioni D^+f, D_+f, D^-f e D_-f sono misurabili rispetto alla misura di Lebesgue.

nudeeqf' 8. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dimostrare che se esiste $f'(x)$, allora

$$D^+(f + g)(x) = f'(x) + D^+g(x),$$

e che analoghi risultati valgono per gli altri numeri derivati.

nudeneqf' 9. Fornire un esempio nel quale risulti $D^+(f + g) \neq D^+f + D^+g$.

6.4 Funzioni a variazione limitata

BV

Questo paragrafo è dedicato alla descrizione di un'importante classe di funzioni: quelle a variazione limitata.

funzBV **Definizione 6.4.1** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Per ogni partizione $\pi : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ di $[a, b]$ poniamo*

$$t_a^b(f, \pi) = \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \ ;$$

la quantità

$$T_a^b(f) = \sup_{\pi} t_a^b(f, \pi)$$

si chiama variazione totale *di f in $[a, b]$. Se $T_a^b(f) < \infty$ diciamo che f è a* variazione limitata *in $[a, b]$, e scriviamo $f \in BV[a, b]$* (bounded variation).

baseBV **Osservazioni 6.4.2 (1)** Ogni funzione monotona in $[a, b]$ è a variazione limitata in $[a, b]$ e si ha

$$T_a^b(f) = |f(b) - f(a)|.$$

(2) $BV[a, b]$ è uno spazio vettoriale: infatti se $f, g \in BV[a, b]$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha, come è facile verificare,

$$T_a^b(\lambda f + \mu g) \leq |\lambda| T_a^b(f) + |\mu| T_a^b(g).$$

(3) Ogni funzione di $BV[a,b]$ è limitata in $[a,b]$: infatti se $f \in BV[a,b]$ si ha

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \leq \\ &\leq |f(a)| + |f(b) - f(x)| + |f(x) - f(a)| \leq |f(a)| + T_a^b(f). \end{aligned}$$

D'altra parte ovviamente esistono funzioni limitate che non sono a variazione limitata: ad esempio la funzione χ_A, ove $A = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$, è limitata in $[0,1]$ ma non sta in $BV[0,1]$. Infatti per ogni $N \in \mathbb{N}^+$, scelta la partizione $\pi_N : 0 < \frac{1}{N} < \frac{1}{N-1/2} < \frac{1}{N-1} < \frac{1}{N-3/2} < \ldots < \frac{1}{2} < \frac{1}{2-1/2} < 1$, l'incremento di f da un nodo al successivo è sempre ± 1, e quindi $t_0^1(\chi_A, \pi_N) = 2N + 1$; ne segue $T_0^1(\chi_A) = +\infty$.

La variazione totale di una funzione è additiva rispetto alle decomposizioni di $[a,b]$ in sottointervalli adiacenti. Si ha infatti:

addvariaz **Proposizione 6.4.3** *Se $f \in BV[a,b]$, allora*

$$T_a^b(f) = T_a^c(f) + T_c^b(f) \qquad \forall c \in]a,b[\,.$$

Dimostrazione **($\leq$)** Per ogni partizione π di $[a,b]$, l'aggiunta del nodo c determina due partizioni π_1 di $[a,c]$ e π_2 di $[c,b]$, la cui unione è una partizione π' più fine di π. Si ha allora

$$t_a^b(f,\pi) \leq t_a^b(f,\pi') = t_a^c(f,\pi_1) + t_c^b(f,\pi_2) \leq T_a^c(f) + T_c^b(f),$$

e quindi, per l'arbitrarietà di π,

$$T_a^b(f) \leq T_a^c(f) + T_c^b(f).$$

($\geq$) Per ogni coppia di partizioni π_1 di $[a,c]$ e π_2 di $[c,b]$, la loro unione è una partizione π di $[a,b]$ contenente il nodo c: ne segue

$$t_a^c(f,\pi_1) + t_c^b(f,\pi_2) = t_a^b(f,\pi) \leq T_a^b(f),$$

e per l'arbitrarietà di π_1 e π_2,

$$T_a^c(f) + T_c^b(f) \leq T_a^b(f). \quad \square$$

L'additività della variazione totale ci permette di arrivare al risultato che segue, che è il punto chiave della teoria delle funzioni a variazione limitata.

ovdiffcresc **Corollario 6.4.4** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Allora $f \in BV[a,b]$ se e solo se f è differenza di due funzioni crescenti in $[a,b]$.*

Dimostrazione **($\Longleftarrow$)** Poiché le funzioni crescenti in $[a,b]$ sono a variazione limitata, la tesi segue dal fatto che $BV[a,b]$ è uno spazio vettoriale.

($\Longrightarrow$) La funzione $x \mapsto T_a^x(f)$ è crescente in $[a,b]$: infatti, per la proposizione precedente,

$$T_a^y(f) = T_a^x(f) + T_x^y(f) \geq T_a^x(f) \qquad \text{se } y > x.$$

Si osservi inoltre che $T_a^a(f) = 0$.

D'altra parte, anche la funzione $x \mapsto T_a^x(f) - f(x)$ è crescente in $[a,b]$, perché se $y > x$ si ha, ancora dalla proposizione 6.4.3,

$$f(y) - f(x) \le |f(y) - f(x)| \le T_x^y(f) = T_a^y(f) - T_a^x(f).$$

Quindi, scrivendo

$$f(x) = T_a^x(f) - (T_a^x(f) - f(x)),$$

si ha la tesi. □

Da questo corollario e dal teorema di derivazione di Lebesgue (teorema 6.3.1) segue subito:

BVderqo **Corollario 6.4.5** *Ogni funzione $f \in BV[a,b]$ è derivabile q.o., e la derivata f' è sommabile in $[a,b]$.* □

Esercizi 6.4

BVnorma 1. Si provi che

$$\|f\|_{BV[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + T_a^b(f)$$

è una norma nello spazio $BV[a,b]$, e che $BV[a,b]$ con questa norma è completo. Si provi inoltre che $BV[a,b]$ non è chiuso in $\mathcal{L}^\infty(a,b)$.

tantevt 2. Calcolare la variazione totale delle seguenti funzioni:

(i) $f(x) = x(x^2-1), \quad x \in [-2,2]$;

(ii) $f(x) = 3\chi_{[0,1/2]}(x) - 6\chi_{[1/4,3/4]}(x), \quad x \in [0,1]$;

(iii) $f(x) = \sin x, \quad x \in [0,2\pi]$;

(iv) $f(x) = x - [x], \quad x \in [-50,50]$.

gofnoBV 3. Sia $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$, e sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{se } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right], \ n \ge 2, \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \bigcup_{n=2}^\infty \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right]. \end{cases}$$

(i) Provare che $f, g \in BV[0,1]$ e calcolarne le rispettive variazioni totali.

(ii) Dimostrare che $g \circ f \notin BV[0,1]$.

maxminBV 4. Siano $f, g \in BV[a,b]$. Provare che $f \vee g, f \wedge g \in BV[a,b]$.

grafrett 5. Sia $f \in C[a,b]$. Si provi che $f \in BV[a,b]$ se e solo se il grafico Γ di f è una curva rettificabile, e che in tal caso si ha

$$T_a^b(f) \le \ell(\Gamma) \le T_a^b(f) + b - a.$$

stimegraf 6. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e monotona e sia Γ_f il suo grafico.

(i) Si verifichi che

$$\sqrt{(b-a)^2+|f(b)-f(a)|^2} \le \ell(\Gamma_f) \le b-a+|f(b)-f(a)|.$$

(ii) Si determinino le funzioni f continue e monotone per le quali

$$\ell(\Gamma_f) = \sqrt{(b-a)^2+|f(b)-f(a)|^2}.$$

(iii) Si trovi una classe di funzioni f continue e monotone per le quali

$$\ell(\Gamma_f) = b-a+|f(b)-f(a)|.$$

contfBV 7. Sia $f \in BV[a,b]$; si dimostri che f è continua in $x_0 \in [a,b]$ se e solo se la funzione $x \mapsto T_a^x(f)$ è continua in x_0.

fgBV 8. Siano $f, g \in BV[a,b]$. Si provi che $fg \in BV[a,b]$ e che (v. esercizio 6.4.1)

$$\|fg\|_{BV[a,b]} \le \|f\|_{BV[a,b]} \|g\|_{BV[a,b]}.$$

1/fBV 9. Sia $f \in BV[a,b]$. Si provi che $\frac{1}{f} \in BV[a,b]$ se e solo se $\inf_{[a,b]} |f| > 0$, e che in tal caso

$$T_a^b\left(\frac{1}{f}\right) \le \frac{1}{\left[\inf_{[a,b]} |f|\right]^2} T_a^b(f).$$

f/gBV 10. Siano $f, g \in BV[a,b]$, con $g \neq 0$ in $[a,b]$. Provare che se $\inf_{[a,b]} |g| > 0$ allora $\frac{f}{g} \in BV[a,b]$. È vero il viceversa?

fogBV 11. Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [c,d] \to [a,b]$, con g monotona. Provare che se $f \in BV[a,b]$, allora $f \circ g \in BV[c,d]$.

6.5 Funzioni assolutamente continue

AC

Introduciamo adesso una classe di funzioni all'interno della quale sarà possibile dare una risposta positiva alla domanda (iii) del paragrafo 6.1.

funzac **Definizione 6.5.1** *Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è detta* assolutamente continua *in $[a,b]$, e scriveremo $f \in AC[a,b]$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni collezione finita di intervalli disgiunti $]\alpha_i, \beta_i[$, $i = 1, \dots, k$, contenuti in $[a,b]$ e verificanti $\sum_{i=1}^k (\beta_i - \alpha_i) < \delta$, risulta $\sum_{i=1}^k |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon$.*

ossAC **Osservazioni 6.5.2 (1)** È immediato verificare che se f è assolutamente continua, allora la condizione richiesta dalla definizione è soddisfatta anche nel caso di famiglie *infinite* di intervalli disgiunti.

(2) Se f è assolutamente continua in $[a,b]$, allora ovviamente f è anche uniformemente continua in $[a,b]$; il viceversa, come vedremo nell'esempio 6.5.6, non è vero.

(3) Se $g \in L^1(a,b)$, allora la funzione $f(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ appartiene ad $AC[a,b]$, a causa dell'assoluta continuità dell'integrale (proposizione 4.5.6).

(4) La definizione di assoluta continuità si può dare, in modo del tutto analogo, per funzioni definite in intervalli non compatti, o su tutto $\mathbb{R}$.

Tutte le funzioni assolutamente continue in $[a,b]$ hanno necessariamente variazione limitata in $[a,b]$, come mostra la seguente

ACcBV **Proposizione 6.5.3** *Risulta* $AC[a,b] \subset BV[a,b]$.

L'inclusione è ovviamente propria, dato che esistono funzioni discontinue a variazione limitata: ad esempio, $\chi_{[1,2]} \in BV[0,3]$ con $T_0^3(\chi_{[1,2]}) = 2$.

Dimostrazione Sia $f \in AC[a,b]$. Scelto $\varepsilon = 1$, sia δ il corrispondente numero con il quale f verifica la definizione 6.5.1. Dividiamo $[a,b]$ in N parti uguali di ampiezza $\frac{b-a}{N} < \delta$, e poniamo $x_n = a + \frac{n}{N}(b-a)$, $0 \le n \le N$. Risulta allora, per costruzione,

$$T_{x_n}^{x_{n+1}}(f) \le 1, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Dunque, per la proposizione 6.4.3 si ha

$$T_a^b(f) = \sum_{n=0}^{N-1} T_{x_n}^{x_{n+1}}(f) \le N < \infty. \quad \square$$

In particolare, dal corollario 6.4.5 segue che ogni funzione assolutamente continua in $[a,b]$ è derivabile q.o. con derivata sommabile in $[a,b]$. Verificheremo fra breve che per tali funzioni f l'integrale su $[a,b]$ della derivata vale esattamente $f(b) - f(a)$. Intanto osserviamo che il risultato del corollario 6.4.4 si può ulteriormente precisare:

acdiffcresc **Corollario 6.5.4** *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Allora* $f \in AC[a,b]$ *se e solo se* f *è differenza di due funzioni assolutamente continue e crescenti in* $[a,b]$.

Dimostrazione ($\Longleftarrow$) È sufficiente osservare che $AC[a,b]$ è uno spazio vettoriale.
($\Longrightarrow$) Per il corollario 6.4.4 si ha

$$f(x) = T_a^x(f) - (T_a^x(f) - f(x)),$$

e le due funzioni a secondo membro sono crescenti in $[a,b]$. Basterà allora provare che $x \mapsto T_a^x(f)$ appartiene ad $AC[a,b]$.
Sia $\varepsilon > 0$ e sia δ il numero fornito dalla definizione 6.5.1 applicata a f. Sia inoltre $\{\,]\alpha_i, \beta_i[\,\}_{1 \le i \le N}$ una famiglia di sottointervalli disgiunti di $[a,b]$ con $\sum_{i=1}^N (\beta_i - \alpha_i) < \delta$, e per ogni i sia π_i una partizione di $[\alpha_i, \beta_i]$; allora risulta, grazie all'assoluta continuità di f,

$$\sum_{i=1}^N t_{\alpha_i}^{\beta_i}(f, \pi_i) \le \varepsilon \ ;$$

di conseguenza, per l'arbitrarietà delle partizioni π_i,

$$\sum_{i=1}^N \left(T_a^{\beta_i}(f) - T_a^{\alpha_i}(f)\right) = \sum_{i=1}^N T_{\alpha_i}^{\beta_i}(f) \le \varepsilon,$$

e ciò prova la tesi. $\square$

Il teorema che segue caratterizza la classe delle funzioni assolutamente continue proprio in termini della proprietà (iii) del paragrafo 6.1.

intder **Teorema 6.5.5** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sono fatti equivalenti:*

(i) *$f \in AC[a, b]$;*

(ii) *f è derivabile q.o. in $[a, b]$, f' è sommabile in $[a, b]$ e*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt \qquad \forall x \in [a, b].$$

Dimostrazione **[(i) $\Longrightarrow$ (ii)]** Sappiamo già che f è derivabile q.o. in $[a, b]$; dobbiamo solo provare l'uguaglianza sopra scritta. A questo scopo, ricordando il corollario 6.5.4, possiamo supporre che f sia crescente in $[a, b]$.
Essendo f crescente, esiste la misura di Lebesgue-Stieltjes μ_f associata a f, introdotta nell'esempio 2.1.3(3) e ben definita grazie alla continuità di f: proviamo che μ_f è definita su $\mathcal{M}$ e che $\mu_f \ll m$ (definizione 4.5.1).
Sia $E \in \mathcal{M}$ con $m(E) = 0$. Fissiamo $\varepsilon > 0$; scelto $\delta > 0$ in modo da soddisfare la definizione di assoluta continuità di f, esiste un aperto $A \supseteq E$ tale che $m(A) < \delta$. Per l'esercizio 1.3.4, sarà $A = \bigcup_{n\in N}]\alpha_n, \beta_n[$ con gli $]\alpha_n, \beta_n[$ disgiunti; poiché f è crescente, da $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\beta_n - \alpha_n) < \delta$ segue $\sum_{n\in\mathbb{N}}(f(\beta_n) - f(\alpha_n)) < \varepsilon$. Quindi

$$\mu_f^*(E) \le \mu_f(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_f([\alpha_n, \beta_n[\,) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (f(\beta_n) - f(\alpha_n)) < \varepsilon.$$

Dato che ε è arbitrario, si ottiene $\mu_f^*(E) = 0$; quindi, per la completezza di μ_f, si ha $E \in \mathcal{M}_f$ e $\mu_f(E) = 0$. Poiché ogni insieme $G \in \mathcal{M}$ è l'unione di un Boreliano B e di un insieme $E \in \mathcal{M}$ di misura nulla, ne segue (ricordando che $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}_f$) $G = B \cup E \in \mathcal{M}_f$; quindi $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_f$, ossia μ_f è definita su $\mathcal{M}$. Inoltre, come si è visto, se $m(E) = 0$ allora $\mu_f(E) = 0$. Ciò prova che $\mu_f \ll m$.
Adesso facciamo uso del teorema di Radon-Nikodým (teorema 4.5.9), che certamente vale per misure finite: ne deduciamo che esiste una funzione $h \in L^1(a, b)$, q.o. non negativa, tale che

$$\mu_f(E) = \int_E h(t)\,dt \qquad \forall E \in \mathcal{M}.$$

In particolare

$$f(x) - f(a) = \mu_f([a, x[\,) = \int_a^x h(t)\,dt \qquad \forall x \in [a, b];$$

applicando allora il corollario 6.2.5 si ottiene che f è derivabile q.o. in $[a, b]$ (cosa che già sapevamo), e che $f' = h$ q.o. in $[a, b]$ (fatto nuovo). Quindi possiamo sostituire nell'integrale h con f', e pertanto vale (ii).
[(ii) $\Longrightarrow$ (i)] La misura μ, definita da $\mu(E) = \int_E |f'(t)|\,dt$, è assolutamente continua rispetto a m in quanto $f' \in L^1(a, b)$; dato che entrambe le misure sono finite, in virtù della proposizione 4.5.5 per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$m(E) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \int_E |f'(t)|\,dt < \varepsilon.$$

In particolare, quindi, se $\{\,]\alpha_i,\beta_i[\,\}_{i=1,\dots,k}$ è una collezione finita di sottointervalli disgiunti di $[a,b]$ tale che $\sum_{i=1}^k(\beta_i-\alpha_i)<\delta$, risulterà

$$\sum_{i=1}^k |f(\beta_i)-f(\alpha_i)| = \left|\sum_{i=1}^k \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f'(t)\,dt\right| \le \sum_{i=1}^k \int_{\alpha_i}^{\beta_i} |f'(t)|\,dt < \varepsilon,$$

il che mostra che $f\in AC[a,b]$. Ciò prova (i). $\square$

Non tutte le funzioni continue in $[a,b]$ sono assolutamente continue in $[a,b]$, come mostra il sorprendente esempio che segue: esistono funzioni continue, crescenti, q.o. derivabili, con derivata q.o. nulla, e tuttavia non costanti. Funzioni di questo tipo non possono essere assolutamente continue a causa del teorema 6.5.5, ma sono certamente a variazione limitata: per tali funzioni, in particolare, la disuguaglianza del teorema 6.3.1 è stretta.

monnonac **Esempio 6.5.6** Sia C l'insieme ternario di Cantor $C_{1/3}$ introdotto nel paragrafo 1.6: si ha

$$C=\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} E_n, \qquad E_n\supset E_{n+1}, \qquad E_n=\bigcup_{k=1}^{2^n} J_{kn},$$

dove gli J_{kn} sono intervalli chiusi disgiunti con $m(J_{kn})=3^{-n}$. Definiamo per ogni $n\in\mathbb{N}^+$

$$g_n(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^n \chi_{E_n}(x), \qquad f_n(x)=\int_0^x g_n(t)\,dt, \qquad x\in[0,1].$$

Si noti che

$$\int_{J_{kn}} g_n(t)dt=\left(\frac{3}{2}\right)^n m(J_{kn})=\frac{1}{2^n},$$

$$\int_{J_{kn}} g_{n+1}(t)\,dt=\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} m(J_{kn}\cap E_{n+1})=\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\frac{2}{3^{n+1}}=\frac{1}{2^n}\,.$$

Risulta allora

$$f_n(0)=0, \quad f_n(1)=\left(\frac{3}{2}\right)^n m(E_n)=1;$$

inoltre se $x\in E_n^c$ vale l'uguaglianza

$$f_{n+1}(x)=\int_0^x g_{n+1}(t)\,dt=\int_0^x g_n(t)\,dt=f_n(x),$$

perché si integra solo sugli intervalli J_{kn} contenuti in $[0,x]$, dove gli integrali di g_n e g_{n+1} coincidono; invece se $x\in E_n$, ad esempio $x\in J_{kn}$, vale la stima

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x)-f_n(x)| &= \left|\int_0^x [g_{n+1}(t)-g_n(t)]\,dt\right| \le \int_{J_{kn}} |g_{n+1}(t)-g_n(t)|\,dt \le \\ &\le \int_{J_{kn}} [g_{n+1}(t)+g_n(t)]\,dt=\frac{1}{2^{n-1}}, \end{aligned}$$

perché gli integrali fra 0 ed il primo estremo di J_{kn} si cancellano. In definitiva

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

cosicché la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente in $[0,1]$ ad una funzione f. Poiché le f_n sono continue e crescenti, anche f è continua e crescente, e verifica $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Inoltre, dato che f_n è costante su ogni intervallo disgiunto da E_n, si ha $f_n' = 0$ in E_n^c ed a maggior ragione $f_m' = 0$ in E_n^c per ogni $m \ge n$, visto che in tal caso $E_m^c \supset E_n^c$; quindi se I è un intervallo contenuto in $\bigcup_{n=1}^\infty E_n^c$, ossia disgiunto da C, si ha $f_n \to f$ uniformemente in I e $f_n' = 0$ definitivamente in I: ciò implica che f è derivabile con $f' = 0$ in I. Pertanto f è derivabile con $f' = 0$ in C^c, ossia q.o. in $[0,1]$, dal momento che C ha misura nulla.
Come si è già osservato, $f \notin AC[0,1]$ perché

$$1 = f(1) - f(0) > \int_0^1 f'(t)\ dt = 0.$$

La funzione f è chiamata *funzione di Lebesgue* o anche, più informalmente, "scala del diavolo".

Esercizi 6.5

limAC 1. Sia $\{f_n\} \subset AC[a,b]$ tale che $f_n(x) \to f(x)$ puntualmente in $[a,b]$, $f_n'(x) \to g(x)$ q.o. in $[a,b]$ e $|f_n'| \le |h| \in L^1(a,b)$. Si provi che $f \in AC[a,b]$ con $f' = g$ q.o. in $[a,b]$, e che se g è continua in un punto x_0 allora f è derivabile in x_0 con $f'(x_0) = g(x_0)$.

ACnum 2. Dimostrare che una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ appartiene ad $AC[a,b]$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni collezione numerabile di intervalli disgiunti $]\alpha_i, \beta_i[$, $i \in \mathbb{N}$, contenuti in $[a,b]$ e verificanti $\sum_{i=1}^\infty (\beta_i - \alpha_i) < \delta$, risulta $\sum_{i=1}^\infty |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon$.

ACcresc 3. Sia $f \in AC[a,b]$. Provare che f è crescente in $[a,b]$ se e solo se $f' \ge 0$ q.o. in $[a,b]$. Questo risultato vale anche per $f \in BV[a,b]$?

vtAC 4. Sia $f \in BV[a,b]$. Si provi che $f \in AC[a,b]$ se e solo se $x \mapsto T_a^x(f)$ appartiene ad $AC[a,b]$.

fvg 5. Provare che se $f, g \in AC[a,b]$, allora $f \vee g, f \wedge g \in AC[a,b]$.

ACperAC 6. Si dimostri che se $f, g \in AC[a,b]$ allora $fg \in AC[a,b]$, e che se inoltre $g \neq 0$ in $[a,b]$, allora $\frac{f}{g} \in AC[a,b]$.

misLSdiAC 7. Sia f crescente ed assolutamente continua in $[a,b]$. Posto $f(x) = f(b)$ per $x > b$ e $f(x) = f(a)$ per $x < a$, si verifichi che la misura di Lebesgue-Stieltjes μ_f su $\mathbb{R}$ è data da

$$\mu_f(E) = \int_E f'(t)\, dt \qquad \forall E \in \mathcal{M}.$$

ACmis0 8. Sia $f \in AC[a,b]$; si provi che per ogni $E \subseteq [a,b]$ misurabile con $m(E) = 0$ si ha $m^*(f(E)) = 0$; si provi inoltre che per ogni $E \subseteq [a,b]$ misurabile l'insieme $f(E)$ è misurabile.

ACLSAC 9. Sia f crescente e continua a sinistra in $[a,b]$ e sia μ_f la misura di Lebesgue-Stieltjes associata a f. Si provi che $\mu_f \ll m$ se e solo se $f \in AC[a,b]$.

normaAC 10. Si provi che

$$\|f\|_{AC[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt$$

è una norma nello spazio $AC[a,b]$, e che $AC[a,b]$ con questa norma è completo. Si provi inoltre che $AC[a,b]$ non è chiuso in $C[a,b]$.

vtnormad 11. Sia $f \in AC[a,b]$; si provi che $T_a^b(f) = \|f'\|_{L^1(a,b)}$, e se ne deduca che $AC[a,b]$ è un sottospazio chiuso di $BV[a,b]$.

[**Traccia:** per provare che $T_a^b(f) \geq \|f'\|_{L^1(a,b)}$ si utilizzi il fatto che le funzioni costanti a tratti sono dense in $L^1(a,b)$.]

f(x)=y 12. Sia $f \in C[a,b]$, e per ogni $y \in \mathbb{R}$ sia $N(y)$ il numero delle soluzioni $x \in [a,b]$ dell'equazione $f(x) = y$. Si provi che

$$T_a^b(f) = \int_{\mathbb{R}} N(y)\,dy.$$

AClip 13. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si provi che f è Lipschitziana su $[a,b]$ se e solo se $f \in AC[a,b]$ e $f' \in L^\infty(a,b)$.

esACnBV 14. Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin x^{-\beta} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Si provi che se $0 < \beta < \alpha$ allora $f \in AC[0,1]$, mentre se $0 < \alpha \leq \beta$ allora $f \notin BV[0,1]$.

fogAC 15. Siano $f \in AC[c,d]$ e $g \in AC[a,b]$, con $g([a,b]) \subseteq [c,d]$. Si provi che $f \circ g \in AC[a,b]$ se e solo se $f \circ g \in BV[a,b]$. Si osservi che per $[a,b] = [c,d] = [0,1]$, $f(x) = x^{1/3}$ e $g(t) = t^3 \sin^3 1/t$ si ha $f, g \in AC[0,1]$ ma $f \circ g \notin AC[0,1]$: come mai?

AC[eps,1] 16. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si dimostri che:

(i) se $f \in AC[\varepsilon,1]$ per ogni $\varepsilon \in]0,1[$ e f è continua in 0, allora non è detto che $f \in AC[0,1]$;

(ii) se $f \in AC[\varepsilon,1]$ per ogni $\varepsilon \in]0,1[$, $f' \in L^1(0,1)$ e f è continua in 0, allora $f \in AC[0,1]$.

(iii) se $f \in AC[\varepsilon,1]$ per ogni $\varepsilon \in]0,1[$, $f \in BV[0,1]$ e f è continua in 0, allora $f \in AC[0,1]$.

fetf'L1 17. Sia $f \in AC[\varepsilon, 1]$ per ogni $\varepsilon \in]0,1[$, e supponiamo che esista $g \in L^1(0,1)$, positiva e decrescente, tale che $\frac{f}{g} \in L^1(0,1)$; si provi che allora $t \mapsto f(t)$ e $t \mapsto tf'(t)$ appartengono a $L^1(0,1)$.

inparti 18. Siano $f, g \in AC[a,b]$. Si provi che $fg \in AC[a,b]$ e che vale la formula di integrazione per parti

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt + \int_a^b f'(t)g(t)\,dt = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

fspeciale 19. Provare che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è della forma $f(x) = \int_{-\infty}^x g(t)\,dt$, con $g \in L^1(\mathbb{R})$, se e solo se

$$f \in AC[-a,a] \quad \forall a > 0, \quad \lim_{a\to+\infty} T^a_{-a}(f) < \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

fiofAC 20. (i) Siano $F \in AC[a,b]$ e $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$. Si provi che $\varphi \circ F \in AC[a,b]$.

(ii) Si dimostri che per ogni $p \in [1,\infty[$ e $f \in L^1(a,b)$ esiste $g \in L^1(a,b)$ tale che

$$\left(\int_a^x |f(t)|\,dt\right)^p = \int_a^x g(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,b].$$

fuLe 21. Sia f la funzione di Lebesgue dell'esempio 6.5.6; si provi che, detto Γ il suo grafico, risulta

$$\ell(\Gamma) = 2$$

(si confronti questo risultato con quello degli esercizi 6.4.5 e 6.4.6).

fuLe2 22. Sia f la funzione di Lebesgue dell'esempio 6.5.6; si provi che f è Hölderiana di esponente $\frac{\log 2}{\log 3}$.

[**Traccia:** posto $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$, e dati $x, y \in [0,1]$, sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $3^{-n-1} < |x-y| \le 3^{-n}$; si provi che allora $|f(x) - f(y)| \le 2^{-n}$. Osservato che $2 \cdot 3^{-\alpha} = 1$, si deduca che $|f(x) - f(y)| \le 3^\alpha |x-y|^\alpha$ per ogni $x, y \in [0,1]$.]

fspecialeLS 23. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e crescente, e sia μ_g la misura di Lebesgue-Stieltjes ad essa associata. Per $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_g)$ si definisca $F(x) = \int_{-\infty}^x f\,d\mu_g$. Si provi che:

(i) F è continua per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_g)$;

(ii) se $\mu_g \ll m$, allora $F \in AC(\mathbb{R})$ per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_g)$;

(iii) se $\mu_g \not\ll m$, allora esiste $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_g)$ tale che $F \notin AC(\mathbb{R})$.

period 24. Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, misurabile, si dice *periodica* se esiste $t > 0$ tale che $f(x+t) = f(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$. Indichiamo con T_f l'insieme dei periodi di f.

(i) Si provi che se $t \in T_f$ e $\int_0^t |f(x)|\,dx < \infty$ allora

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(y)\,dy = \frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,dx..$$

(ii) Se $\inf T_f = 0$, posto $G(x) = \int_0^x \frac{f(y)}{1+|f(y)|}\,dy$, si provi che G' è q.o. costante e che f è a sua volta q.o. costante.

6.6 Cambiamento di variabile in $\mathbb{R}$

cava

Per l'integrale di Riemann la formula del cambiamento di variabile

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt$$

vale per ogni f continua in un intervallo $[c,d]$ e per ogni funzione $g : [a,b] \to [c,d]$ di classe C^1. Ci chiediamo ora se questa formula si possa estendere al caso dell'integrale di Lebesgue, e sotto quali condizioni ciò sia possibile. Proveremo il seguente risultato:

cnscava **Teorema 6.6.1** *Sia $f \in L^1(c,d)$ e sia $g : [a,b] \to [c,d]$ una funzione derivabile q.o. in $[a,b]$. Posto $F(x) = \int_c^x f(\xi)\,d\xi$ per $x \in [c,d]$, i seguenti fatti sono equivalenti:*

(i) *$(f \circ g)g' \in L^1(a,b)$ e*

$$\int_{g(u)}^{g(v)} f(x)\,dx = \int_u^v f(g(t))g'(t)\,dt \qquad \forall u,v \in [a,b];$$

(ii) *$F \circ g \in AC[a,b]$.*

In tal caso risulta $(F \circ g)' = (f \circ g)g'$ q.o. in $[a,b]$.

Per dimostrare il teorema faremo uso di tre lemmi preliminari.

misimmag **Lemma 6.6.2** *Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in ogni punto di un sottoinsieme $E \subseteq [a,b]$. Se risulta $|g'(x)| \le \beta$ per ogni $x \in E$, allora $m^*(g(E)) \le \beta\, m^*(E)$.*

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ poniamo

$$E_n = \left\{ x \in E :\ |g(t)-g(x)| \le (\beta+\varepsilon)|t-x| \ \ \forall t \in \left]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right[\cap [a,b] \right\}.$$

Allora risulta

$$E_n \subseteq E_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+, \qquad E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} E_n\,.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ consideriamo un ricoprimento $\{I_{jn}\}_{j\in\mathbb{N}}$ di E_n, fatto da intervalli di lunghezza minore di $\frac{1}{n}$, tale che

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} m(I_{jn}) < m^*(E_n) + \varepsilon.$$

Si ha allora, per definizione di E_n e per il fatto che $m(I_{jn}) < \frac{1}{n}$,

$$m^*(g(E_n)) \le \sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(g(E_n \cap I_{jn})) \le (\beta+\varepsilon)\sum_{j\in\mathbb{N}} m(I_{jn}) < (\beta+\varepsilon)(m^*(E_n)+\varepsilon);$$

passando infine al limite per $n \to \infty$, e ricordando l'esercizio 1.7.2, otteniamo

$$\begin{aligned} m^*(g(E)) &= m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} g(E_n)\right) = \lim_{n\to\infty} m^*(g(E_n)) \le \\ &\le (\beta+\varepsilon)\left[\lim_{n\to\infty} m^*(E_n) + \varepsilon\right] = (\beta+\varepsilon)\left[m^*(E)+\varepsilon\right], \end{aligned}$$

da cui la tesi del lemma per l'arbitrarietà di ε. □

immnulla **Lemma 6.6.3** *Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione, e sia $E \subseteq [a,b]$ un insieme tale che g sia derivabile in ogni punto $x \in E$. Allora si ha $m^*(g(E)) = 0$ se e solo se $g' = 0$ q.o. in E.*

Dimostrazione ($\Longleftarrow$) Sia $g' = 0$ q.o. in E. Poniamo

$$E_0 = \{x \in E : g'(x) = 0\}, \qquad E_k = \{x \in E : k-1 < |g'(x)| \le k\} \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Per il lemma 6.6.2 si ha $m^*(g(E_0)) = 0$ ed anche

$$m^*(g(E \setminus E_0)) \le \sum_{k\in\mathbb{N}^+} m^*(g(E_k)) \le \sum_{k\in\mathbb{N}^+} k\, m^*(E_k) = 0,$$

da cui $m^*(g(E)) = 0$.
($\Longrightarrow$) Sia $m^*(g(E)) = 0$. Posto $B = \{x \in E : g'(x) \neq 0\}$, sarà $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, ove

$$B_n = \left\{x \in E : |g(t) - g(x)| \ge \frac{1}{n}|t-x| \ \ \forall x \in \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[\cap [a,b]\right\}.$$

Fissato $n \in \mathbb{N}^+$, sia $A_n = B_n \cap I$, ove I è un qualunque sottointervallo di $[a,b]$ di lunghezza minore di $\frac{1}{n}$. Se dimostriamo che $m(A_n) = 0$, avremo $m(B_n) = 0$ a causa dell'arbitrarietà di I; dunque, essendo arbitrario anche n, otterremo $m(B) = 0$, cioè la tesi. Proviamo in definitiva che $m(A_n) = 0$.
Sia $\varepsilon > 0$: dato che $m(g(A_n)) \le m(g(E)) = 0$, esiste un ricoprimento $\{I_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ di $g(A_n)$, fatto di intervalli, tale che $\sum_{j\in\mathbb{N}} m(I_j) < \varepsilon$. Poiché $A_n \subseteq g^{-1}(g(A_n)) \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} g^{-1}(I_j)$,

definendo $U_j = g^{-1}(I_j) \cap A_n$ avremo anche $A_n = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j$. Perciò

$$\begin{aligned} m^*(A_n) &\leq \sum_{j\in\mathbb{N}} m^*(U_j) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \sup_{t,x\in U_j} |t-x| \leq \\ &\quad \left(\text{per definizione di } B_n\,,\ \text{essendo } U_j \subseteq A_n = I \cap B_n \text{ e } m(I) \leq \frac{1}{n}\right) \\ &\leq \sum_{j\in\mathbb{N}} n \sup_{t,x\in U_j} |g(t)-g(x)| \leq (\text{essendo } g(U_j) \subseteq I_j) \\ &\leq \sum_{j\in N} n\ m(I_j) < n\varepsilon, \end{aligned}$$

ove ε è arbitrario e n è fissato. Quindi $m^*(A_n) = 0$. Ne segue la tesi. □

Dfcompo **Lemma 6.6.4** *Siano $F \in AC[c,d]$ e $g : [a,b] \to [c,d]$, e supponiamo che g e $F\circ g$ siano derivabili q.o. in $[a,b]$. Allora si ha $(F\circ g)' = (F'\circ g)g'$ q.o. in $[a,b]$.*

Dimostrazione Poniamo

$$M = \{y \in [c,d] :\ F'(y) \text{ non esiste}\}, \quad N = g^{-1}(M), \quad G = [a,b] \setminus N.$$

Notiamo che se $y \in [c,d] \setminus M$ e $k \in [c-y, d-y]$ si ha

$$F(y+k) - F(y) = k[F'(y) + \omega(y,k)], \quad \lim_{k\to 0} \omega(y,k) = 0;$$

ora, se $x \in G$ risulta $g(x) \in [c,d] \setminus M$ e pertanto, scelti $h \in [a-x, b-x]$, $y = g(x)$ e $k = g(x+h) - g(x)$, avremo

$$F(g(x+h)) - F(g(x)) = [g(x+h) - g(x)][F'(g(x)) + \eta(x,h)],$$

ove

$$\eta(x,h) = \omega(g(x), g(x+h) - g(x)) \to 0 \quad \text{per} \quad g(x+h) - g(x) \to 0.$$

Supponiamo ora che $x \in G$ e che esista $g'(x)$: ciò accade q.o. in G. In tal caso si ha $g(x+h) - g(x) \to 0$ per $h \to 0$, quindi $\eta(x,h) \to 0$ per $h \to 0$; allora dividendo per h la relazione precedente e passando al limite per $h \to 0$ otteniamo

$$(F\circ g)'(x) = g'(x)F'(g(x)) \qquad \text{q.o. in } G.$$

D'altra parte,

$$m(g(N)) = m(M) = 0,$$

ed essendo $F \in AC[c,d]$, si deduce $m(F(g(N))) = 0$ in virtù dell'esercizio 6.5.8. Posto

$$N_0 = \{x \in [a,b] : (F\circ g)'(x) \text{ non esiste}\},$$

si ha a maggior ragione $m(F(g(N\setminus N_0))) = 0$; quindi, per il lemma 6.6.3, si ha $(F\circ g)' = 0$ q.o. in $N \setminus N_0$, cioè, per ipotesi, q.o. in N. Similmente, posto

$$N_1 = \{x \in [a,b] : g'(x) \text{ non esiste}\},$$

si ha a maggior ragione $m(g(N \setminus N_1)) = 0$, e ancora dal lemma 6.6.3 segue $g' = 0$ q.o. in $N \setminus N_1$, ossia q.o. in N. Infine, ricordando che F' è q.o. finita in $[a, b]$ (essendo ivi sommabile), otteniamo

$$(F \circ g)' = 0 = (F' \circ g)g' \qquad \text{q.o. in } N.$$

Pertanto si conclude che

$$(F \circ g)' = (F' \circ g)g' \qquad \text{q.o. in } N \cup G = [a, b]. \quad \square$$

Dimostrazione del teorema 6.6.1 (i) $\Longrightarrow$ (ii) Per ipotesi, $(f \circ g)g' \in L^1(a, b)$ e vale la formula di cambiamento di variabile, cioè per ogni $x \in [a, b]$ si ha

$$F(g(x)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(x)} f(y)\,dy = \int_a^x f(g(t))g'(t)\,dt;$$

quindi $F \circ g \in AC[a, b]$ e $(F \circ g)' = (f \circ g)g'$ per il teorema 6.5.5.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Dato che $F \circ g \in AC[a, b]$ e $F \in AC[c, d]$, siamo nelle ipotesi del lemma 6.6.4: pertanto

$$(F \circ g)' = (F' \circ g)g' \qquad \text{q.o. in } [a, b].$$

Come nella dimostrazione del lemma 6.6.4, siano

$$M = \{y \in [c, d] : F'(y) \text{ non esiste}\}, \quad N = g^{-1}(M).$$

Fuori di N si ha $F'(g(x)) = f(g(x))$ q.o., da cui

$$(F \circ g)' = (f \circ g)g' \qquad \text{q.o. in } [a, b] \setminus N;$$

dentro N, ragionando come nella dimostrazione del lemma 6.6.4, troviamo $(F \circ g)'(x) = 0$ q.o. e $g'(x) = 0$ q.o., da cui, essendo f sommabile e quindi q.o. finita,

$$(F \circ g)' = 0 = (f \circ g)g' \qquad \text{q.o. in } N.$$

In definitiva

$$(F \circ g)' = (f \circ g)g' \qquad \text{q.o. in } [a, b],$$

e inoltre $(f \circ g)g'$ risulta sommabile in $[a, b]$ dato che $F \circ g \in AC[a, b]$. Perciò

$$\int_{g(u)}^{g(v)} f(x)\,dx = F(g(v)) - F(g(u)) =$$
$$= \int_u^v (F \circ g)'(t)\,dt = \int_u^v f(g(t))g'(t)\,dt \quad \forall u, v \in [a, b],$$

e ciò prova la tesi. $\square$

Esercizi 6.6

cava+ 1. Siano $f \in L^1(c,d)$, $g \in AC[a,b]$ con $g([a,b]) \subseteq [c,d]$ e $F(x) = \int_c^x f(t)dt$. Si provi che se, in più, $f \in L^\infty(c,d)$, oppure g è monotona, allora $F \circ g \in AC[a,b]$ e quindi la formula di cambiamento di variabile è applicabile.

cavano 2. Posto
$$g(t) = t^3 \sin \frac{1}{t}\,,\ t \in [0,1], \qquad f(x) = x^{-\frac{2}{3}},\ x \in [-1,1],$$
si provi che la formula di cambiamento di variabile è falsa per $u = 0$ e $v > 0$. Come mai?

cavasi 3. Posto
$$g(t) = t \sin \frac{1}{t}\,,\ t \in [0,1], \qquad f(x) = x,\ x \in [-1,1],$$
si provi che la formula di cambiamento di variabile è valida, benché $g \notin AC[0,1]$ (e infatti nel teorema 6.6.1 l'ipotesi $g \in AC[a,b]$ non c'è).

f(E)int 4. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ misurabile e sia $E \subseteq [a,b]$ un insieme misurabile tale che la derivata $f'(x)$ esista finita in ogni punto $x \in E$. Si provi che
$$m^*(f(E)) \le \int_E |f'|\, dm.$$
[**Traccia:** si supponga dapprima $|f'| \le N$, e si definisca
$$E_{kn} = \{x \in E : 2^{-n}(k-1) \le |f'(x)| < 2^{-n}k\}, \quad n \in \mathbb{N},\ k = 1, 2, \ldots, N2^n.$$
Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $m^*(f(E)) \le \sum_{k=1}^{N2^n} 2^{-n} k\, m(E_{kn}) \le \int_E |f'|\, dm + 2^{-n} m(E) \ldots$]

0in0AC 5. Sia $f \in C[a,b] \cap BV[a,b]$, tale che per ogni $E \subset [a,b]$ misurabile con $m(E) = 0$ si abbia $m(f(E)) = 0$. Si provi che $f \in AC[a,b]$.
[**Traccia:** se $]x_i, y_i[\,, 1 \le i \le N$, sono intervalli disgiunti, sia $E_i = \{x \in]x_i, y_i[: \exists f'(x)\}$; si mostri che $m(f(]x_i, y_i[)) = m(f(E_i))$ e che $\sum_{i=1}^N |f(x_i) - f(y_i)| \le \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{y_i} |f'|\, dm$.]

6.7 Cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^N$

cava2

Scopo di questo paragrafo è ricavare la formula del cambiamento di variabili negli integrali di Lebesgue N-dimensionali: vedremo che sotto opportune ipotesi sulla trasformazione $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ è ancora valida la medesima formula che sussiste per gli integrali multipli di Riemann: in altre parole risulta, indicando con J_T il determinante della matrice Jacobiana di T,
$$\int_{T(E)} f\, dm_N = \int_E (f \circ T)\, |J_T|\, dm_N$$

per ogni insieme misurabile E e per ogni funzione f sommabile, oppure integrabile.
Nella dimostrazione faremo uso di diversi enunciati preliminari. Il più importante di essi è il teorema del punto fisso di Brouwer, risultato fondamentale in vari contesti e del quale si conoscono numerose dimostrazioni: riportiamo quella dovuta a G. Stampacchia, che fa uso di strumenti puramente analitici.

Brouwer **Teorema 6.7.1 (di Brouwer)** *Sia $K \subset \mathbb{R}^N$ un insieme non vuoto, convesso e compatto; sia $F : K \to K$ una funzione continua. Allora F ha almeno un punto fisso.*

Dimostrazione Facciamo vari passi.

1° passo. Cominciamo col mostrare che se la tesi vale quando $K = \overline{B(0,R)}$, con $R > 0$, allora vale anche nel caso generale. Sia dunque K un convesso compatto: esisterà $R > 0$ tale che $K \subseteq \overline{B(0,R)}$. Sia $P_K : \mathbb{R}^N \to K$ la proiezione sul convesso K, che associa ad ogni $x \in \mathbb{R}^N$ il punto di minimo in K della funzione $z \mapsto |z-x|_N$ (si veda più in generale la proposizione 8.1.1); dato che P_K è continua, l'applicazione composta $F \circ P_K$ è continua da $\overline{B(0,R)}$ in K, e quindi da $\overline{B(0,R)}$ in sé. Allora, essendo la tesi vera quando $K = \overline{B(0,R)}$, c'è un punto $\overline{x} \in \overline{B(0,R)}$ tale che $\overline{x} = F \circ P_K(\overline{x})$; ma poiché F è a valori in K, si ha $\overline{x} \in K$, e di conseguenza $P_K(\overline{x}) = \overline{x}$. Ciò prova che $\overline{x} = F(\overline{x})$, ossia $\overline{x}$ è punto fisso di F.

2° passo. Ora proviamo che se la tesi vale quando K è la palla unitaria chiusa, allora vale anche quando $K = \overline{B(0,R)}$, $R > 0$. A questo scopo basta porre

$$G(x) = \frac{1}{R}\, F(Rx) \qquad \forall x \in \overline{B(0,1)},$$

ed osservare che, per ipotesi, G ha un punto fisso $\overline{x} \in \overline{B(0,1)}$; di conseguenza $\overline{y} = R\overline{x}$ appartiene a $\overline{B(0,R)}$ ed è punto fisso di F.

3° passo. D'ora in poi, dunque, supporremo che $K = \overline{B(0,1)}$. Facciamo vedere che, supposta vera la tesi quando F è di classe C^∞, essa è vera anche per F continua. Infatti, consideriamo per ogni $m \in \mathbb{N}^+$ la proiezione P_m sulla palla $\overline{B(0,1-\frac{1}{m})}$; la funzione composta $P_m \circ F$ manda K in tale palla. Per la densità di $C^\infty(K)$ in $C(K)$, esiste una funzione $\phi_m \in C^\infty(K)$ tale che $\|\phi_m - P_m \circ F\|_\infty \leq \frac{1}{m}$. Da questa stima segue che ϕ_m è a valori in K: quindi, per ipotesi, per ogni $m \in \mathbb{N}^+$ esiste un punto fisso $x_m \in K$ per l'applicazione ϕ_m. La successione $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}^+}$ è limitata, e dunque vi è una sottosuccessione $\{x_{m_n}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ convergente ad un punto $\overline{x} \in K$.
Proviamo che $\overline{x}$ è punto fisso per F. Osserviamo anzitutto che per ogni $x \in K$ si ha dunque $|x - P_m(x)|_N = 0$ se $|x|_n \leq 1 - \frac{1}{m}$, mentre

$$|P_m(x) - x|_N^2 = |x|_N^2 + |P_m(x)|^2 - 2(P_m(x), x)_N = |x|_N^2 - |P_m(x)|_N^2 \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^2.$$

Perciò $|x - P_m(x)|_N \to 0$ per $m \to \infty$. Inoltre, essendo F continua, $F(x_{m_n}) \to F(\overline{x})$ per $n \to \infty$, da cui $P_{m_n}(F(x_{m_n})) \to F(\overline{x})$ per $n \to \infty$. D'altronde,

$$|P_{m_n}(F(x_{m_n})) - x_{m_n}|_N = |P_{m_n}(F(x_{m_n})) - \phi_{m_n}(x_{m_n})|_N \leq \frac{1}{m_n},$$

cosicché $P_{m_n}(F(x_{m_n}) \to \overline{x}$ per $n \to \infty$. Pertanto $\overline{x} = F(\overline{x})$.

$4^{\mathbf{o}}$ passo. Dimostriamo finalmente la tesi nel caso a cui ci siamo ridotti, ossia $F : K \to K$ di classe C^∞, con $K = \overline{B(0,1)}$. Supponiamo per assurdo che risulti $F(x) \neq x$ per ogni $x \in K$. Consideriamo l'equazione

$$|x + a(x - F(x))|_N^2 = 1, \qquad a \in \mathbb{R},\ x \in K,$$

ovvero

$$a^2|x - F(x)|_N^2 + 2a\ (x, x - F(x))_N - (1 - |x|_N^2) = 0.$$

Fissato $x \in K$, il discriminante di questa equazione di 2^{o} grado nella variabile a è

$$\Delta(x) = (x, x - F(x))_N^2 + (1 - |x|_N^2)|x - F(x)|_N^2.$$

Ovviamente, $\Delta(x) \geq 0$; proviamo che $\Delta(x) > 0$ per ogni $x \in K$. Ciò è evidente quando $|x|_N < 1$; se invece $|x|_N = 1$, non può essere $(x, x - F(x))_N = 1 - (x, F(x))_N \leq 0$, in quanto si ha sempre

$$(x, F(x))_N \leq |x|_N \cdot |F(x)|_N = |F(x)|_N \leq 1,$$

e, dato che $x, F(x) \in \overline{B(0,1)}$, vale l'uguaglianza $(x, F(x))_N = 1$ se e solo se $F(x) = x$, il che è vietato dal nostro ragionamento per assurdo.

Possiamo considerare allora la maggiore delle due radici dell'equazione, che denotiamo con $a(x)$:

$$a(x) = \frac{-(x, x - F(x))_N + \sqrt{\Delta(x)}}{|x - F(x)|_N^2}.$$

Osserviamo che per $|x|_N = 1$ le radici dell'equazione sono

$$0, \qquad -2\ \frac{1 - (x, F(x))_N}{|x - F(x)|_N^2} < 0,$$

cosicché se $|x|_N = 1$ si ha $a(x) = 0$.

Definiamo

$$f(t, x) = x + t\, a(x)(x - F(x)), \qquad t \in \mathbb{R},\ x \in K.$$

Questa funzione è di classe C^∞ (perché $\Delta(x) > 0$ in K) e verifica

$$f(0, x) = x, \quad |f(1, x)|_N = 1 \quad \forall x \in K; \qquad f_t(t, x) = 0 \text{ per } |x|_N = 1 :$$

infatti la prima uguaglianza è banale, la seconda segue dal fatto che $a(x)$ è radice dell'equazione $|x + a(x - F(x))|_N^2 = 1$, e la terza si ottiene notando che $f_t(t, x) = a(x)(x - F(x))$ e ricordando che $a(x) = 0$ per $|x|_N = 1$.

Poniamo adesso, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$D_0(t, x) = \det\left(\left\{\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(t, x)\right\}_{i,j=1,\dots,N}\right), \qquad I(t) = \int_K D_0(t, x)\, dx.$$

Dato che $D_0(0,x) = \det(I) = 1$ per ogni $x \in K$, è chiaro che $I(0) = m_N(K)$; verifichiamo che si ha $I(1) = 0$. Derivando la relazione $|f(1,x)|_N^2 = 1$, valida per ogni $x \in K$, si ottiene il sistema

$$2\sum_{i=1}^{N} f^i(1,x)\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(1,x) = 0, \quad j = 1,\dots,N, \qquad \forall x \in K;$$

dunque il sistema lineare omogeneo $N \times N$ con coefficienti $\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(1,x)$ ha per soluzione il vettore di componenti $f^i(1,x)$, il quale è non nullo, essendo $|f(1,x)|_N = 1$ per ogni $x \in K$. Di conseguenza il determinante dei coefficienti, che è $D_0(1,x)$, deve essere nullo per ogni $x \in K$, e pertanto $I(1) = \int_K 0\,dx = 0$.
Vogliamo ora dimostrare che $I'(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$: da ciò seguirà ovviamente l'assurdo, essendo $I \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $I(1) - I(0) \neq 0$. A questo scopo è essenziale il seguente

derivdet **Lemma 6.7.2** *Sia $f : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$ un'applicazione nelle variabili $x = (x_0, x_1, \dots, x_N)$, di classe C^∞. Posto*

$$\Delta_j(x) = \det(D_j(x)), \qquad D_j(x) = \left(\left\{ \frac{\partial f^h}{\partial x_k}(x) \right\}_{h=1,\dots,N,\ k=0,\dots,N,\ k\neq j} \right),$$

risulta

$$\sum_{j=0}^{N} (-1)^j \frac{\partial \Delta_j}{\partial x_j}(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Dimostrazione Si ha

$$\sum_{j=0}^{N} (-1)^j \frac{\partial \Delta_j}{\partial x_j}(x) = \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \sum_{i=1}^{N} \det(A_{ij}(x)),$$

ove $A_{ij}(x)$ è la matrice $N \times N$ che si ottiene da $D_j(x)$ derivando la sua i-sima riga rispatto a x_j: dunque la riga i di A_{ij} è

$$\left(\frac{\partial^2 f^i}{\partial x_0 \partial x_j}(x), \dots, \frac{\partial^2 f^i}{\partial x_{j-1} \partial x_j}(x), \frac{\partial^2 f^i}{\partial x_{j+1} \partial x_j}(x), \dots, \frac{\partial^2 f^i}{\partial x_N \partial x_j}(x) \right).$$

Gli addendi generati da un singolo determinante sono in numero di $N!$: quindi la somma totale contiene certamente un numero pari di addendi. Un generico termine del determinante di A_{ij}, sviluppato secondo la riga i, ha la forma seguente:

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial x_s \partial x_j}(x) \cdot \prod_{1 \le k \le N,\ k \neq i} \frac{\partial f^k}{\partial x_{\sigma_k}}(x),$$

ove $s \in \{0,1,\dots,N\} \setminus \{j\}$, e $\sigma : \{1,\dots,N\} \to \{0,1,\dots,N\} \setminus \{j\}$ è una permutazione degli indici tale che $\sigma_i = s$ (e, in particolare, $\sigma_k \neq j, s$ per $k \neq i$); il segno di questo termine è $(-1)^j\,\varepsilon(\sigma)$, ove $\varepsilon(\sigma)$ è il segno della permutazione σ. Lo stesso termine viene generato da $\det A_{is}$ (dove si deriva la riga i rispetto a x_s), quando si sceglie la

permutazione $\tau : \{1, \dots, N\} \to \{0, 1, \dots, N\} \setminus \{s\}$ tale che $\tau_i = j$ e $\tau_k = \sigma_k$ per $k \neq i$; il suo segno è, stavolta, $(-1)^s \, \varepsilon(\tau)$.
Adesso osserviamo che $(-1)^j \, \varepsilon(\sigma)$ è il segno della permutazione $\overline{\sigma} \in S_{N+1}$ che si ottiene ponendo $\overline{\sigma}_0 = j$ e $\overline{\sigma}_k = \sigma_k$ per ogni $k \in \{1, \dots, N\}$; analogamente, $(-1)^s \, \varepsilon(\tau)$ è il segno della permutazione $\overline{\tau} \in S_{N+1}$ tale che $\overline{\tau}'_0 = s$ e $\overline{\tau}'_k = \tau_k$ per ogni $k \in \{1, \dots, N\}$. Dato che $\overline{\tau}$ si ottiene da $\overline{\sigma}$ scambiando i valori di $\overline{\tau}_0$ e $\overline{\sigma}_0$, i segni di $\overline{\tau}$ e $\overline{\sigma}$ sono opposti: dunque $(-1)^j \, \varepsilon(\sigma) = -(-1)^s \, \varepsilon(\tau)$ e pertanto nella somma complessiva l'addendo (j, i) è cancellato dall'addendo (s, i). Ciò accade per ogni coppia di termini ed in definitiva l'intera somma è nulla. □

Torniamo alla dimostrazione del teorema di Brouwer. Applichiamo il lemma 6.7.2 alla funzione $f(t, x_1, \dots, x_N)$: ponendo

$$D_j(t, x) = \det \left(\left\{ \frac{\partial f^i}{\partial x_k}(t, x) \right\}_{i=1,\dots,N, \; k=0,1,\dots,N, \; k \neq j} \right), \qquad j = 1, \dots, N,$$

dal lemma 6.7.2si ha

$$\sum_{j=0}^{N} (-1)^j \frac{\partial}{\partial x_j} D_j(t, x) = 0;$$

dunque

$$I'(t) = \int_K \frac{\partial D_0}{\partial t}(t, x) dx = -\sum_{j=1}^{N} (-1)^j \int_K \frac{\partial D_j}{\partial x_j}(t, x) dx.$$

Applicando le formule di Gauss-Green, si deduce

$$I'(t) = -\sum_{j=1}^{N} (-1)^j \int_{\partial K} D_j(t, x) \nu_j(x) d\sigma,$$

ove $\nu(x)$ è il versore normale esterno a ∂K e σ è la misura di Hausdorff H_{N-1} su ∂K. Ma poiché, per $j = 1, \dots, N$, i D_j sono determinanti di matrici tutte contenenti il vettore colonna $f_t(t, x)$, il quale è nullo per $|x|_N = 1$, tutti i D_j sono nulli su ∂K. Pertanto $I'(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e ciò implica l'assurdo. Il teorema di Brouwer è così dimostrato. □

Iniziamo la trattazione del cambiamento di variabili con un lemma che è una conseguenza diretta del teorema di Brouwer.

consBro **Lemma 6.7.3** *Sia B_r la palla aperta di $\mathbb{R}^N$ di centro 0 e raggio r, e sia S_r la sua frontiera. Sia $F : \overline{B_r} \to \mathbb{R}^N$ un'applicazione continua e sia $\varepsilon \in]0, 1[$ tale che*

$$|F(x) - x|_N < \varepsilon \, r \qquad \forall x \in S_r \, .$$

Allora $F(B_r) \supseteq B_{(1-\varepsilon)r}$.

Dimostrazione Ragioniamo per assurdo: sia $a \in B_{(1-\varepsilon)r}$ tale che $a \notin F(B_r)$. Allora dall'ipotesi segue

$$|F(x)|_N \geq |x|_N - |x - F(x)|_N > (1 - \varepsilon) r \qquad \forall x \in S_r \, ,$$

e dunque a non appartiene nemmeno a $F(S_r)$. Poniamo allora

$$G(x) = \frac{r(a - F(x))}{|a - F(x)|_N}, \qquad x \in \overline{B_r}:$$

G è un'applicazione continua da $\overline{B_r}$ in sé. Proviamo che G non ha punti fissi: ciò, contraddicendo il teorema di Brouwer, ci darà l'assurdo.
Se $x \in S_r$, allora $(x, x)_N = r^2$ e quindi

$$(x, a - F(x))_N = (x, a)_N + (x, x - F(x))_N - r^2 < r|a|_N + \varepsilon r^2 - r^2 < 0,$$

da cui $(x, G(x))_N < 0$ e pertanto $x \neq G(x)$.
Se invece $x \in B_r$, allora $x \neq G(x)$ in quanto $G(x) \in S_r$. Ne segue che G è priva di punti fissi. □

Il lemma che segue mette in luce il ruolo chiave giocato dal determinante Jacobiano.

detlim **Lemma 6.7.4** *Sia V un aperto di $\mathbb{R}^N$, sia $T : V \to \mathbb{R}^N$ un'applicazione continua. Se T è differenziabile in un punto $x \in V$, allora, detta $B(x, r)$ la palla aperta di centro x e raggio r,*

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{m_N(T(B(x, r)))}{m_N(B(x, r))} = |\det T'(x)|.$$

Dimostrazione Osserviamo che $T(B(x, r))$ è un insieme misurabile: infatti $B(x, r)$ è unione numerabile di compatti e T è continua, cosicché anche $T(B(x, r))$ è unione numerabile di compatti.
Possiamo supporre, a meno di traslazioni, che $x = 0$ e $T(0) = 0$. Poniamo $A = T'(0)$; si hanno due casi: l'applicazione lineare A è bigettiva oppure no.

1° caso: A è bigettiva. Posto $F(x) = A^{-1}T(x)$ per ogni $x \in V$, si ha $F(0) = 0$, $F'(0) = I$ e, dalla teoria dell'integrazione secondo Riemann otteniamo, per ogni palla contenuta in V,

$$m_N(T(B)) = m_N(A(F(B))) = |\det A|\, m_N(F(B)),$$

cosicché la tesi sarà provata se faremo vedere che

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{m_N(F(B(x, r)))}{m_N(B(x, r))} = 1.$$

Osserviamo esplicitamente che questo fatto sarebbe stato di dimostrazione abbastanza semplice se avessimo supposto T di classe C^1 su V, perché avremmo potuto far uso del teorema di inversione locale per applicazioni da $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}^N$. Nelle nostre ipotesi, invece, occorrerà utilizzare il teorema di Brouwer.
Sia $\varepsilon > 0$. Dall'ipotesi di differenziabilità di T, e quindi di F, nel punto $x = 0$, segue che esiste $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x|_N < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |F(x) - x|_N < \varepsilon |x|_N,$$

e in particolare

$$|F(x)|_N \le |F(x)-x|_N + |x|_N < (1+\varepsilon)|x|_N \qquad \text{per } 0<|x|_N<\delta.$$

Il lemma 6.7.3 applicato a F e la relazione precedente ci dicono che

$$B(0,(1-\varepsilon)r) \subseteq F(B(0,r)) \subseteq B(0,(1+\varepsilon)r) \qquad \forall r \in]0,\delta].$$

Da qui si ricava

$$(1-\varepsilon)^N \le \frac{m_N(F(B(0,r)))}{m_N(B(0,r))} \le (1+\varepsilon)^N,$$

da cui, come osservato, la tesi quando A è bigettiva.

2° caso: A non è bigettiva. In particolare A non è surgettiva: quindi l'immagine di A ha misura N-dimensionale nulla. Sia $\varepsilon>0$: esiste $\eta>0$ tale che, posto

$$E_\eta = \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, A(B(0,1))) < \eta\},$$

si ha $m_N(E_\eta)<\varepsilon$. Inoltre, essendo $A=T'(0)$ e $T(0)=0$, esiste $\delta>0$ per cui

$$|x|_N<\delta \qquad \Longrightarrow \qquad |T(x)-Ax|_N \le \eta|x|_N.$$

Se $r<\delta$ si ha

$$T(B(0,r)) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, A(B(0,r))) < \eta r\};$$

denotando quest'ultimo insieme con E, si vede immediatamente che $E = rE_\eta$, cosicché $m_N(E) < \varepsilon r^N$. Dunque

$$m_N(T(B(0,r))) < \varepsilon r^N = \varepsilon \frac{m_N(B(0,r))}{m_N(B(0,1))} \qquad \forall r \in]0,\delta[,$$

da cui

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{m_N(T(B(0,r)))}{m_N(B(0,r))} = 0 = |\det A|.$$

La tesi è provata anche quando A non è bigettiva. □

Il lemma seguente fornisce condizioni affinché gli insiemi di misura nulla vengano trasformati in insiemi di misura nulla.

immmis0 **Lemma 6.7.5** *Sia E un insieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ con $m_N(E)=0$. Se $T: E \to \mathbb{R}^N$ è un'applicazione tale che*

$$\limsup_{y\to x,\, y\in E} \frac{|T(y)-T(x)|_N}{|y-x|_N} < +\infty \qquad \forall x \in E,$$

allora $T(E)$ è misurabile con $m_N(T(E))=0$.

Dimostrazione Per ogni $n, p \in \mathbb{N}^+$ poniamo

$$E_{np} = \{x \in E : |T(y) - T(x)|_N < n|y - x|_N \ \forall y \in E \cap B(x, 1/p)\};$$

dall'ipotesi segue ovviamente che $m_N(E_{np}) = 0$. Fissato $\varepsilon > 0$, possiamo ricoprire E_{np} con una famiglia al più numerabile di palle $B_i = B(x_i, r_i)$ con $r_i < 1/p$ e $x_i \in E_{np}$, tali che $\sum_i m_N(B_i) < \varepsilon$: questo può essere fatto scegliendo un aperto $W \supset E_{np}$ con $m_N(W) < \varepsilon/2$, decomponendolo in cubi semiaperti disgiunti di diametro sufficientemente piccolo, e prendendo per ogni cubo C che interseca E_{np} una palla B centrata in un punto di $C \cap E_{np}$ e raggio pari al diametro di C.
Se allora $x \in E_{np} \cap B_i$, si ha $|x - x_i|_N < 1/p$, da cui

$$|T(x) - T(x_i)|_N < n|x_i - x|_N < nr_i;$$

quindi $T(E_{np} \cap B_i) \subseteq B(T(x_i), nr_i)$ e pertanto

$$T(E_{np}) \subseteq \bigcup_i B(T(x_i), nr_i).$$

Ne segue

$$m_N^*(T(E_{np})) \leq \sum_i m_N(B(T(x_i), nr_i)) = n^N \sum_i m_N(B_i) < n^N \varepsilon,$$

e per l'arbitrarietà di ε si conclude che $m_N^*(T(E_{np})) = 0$ per ogni $n, p \in \mathbb{N}^+$. Infine, essendo $E = \bigcup_{n,p \in \mathbb{N}^+} E_{np}$, si ricava che $m_N^*(T(E)) = 0$. □

Come ovvia conseguenza del lemma precedente si ottiene il

diffm0 **Corollario 6.7.6** *Se V è un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $T : V \to \mathbb{R}^N$ è un'applicazione differenziabile, allora T trasforma sottoinsiemi di V di misura nulla in insiemi di misura nulla.* □

Enunciamo finalmente il teorema del cambiamento di variabili.

camvarN **Teorema 6.7.7** *Sia V un aperto non vuoto di $\mathbb{R}^N$, sia $T : V \to \mathbb{R}^N$ un'applicazione continua, e sia $Y \subseteq V$ un insieme misurabile tale che:*

(i) *T sia differenziabile in ogni punto di Y;*

(ii) *$T|_Y$ sia iniettiva;*

(iii) *$m_N(T(V \setminus Y)) = 0$.*

Allora per ogni funzione f misurabile e non negativa definita su $T(Y)$ si ha

$$\int_{T(Y)} f \, dm_N = \int_Y (f \circ T) \, |J_T| \, dm_N \,,$$

ove $J_T(x)$ è il determinante della matrice Jacobiana di T nel punto $x \in Y$.

Dimostrazione Procederemo in tre passi.

1° passo: se $E \subseteq V$ è misurabile, allora $T(E)$ è misurabile.

Sappiamo dal lemma 6.7.5 che se $E_0 \subset V$ è misurabile con $m_N(E_0) = 0$, allora $m_N(T(E_0 \cap Y)) = 0$, mentre per l'ipotesi (iii) si ha $m_N(T(E_0 \setminus Y)) = 0$: ne segue $m_N(T(E_0)) = 0$. Inoltre, se E_1 è un Boreliano unione numerabile di compatti, anche $T(E_1)$ è unione numerabile di compatti, poiché T è continua, e quindi $T(E_1)$ è misurabile.

Dato che ogni insieme E misurabile è unione di un Boreliano unione numerabile di compatti e di un insieme di misura nulla, anche $T(E)$ è misurabile. Ciò prova il primo passo.

2° passo: se E è misurabile, allora $m_N(T(E \cap Y)) = \int_Y \chi_E |J_T| \, dm_N$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ consideriamo l'aperto $V_n = \{x \in V : |T(x)|_N < n\}$ e l'insieme $Y_n = Y \cap V_n$, e definiamo

$$\mu_n(E) = m_N(T(E \cap Y_n)), \qquad E \in \mathcal{M}_N \, .$$

Dal primo passo segue che μ_n è ben definita, mentre dall'iniettività di T su Y otteniamo che μ_n è una misura. Inoltre μ_n è finita (perché è la misura di Lebesgue di insiemi contenuti nella palla di centro l'origine e raggio n) e, per il corollario 6.7.6, μ_n è assolutamente continua rispetto a m_N. Quindi, per il teorema di Radon-Nikodým (teorema 4.5.9), esiste una funzione $h_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$, non negativa e nulla fuori di Y_n, tale che

$$\mu_n(E) = \int_E h_n \, dm_N \qquad \forall E \in \mathcal{M}_N \, .$$

Dimostriamo che $h_n(x) = |J_T(x)|$ q.o. in Y_n. Sia $x \in Y_n$ e sia $\rho > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq V_n$ per $r \in]0, \rho[$; poiché $V_n \setminus Y_n \subseteq V \setminus Y$, per l'ipotesi (iii) si ha

$$\mu_n(E) = m_N(T(E \cap Y_n)) = m_N(T(E \cap V_n)),$$

da cui per $r \in]0, \rho[$ possiamo scrivere

$$\frac{\mu_n(B(x,r))}{m_N(B(x,r))} = \frac{m_N(T(B(x,r) \cap V_n))}{m_N(B(x,r))} = \frac{m_N(T(B(x,r)))}{m_N(B(x,r))}.$$

Quindi, per il lemma 6.7.4,

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\mu_n(B(x,r))}{m_N(B(x,r))} = |J_T(x)|.$$

D'altronde, se $x \in Y_n$ è punto di Lebesgue per h_n si ha

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\mu_n(B(x,r))}{m_N(B(x,r))} = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{m_N(B(x,r))} \int_{B(x,r)} h_n \, dm_N = h_n(x),$$

cosicché le funzioni h e $|J_T|$ coincidono q.o. in Y_n. Si conclude allora che

$$m_N(T(E \cap Y_n)) = \mu_n(E) = \int_{Y_n} |J_T| \, dm_N \qquad \forall E \in \mathcal{M}_N \, .$$

Utilizzando il teorema di B. Levi, per $n \to \infty$ otteniamo la tesi del secondo passo.

3° passo: se E è misurabile, allora $\int_{T(Y)} \chi_E \, dm_N = \int_Y (\chi_E \circ T)|J_T| \, dm_N$.

Sia A un Boreliano di $\mathbb{R}^N$ e sia $E = \{x \in V : T(x) \in A\}$, cosicché $\chi_E = \chi_A \circ T$. Per l'esercizio 3.1.19, χ_E è misurabile, quindi anche $\chi_E|J_T|$ lo è; inoltre si ha $T(E \cap Y) = A \cap T(Y)$, da cui, per il secondo passo,

$$\int_{T(Y)} \chi_A \, dm_N = m_N(A \cap T(Y)) = m_N(T(E \cap Y)) = \int_Y (\chi_A \circ T)|J_T| \, dm_N \, .$$

Sia ora G un insieme misurabile di misura nulla. Allora esiste un Boreliano $A \supseteq G$ di misura nulla, e dunque $(\chi_A \circ T)|J_T| = 0$ q.o. in $\mathbb{R}^N$. Ne segue, essendo $0 \le \chi_G \le \chi_A$,

$$\int_{T(Y)} \chi_G \, dm_N = 0 = \int_Y (\chi_G \circ T)|J_T| \, dm_N \, .$$

Dato che ogni insieme misurabile E è unione (disgiunta) di un Boreliano A e di un insieme di misura nulla G, sommando le relazioni relative ad A e a G si ottiene la tesi del terzo passo.

La dimostrazione del teorema 6.7.7 si conclude ora facilmente: per additività la tesi del terzo passo vale per ogni funzione semplice, e infine utilizzando il teorema di B. Levi essa si estende ad ogni funzione misurabile non negativa. □

Osservazioni 6.7.8 **(1)** Ovviamente il teorema di cambiamento di variabili vale anche per funzioni che cambiano segno, purché siano sommabili o almeno integrabili.

(2) Dalla dimostrazione segue in particolare che la funzione $(f \circ T)|J_T|$ è misurabile; in generale tuttavia $f \circ T$ non lo è (esercizio 6.7.6).

(3) Il teorema 6.7.7 vale anche per $N = 1$, ma in questo caso il risultato che si ottiene è meno generale di quello del teorema 6.6.1.

formare

Formula dell'area

Vogliamo mostrare che se k è un intero tale che $1 \le k \le N$, il volume k-dimensionale di una k-varietà compatta e sufficientemente regolare, calcolato in Analisi 2, può esprimersi in termini della misura di Hausdorff H_k. Ricordiamo che una k-varietà è un'applicazione $f : U \to V$ di classe C^1, ove U è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$ tale che $A \subseteq U =\subseteq overline A$ con A aperto limitato, mentre V, il *sostegno* della varietà, è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$. Si fa l'ipotesi che la matrice $Df(x)$, che è $N \times k$, abbia rango massimo k in ogni punto di A, e che f sia iniettiva in A. Per semplicità, supporremo che $U = \overline{A}$, che f sia iniettiva in U e che $\det Df(x)^t Df(x) > 0$ per ogni $x \in U$, essendo $Df(x)^t$ la matrice trasposta di $Df(x)$; infine supponiamo che $m_k(U \setminus A) = 0$. Quest'ultimo fatto non è automatico, come nel caso $k = 1$ mostra l'insieme C_4 (l'insieme di Cantor di parametro $1/4$), il quale ha misura positiva ed è il bordo del chiuso $[0, 1] \setminus C_4^c$. Poniamo

$$J(Df(x)) = \sqrt{\det Df(x)^t Df(x)} :$$

allora è noto che il volume k-dimensionale di V è dato dall'integrale di Riemann k-dimensionale

$$v_k(V) = \int_U J(Df(x))\,dx.$$

Vogliamo provare il risultato seguente:

intarea **Teorema 6.7.9 (formula dell'area)** *Nelle ipotesi sopra dette, si ha*

$$H_k(V) = \gamma_k \int_U J(Df(x))\,dx,$$

ove $\gamma_k = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^k \Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)$ *è la costante introdotta nel teorema 2.4.7.*

Dimostrazione Consideriamo dapprima il caso in cui la varietà V è l'immagine di un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$: dunque, rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^N$, possiamo identificare T con una matrice $k \times N$. Detta T^t la matrice trasposta di T, sia $J(T) = \sqrt{\det T^t T}$. Se $k = N$, allora $J(T) = |\det T|$ e in questo caso, ricordando che $H_N = \gamma_N m_N$, dal teorema 6.7.7 si ha per ogni Boreliano $E \subseteq \mathbb{R}^k$

$$H_N(T(E)) = \gamma_N m_N(T(E)) = \gamma_N \int_{T(E)} dx = \gamma_N \int_E J(T)\,d\xi.$$

Se invece $1 \le k < N$, scriviamo $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$ e indichiamo con P e Q le proiezioni ortogonali su $\mathbb{R}^k$ e su $\mathbb{R}^{N-k}$ rispettivamente. Sia $R \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ la rotazione che porta l'immagine di T, che è un sottospazio k-dimensionale, nel piano k-dimensionale di $\mathbb{R}^N$ di equazione $Qx = 0$: dunque la composizione RT, applicata a un vettore x, è un vettore di $\mathbb{R}^N$ cha appartiene all'immagine di P, ossia ha le ultime $N-k$ componenti nulle; in particolare si ha $PRT = RT$. Detto $\Gamma : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ l'operatore definito da $\Gamma(x_1, \dots, x_N) = (x_1, \dots, x_k)$, notiamo che $\Gamma^t = L$, ove $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^N)$ è dato da $(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$: infatti, se $x \in \mathbb{R}^N$ e $v \in \mathbb{R}^k$ si ha

$$(\Gamma x, v)_k = \sum_{j=1}^{k} x_j\, v_j = (x, Lv)_N\,.$$

Si noti che L è un'isometria, e che inoltre $L\Gamma = P$, dato che

$$L\Gamma(x_1, \dots x_N) = L(x_1, \dots x_k) = (x_1, \dots x_k, 0, \dots, 0) = P(x_1, \dots, x_N) \quad \forall x \in R^N.$$

Ciò premesso, sia $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k)$ definito da $S = \Gamma RT$. Allora, essendo $R^t = R^{-1}$,

$$S^t S = T^t R^{-1} \Gamma^t \Gamma RT = T^t R^{-1} L\Gamma RT == T^t R^{-1} PRT = T^t R^{-1} RT = T^t T,$$

da cui $J(S) = J(T)$. Pertanto, essendo $R^{-1}LS = R^{-1}L\Gamma RT = R^{-1}PRT = T$, usando l'invarianza per isometrie di H_k si conclude che

$$H_k(T(E)) = H_k(R^{-1}LS(E)) = H_k(LS(E)) = H_k(S(E));$$

d'altronde, $H_k = \gamma_k m_k$ per quanto visto nel caso $N = k$, e dunque

$$\begin{aligned} H_k(T(E)) &= H_k(S(E)) = \gamma_K m_k(S(E)) = \\ &= \gamma_k \int_E J(S)\,dx = \gamma_k \int_E J(T)\,dx = J(T)\gamma_k m_k(E), \end{aligned}$$

e ciò prova la tesi nel caso lineare.
Passiamo al caso generale. Per compattezza, in virtù delle ipotesi fatte su f, esiste $\vartheta > 0$ tale che

$$|Df(x)z|_N \geq \vartheta |z|_k \qquad \forall x \in U, \quad \forall z \in \mathbb{R}^k.$$

Fissiamo $\delta \in]0, \vartheta[$ e sia E un generico apertop contenuto in A. Per ogni $x \in E$ esistono una palla $V_x \subset E$ ed un'applicazione lineare $T_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^N)$ tali che

$$\|T_x - Df(y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^N)} < \delta \qquad \forall y \in V_x\,.$$

La famiglia $\{V_x\}_{x\in E}$ è un ricoprimento dell'aperto E: quindi esiste un sottoricoprimento numerabile $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con le relative applicazioni $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che

$$\|T_n - Df(y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^N)} < \delta \quad \forall y \in V_n\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Per ogni $z \in V_n$ e $y \in \mathbb{R}^k$ si ha

$$|Df(z)y|_N = |T_n y|_N + |Df(z)y - T_n y|_N \leq |T_n y|_N + \delta |y|_K \leq |T_n y|_N + \frac{\delta}{\vartheta}\,|Df(z)y|_N\,,$$

da cui

$$\left(1 - \frac{\delta}{\vartheta}\right)|Df(z)y|_N \leq |T_n y|_N\,,$$

Similmente si ottiene

$$\left(1 + \frac{\delta}{\vartheta}\right)|Df(z)y|_N \geq |T_n y|_N\,,$$

e in definitiva otteniamo la prima delle due relazioni per noi fondamentali:

$$\left(1 - \frac{\delta}{\vartheta}\right)|Df(z)y|_N \leq |T_n y|_N \leq \left(1 + \frac{\delta}{\vartheta}\right)|Df(z)y|_N \qquad \forall z \in V_n\,, \quad \forall y \in \mathbb{R}^k.$$

Adesso osserviamo che, in virtù della differenziabilità di f e della prima relazione fondamentale si ha

$$\begin{aligned} |f(u) - f(v)|_N &= \left|\int_0^1 Df((1-t)v + tu)(u-v)\,dt\right|_N \leq \\ &\leq |T_n(u-v)|_N + \left|\int_0^1 [Df((1-t)v+tu) - T_n](u-v)\,dt\right|_N \leq \\ &\leq |T_n(u-v)|_N + \delta|u-v|_k \leq |T_n(u-v)|_N + \frac{\delta}{\vartheta - \delta}|T_n(u-v)|_N\,, \end{aligned}$$

da cui, per $u, v \in V_n$,

$$|f(u) - f(v)|_N \leq \left(1 + \frac{\delta}{\vartheta - \delta}\right)|T_n(u-v)|_N\,,$$

e similmente, sempre per $u, v \in V_n$,

$$|f(u) - f(v)|_N \geq \left(1 - \frac{\delta}{\vartheta - \delta}\right) |T_n(u - v)|_N;$$

in definitiva ricaviamo la seconda delle due relazioni fondamentali per il nostro discorso:

$$\left(1 - \frac{\delta}{\vartheta - \delta}\right) |T_n(u - v)|_N \leq |f(u) - f(v)|_N \leq \left(1 + \frac{\delta}{\vartheta - \delta}\right) |T_n(u - v)|_N \quad \forall u, v \in V_n \, .$$

Adesso sostituiamo i V_n con i W_n così definiti:

$$W_1 = V_1 \, , \quad W_h = V_h \setminus \bigcup_{j=1}^{h-1} W_j \, , \qquad h = 2, 3, \ldots :$$

i W_n sono disgiunti, la loro unione è E e le due relazioni fondamentali valgono in ogni W_n.
Andiamo a tirare le conclusioni. Integriamo in W_n la prima relazione rispetto alla misura H_k:

$$\left(1 - \frac{\delta}{\vartheta}\right)^k H_k(Df(z)(W_n)) \leq H_k(T_n(W_n)) \leq \left(1 + \frac{\delta}{\vartheta}\right)^k H_k(Df(z)(W_n));$$

sfruttando il risultato già dimostrato nel caso lineare, si deduce, dopo semplificazione del fattore $\gamma_k m_k(W_n)$,

$$\left(1 - \frac{\delta}{\vartheta}\right)^k J(Df(z)) \leq J(T_n) \leq \left(1 + \frac{\delta}{\vartheta}\right)^k J(Df(z)) \quad \forall z \in W_n \, .$$

Integriamo questa relazione in W_n rispetto alla misura m_k:

$$\left(1 - \frac{\delta}{\vartheta}\right)^k \int_{W_n} J(Df(z))\, dz \leq J(T_n) m_k(W_n) \leq \left(1 + \frac{\delta}{\vartheta}\right)^k \int_{W_n} J(Df(z))\, dz,$$

e questa è la nostra terza relazione fondamentale. Dalla seconda relazione fondamentale, utilizzando l'esercizio 2.3.13, segue

$$\left(1 - \frac{\delta}{\vartheta - \delta}\right)^k H_k(T_n(W_n)) \leq H_k(f(W_n)) \leq \left(1 + \frac{\delta}{\vartheta - \delta}\right)^k H_k(T_n(W_n)),$$

ossia (quarta relazione fondamentale)

$$\left(1 - \frac{\delta}{\vartheta - \delta}\right)^k J(T_n)\gamma_k m_k(W_n) \leq H_k(f(W_n)) \leq \left(1 + \frac{\delta}{\vartheta - \delta}\right)^k J(T_n)\gamma_k m_k(W_n).$$

Mettendo insieme la terza e la quarta relazione fondamentale troviamo, tenuto conto anche della prima:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{\delta}{\vartheta-\delta}\right)^{-k} H_k(f(W_n)) &\leq H_k(T_n(W_n)) = J(T_n)\gamma_k m_k(W_n) \leq \\ &\leq \left(1+\frac{\delta}{\vartheta}\right)^{k} \gamma_k \int_{W_n} J(Df(z))\,dz \leq \\ &\leq \left(1+\frac{\delta}{\vartheta}\right)^{k} \left(1-\frac{\delta}{\vartheta}\right)^{-k} J(T_n)\gamma_k m_k(W_n) = \\ &= \left(1+\frac{\delta}{\vartheta}\right)^{k} \left(1-\frac{\delta}{\vartheta}\right)^{-k} H_k(T_n(W_n)) \leq \\ &\leq \left(1+\frac{\delta}{\vartheta}\right)^{k} \left(1-\frac{\delta}{\vartheta}\right)^{-k} \left(1-\frac{\delta}{\vartheta-\delta}\right)^{-k} H_k(f(W_n)).\end{aligned}$$

Sommando rispetto a n questa relazione, si ricava

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{\delta}{\vartheta-\delta}\right)^{-k} H_k(f(E)) &\leq \left(1+\frac{\delta}{\vartheta}\right)^{k} \gamma_k \int_{E} J(Df(z))\,dz \leq \\ &\leq \left(1+\frac{\delta}{\vartheta}\right)^{k} \left(1-\frac{\delta}{\vartheta}\right)^{-k} \left(1-\frac{\delta}{\vartheta-\delta}\right)^{-k} H_k(f(E)),\end{aligned}$$

e per $\delta \to 0^+$

$$H_k(f(E)) = \gamma_k \int_E J(Df(z))\,dz.$$

Fissiamo adesso un compatto $K \subset A$: scegliendo una successione di aperti E_n tale che $E_{n+1} \subseteq E_n$ e $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = K$, nella formula sopra scritta, con gli E_n al posto di E, si può passare al limite utilizzando la proposizione 2.1.5. Il risultato è

$$H_k(f(K)) = \gamma_k \int_K J(Df(z))\,dz$$

per ogni comnpatto $K \subset A$. Infine, sia $\{A_n\}$ una successione crescente di aperti con $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$: allora la successione dei compatti $\{\overline{A_n}\}$ verifica

$$U = \overline{A} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \subseteq U\,,$$

ossia $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$. Mettendo $\overline{A_n}$ al posto di K nell'ultima uguaglianzaa scritta, e passando al limite, si ottiene finalmente, ancora grazie alla proposizione 2.1.5,

$$H_k(V) = H_k(f(U)) = \gamma_k \int_U J(Df(z))\,dz,$$

che è la tesi. $\square$

Esercizi 6.7

Brouno

1. Verificare che il teorema di Brouwer è falso per la palla unitaria chiusa di ℓ^2 (per la definizione di questo spazio si veda l'esercizio 7.2.4).
[**Traccia:** si consideri l'applicazione $f(x) = \left(\sqrt{1 - \|x\|_{\ell^2}^2}, x_1, x_2, \ldots\right)$, $x \in B$, ove B è la palla unitaria chiusa di ℓ^2.]

f(x)xpos

2. Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un'applicazione continua tale che esista $R > 0$ per cui si abbia

$$(f(x), x)_N \geq 0 \qquad \forall x \in B(0, R).$$

Si provi che esiste $\overline{x} \in \overline{B(0,R)}$ tale che $f(\overline{x}) = 0$.
[**Traccia:** ragionare per assurdo, applicando il teorema di Brouwer alla funzione $F : \overline{B(0,R)} \to \overline{B(0,R)}$ definita da $F(x) = -R\frac{f(x)}{|f(x)|_N}$.]

copo

3. *(Coordinate polari in $\mathbb{R}^N$)* Sia $T : [0, \infty[\times [0, \pi]^{N-2} \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^N$ la trasformazione definita da $x = T(r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{N-2}, \varphi)$, ove

$$\begin{cases} x_1 & = r\cos\vartheta_1 \\ x_2 & = r\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 \\ x_3 & = r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos\vartheta_3 \\ \ldots & \ldots\ldots \\ x_{N-2} & = r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\sin\vartheta_3\ldots\sin\vartheta_{N-3}\cos\vartheta_{N-2} \\ x_{N-1} & = r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\sin\vartheta_3\ldots\sin\vartheta_{N-3}\sin\vartheta_{N-2}\cos\varphi \\ x_N & = r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\sin\vartheta_3\ldots\sin\vartheta_{N-3}\sin\vartheta_{N-2}\sin\varphi \end{cases}$$

Si provi che

$$|J_T(r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{N-2}, \varphi)| = r^{N-1}(\sin\vartheta_1)^{N-2}(\sin\vartheta_2)^{N-3}\ldots\sin\vartheta_{N-2}$$

e che il teorema 6.7.7 è applicabile.

misupalla

4. Posto $\alpha_N = m_N(B(0,1))$, ove $B(0,1)$ è la palla aperta di $\mathbb{R}^N$ di centro l'origine e raggio 1, si provi che

$$\alpha_N = \frac{2\pi}{N}\,\alpha_{N-2} \qquad \forall N > 2,$$

e si deduca che, in accordo con l'osservazione 2.4.8,

$$\alpha_N = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)} = \begin{cases} \frac{\pi^n}{n!} & \text{se } N = 2n \\ \frac{2^n\pi^{n-1}}{(2n-1)!!} & \text{se } N = 2n-1, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}^+,$$

ove $k!!$ è il prodotto di tutti i naturali non superiori a k che hanno la stessa parità di k.

fradiale

5. Sia $f : [0, R] \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione integrabile. Si provi che

$$\int_{B(0,r)} f(|x|_N)\, dm_N = N\alpha_N \int_0^r f(\rho)\rho^{N-1} dm \qquad \forall r \in [0, R].$$

compnonmis

6. Sia C_ξ l'insieme di Cantor di parametro $\xi > \frac{1}{3}$ e sia $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ la collezione di intervalli aperti rimossi durante la costruzione di C_ξ; siano poi g_n funzioni continue nulle su W_n^c e tali che $0 < g_n < 2^{-n}$ in W_n. Posto $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$, definiamo

$$T(x) = \int_0^x g(t)dt, \quad t \in [0,1].$$

Si provi che:

(i) T verifica le ipotesi del teorema 6.7.7 con $N = 1$ e $Y = V =]0,1[$;

(ii) T è derivabile in $[0,1]$, $T'(x) = 0$ per ogni $x \in C_\xi$ e $m(T(C_\xi)) = 0$;

(iii) se V è un sottoinsieme non misurabile di C_ξ e $A = T(V)$, allora χ_A è una funzione misurabile ma $\chi_A \circ T$ non lo è.

areavararb

7. Si provi la formula dell'area (teorema 6.7.9) per k-varietà definite su arbitrari aperti di $\mathbb{R}^k$.
Traccia: si approssimi l'aperto con un'opportuna successione crescente di compatti, nei quali si applica il teorema 6.7.9.]

Soluzioni degli esercizi del capitolo 6

sol06

Esercizi del paragrafo 6.1

Esercizio 6.1.1 Si ha

$$f(x) = \int_0^x \chi_{\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]}(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \\ x - \frac{1}{2} & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right] \\ \frac{1}{4} & \text{se } x \in \left[\frac{3}{4},1\right]; \end{cases}$$

quindi

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \left[0,\frac{1}{2}\right[\\ 1 & \text{se } x \in \left]\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right[\\ 0 & \text{se } x \in \left]\frac{3}{4},1\right], \end{cases}$$

mentre

$$f'_+\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad f'_-\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \qquad f'_+\left(\frac{3}{4}\right) = 0, \quad f'_-\left(\frac{3}{4}\right) = 1.$$

Esercizio 6.1.2 Per $x \in [0,1]$ si ha lo sviluppo decimale infinito $x = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k \cdot 10^{-k}$, con gli α_k non definitivamente nulli. Allora possiamo scrivere, per $n \in N^+$ fissato,

$$x = \sum_{k=1}^\infty \frac{\alpha_k}{10^k} = \frac{1}{10^n}\sum_{k=1}^n 10^{n-k}\alpha_k + r_n = \frac{m_n}{10^n} + r_n\,, \qquad m_n \in \mathbb{N}, \quad 0 \le r_n \le 10^{-n}.$$

Il valore $f_n(x) = \inf\left\{\left|x - \frac{m}{10^n}\right| : m \in \mathbb{N}\right\}$ è dunque uguale a r_n se il punto x appartiene alla prima metà dell'intervallo $[m_n \cdot 10^{-n}, (m_n+1)\cdot 10^{-n}]$ che lo contiene, mentre è uguale a $10^{-n} - r_n$ se x appartiene alla seconda metà di tale intervallo. Dato che $r_n = x - m_n \cdot 10^{-n}$, il grafico di f_n è a forma di sega, e pertanto f_n è continua. Risulta $\min f_n = 0$ (raggiunto nei punti $m \cdot 10^{-n}$) e $\max f_n = \frac{1}{2}\cdot 10^{-n}$ (raggiunto nei punti medi $\left(m + \frac{1}{2}\right)\cdot 10^{-n}$). Quindi

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty f_n(x) \le \frac{1}{2}\sum_{n=0}^\infty 10^{-n} = \frac{5}{9}\,,$$

e in particolare la serie che definisce f converge totalmente.
Proviamo che f non è mai derivabile. Per un fissato $x \in [0,1]$ sia $x_k = x \pm 10^{-k}$, col segno $-$ se $\alpha_k = 4$ oppure $\alpha_k = 9$, e col segno $+$ negli altri casi: in questo modo, siamo sicuri che per ogni $n = 1, 2, \ldots, k-1$ i punti x_k e x appartengano alla stessa metà dello stesso intervallo di ampiezza 10^{-n}. Se $n \geq k$ risulta

$$\begin{aligned} f_n(x_k) &= \inf\{|x \pm 10^{-k} - m \cdot 10^{-n}| : m \in \mathbb{N}\} = \inf|x - (m \pm 10^{n-k}) \cdot 10^{-n}| : m \in \mathbb{N}\} = \\ &= \inf\{|x - h \cdot 10^{-n}| : h \in \mathbb{N}\} = f_n(x). \end{aligned}$$

Se invece $n < k$, come abbiamo osservato x_k e x appartengono alla stessa metà dello stesso intervallo di ampiezza 10^{-n}: in particolare

$$x_k - x \begin{cases} > 0 & \text{se } k = 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 \\ < 0 & \text{se } k = 4, 9, \end{cases}$$

da cui

$$f_n(x_k) - f_n(x) = \begin{cases} 10^{-k} = x_k - x & \text{se } \alpha_k = 0, 1, 2, 3 \\ -10^{-k} = x_k - x & \text{se } \alpha_k = 4, \\ -10^{-k} = -(x_k - x) & \text{se } \alpha_k = 5, 6, 7, 8 \\ 10^{-k} = -(x_k - x) & \text{se } \alpha_k = 9. \end{cases}$$

Ricaviamo allora

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_k) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_k) = \sum_{n=0}^{k-1} [f_n(x) - f_n(x_k)] + \sum_{n=k}^{\infty} [f_n(x) - f_n(x_k)] = \\ &= \pm \sum_{n=0}^{k-1} (x_k - x) + 0 : \end{aligned}$$

la quantità $f(x) - f(x_k)$ è dunque la somma di k addendi uguali, ognuno col proprio segno: alcuni, diciamo h, avranno il segno $+$, e gli altri $k - h$ avranno il segno $-$. Si ottiene perciò

$$f(x) - f(x_k) = (x_k - x)[+h - (k - h)] = (x_k - x)(2h - k) = p_k(x_k - x),$$

ove l'intero p_k ha la stessa parità di k. Ne segue che, per $k \to \infty$, la quantità

$$\frac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k} = -p_k$$

non ha limite.

Esercizi del paragrafo 6.2

Esercizio 6.2.1 Sia

$$M_t = \{x \in \mathbb{R}^N : \ Mf(x) > t\} :$$

per provare che M_t è aperto, fissiamo $x \in M_t$: per definizione di $Mf(x)$, esiste $r > 0$ tale che

$$\frac{1}{m_N(B_r)} \int_{B(x,r)} |f| \, dm_N > t.$$

Per assoluta continuità dell'integrale rispetto al dominio, vi è $\delta > 0$ per il quale

$$\frac{1}{m_N(B_r)} \int_{B(x+y,r)} |f| \, dm_N > t \qquad \forall y \in B(0, \delta),$$

da cui $Mf(x + y) > t$ per ogni $y \in B(0, \delta)$. Ciò prova che $B(x, \delta) \subseteq M_t$ e pertanto M_t è aperto.

Esercizio 6.2.2 (i) Sia $x \in L(F)$: quindi esiste g nella classe di equivalenza F ed esiste $y_x \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m_N(B_r)} \int_{B(x,r)} |g(\xi) - y_x|\, d\xi = 0.$$

Se $h \in F$, allora $h = g$ q.o. e dunque

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m_N(B_r)} \int_{B(x,r)} |h(\xi) - y_x|\, d\xi = 0.$$

(ii) Se $g \in F$ e se in un punto $x \in \mathbb{R}^N$ vale

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m_N(B_r)} \int_{B(x,r)} |g(\xi) - g(x)|\, d\xi = 0,$$

allora si ha $x \in L(F)$ con $y_x = g(x)$; per il teorema 6.2.2, $L(F)$ è costituito da quasi tutti i punti di $\mathbb{R}^N$.

(iii) Poniamo

$$f(x) = \begin{cases} y_x & \text{se } x \in L(F), \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

dobbiamo provare che $f \in F$. Se $g \in F$, per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$ vale, in virtù del teorema 6.2.2,

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m_N(B_r)} \int_{B(x,r)} |g(\xi) - g(x)|\, d\xi = 0,$$

ossia $x \in L(F)$ e $y_x = g(x)$: quindi $g(x) = f(x)$ per ogni $x \in L(F)$, cioè q.o., e dunque $f \in L(F)$.
In definitiva, per ogni $g \in F$ e per ogni punto $x \in \mathbb{R}^N$ per il quale è nullo il limite precedente, deve essere $x \in L(F)$ e $f(x) = g(x)$. Pertanto $L(F)$ è l'unione di tutti i punti di Lebesgue (secondo la definizione 6.2.1) di ogni $g \in F$. Possiamo dunque dire che f è il rappresentante canonico di F.

Esercizio 6.2.3 Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Per ogni $x \in L(f)$ si ha

$$\begin{aligned} |f(x)| &\le \left| f(x) - \frac{1}{m_N(B_r)} \int_{B(x,r)} f(\xi)\, d\xi \right| + \frac{1}{m_N(B_r)} \int_{B(x,r)} |f(\xi)|\, d\xi \le \\ &\le \frac{1}{m_N(B_r)} \int_{B(x,r)} |f(x) - f(\xi)|\, d\xi + \sup_{r>0} \frac{1}{m_N(B_r)} \int_{B(x,r)} |f(\xi)|\, d\xi = \\ &= \frac{1}{m_N(B_r)} \int_{B(x,r)} |f(\xi) - f(x)|\, d\xi + Mf(x). \end{aligned}$$

Per $r \to 0^+$ si ottiene la tesi per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$.

Esercizio 6.2.4 Per definizione di $\delta_E(x)$ si ha

$$\delta_E(x) = \lim_{r\to 0^+} \frac{m_N(E \cap B(x,r))}{m_N(B_r)} = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m_N(B_r)} \int_{B(x,r)} \chi_E(\xi)\, d\xi.$$

Se $m_N(E) < \infty$, allora $\chi_E \in L^1(\mathbb{R}^N)$, nel qual caso il limite esiste e vale $\chi_E(x)$ q.o. in $\mathbb{R}^N$. Dunque sarà $\delta_E(x) = 1$ q.o. in E e $\delta_E(x) = 0$ q.o. in E^c. Se $m_N(E) = \infty$, ragionando con $E \cap B(0,n)$ al posto di E ed osservando che $\delta_{E\cap B(0,n)}(x) = \delta_E(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, si ottiene

$$\delta_E(x) == 1 \text{ q.o. in } E, \quad \delta_E(x) = 0 \text{ q.o. in } E^c.$$

Esercizi del paragrafo 6.3

Esercizio 6.3.1 Supponiamo ad esempio che f sia crescente: allora f è discontinua in x se e solo se $f(x^+) - f(x^-) > 0$. Fissato $k \in \mathbb{N}^+$, definiamo

$$E_{nk} = \left\{ x \in [-k,k] : \ f(x^+) - f(x^-) > \frac{1}{n} \right\}.$$

L'insieme dei punti di discontinuità di f in $[-k,k]$ è uguale all'unione $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} E_{nk}$; dato che f è limitata in $[-k,k]$, ciascun E_{nk} è un insieme finito e quindi l'unione è al più numerabile. Ma allora anche l'insieme dei punti di discontinuità di f in $\mathbb{R}$, che è $\bigcup_{n,k\in\mathbb{N}^+} E_{nk}$, è al più numerabile.
Risulta f continua in x_0 se e solo se $f(x_0^+) = f(x_0^-)$. Poiché

$$\begin{aligned} \mu(\{x_0\}) &= \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} \left[x_0, x_0 + \frac{1}{n} \right[\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left[x_0, x_0 + \frac{1}{n} \right[\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[f\left(x_0 + \frac{1}{n} \right) - f(x_0) \right] = f(x_0^+) - f(x_0) = f(x_0^+) - f(x_0^-), \end{aligned}$$

si ottiene che f è continua in x_0 se e solo se $\mu(\{x_0\}) = 0$.

Esercizio 6.3.2 Sia $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una numerazione di $\mathbb{Q}$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia $A_x = \{k \in \mathbb{N} : \ r_k \le x\}$, e definiamo

$$f(x) = \sum_{k\in A_x} \frac{1}{2^{k+1}}.$$

È chiaro che f è strettamente crescente e che $f(x) \to 0$ per $x \to -\infty$, $f(x) \to 1$ per $x \to +\infty$. Inoltre, se $y > x$ si ha

$$\inf\{k \in A_y \setminus A_x\} = \inf\{k \in \mathbb{N} : \ x < r_k \le y\} \to +\infty \quad \text{per } y \to x^+,$$

e quindi

$$f(y) - f(x) = \sum_{k\in A_y\setminus A_x} \frac{1}{2^{k+1}} \to 0 \quad \text{per } y \to x^+.$$

Pertanto f è continua a destra.
Se $x \in \mathbb{Q}$, $x = r_k$, si ha per $h > 0$, scelto $r_m \in]r_k, r_k + h[$,

$$f(x+h) - f(x) = f(r_k + h) - f(r_k) \ge \frac{1}{2^{m+1}},$$

in quanto l'addendo $\frac{1}{2^{m+1}}$ compare in $f(r_k+h)$ ma non in $f(r_k)$. Dunque f è discontinua in ogni punto razionale.
Se invece $x \notin \mathbb{Q}$ e se $y < x$, come prima, risulta

$$\inf\{k \in A_x \setminus A_y\} = \inf\{k \in \mathbb{N} : \ y < r_k \le x\} \to +\infty \quad \text{per } y \to x^-,$$

da cui

$$f(x) - f(y) = \sum_{k\in A_x\setminus A_y} \frac{1}{2^{k+1}} \to 0 \quad \text{per } y \to x^-.$$

Dunque f è continua in x.

Esercizio 6.3.3 Poiché g è localmente costante salvo un'infinità numerabile di punti, tra due punti di discontinuità vi è un intervallo dove g è costante. Allora, detto $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ l'insieme dei punti di discontinuità di g, possiamo ordinare questi punti in modo crescente; perciò possiamo scrivere $g = \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n)\chi_{]x_{n-1},x_n]}$. Dunque

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} [g(x_n) - g(x_n^-)]\delta_{x_n},$$

ove δ_x è la misura di Dirac (esempio 2.1.3 (5)) concentrata nel punto x. Questa misura è definita su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Esercizio 6.3.4 Risulta

$$D^+f(0) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \limsup_{h\to 0^+} \sin\frac{1}{h} = 1,$$
$$D_+f(0) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \liminf_{h\to 0^+} \sin\frac{1}{h} = -1,$$
$$D^-f(0) = \limsup_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \limsup_{h\to 0^-} \sin\frac{1}{h} = 1,$$
$$D_-f(0) = \liminf_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \liminf_{h\to 0^-} \sin\frac{1}{h} = -1.$$

Esercizio 6.3.5 Essendo $b > a$ e $d > c$, risulta

$$D^+f(0) = \limsup_{x\to 0^+} \left[a\sin^2\frac{1}{x} + b\cos^2\frac{1}{x}\right] = b,$$
$$D_+f(0) = \liminf_{x\to 0^+} \left[a\sin^2\frac{1}{x} + b\cos^2\frac{1}{x}\right] = a,$$
$$D^-f(0) = \limsup_{x\to 0^-} \left[c\sin^2\frac{1}{x} + d\cos^2\frac{1}{x}\right] = d,$$
$$D_-f(0) = \liminf_{x\to 0^-} \left[c\sin^2\frac{1}{x} + d\cos^2\frac{1}{x}\right] = c.$$

Esercizio 6.3.6 Sia $x \in \mathbb{R}$. Per $f = \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ risulta

$$D^+f(x) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x+h)-\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)}{h} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$
$$D_+f(x) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x+h)-\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)}{h} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -\infty & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$
$$D^-f(x) = \limsup_{h\to 0^-} \frac{\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x+h)-\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)}{h} = \begin{cases} -\infty & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$
$$D_-f(x) = \liminf_{h\to 0^-} \frac{\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x+h)-\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)}{h} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ +\infty & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$

Esercizio 6.3.7 Essendo f misurabile, anche

$$D^+f(x) = \limsup_{n\to\infty} n(f(x+1/n)-f(x))$$

è misurabile. Stesso discorso per gli altri numeri derivati.

Esercizio 6.3.8 Se esiste $f'(x)$, allora

$$\begin{aligned} D^+(f+g)(x) &= \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} = \\ &= \limsup_{h\to 0^+} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] = f'(x) + D^+g(x). \end{aligned}$$

Analogamente,

$D_+(f+g)(x) = f'(x)+D_+g(x)$, $\quad D^-(f+g)(x) = f'(x)+D^-g(x)$, $\quad D_-(f+g)(x) = f'(x)+D_-g(x)$.

Esercizio 6.3.9 Sia $0 < a < b$. Per le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} ax\sin^2\frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} bx\cos^2\frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

si ha $D^+(f+g)(0) = b$ per l'esercizio 6.3.5, mentre $D^+f(0) = a$ e $D^+g(0) = b$.

Esercizi del paragrafo 6.4

Esercizio 6.4.1 Proviamo che la quantità $\|f\|_{BV[a,b]} = \|f\|_\infty + T_a^b(f)$ è una norma. È chiaro che

$$\|f\|_{BV[a,b]} \geq 0, \qquad \|f\|_{BV[a,b]} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f \equiv 0.$$

È pure evidente che

$$\|\lambda f\|_{BV[a,b]} = |\lambda| \|f\|_{BV[a,b]} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Infine, essendo ovviamente $T_a^b(f+g) \leq T_a^b(f) + T_a^b(g)$,

$$\|f+g\|_{BV[a,b]} = \|f+g\|_\infty + T_a^b(f+g) \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + T_a^b(f) + T_a^b(g) = \|f\|_{BV[a,b]} + \|g\|_{BV[a,b]}\,.$$

Proviamo la completezza. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in $BV[a,b]$: ciò implica intanto che $\{f_n\}$ è limitata in $BV[a,b]$ da una costante $K > 0$ ed è di Cauchy in $L^\infty(a,b)$; quindi esiste $f \in L^\infty(a,b)$ tale che $f_n \to f$ in $L^\infty[a,b]$ per $n \to \infty$. Inoltre, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $T_a^b(f_n - f_m) < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq \nu$. Per ogni suddivisione π di $[a,b]$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} t_a^b(f,\pi) &= \lim_{n\to\infty} t_a^b(f_n,\pi) \leq \liminf_{n\to\infty} t_a^b(f_n - f_\nu,\pi) + t_a^b(f_\nu,\pi) \leq \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} T_a^b(f_n - f_\nu) + T_a^b(f_\nu) \leq \varepsilon + K. \end{aligned}$$

Dunque, per l'arbitrarietà di π, $T_a^b(f) < \infty$, vale a dire $f \in BV[a,b]$. Inoltre, per ogni suddivisione π si ha per $n \geq \nu$

$$t_a^b(f_n - f,\pi) = \lim_{m\to\infty} t_a^b(f_n - f_m,\pi) \leq \liminf_{m\to\infty} T_a^b(f_n - f_m) \leq \varepsilon,$$

da cui $T_a^b(f_n - f) \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$. Ne segue $\|f_n - f\|_{BV[a,b]} \to 0$ per $n \to \infty$.
Proviamo infine che $BV[a,b]$ non è chiuso in $L^\infty(a,b)$. La funzione, definita su $[0,1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ n\left(x - \frac{1}{n}\right) & \text{se } x \in \left]\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right], \ n \geq 2, \end{cases}$$

appartiene a $L^\infty(0,1)$ ma non a $BV[0,1]$, perché se $\pi_N : 0 < \frac{1}{N} < \frac{1}{N-1} < \cdots < \frac{1}{2} < 1$, si ha $t_0^1(f,\pi_N) = \sum_{k=1}^N \frac{2}{k}$, e dunque $T_0^1(f) = \infty$. Però per la funzione $f_n = f\,\chi_{\left[\frac{1}{n},1\right]}$ si ha $f_n \in BV[0,1]$ con $\|f_n\|_{BV[0,1]} = T_{1/n}^1(f) < \infty$, ed inoltre, per $n \to \infty$,

$$\|f_n - f\|_{L^\infty} = \sup_{0<x<\frac{1}{n}} f = \frac{1}{n} \to 0.$$

Quindi $f \notin BV[0,1]$ ma f è limite in $L^\infty(0,1)$ di una successione contenuta in $BV[0,1]$, il che prova la tesi.

Esercizio 6.4.2 (i) La funzione $f(x) = x(x^2-1)$ è dispari, vale 6 in $x = 2$, ha massimo relativo $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ in $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, e dunque un minimo relativo $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ in $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Perciò la f cresce in $\left[-2, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, decresce in $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ e cresce in $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 2\right]$. Per l'osservazione 6.4.2 (1), risulta

$$T_{-2}^{-1/\sqrt{3}}(f) = \frac{2}{3\sqrt{3}} + 6, \qquad T_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}(f) = \frac{4}{3\sqrt{3}}, \qquad T_{-1/\sqrt{3}}^{2}(f) = 6 + \frac{2}{3\sqrt{3}}\,,$$

da cui, per la proposizione 6.4.3,

$$T_{-2}^{2}(f) = 12 + \frac{8}{3\sqrt{3}}\,.$$

(ii) Possiamo riscrivere la funzione f nel modo segnente:

$$f(x) = 3\chi_{[0,1/4[} - 3\chi_{[1/4,1/2]} - 6\chi_{]1/2,3/4]}\,.$$

Dunque f ha un salto di -6 nel punto $1/4$, un salto di -3 nel punto $1/2$, e un salto di $+6$ nel punto $3/4$, mentre è costante altrove (si può anche dire che f decresce in $[0,3/4]$ e cresce su $[3/4,1]$). Pertanto

$$T_0^1(f) = T_0^{3/4}(f) + T_{3/4}^1(f) = 9 + 6 = 15.$$

(iii) Dato che la funzione $f(x) = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$, cresce in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, decresce in $\left[\frac{\pi}{2}\ \frac{3\pi}{2}\right]$ e cresce in $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, si ha

$$T_0^{2\pi}(f) = T_0^{\pi/2}(f) + T_{\pi/2}^{3\pi/2}(f) + T_{3\pi/2}^{2\pi}(f) = 1 + 2 + 1 = 4.$$

(iv) La funzione $f(x) = x - [x]$, $x \in [-50, 50]$, cresce di 1 in $[k, k+1[$ ed ha un salto di -1 in $x = k+1$, $k = -50, -49, \cdots, 48, 49$. Ne segue

$$T_{-50}^{50}(f) = \sum_{k=-50}^{49} T_k^{k+1}(f) = \sum_{k=-50}^{49} 2 = 200.$$

Esercizio 6.4.3 Per g si ha $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ e g crescente, quindi $g \in BV[0,1]$ e $T_0^1(g) = 1$. La funzione f ha salti di $+\frac{1}{n^2}$ nei punti $x = \frac{1}{n}$ e di $-\frac{1}{n^2}$ nei punti $x = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$, $n \geq 2$, mentre è costante fra un nodo e il successivo. Dunque $T_0^1(f) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$ e pertanto $f \in BV[0,1]$. D'altra parte

$$g(f(x)) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right] \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

e quindi $T_0^1(g \circ f) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n} = \infty$, cosicché $g \circ f \notin BV[0,1]$.

Esercizio 6.4.4 Per $x, y \in [a,b]$ consideriamo la differenza $|f \vee g(y) - f \vee g(x)|$. Si ha

$$|f \vee g(y) - f \vee g(x)| = \begin{cases} |f(y) - f(x)| & \text{se } f(y) \geq g(y) \text{ e } f(x) \geq g(x) \\ |g(y) - g(x)| & \text{se } f(y) \leq g(y) \text{ e } f(x) \leq g(x) \\ |f(y) - g(x)| & \text{se } f(y) \geq g(y) \text{ e } f(x) \leq g(x) \\ |g(y) - f(x)| & \text{se } f(y) \leq g(y) \text{ e } f(x) \geq g(x). \end{cases}$$

In particolare, nel terzo caso si ottiene

$$|f(y) - g(x)| \leq \begin{cases} f(y) - f(x) & \text{se } f(y) - g(x) \geq 0 \\ g(x) - g(y) & \text{se } f(y) - g(x) \leq 0, \end{cases}$$

mentre nel quarto caso si trova

$$|g(y) - f(x)| \leq \begin{cases} g(y) - g(x) & \text{se } g(y) - f(x) \geq 0 \\ f(x) - f(y) & \text{se } g(y) - f(x) \leq 0, \end{cases}$$

Si conclude che, in tutti i casi,

$$|f \vee g(y) - f \vee g(x)| \leq |f(y) - f(x)| + |g(y) - g(x)| \qquad \forall x, y \in [a,b],$$

e quindi

$$T_a^b(f \vee g) \leq T_a^b(f) + T_a^b(g).$$

Analogamente, per $x, y \in [a,b]$ si ha

$$|f \wedge g(y) - f \wedge g(x)| = \begin{cases} |f(y) - f(x)| & \text{se } f(y) \leq g(y) \text{ e } f(x) \leq g(x) \\ |g(y) - g(x)| & \text{se } f(y) \geq g(y) \text{ e } f(x) \geq g(x) \\ |f(y) - g(x)| & \text{se } f(y) \leq g(y) \text{ e } f(x) \geq g(x) \\ |g(y) - f(x)| & \text{se } f(y) \geq g(y) \text{ e } f(x) \leq g(x), \end{cases}$$

e in particolare, nel terzo caso,

$$|f(y) - g(x)| \leq \begin{cases} f(y) - f(x) & \text{se } f(y) - g(x) \geq 0 \\ g(x) - g(y) & \text{se } f(y) - g(x) \leq 0, \end{cases}$$

mentre nel quarto caso

$$|g(y)-f(x)| \le \begin{cases} f(y)-f(x) & \text{se } g(y)-f(x)\ge 0 \\ g(x)-g(y) & \text{se } g(y)-f(x)\le 0. \end{cases}$$

Si conclude che

$$|f\wedge g(y)-f\wedge g(x)| \le |f(y)-f(x)|+|g(y)-g(x)| \qquad \forall x,y\in[a,b],$$

e quindi

$$T_a^b(f\wedge g)\le T_a^b(f)+T_a^b(g).$$

Esercizio 6.4.5 Per ipotesi, il grafico Γ di f è una curva continua di lunghezza finita o infinita. Per ogni partizione $\pi = a < t_1 < \cdots < t_{k-1} < b$ di $[a,b]$ si ha

$$t_a^b(f,\pi)=\sum_{j=1}^{k}|f(t_j)-f(t_{j-1})|<\sum_{j=1}^{k}\sqrt{(t_j-t_{j-1})^2+|f(t_j)-f(t_{j-1})|^2}\le \ell(\Gamma),$$

da cui $T_a^b(f)\le \ell(\Gamma)$. Dunque, se la curva ha lunghezza finita, ossia è rettificabile, si ottiene che $f\in BV[a,b]$.
Viceversa, sia $f\in BV[a,b]$. Allora per ogni partizione $\pi = a < t_1 < \cdots < t_{k-1} < b$ di $[a,b]$ si ha

$$\sum_{j=1}^{k}\sqrt{(t_j-t_{j-1})^2+|f(t_j)-f(t_{j-1})|^2}\le b-a+t_a^b(f,\pi)\le b-a+T_a^b(f),$$

da cui $\ell(\Gamma)\le b-a+T_a^b(f)$. La curva continua $(t,f(t))$, $t\in[a,b]$, è dunque rettificabile.

Esercizio 6.4.6 (i) Dato che il segmento di estremi $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$ ha lunghezza non superiore a quella di Γ, si ha $\sqrt{(b-a)^2+|f(b)-f(a)|^2}\le\ell(\Gamma)$; come si è visto nella soluzione dell'esercizio 6.4.5, vale anche $\ell(\Gamma)\le b-a+T_a^b(f)$, che nel caso monotono diventa $\ell(\Gamma)\le b-a+|f(b)-f(a)|$.
(ii) La disuguaglianza $\sqrt{(b-a)^2+|f(b)-f(a)|^2}\le\ell(\Gamma)$ è stretta se Γ non è rettilinea: dunque perché valga l'uguaglianza Γ deve essere un segmento, ossia f deve essere una funzione affine.
(iii) Una classe di funzioni continue e monotone per le quali $\ell(\Gamma)=b-a+|f(b)-f(a)|$ è quella delle costanti: in tal caso intatti $f(b)=f(a)$ e $\ell(\Gamma)=b-a$. Sorprendentemente, vi sono anche funzioni non costanti per cui $\ell(\Gamma)=b-a+|f(b)-f(a)|$: un esempio si incontrerà più avanti, nell'esercizio 6.5.21.

Esercizio 6.4.7 Sia $f\in BV[a,b]$. Supponiamo che $x\mapsto T_a^x(f)$ sia continua in x_0; allora, essendo

$$|f(x)-f(x_0)|\le|T_{x_0}^x(f)|=|T_a^x(f)-T_a^{x_0}(f)|,$$

anche f è continua in x_0.
Viceversa, sia f continua in x_0. Fissiamo $\varepsilon>0$ e scegliamo una partizione π di $[a,x_0]$ tale che $T_a^{x_0}(f)-\varepsilon<t_a^{x_0}(f,\pi)$. Supponiamo $a<x<x_0$ e, detto x' il nodo di π che precede x_0, possiamo assumere che $x'<x<x_0$. Indichiamo con π_x una partizione di $[a,x]$ tale che $T_a^x(f)-\varepsilon<t_a^x(f,\pi_x)$. Sia poi π' la partizione di $[a,x_0]$ costituita dall'unione dei nodi di π e di π_x: dunque i due ultimi nodi di π' sono x e x_0. Sia infine π'_x la partizione di $[a,x]$ che rispetto a π' ha in meno il nodo x_0, e che ovviamente ha come suo ultimo nodo x. Allora risulta

$$T_a^x(f)-\varepsilon<t_a^x(f,\pi_x)\le t_a^x(f,\pi'_x)\le T_a^x(f),$$

$$T_a^{x_0}(f)-\varepsilon<t_a^{x_0}(f,\pi)\le t_a^{x_0}(f,\pi')\le T_a^{x_0}(f);$$

di conseguenza

$$T_a^{x_0}(f)-\varepsilon-T_a^x(f)\le t_a^{x_0}(f,\pi')-t_a^x(f,\pi'_x)=|f(x)-f(x_0)|.$$

Pertanto quando $x\to x_0^-$, essendo f continua in x_0, si trova

$$0\le\limsup_{x\to x_0^-}[T_a^{x_0}(f)-T_a^x(f)]\le\varepsilon,$$

da cui, essendo ε arbitrario, segue

$$\lim_{x\to x_0^-}[T_a^{x_0}(f)-T_a^x(f)]=0.$$

Supponiamo ora $x_0<x\le b$. Essendo $T_a^x(f)=T_a^b(f)-T_x^b(f)$, possiamo considerare partizioni di $[x,b]$ e di $[x_0,b]$ e procedere in modo simile. Fissiamo $\varepsilon>0$ e scegliamo una partizione π di $[x_0,b]$ tale che $T_{x_0}^b(f)-\varepsilon<t_{x_0}^b(f,\pi)$ e, detto x' il nodo di π che segue x_0, possiamo assumere che $x_0<x<x'$. Indichiamo con π_x una partizione di $[x,b]$ tale che $T_x^b(f)-\varepsilon<t_x^b(f,\pi_x)$. Sia poi π' la partizione di $[x_0,b]$ costituita dall'unione dei nodi di π e di π_x: dunque i due primi nodi di π' sono x_0 e x. Sia infine π'_x la partizione di $[x,b]$ che rispetto a π' ha in meno il nodo x_0, e che ovviamente ha come suo primo nodo x. Allora

$$T_x^b(f)-\varepsilon<t_x^b(f,\pi_x)\le t_x^b(f,\pi'_x)\le T_x^b(f),$$
$$T_{x_0}^b(f)-\varepsilon<t_{x_0}^b(f,\pi)\le t_{x_0}^b(f,\pi')\le T_{x_0}^b(f);$$

dunque

$$T_{x_0}^b(f)-\varepsilon-T_x^b(f)\le t_{x_0}^b(f,\pi')-t_x^b(f,\pi'_x)=|f(x)-f(x_0)|.$$

Ne segue

$$0\le\limsup_{x\to x_0^+}\left[T_{x_0}^b(f)-T_x^b(f)\right]\le\varepsilon,$$

ossia

$$\lim_{x\to x_0^+}\left[T_{x_0}^b(f)-T_x^b(f)\right]=0,$$

che equivale a

$$\lim_{x\to x_0^+}[T_a^x(f)-T_a^{x_0}(f)]=0.$$

Esercizio 6.4.8 Sia $\pi: a=t_0<t_1<\cdots<t_{k-1}<t_k=b$ una partizione di $[a,b]$. Risulta

$$\begin{aligned}
t_a^b(fg,\pi) &= \sum_{j=1}^k|f(t_j)g(t_j)-f(t_{j-1})g(t_{j-1})|\le\\
&\le \sum_{j=1}^k|(f(t_j))-f(t_{j-1}))g(t_j)|+\sum_{j=1}^k|f(t_{j-1})(g(t_{j-1}-g(t_j))|\le\\
&\le \|g\|_\infty\sum_{j=1}^k|f(t_j)-f(t_{j-1})|+\|f\|_\infty\sum_{j=1}^k|g(t_j)-g(t_{j-1})|=\\
&= t_a^b(f,\pi)\|g\|_\infty+t_a^b(g,\pi)\|f\|_\infty\le T_a^b(f)\|g\|_\infty+T_a^b(g)\|f\|_\infty\,,
\end{aligned}$$

da cui $T_a^b(fg)\le T_a^b(f)\|g\|_\infty+T_a^b(g)\|f\|_\infty$. Essendo anche, ovviamente, $\|fg\|_\infty\le\|f\|_\infty\|g\|_\infty$, si conclude che

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{BV[a,b]} &= \|fg\|_\infty+T_a^b(fg)\le\|f\|_\infty\|g\|_\infty+T_a^b(f)\|g\|_\infty+T_a^b(g)\|f\|_\infty=\\
&= \|f\|_{BV[a,b]}\|g\|_\infty+\|f\|_\infty T_a^b(g)\le\|f\|_{BV[a,b]}\|g\|_{BV[a,b]}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 6.4.9 Sia $f\in BV[a,b]$. Se $\inf_{[a,b]}|f|=0$, allora $\frac{1}{f}$ non è limitata, e dunque $\frac{1}{f}\notin BV[a,b]$. Viceversa, se $\inf_{[a,b]}|f|>0$, allora per ogni partizione $a=t_0<t_1<\cdots<t_{k-1}<t_k=b$ di $[a,b]$ si ha

$$\sum_{i=1}^k\left|\frac{1}{f(t_i)}-\frac{1}{f(t_{i-1})}\right|=\sum_{i=1}^k\frac{|f(t_i)-f(t_{i-1})|}{|f(t_i)|\,|f(t_{i-1})|}\le\frac{T_a^b(f)}{\left[\inf_{[a,b]}|f|\right]^2}<\infty,$$

cosicché $\frac{1}{f}\in BV[a,b]$ e vale la stima indicata.

Esercizio 6.4.10 Se $\inf_{[a,b]} g = \lambda > 0$, e $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$ è una partizione di $[a,b]$, si ha

$$\begin{aligned} t_a^b\left(\frac{f}{g},\pi\right) &= \sum_{j=1}^{k}\left|\frac{f(t_j)}{g(t_j)} - \frac{f(t_{j-1})}{g(t_{j-1})}\right| = \sum_{j=1}^{k}\frac{|f(t_j)g(t_{j-1}) - f(t_{j-1})g(t_j)|}{g(t_j)g(t_{j-1})} \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda^2}\left[t_a^b(f,\pi)\|g\|_\infty + t_a^b(g,\pi)\|f\|_\infty\right], \end{aligned}$$

da cui si ricava, come nella soluzione dell'esercizio 6.4.8,

$$\left\|\frac{f}{g}\right\|_{BV[a,b]} \leq \frac{1}{\lambda^2}\|f\|_{BV[a,b]}\|g\|_{BV[a,b]}\,.$$

Il viceversa non è vero. Se $f, g, f/g \in BV[a,b]$, e $g \neq 0$ in $[a,b]$, può succedere che $\inf_{[a,b]} g = 0$. Ad esempio, in $[0,1]$ siano $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x}$ per $x \in]0,1]$ e $g(0) = 1$. Allora $T_0^1(f) = 1$, $T_0^1(g) = 2$, $g \neq 0$ in $[0,1]$, $\inf_{[0,1]} g = 0$ e tuttavia $(f/g)(x) = \sqrt{x} \in BV[0,1]$.

Esercizio 6.4.11 Supponiamo g crescente, con $a \leq g(c) \leq g(d) \leq b$. Sia $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$ una partizione di $[a,b]$, e denotiamo con π' la partizione di $[g(c), g(d)]$ definita da $\pi' : g(c) = g(t_0) \leq g(t_1) \leq \cdots g(t_{k-1}) \leq g(t_k) = g(d)$. Allora

$$t_a^b(f\circ g,\pi) = \sum_{j=1}^{k}|f(g(t_j)) - f(g(t_{j-1}))| = t_{g(c)}^{g(d)}(f,\pi') \leq T_{g(c)}^{g(d)}(f) \leq T_a^b(f),$$

da cui $T_a^b(f\circ g) \leq T_a^b(f)$.

Esercizi del paragrafo 6.5

Esercizio 6.5.1 Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt, \qquad x \in [a,b];$$

dunque per $n \to \infty$ si ottiene, per convergenza dominata,

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt, \qquad x \in [a,b].$$

Dunque, per il teorema 6.5.5, $f \in AC[a,b]$ e $f' = g$ q.o. in $[a,b]$. Infine, dato che g è continua in x_0, dividendo per $x - x_0$ si deduce

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt = g(x_0).$$

Esercizio 6.5.2 Supponiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $\delta > 0$ tale che, per ogni collezione numerabile $\{\,]\alpha_i, \beta_i[\,\}$ di intervalli disgiunti contenuti in $[a,b]$ e verificanti $\sum_{i\in\mathbb{N}}(\beta_i - \alpha_i) < \delta$, risulti $\sum_{i\in\mathbb{N}}|f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon$: allora in particolare, scegliendo intervalli vuoti da un indice k in poi, otteniamo che f soddisfa la definizione di assoluta continuità.
Viceversa, sia $f \in AC[a,b]$, sia $\varepsilon > 0$ e sia $\delta > 0$ tale che per f valga la condizione di assoluta continuità. Se $\{\,]\alpha_i, \beta_i[\,\}$ è una famiglia numerabile di intervalli disgiunti contenuti in $[a,b]$ con $\sum_{i\in\mathbb{N}}(\beta_i - \alpha_i) < \delta$, allora per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha $\sum_{i\leq N}(\beta_i - \alpha_i) < \delta$, e quindi, per definizione di assoluta continuità, $\sum_{i\leq N}|f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon$ per ogni $N \in \mathbb{N}$. Per $N \to \infty$ si ricava $\sum_{i\in\mathbb{N}}|f(\beta_i) - f(\alpha_i)| \leq \varepsilon$.

Esercizio 6.5.3 Se $f \in AC[a,b]$ è crescente, allora $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$ per ogni $x, y \in [a,b]$ con $y \neq x$; quindi $f'(x) \geq 0$ in ogni punto in cui è definita, ossia per q.o. $x \in [a,b]$. Viceversa, se $f \in AC[a,b]$ e $f' \geq 0$ q.o. in $[a,b]$, allora, per il teorema 6.5.5 (ii), $f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\,dt \geq 0$ per ogni $x, y \in [a,b]$

con $y > x$; quindi f è crescente.
Se $f \in BV[a,b]$, può essere $f' \geq 0$ malgrado f non sia crescente: ad esempio, la funzione $g = -f$, ove f è la "scala del diavolo" introdotta alla fine del paragrafo 6.5, appartiene a $BV[0,1]$, verifica $g' = 0$ q.o. in $[0,1]$ (e quindi $g' \geq 0$ q.o. in $[0,1]$), eppure g è decrescente in $[0,1]$.

Esercizio 6.5.4 Se $x \mapsto T_a^x(f)$ appartiene ad $AC[a,b]$, essendo per ogni $x, y \in [a,b]$

$$|f(y) - f(x)| \leq |T_x^y(f)| = |T_a^y(f) - T_a^x(f)|,$$

è chiaro che $f \in AC[a,b]$.
Viceversa, sia $f \in AC[a,b]$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che sia verificata per f la condizione di assoluta continuità. Consideriamo una famiglia finita $\{\,]\alpha_i, \beta_i[\,\}_{1 \leq i \leq m}$ di intervalli disgiunti tali che $\sum_{i=1}^m (\beta_i - \alpha_i) < \delta$. Per ogni $i = 1, \ldots, m$ sia $\pi_i : \alpha_i = x_0^i < x_1^i < \cdots < x_{h_{i-1}}^i < x_{h_i}^i = \beta_i$ una partizione di $[\alpha_i, \beta_i]$ tale che

$$T_{\alpha_i}^{\beta_i}(f) - \frac{\varepsilon}{m} < \sum_{h=1}^{h_i} |f(x_h^i) - f(x_{h-1}^i)|.$$

Allora per la famiglia di intervalli disgiunti $\{\,]x_{h-1}^i, x_h^i[\,\}_{1 \leq h \leq h_i,\, 1 \leq i \leq m}$ contenuti in $[a,b]$ si ha

$$\sum_{i=1}^m \sum_{h=1}^{h_i} (x_h^i - x_{h-1}^i) = \sum_{i=1}^m (\beta_i - \alpha_i) < \delta,$$

e quindi deve essere

$$\sum_{i=1}^m \sum_{h=1}^{h_i} |f(x_h^i) - f(x_{h-1}^i)| < \varepsilon;$$

ne segue

$$\sum_{i=1}^m \left[T_a^{\beta_i}(f) - T_a^{\alpha_i}(f)\right] = \sum_{i=1}^m T_{\alpha_i}^{\beta_i}(f) \leq \sum_{i=1}^m \left[\sum_{h=1}^{h_i} |f(x_h^i) - f(x_{h-1}^i)| + \frac{\varepsilon}{m}\right] < \varepsilon + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{m} = 2\varepsilon.$$

Esercizio 6.5.5 Come nella soluzione dell'esercizio 6.4.4, si ha per ogni $x, y \in [a,b]$

$$|f \vee g(y) - f \vee g(x)| \leq |f(y) - f(x)| + |g(y) - g(x)|, \quad |f \wedge g(y) - f \wedge g(x)| \leq |f(y) - f(x)| + |g(y) - g(x)|,$$

e da qui segue facilmente la tesi.

Esercizio 6.5.6 Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che sia per f, sia per g sia verificata la condsizione di assoluta continuità, e sia $\{\,]\alpha_i, \beta_i[\,\}$ una famiglia finita di intervalli disgiunti con $\sum_{i=1}^m (\beta_i - \alpha_i) < \delta$: allora

$$\sum_{i=1}^m |f(\beta_i)g(\beta_i) - f(\alpha_i)g(\alpha_i)| \leq \sum_{i=1}^m |f(\beta_i)||g(\beta_i) - g(\alpha_i)| + \sum_{i=1}^m |f(\beta_i) - f(\alpha_i)||g(\alpha_i)| \leq \varepsilon(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty),$$

e dunque si ha $fg \in AC[a,b]$.
Supponendo ora $g \neq 0$, ad esempio $g > 0$, e posto $m = \min g$, si ha, procedendo come sopra,

$$\sum_{i=1}^m \left|\frac{f(\beta_i)}{g(\beta_i)} - \frac{f(\alpha_i)}{g(\alpha_i)}\right| = \sum_{i=1}^m \frac{|f(\beta_i)g(\alpha_i) - f(\alpha_i)g(\beta_i)|}{|g(\beta_i)g(\alpha_i)|} \leq \frac{\varepsilon}{m^2}(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty),$$

e pertanto $\frac{f}{g} \in AC[a,b]$.

Esercizio 6.5.7 Grazie alla definizione dell'estensione di f, si ha

$$\mu_f(\,]c,d[\,) = \mu_f([c,d]\,) = f(d) - f(c) = \int_c^d f'(t)\,dt \qquad \forall [c,d] \subset \mathbb{R}.$$

Se questa proprietà vale per gli intervalli aperti essa vale anche per tutti gli aperti, grazie all'esercizio 1.3.4. Valendo per gli aperti, essa vale anche per i Boreliani; quindi vale per ogni insieme misurabile, grazie alla completezza di μ_f (esempio 2.1.3 (3)) ed al fatto che $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_f$ (come si è visto nella dimostrazione del teorema 6.5.5). La tesi è provata.

Esercizio 6.5.8 Sia $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che sia verificata per f la condizione di assoluta continuità, e sia $E \subseteq [a,b]$ tale che $m(E) = 0$. Allora esiste un aperto $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]\alpha_n, \beta_n[\supseteq E$, con gli intervalli $]\alpha_n, \beta_n[$ disgiunti, tale che $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\beta_n - \alpha_n) < \delta$. Di conseguenza,

$$f(E) \subseteq f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]\alpha_n, \beta_n[\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(\,]\alpha_n, \beta_n[\,).$$

Siano z_n e w_n punti di massimo e di minimo di f in $[\alpha_n, \beta_n]$: si ha allora $m^*(f(\,]\alpha_n, \beta_n[\,)) \leq f(z_n) - f(w_n)$, da cui

$$m^*(f(E)) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*(f(\,]\alpha_n, \beta_n[\,)) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} [f(z_n) - f(w_n)].$$

Essendo $\sum_{n\in\mathbb{N}} |z_n - w_n| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}(\beta_n - \alpha_n) < \delta$, per assoluta continuità si ha

$$m^*(f(E)) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} [f(z_n) - f(w_n)] < \varepsilon,$$

con ε arbitrario. Dunque $m^*(f(E)) = m(f(E)) = 0$.
Sia ora $E \subseteq [a,b]$ un insieme misurabile. Allora esiste un Boreliano B, unione numerabile di chiusi C_n , tale che

$$E = B \cup D, \quad \text{con} \quad B \cap D = \emptyset, \quad D \in \mathcal{M}, \quad m(D) = 0.$$

Ne segue $f(E) = f(B) \cup f(D)$, con $f(D) \in \mathcal{M}$, $m(f(D)) = 0$ (per quanto già provato) e

$$f(B) = f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(C_n).$$

I C_n sono chiusi e contenuti in $[a,b]$, quindi sono compatti; dato che f è continua, anche gli insiemi $f(C_n)$ sono compatti e dunque Boreliani. Ne segue $f(B) \in \mathcal{M}$, e quindi a sua volta $f(E) \in \mathcal{M}$.

Esercizio 6.5.9 Se $f \in AC[a,b]$, allora $f' \in L^1(a,b)$ e quindi $\mu_f(E) = \int_E f'(t)\,dt$, da cui $\mu_f \ll m$.
Viceversa, sia $\mu_f \ll m$: trattandosi di misure finite, dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $E \in \mathcal{M}$ con $m(E) < \delta$, si ha $\mu_f(E) < \varepsilon$. Scelto $E = \bigcup_{i=1}^m]\alpha_i, \beta_i[$, con gli $]\alpha_i, \beta_i[$ disgiunti, contenuti in $[a,b]$ e tali che $\sum_{i=1}^m (\beta_i - \alpha_i) < \delta$, si ricava

$$\sum_{i=1}^m (f(\beta_i) - f(\alpha_i)) = \mu_f\left(\bigcup_{i=1}^m]\alpha_i, \beta_i[\right) < \varepsilon.$$

Dunque $f \in AC[a,b]$.

Esercizio 6.5.10 Il fatto che $\|f\|_{AC[a,b]} = \|f\|_\infty + \|f'\|_1$ sia una norma è evidente, visto che i due addendi lo sono. Proviamo la completezza: sia $\{f_n\} \subset AC[a,b]$ una successione di Cauchy; allora esistono $f \in C[a,b]$, $g \in L^1(a,b)$ tali che $f_n \to f$ uniformemente in $[a,b]$ e $f_n' \to g$ in $L^1(a,b)$. Essendo, per ogni $x, y \in [a,b]$, $f_n(y) - f_n(x) = \int_x^y f_n'(t)\,dt$, al limite per $n \to \infty$ si ottiene $f(y) - f(x) = \int_x^y g(t)\,dt$, da cui

$$\exists \lim_{y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y\to x} \frac{1}{y-x} \int_x^y g(t)\,dt = g(x)$$

in tutti i punti $x \in [a,b]$ che sono punti di Lebesgue di g (si vedano il teorema 6.2.2 e l'esercizio 6.2.2), ossia esiste $f'(x) = g(x)$ q.o. in $[a,b]$. Dato che $g \in L^1(a,b)$, si ha $f \in AC[a,b]$ per il teorema 6.5.5, ed inoltre $f_n \to f$ nella norma di $AC[a,b]$.
Mostriamo infine che $AC[a,b]$ non è chiuso in $C[a,b]$. Riprendiamo l'esempio 6.5.6: basta osservare

che la funzione di Lebesgue f è continua ma non assolutamente continua, ed è limite in $C[a,b]$ delle funzioni assolutamente continue f_n costruite in quell'esempio.

Esercizio 6.5.11 Per ogni partizione $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m = b$ di $[a,b]$ si ha

$$\sum_{i=1}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{m} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t)\,dt \right| \le \int_a^b |f'(t)|\,dt,$$

ossia $t_a^b(f,\pi) \le \|f'\|_1$. Data l'arbitrarietà della partizione, si conclude che $T_a^b(f) \le \|f'\|_1$.
D'altra parte, sia $\varepsilon > 0$ e sia ψ una funzione costante a tratti tale che $\int_a^b |\psi(t) - f'(t)|\,dt < \varepsilon$. Sarà $\psi = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{[\alpha_i,\beta_i[}$, e possiamo supporre che gli intervalli $[\alpha_i,\beta_i]$ formino una partizione $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{p-1} < t_p = b$ di $[a,b]$ (ammettendo che qualche c_i possa essere nullo), e dunque $a = \alpha_1$, $t_1 = \beta_1 = \alpha_2$, $\ldots$, $t_i = \beta_{i-1} = \alpha_i$, $2 \le i \le p$, $b = \beta_p$. Allora

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f'(t)|\,dt - \varepsilon &< \int_a^b |\psi(t)|\,dt = \sum_{i=1}^{p} |c_i|(\beta_i - \alpha_i) = \sum_{i=1}^{p} |c_i(\beta_i - \alpha_i)| = \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left| \int_{\alpha_i}^{\beta_i} (\psi(t) - f'(t))\,dt + \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f'(t)\,dt \right| \le \\
&\le \|\psi - f'\|_1 + \sum_{i=1}^{p} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon + T_a^b(f),
\end{aligned}$$

da cui $\|f'\|_1 < 2\varepsilon + T_a^b(f)$. Ne segue $\|f'\|_1 = T_a^b(f)$.
Proviamo che $AC[a,b]$ è un sottospazio chiuso di $BV[a,b]$. Se $\{f_n\}$ è una successione contenuta in $AC[a,b]$ che converge in $BV[a,b]$ ad una funzione $f \in BV[a,b]$, allora $f_n \to f$ uniformemente in $[a,b]$ e $T_a^b(f_n - f) \to 0$ per $n \to \infty$. Dato che $T_a^b(f_n) = \|f_n'\|_1$, la successione $\{f_n'\}$ è di Cauchy in $L^1(a,b)$ e quindi converge in $L^1(a,b)$ ad una funzione $g \in L^1(a,b)$. Come nella soluzione dell'esercizio 6.5.7, si ricava che esiste $f'(x) = g(x)$ in ogni punto di Lebesgue di g, cioè $f' = g$ q.o.; ne segue $f' \in L^1(a,b)$ e $f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\,dt$ per ogni $x, y \in [a,b]$: dunque $f \in AC[a,b]$ per il teorema 6.5.5. La tesi è provata.

Esercizio 6.5.12 Sia $\{\pi_i : a = x_0^i < x_1^i < \cdots < x_{n_i}^i = b\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di partizioni di $[a,b]$ tale che

$$\pi_{i+1} \text{ è più fine di } \pi_i, \qquad \lim_{i\to\infty} t_a^b(f,\pi_i) = T_a^b(f), \qquad \lim_{i\to\infty} \max_{1\le h\le n_i} [x_h^i - x_{h-1}^i] = 0.$$

Definiamo

$$E_{hi} = f([x_{h-1}^i, x_h^i]), \qquad 1 \le h \le n_i, \quad i \in \mathbb{N};$$

essendo l'immagine continua di un compatto, E_{hi} è un insieme misurabile. Poniamo anche

$$N_i(y) = \sum_{h=1}^{n_i} \chi_{E_{hi}}(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Per $y \in \mathbb{R}$, il numero $N_i(y)$ conta quanti sottointervalli contengono almeno una radice dell'equazione $y = f(x)$. Più la partizione è fine, più il numero $N_i(y)$ si avvicina al numero esatto di radici $N(y)$: in particolare, si ha $N_i(y) \le N_{i+1}(y)$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. In effetti, se $N(y) < \infty$, per i abbastanza grande la partizione π_i separa le radici, e quindi risulterà $N_i(y) = N(y)$ per i sufficientemente grande. Se invece $N(y) = \infty$, le radici avranno uno o pù punti d'accumulazione: in ogni caso non potrà mai esistere $k \in \mathbb{N}$ tale che $N_i(y) \le k$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, perché per i abbastanza grande la $(k+1)$-sima radice sarà separata dalle prime k e dunque $N_i(y) \ge k+1$ per i grande. In definitiva, se $N(y) = \infty$ avremo $N_i(y) \nearrow +\infty$ per $i \to \infty$. Inoltre $N_i(y)$ è una funzione semplice, nulla fuori del compatto $f([a,b])$. Pertanto, per il teorema di B. Levi,

$$\lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}} N_i(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} N(y)\,dy.$$

Vediamo ora il legame fra l'integrale $\int_{\mathbb{R}} N(y)\,dy$ e la variazione totale di f. Si ha, da una parte,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} N(y)\,dy &= \lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}} N_i(y)\,dy = \lim_{i\to\infty}\sum_{h=1}^{n_i} m(E_{hi}) = \\ &= \lim_{i\to\infty}\sum_{h=1}^{n_i}\left[\max_{[x^i_{h-1},x^i_h]} f - \min_{[x^i_{h-1},x^i_h]} f\right] \geq \lim_{i\to\infty}\sum_{h=1}^{n_i}|f(x^i_h)-f(x^i_{h-1})| = T^b_a(f);\end{aligned}$$

D'altra parte, posto $f(z^i_h)=\max_{[x^i_{h-1},x^i_h]} f$ e $f(w^i_h)=\min_{[x^i_{h-1},x^i_h]} f$, ed osservato che vale

$$|f(z^i_h)-f(w^i_h)| = |f(z^i_h\vee w^i_h)-f(z^i_h\wedge w^i_h)|,$$

risulta

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} N(y)\,dy &= \lim_{i\to\infty}\sum_{h=1}^{n_i}\left[\max_{[x^i_{h-1},x^i_h]} f - \min_{[x^i_{h-1},x^i_h]} f\right] = \\ &= \lim_{i\to\infty}\sum_{h=1}^{n_i}|f(z^i_h)-f(w^i_h)| \leq \lim_{i\to\infty}\sum_{h=1}^{n_i}[|f(z^i_h\vee w^i_h)-f(z^i_h\wedge w^i_h)|;\end{aligned}$$

dato che i punti $a < z^i_1\wedge w^i_1 < z^i_1\vee w^i_1 < \cdots < z^i_{n_i}\wedge w^i_{n_i} < z^i_{n_i}\vee w^i_{n_i} \leq b$ costituiscono i nodi di una partizione π'_i di $[a,b]$, ricaviamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} N(y)\,dy &= \lim_{i\to\infty}\left[\sum_{h=1}^{n_i}|f(z^i_h\vee w^i_h)-f(z^i_h\wedge w^i_h)|+\right. \\ &+ \left.\sum_{h=1}^{n_i}\Big[|f(z^i_h\wedge w^i_h)-f(z^i_{h-1}\vee w^i_{h-1})|+|f(b)-f(z^i_{n_i}\vee w^i_{n_i})|+|f(z^i_1\wedge w^i_1)-f(a)|\Big]\right] \leq \\ &\leq t^b_a(f,\pi') \leq T^b_a(f).\end{aligned}$$

Esercizio 6.5.13 Se f è Lipschitziana, allora f è assolutamente continua perché, dato $\varepsilon>0$, vale la definizione di assoluta continuità con $\delta=\varepsilon/M$, ove $M>0$ è la costante di Lipschitz di f. Inoltre f' esiste q.o. ed è misurabile, tenuto conto dell' esercizio 3.1.4; poi, se $x\in[a,b]$ è un punto dove $f'(x)$ esiste, si ha

$$|f'(x)| = \lim_{t\to 0}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right| \leq M.$$

Viceversa, se $f\in AC[a,b]$ e $f'\in L^\infty(a,b)$, allora

$$|f(y)-f(x)| = \left|\int_x^y f'(t)\,dt\right| \leq \|f'\|_\infty|y-x| \qquad \forall x,y\in[a,b],$$

e quindi f è Lipschitziana.

Esercizio 6.5.14 Sia $0<\beta<\alpha$. Allora f è derivabile in $]0,1]$ con

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin x^{-\beta} - \beta x^{\alpha-\beta-1}\cos x^{-\beta};$$

essendo $\alpha-\beta>0$, si ha $f'\in L^1(0,1)\cap C(]0,1])$, e

$$f(x)-f(y) = \int_y^x f'(t)\,dt \qquad \forall x,y\in]0,1];$$

passando al limite per $y\to 0^+$, questa relazione si estende ad ogni $x,y\in[0,1]$. Dunque $f\in AC[0,1]$. Sia ora $0<\alpha\leq\beta$. Scegliamo la partizione $\pi_n : 0<x_n<x_{n-1}<\cdots<x_1<x_0<1$,

ove $x_h = \left[\left(h+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^{-1/\beta}$. Risulta allora $f(x_h) = \left[\left(h+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^{-\alpha/\beta}$ se h è pari, mentre $f(x_h) = -\left[\left(h+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^{-\alpha/\beta}$ se h è dispari. Dunque

$$t_0^1(f,\pi_n) \geq \sum_{h=1}^{n} |f(x_h) - f(x_{h-1})| = \sum_{h=1}^{n} \left| \left[\left(h+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^{-\frac{\alpha}{\beta}} + \left[\left(h-\frac{1}{2}\right)\pi\right]^{-\frac{\alpha}{\beta}} \right| \geq \sum_{h=1}^{n} \left[\left(h+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^{-\frac{\alpha}{\beta}}$$

e pertanto, essendo $\alpha \leq \beta$, risulta $T_0^1(f) = \infty$.

Esercizio 6.5.15 Ovviamente, se $f \circ g \in AC[a,b]$ allora $f \circ g \in BV[a,b]$.
Sia $f \circ g \in BV[a,b]$. Per l'esercizio 6.5.8, se $E \subset [a,b]$ è misurabile con $m(E) = 0$, allora $m(g(E)) = 0$ e $m(f(g(E))) = 0$. Lo stesso esercizio ci dice che, per ogni $E \in \mathcal{M}$, risulta $g(E) \in \mathcal{M}$ e $f(g(E)) \in \mathcal{M}$: ne segue, posto $\mu(E) = m(f(g(E)))$, che μ è definita su $\mathcal{M}$ ed è assolutamente continua rispetto a m. Quindi, per la proposizione 4.5.5, dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni famiglia di intervalli disgiunti $I_n =]\alpha_n, \beta_n[\subset [a,b]$ con $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(I_n) < \delta$, si ha $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(I_n) < \varepsilon$. Osservato che $f \circ g$ è continua, e che $\mu(I_n) = \max_{\overline{I_n}} f \circ g - \min_{\overline{I_n}} f \circ g = |f(g(z_n)) - f(g(w_n))|$, ove z_n e w_n sono i punti di massimo assoluto e di minimo assoluto di $f \circ g$ su I_n, deve aversi $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f(g(z_n)) - f(g(w_n))| < \varepsilon$. Essendo $|g(\alpha_n) - g(\beta_n)| \leq |g(z_n) - g(w_n)|$, risulta a maggior ragione $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f(g(\alpha_n)) - f(g(\beta_n))| < \varepsilon$, e ciò prova che $f \circ g \in AC[a,b]$.
La funzione $f(x) = x^{1/3}$ è assolutamente continua su $[0,1]$, avendo derivata sommabile con $f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)\,dt$ per ogni $x, y \in [0,1]$. Similmente, $g(t) = t^3 \sin^3 1/t$ è assolutamente continua, anzi è di classe C^1, avendo derivata continua. Tuttavia, $f(g(t)) = t \sin 1/t$ non è assolutamente continua perché, grazie all'esercizio 6.5.14, non è a variazione limitata.

Esercizio 6.5.16 (i) Esempio: $f(x) = x \sin 1/x$, $x \in [0,1]$ (si veda l'esercizio 6.5.14).
(ii) Per $x, y \in]0,1]$ si ha $f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)\,dt$; inoltre per $y \to 0^+$ il primo membro tende a $f(x) - f(0)$ per la continuità di f, il secondo a $\int_0^x f'(t)\,dt$ per la sommabilità di f'. Ne segue la tesi.
(iii) Per $0 < y < x \leq 1$ si ha

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)\,dt,$$

da cui, per l'esercizio 6.5.11,

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_y^x |f'(t)|\,dt = T_y^x(f) = T_0^x(f) - T_0^y(f) :$$

ne segue

$$T_0^y(f) + \int_y^x |f'(t)|\,dt = T_0^x(f).$$

A primo membro entrambi gli addendi, per monotonia, hanno limite per $y \to 0^+$: dalla positività di $T_0^y(f)$ si deduce

$$\int_0^x |f'(t)|\,dt \leq T_0^x(f),$$

da cui $f' \in L^1(0,1)$. Tornando alla prima relazione scritta e usando la continuità in 0 di f si ottiene infine

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt,$$

e quindi $f \in AC[a,b]$. Si noti che, di conseguenza, dalle ipotesi fatte e dall'esercizio 6.5.11 segue

$$\lim_{y\to 0^+} T_0^y(f) = T_0^x(f) - \int_0^x |f'(t)|\,dt = 0.$$

Esercizio 6.5.17 Risulta per $0 < y < x$

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)\,dt;$$

dunque nei punti dove $|g(y)| < \infty$, ossia per q.o. $y \in]0, x[$, si ha

$$|f(y)| \le |f(x)| + \left| \int_y^x \frac{|f'(t)|}{g(y)}\, g(y)\, dt \right| \le |f(x)| + g(y) \int_0^x \frac{|f'(t)|}{g(t)}\, dt.$$

Integrando rispetto a y si ottiene

$$\int_0^x |f(y)|\, dy \le x|f(x)| + \int_0^x g(y)\, dy \int_0^x \frac{|f'(t)|}{g(t)}\, dt < \infty \quad \forall x \in]0, 1].$$

Inoltre, per ogni $x \in [0, 1]$, grazie alla decrescenza di g,

$$\begin{aligned} \int_0^x t|f'(t)|\, dt &= \int_0^x \int_0^t |f'(t)|\, dydt = \int_0^x \int_y^x |f'(t)|\, dtdy = \int_0^x \int_y^x \frac{|f'(t)|}{g(t)}\, g(t)\, dtdy \le \\ &\le \int_0^x g(y) \int_y^x \frac{|f'(t)|}{g(t)}\, dtdy \le \int_0^x g(y)\, dy \int_0^x \frac{|f'(t)|}{g(t)}\, dt. \end{aligned}$$

Esercizio 6.5.18 Dall'esercizio 6.5.6 ricaviamo che $fg \in AC[a, b]$. Inoltre, se $A = \{x \in [a, b] : \exists f'(x)\}$ e $B = \{x \in [a, b] : \exists g'(x)\}$, allora in $A \cap B$, cioè q.o. in $[a, b]$, esiste $(fg)' = f'g + fg' \in L^1(a, b)$. Ne segue

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b [f'(t)g(t) + f(t)g'(t)]\, dt,$$

che è la tesi.

Esercizio 6.5.19 Sia f una funzione della forma assegnata. Poiché $g \in L^1(\mathbb{R})$, si ha $f(x) - f(y) = \int_y^x g(t)\, dt$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, da cui $f \in AC[-a, a]$ per ogni $a > 0$: inoltre, per l'esercizio 6.5.11,

$$T_{-a}^a(f) = \int_{-a}^a |g(t)|\, dt \to \int_{\mathbb{R}} |g(t)|\, dt \qquad \text{per } a \to +\infty.$$

Infine, dato che $g \in L^1(\mathbb{R})$, si ha $f(x) = \int_{-\infty}^x g(t)\, dt \to 0$ per $x \to -\infty$.
Viceversa, sia $f \in AC[-a, a]$ per ogni $a > 0$, con $\lim_{a\to\infty} T_{-a}^a(f) < \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Allora f è derivabile q.o. in $\mathbb{R}$, con $f' \in L^1(-a, a)$ per ogni $a > 0$ e

$$f(x) - f(y) = \int_x^y f'(t)\, dt \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Poiché, per l'esercizio 6.5.11,

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^a |f'(t)|\, dt = \lim_{a\to\infty} T_{-a}^a(f) < \infty,$$

si ha $f' \in L^1(\mathbb{R})$: dunque per $y \to -\infty$ si ottiene

$$f(x) = \int_{-\infty}^x f'(t)\, dt,$$

ossia vale la tesi con $g = f'$.

Esercizio 6.5.20 (i) Dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni famiglia finita di intervalli $]\alpha_i, \beta_i[$ disgiunti contenuti in $[a, b]$, con $\sum_{i=1}^k (\beta_i - \alpha_i) < \delta$, si ha $\sum_{i=1}^k |F(\beta_i) - F(\alpha_i)| < \frac{\varepsilon}{K}$, ove $K = \max_{F([a,b])} |\varphi'|$ (si noti che $F([a, b])$ è compatto). Ne segue

$$\sum_{i=1}^k |\varphi(F(\beta_i)) - \varphi(F(\alpha_i))| \le K \sum_{i=1}^k |F(\beta_i) - F(\alpha_i)| < \varepsilon.$$

(ii) Poiché $f \in L^1(a,b)$, la funzione $F(t) = \int_a^t f(s)\,ds$ appartiene ad $AC[a,b]$. Inoltre, per $p \geq 1$ la funzione $x \mapsto x^p$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}$. Dunque, per la parte (i), $x \mapsto \left(\int_a^x |f(s)|\,ds\right)^p$ è in $AC[a,b]$, cosicché esiste $g \in L^1(a,b)$ tale che

$$\int_a^x g(s)\,ds = \left(\int_a^x |f(s)|\,ds\right)^p \qquad \forall x \in [a,b].$$

Esercizio 6.5.21 Fissato $n \in \mathbb{N}^+$, la funzione f_n definita nell'esempio 6.5.6 ha come grafico Γ_n una spezzata formata da 2^n intervalli disgiunti di ampiezza 3^{-n}, in ciascuno dei quali la crescita è 2^{-n}, e da intervalli in cui f_n è costante, che sono: 1 di ampiezza 3^{-1}, 2 di ampiezza 3^{-2}, ..., 2^{n-1} di ampiezza 3^{-n}. La lunghezza di Γ_n è quindi

$$\ell(\Gamma_n) = 2^n \sqrt{\frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{3^k}\,.$$

Per calcolare $\ell(\Gamma)$, ove Γ è il grafico della funzione limite f, scegliamo la partizione di $[0,1]$ che ha come nodi x_k gli estremi dei 2^n intervalli $J_1^n, J_2^n, \ldots, J_{2^n}^n$ che restano dopo il passo n-simo della costruzione di C. Questi nodi delimitano i tratti obliqui e quelli orizzontali del grafico di f_n. In tutti questi nodi, che confinano con zone in cui $f' = 0$, si ha $f(x_k) = f_n(x_k)$. Quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma) &\geq \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} = \\ &= \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f_n(x_k) - f_n(x_{k-1}))^2} = \ell(\Gamma_n). \end{aligned}$$

Se ne deduce

$$\ell(\Gamma) \geq \lim_{n\to\infty} \ell(\Gamma_n) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}} + \frac{1}{2}\frac{2/3}{1-2/3} = 1 + 1 = 2.$$

D'altra parte, il grafico di una funzione crescente, contenuto in $[0,1]\times[0,1]$, ha sempre lunghezza non superiore a 2: infatti, per ogni partizione π di $[0,1]$ mediante i punti x_k, $0 \leq k \leq p$, si ha

$$\sum_{k=1}^{p} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \leq \sum_{k=1}^{p} \big[|(x_k - x_{k-1}) + (f(x_k) - f(x_{k-1}))|\big] = 1 + f(1) - f(0) \leq 2.$$

Si conclude che $\ell(\Gamma) = 2$ (si confronti con l'esercizio 6.5.6).

Esercizio 6.5.22 Dati $x, y \in [0,1]$, con $x \neq y$, esiste un unico $n \in \mathbb{N}$ per cui $3^{-n-1} < |x-y| \leq 3^{-n}$. Poiché la pendenza di f_n è $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ su tratti di lunghezza 3^{-n}, si ha $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot 3^{-n} = 2^{-n}$. Dato che $|x-y| > 3^{-n-1}$, fra x e y ci sono zone in cui tutte le f_k con $k > n$ sono costanti e l'incremento di quota fra $f_k(x)$ e $f_k(y)$ è lo stesso di quello della f_n: dunque $|f_k(x) - f_k(y)| \leq 2^{-n}$ per ogni $k \geq n$. Pertanto, per $k \to \infty$ si ottiene che $|f(x) - f(y)| \leq 2^{-n}$ quando $3^{-n-1} < |x-y| \leq 3^{-n}$. Si conclude allora, essendo $2^n 3^{\alpha n} = 1$, che

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|f(x) - f(y)|}{2^n 3^{\alpha n}} \leq \frac{1}{3^{\alpha n}} \leq 3^\alpha |x-y|^\alpha.$$

Esercizio 6.5.23 (i) Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, poiché g è continua si ha

$$\lim_{x\to x_0^+} \mu_g([x_0,x]) = \lim_{x\to x_0^+} (g(x) - g(x_0)) = 0, \qquad \lim_{x\to x_0^-} \mu_g([x,x_0]) = \lim_{x\to x_0^-} (g(x_0) - g(x)) = 0,$$

da cui segue, per assoluta continuità dell'integrale,

$$\lim_{x\to x_0} |F(x) - F(x_0)| = \lim_{x\to x_0} \left|\int_{x_0}^x f\,d\mu_g\right| = 0$$

per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_g)$.

(ii) Fissiamo $\varepsilon > 0$ e $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_g)$. Esistono $N_\varepsilon > 0$ e $\sigma_\varepsilon > 0$ tali che

$$\int_{\{|t| \geq N_\varepsilon\}} f \, d\mu_g < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{e} \quad \int_E |f| \, d\mu_g < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{se} \quad \mu_g(E) < \sigma_\varepsilon.$$

Introduciamo la misura μ_ε tale che $d\mu_\varepsilon = \chi_{[-N_\varepsilon, N_\varepsilon]} d\mu_g$; poiché $\mu_\varepsilon \ll m$ per ipotesi, si deduce che esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni famiglia finita $\{\,]x_i, y_i[\,\}_{1 \leq i \leq n}$ di intervalli disgiunti con $\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) < \delta_\varepsilon$ si ha $\mu_\varepsilon\left(\bigcup_{i=1}^n]x_i, y_i[\,\right) = \mu_g([-N_\varepsilon, N_\varepsilon] \cap \bigcup_{i=1}^n]x_i, y_i[\,) < \sigma_\varepsilon$. Per tale famiglia di intervalli si ha dunque

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{y_i} |f| \, \chi_{[-N_\varepsilon, N_\varepsilon]} \, d\mu_g < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'altra parte

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{y_i} |f| \, \chi_{\{|t| \geq N_\varepsilon\}} d\mu_g \leq \int_{\{|t| \geq N_\varepsilon\}} |f| \, d\mu_g < \frac{\varepsilon}{2},$$

e pertanto

$$\sum_{i=1}^n |F(y_i) - F(x_i)| \leq \sum_{i=1}^n \left[\int_{x^i}^{y_i} |f| \, d\mu_g \right] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ossia $F \in AC(\mathbb{R})$.

(iii) Sia $g : [0,1] \to [0,1]$ la funzione di Lebesgue dell'esempio 6.5.6: g è crescente, continua, surgettiva, con $g' = 0$ q.o. in $[0,1]$. Prolunghiamo la g a tutto $\mathbb{R}$, ponendo $g(x) = g(n) + g(x-n)$ su $[n, n+1]$, e poi $g(x) = -g(-x)$ su $]-\infty, 0[$: l'estensione è ancora crescente e continua, nonché surgettiva su $\mathbb{R}$. Risulta allora $\mu_g(E) = \mu_g(E + k)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, ed inoltre $\mu_g \not\ll m$: infatti, se fosse $\mu_g \ll m$ esisterebbe (per il teorema di Radon-Nikodým, teorema 4.5.9) una funzione $h \in L^1(\mathbb{R}, m)$ tale che

$$\mu_g(E) = \int_E h \, dm \qquad \forall E \in \mathcal{B};$$

allora, scegliendo $E = [0, x]$ avremmo

$$g(x) = g(x) - g(0) = \mu_g([0, x]) = \int_0^x h(t) \, dt \qquad \forall x \in [0, \infty[\,,$$

e dunque, derivando

$$0 = g'(x) = h(x) \qquad \text{q.o. in } [0, \infty[\,.$$

Ciò però è assurdo perché con $x = 1$ ricaviamo $1 = g(1) = \int_0^1 0 \, dt = 0$. Pertanto, essendo $\mu_g \not\ll m$, esiste $E \in \mathcal{B}$ tale che $m(E) = 0$ e $\mu_g(E) > 0$. Scegliamo $f = \chi_{[0,1]}$: allora si ha $F(x) = \int_{-\infty}^x \chi_{[0,1]} \, d\mu_g = \mu_g(E \cap [0, x \wedge 1])$. Se la funzione F fosse assolutamente continua, scelto $\varepsilon \in]0, \mu_g(E)[$ esisterebbe $\delta \in]0, \mu_g(E)[$ che verificherebbe la corrispondente definizione. Fissiamo un ricoprimento $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ di E, fatto di intervalli chiusi con $\sum_{j \in \mathbb{N}} m(I_j) < \delta$ e selezioniamo per ogni $j \in \mathbb{N}$ un sottointervallo $I'_j = [a_j, b_j]$ in modo che gli I'_j siano adiacenti, ossia $b_j = a_{j+1}$. Allora si ha $E \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I'_j$ e $\sum_{j \in \mathbb{N}} m(I'_j) < \delta$; quindi dovremmo dedurre $\sum_{j \in \mathbb{N}} |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon$. Ma allora

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \sum_{j \in \mathbb{N}} |\mu_g(E \cap [0, b_j \wedge 1]) - \mu_g(E \cap [0, a_j \wedge 1])| = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_g(E \cap]a_j \wedge 1, b_j \wedge 1]) = \\ &= \mu_g\left(E \cap \bigcup_{j \in \mathbb{N}}]a_j \wedge 1, b_j \wedge 1[\right) = \mu_g(E) > \varepsilon, \end{aligned}$$

assurdo.

Esercizio 6.5.24 (i) Posto $k = \left[\frac{x}{t}\right]$, si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(y)\,dy &= \sum_{n=-k}^{k-1}\frac{1}{2x}\int_{nt}^{(n+1)t} f(y)\,dy + \frac{1}{2x}\int_{kt}^{x} f(y)\,dy + \frac{1}{2x}\int_{-x}^{-kt} f(y)\,dy = \\ &= \frac{2k}{2x}\int_{0}^{t} f(y)\,dy + \frac{1}{2x}\int_{kt}^{x} f(y)\,dy + \frac{1}{2x}\int_{-x}^{-kt} f(y)\,dy.\end{aligned}$$

Ne segue, per periodicità,

$$\left|\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(y)\,dy - \frac{k}{x}\int_{0}^{t} f(y)\,dy\right| \le \frac{1}{x}\int_{0}^{t}|f(y)|\,dy,$$

e infine, essendo $\frac{x-t}{tx} \le \frac{k}{x} < \frac{1}{t}$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(y)\,dy = \frac{1}{t}\int_{0}^{t} f(y)\,dy.$$

(ii) Anzitutto $G \in AC[-A, A]$ per ogni $A > 0$, in quanto $\frac{f}{1+|f|} \in L^1(-A, A)$ per ogni $A > 0$. Dunque G' esiste q.o. in $\mathbb{R}$. Se nel punto x esiste $G'(x)$ allora, scelta una successione $\{t_n\} \subseteq T_f$ tale che $t_n \to 0$, possiamo scrivere, utilizzando la periodicità di f,

$$G'(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{G(x+t_n)-G(x)}{t_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{t_n}\int_{x}^{x+t_n}\frac{f(y)}{1+|f(y)|}\,dy = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{t_n}\int_{0}^{t_n}\frac{f(y)}{1+|f(y)|}\,dy = G'(0).$$

Pertanto $G'(x) = G'(0)$ q.o. in $\mathbb{R}$. D'altra parte $G'(x) = \frac{f(x)}{1+|f(x)|}$ q.o. in $\mathbb{R}$, ossia $f(x) = (1 + |f(x)|)G'(0)$ q.o.; in particolare il segno di f coincide col segno di $G'(0)$, ossia è costante. Perciø‘ se $f \ge 0$ otteniamo $(1-G'(0))f(x) = G'(0)$ (si noti che $G'(0) \ne 1$), da cui $f(x) = \frac{G'(0)}{1-G'(0)}$; se invece $f \le 0$ si trova $(1 + G'(0))f(x) = G'(0)$ da cui $f(x) = \frac{G'(0)}{1+G'(0)}$. In ogni caso si conclude che f è q.o. costante.

Esercizi del paragrafo 6.6

Esercizio 6.6.1 Se aggiungiamo alle ipotesi del teorema 6.6.1(i) la condizione $f \in L^\infty(c, d)$, allora per ogni partizione π di $[a, b]$ si ha

$$t_a^b(F \circ g, \pi) \le \|f\|_\infty t_a^b(g, \pi) \le \|f\|_\infty T_a^b(g);$$

quindi $F \circ g \in BV[a, b]$. Dall'esercizio 6.5.15 segue che $F \circ g \in AC[a, b]$.
Se invece aggiungiamo l'ipotesi che g sia monotona, dall'esercizio 6.4.11 segue che $F \circ g \in BV[a, b]$, e dall'esercizio 6.5.15 si ricava $F \circ g \in AC[a, b]$.

Esercizio 6.6.2 La funzione $f(x) = x^{-2/3}$ è in $L^1(-1, 1)$, con $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = 3x^{\frac{1}{3}}$, e la funzione $g(t) = t^3 \sin 1/t$ è in $AC[0, 1]$. Inoltre per ogni $\varepsilon \in]0, 1[$ si ha $f \in L^\infty(\varepsilon, 1)$. Quindi per $u, v \in]0, 1]$ si può scrivere

$$\int_u^v f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g(u)}^{g(v)} f(x)\,dx,$$

vale a dire, facendo i (delicati) conti,

$$\int_u^v \left[3\left(\sin\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{t}\frac{\cos\frac{1}{t}}{\left(\sin\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{3}}}\right]dt = \int_{g(u)}^{g(v)} x^{-\frac{2}{3}}\,dx = 3v\left(\sin\frac{1}{v}\right)^{\frac{1}{3}} - 3u\left(\sin\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Tuttavia, per $u \to 0^+$ il secondo membro tende a $3v\left(\sin\frac{1}{v}\right)^{\frac{1}{3}}$, mentre il primo membro non ha limite, come ora vedremo, il che rende falsa la formula di cambiamento di variabile. Osserviamo che Il primo

termine dell'integrale a primo membro converge per $u \to 0^+$ all'integrale $\int_0^v 3\left(\sin\frac{1}{t}\right)^{1/3}\,dt$, che è ben definito e convergente, visto che l'integrando è una funzione misurabile e limitata. Il secondo termine dell'integrale a primo membro si può trasformare; posto $s = 1/t$ si ha

$$-\int_u^v \frac{1}{t}\frac{\cos\frac{1}{t}}{\left(\sin\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{3}}}\,dt = \int_{1/v}^{1/u} \frac{1}{s}\frac{\cos s}{(\sin s)^{2/3}}\,ds,$$

e quest'ultimo integrale per $u \to 0^+$ tenderebbe all'integrale $\int_{1/v}^{\infty} \frac{1}{s}\frac{\cos s}{(\sin s)^{2/3}}\,ds$, il quale però non esiste, nel senso che la parte positiva e la parte negativa dell'integrando hanno entrambe integrale $+\infty$. Per verificare questa affermazione possiamo scegliere $v = \frac{1}{2k_0\pi - \pi/2}$, con $k_0 \in \mathbb{N}^+$: la parte positiva è

$$f^+(s) = \frac{1}{s}\frac{\cos s}{(\sin s)^{2/3}} \sum_{k\ge k_0} \chi_{\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]}(s),$$

mentre la parte negativa è

$$f^-(s) = \frac{1}{s}\frac{\cos s}{(\sin s)^{2/3}} \sum_{k\ge k_0} \chi_{\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2(k+1)\pi-\frac{\pi}{2}\right]}(s).$$

Risulta, per A, B opportune costanti,

$$\begin{aligned}
\int_{2k_0\pi-\pi/2}^{\infty} f^+(s)\,ds &= \sum_{k\ge k_0} \int_{2k\pi-\pi/2}^{2k\pi+\pi/2} \frac{1}{s}\frac{\cos s}{(\sin s)^{2/3}}\,ds \ge \\
&\ge \sum_{k\ge k_0} \frac{1}{2k\pi-\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos s}{(\sin s)^{2/3}}\,ds = A\sum_{k\ge k_0}\frac{1}{k} = \infty,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{2k_0\pi-\pi/2}^{\infty} f^-(s)\,ds &= \sum_{k\ge k_0} \int_{2k\pi+\pi/2}^{2(k+1)\pi-\pi/2} \frac{1}{s}\frac{\cos s}{(\sin s)^{2/3}}\,ds \ge \\
&\ge \sum_{k\ge k_0} \frac{1}{2k\pi+\pi/2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{|\cos s|}{(\sin s)^{2/3}}\,ds = B\sum_{k\ge k_0}\frac{1}{k} = \infty.
\end{aligned}$$

La formula di cambiamento di variabili non funziona, ed in effetti mancano entrambe le ipotesi aggiuntive dell'esercizio 6.5.1: la f non è limitata e la g non è monotona.

Esercizio 6.6.3 Con $g(t) = t\sin\frac{1}{t}$ e $f(x) = x$ si ha

$$\int_u^v g(t)g'(t)\,dt = \int_u^v t\sin\frac{1}{t}\left[\sin\frac{1}{t} - \frac{1}{t}\cos\frac{1}{t}\right]dt = \int_u^v \left(t\sin^2\frac{1}{t} - \cos\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}\right)dt,$$

e l'ultimo membro ha senso perché è l'integrale di una funzione sommabile. Inoltre

$$\int_{g(u)}^{g(v)} x\,dx = \frac{1}{2}\left[g(v)^2 - g(u)^2\right] = \frac{1}{2}\int_u^v \frac{d}{dt}g(t)^2\,dt = \int_u^v g(t)g'(t)\,dt,$$

che è la formula cercata.

Esercizio 6.6.4 Supponiamo dapprima $|f'| \le N$ in E. Fissiamo $n \in \mathbb{N}^+$ e poniamo

$$E_{nk} = \{x \in E :\ (k-1)\,2^{-n} < |f'(x)| \le k\,2^{-n}\}, \qquad 1 \le k \le N\,2^n;$$

osserviamo che gli E_{nk} sono disgiunti e che $E = \bigcup_{k=1}^{N\,2^n} E_{nk}$. Di conseguenza

$$m^*(f(E)) \le m^*\left(\bigcup_{k=1}^{N\,2^n} f(E_{nk})\right) \le \sum_{k=1}^{N\,2^n} m^*(f(E_{nk})).$$

Dal lemma 6.6.2 segue

$$\begin{aligned} m^*(f(E)) &\leq \sum_{k=1}^{N\,2^n} k\,2^{-n} m^*(E_{nk}) = \sum_{k=2}^{N\,2^n} (k-1)\,2^{-n} m^*(E_{nk}) + \sum_{k=2}^{N\,2^n} 2^{-n} m^*(E_{nk}) \leq \\ &\leq \sum_{k=2}^{N\,2^n} \int_{E_{nk}} |f'(x)|\,dx + 2^{-n} m(E) = \int_E |f'(x)|\,dx + 2^{-n} m(E). \end{aligned}$$

Questo vale per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, e quindi per $n \to \infty$ si ottiene la tesi nel caso $|f'| \leq N$. Nel caso generale, sarà $E = \bigcup_{N\in\mathbb{N}^+} E_N$, ove $E_N = \{x \in E : \ |f'(x)| \leq N\}$; essendo $E_n \subseteq E_{N+1}$, si ha, utilizzando l'esercizio 1.7.2 e la parte già dimostrata,

$$m^*(f(E)) = m^*\left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}^+} f(E_N)\right) = \lim_{N\to\infty} m^*(f(E_N)) \leq \lim_{N\to\infty} \int_{E_N} |f'(x)|\,dx = \int_E |f'(x)|\,dx.$$

Esercizio 6.6.5 Siano $]x_i, y_i[$, $1 \leq i \leq N$, sottointervalli disgiunti di $[a, b]$. Posto

$$E_i = \{x \in]x_i, y_i[: \ \exists f'(x)\},$$

si ha $m(f(\,]x_i, y_i[\,) = m(f(E_i))$, in quanto $m(\,]x_i, y_i[\,\setminus E_i) = 0$ e quindi, per ipotesi, $m(f(\,]x_i, y_i[\,\setminus E_i)) = 0$. Pertanto, in virtù dell'esercizio 6.6.4,

$$\sum_{i=1}^N |f(x_i) - f(y_i)| \leq \sum_{i=1}^N m(f(\,]x_i, y_i[\,)) = \sum_{i=1}^N m(f(E_i)) \leq \sum_{i=1}^N \int_{E_i} |f'(x)|\,dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{y_i} |f'(x)|\,dx.$$

Ne segue che, dato $\varepsilon > 0$, per assoluta continuità dell'integrale esiste $\delta > 0$ tale che, se $\sum_{i=1}^N |x_i - y_i| < \delta$, allora

$$\sum_{i=1}^N |f(x_i) - f(y_i)| \leq \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{y_i} |f'(x)|\,dx \leq \varepsilon,$$

cosicché $f \in AC[a, b]$.

Esercizi del paragrafo 6.7

Esercizio 6.7.1 La palla unitaria chiusa B di ℓ^2 è non vuota e convessa. La funzione $f : B \to B$, data da

$$f(x) = \left(\sqrt{1 - \|x\|_{\ell^2}^2}, x_1, x_2, \dots\right), \qquad x \in B,$$

è continua, in quanto per $x, y \in B$ si ha, in virtù della disuguaglianza $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x - y}$ per $0 < y < x$,

$$\|f(x) - f(y)\|_{\ell^2}^2 = \left(\sqrt{1 - \|x\|_{\ell^2}^2} - \sqrt{1 - \|y\|_{\ell^2}^2}\right)^2 + \|x - y\|_{\ell^2}^2 \leq \left|\|x\|_{\ell^2}^2 - \|y\|_{\ell^2}^2\right| + \|x - y\|_{\ell^2}^2,$$

e pertanto $\|f(x) - f(y)\|_{\ell^2} \to 0$ per $\|x - y\|_{\ell^2} \to 0$. Inoltre $f(B) \subseteq \partial B$. Se f avesse un punto fisso $x \in B$, risulterebbe $f(x) = x \in \partial B$, ossia $\|x\|_{\ell^2} = 1$. Perciò $f(x) = (0, x_1, x_2, \dots)$; ma allora da $f(x) = x$ segue $0 = x_1$, $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$, $\dots$, $x_n = x_{n+1}$, $\dots$, e in definitiva $0 = x_1 = x_2 = ...$, ossia $x = 0$: assurdo.

Esercizio 6.7.2 Per continuità si ha $(f(x), x)_N \geq 0$ per ogni $x \in \overline{B(0, R)}$. Supponiamo per assurdo che sia $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in \overline{B(0, R)}$: posto $F(x) = -R\frac{f(x)}{|f(x)|_N}$, la F manda $\overline{B(0, R)}$ in $\partial B(0, R)$ ed è continua. Quindi, per il teorema di Brouwer (teorema 6.7.1), F ha un punto fisso $x_0 \in \partial B(0, R)$. Ma $x_0 = F(x_0) = -R\frac{f(x_0)}{|f(x_0)|_N}$, da cui

$$|x_0|_N^2 = (F(x_0), x_0)_N = -\frac{R}{|f(x_0)|_N}(f(x_0), x_0)_N \leq 0,$$

ossia $x_0 = 0$, il che contraddice la condizione $x_0 \in \partial B(0,R)$. Pertanto deve esistere $x \in \overline{B(0,R)}$ tale che $f(x) = 0$.

Esercizio 6.7.3 L'applicazione T, che denotiamo con T_N per maggior chiarezza nella dimmostrazione, è continua e differenziabile su $[0,\infty[\,\times[0,\pi]^{N-2} \times [0,2\pi]$, ed è iniettiva sulla parte interna V di tale insieme. Dunque si può scegliere $Y = V$ nel teorema 6.7.7. Proviamo la tesi per induzione sulla dimensione N.
Per $N = 3$ risulta $\det T_3'(r,\vartheta_1,\varphi) = r^2 \sin\vartheta_1$ e la formula è vera. Esemplifichiamo nel caso $N = 4$ il ragionamento che faremo nel provare il passo induttivo: è facile scrivere esplicitamente la matrice $T_4'(r,\vartheta_1,\vartheta_2,\varphi)$, e e sviluppando il determinante rispetto alla prima riga si verifica agevolmente che

$$\det T_4'(r,\vartheta_1,\vartheta_2,\varphi) = \left[r^3\cos^2\vartheta_1\sin^2\vartheta_1 + r^3\sin^4\vartheta_1\right]\det T_3'(1,\vartheta_2,\varphi) = r^3\sin^2\vartheta_1\sin\vartheta_2\,,$$

e la formula è vera anche per $N = 4$.
Supponiamo la tesi vera in dimensione $N-1$. Ragionando analogamente al caso $N = 4$, è facile convincersi che, sviluppando il determinante di T_N' rispetto alla prima riga, si trova

$$\det T_N'(r,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{N-2},\varphi) = \left[r^{N-1}\cos^2\vartheta_1\sin^{N-2}\vartheta_1 + r^{N-1}\sin^N\vartheta_1\right]\det T_{N-1}'(1,\vartheta_2,\ldots,\vartheta_{N-2},\varphi),$$

e dunque, grazie all'ipotesi induttiva,

$$\det T_N'(r,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{N-2},\varphi) = r^{N-1}\sin^{N-2}\vartheta_1\sin^{N-3}\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{N-2},$$

cosicché la tesi è vera in dimensione N.
Aggiuggiamo che il teorema 6.7.7 vale per ogni sottoinsieme misurabile $E \subset [0,\infty[\,\times[0,\pi]^{N-2}\times[0,2\pi]$, e non solo per gli E misurabili contenuti in Y: infatti l'insieme

$$W = \left\{x \in \mathbb{R}^N :\ (r,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{N-2},\varphi) \in \left[[0,\infty[\,\times[0,\pi]^{N-2}\times[0,2\pi]\right] \setminus Y\right\}$$

è contenuto in $\{x \in \mathbb{R}^N :\ x_N = 0\}$ e quindi ha misura m_N nulla. Dunque la formula di cambiamento di variabili si estende ai sottoinsiemi misurabili di $Y \cup W$, ossia a tutti gli insiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$.

Esercizio 6.7.4 Utilizzando il teorema 6.7.7, si ha

$$\begin{aligned}
\alpha_N &= m_N(B(0,1)) = \\
&= \int_0^1 r^{N-1}\,dr\int_0^\pi(\sin\vartheta_1)^{N-2}\,d\vartheta_1\ldots\int_0^\pi(\sin\vartheta_{N-3})^2\,d\vartheta_{N-3}\int_0^\pi\sin\vartheta_{N-2}\,d\vartheta_{N-2}\int_0^{2\pi}d\varphi = \\
&= \frac{2\pi}{N}\prod_{j=1}^{N-2}\int_0^\pi(\sin\vartheta)^j\,d\vartheta.
\end{aligned}$$

Sostituendo N con $N-2$, si ha pure

$$\alpha_{N-2} = \frac{2\pi}{N-2}\prod_{j=1}^{N-4}\int_0^\pi(\sin\vartheta)^j\,d\vartheta.$$

Osserviamo adesso che per $j \geq 2$ risulta

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi(\sin\vartheta)^{j-2}\,d\vartheta &= \int_0^\pi(\sin\vartheta)^{j-2}(1-\cos^2\vartheta)\,d\vartheta + \int_0^\pi(\sin\vartheta)^{j-2}\cos^2\vartheta\,d\vartheta = \\
&= \int_0^\pi(\sin\vartheta)^j\,d\vartheta + \left[\frac{(\sin\vartheta)^{j-1}}{j-1}\cos\vartheta\right]_0^\pi + \int_0^\pi\frac{(\sin\vartheta)^{j-1}}{j-1}\sin\vartheta\,d\vartheta = \\
&= \int_0^\pi(\sin\vartheta)^j\,d\vartheta\left(1+\frac{1}{j-1}\right),
\end{aligned}$$

ossia

$$\int_0^\pi(\sin\vartheta)^j\,d\vartheta = \frac{j-1}{j}\int_0^\pi(\sin\vartheta)^{j-2}\,d\vartheta,$$

mentre, ovviamente, per $j = 1, 0$

$$\int_0^\pi (\sin\vartheta)\, d\vartheta = 2, \quad \int_0^\pi d\vartheta = \pi.$$

Dunque

$$\frac{\alpha_N}{\alpha_{N-2}} = \frac{N-2}{N}\int_0^\pi (\sin\vartheta)^{N-2}\, d\vartheta \int_0^\pi (\sin\vartheta)^{N-3}\, d\vartheta = \frac{N-2}{N}\frac{(N-3)!!}{(N-2)!!}\frac{(N-4)!!}{(N-3)!!}\cdot 2\cdot\pi = \frac{2\pi}{N}.$$

Di conseguenza, per $n \in \mathbb{N}^+$ avremo, se $N = 2n$,

$$\alpha_{2n} = \frac{2\pi}{2n}\alpha_{2n-2} = \ldots = \frac{(2\pi)^{n-1}\cdot 2}{(2n)!!}\alpha_2 = \frac{\pi^{n-1}}{n!}\pi = \frac{\pi^n}{n!},$$

mentre se $N = 2n-1$

$$\alpha_{2n-1} = \frac{2\pi}{2n-1}\alpha_{2n-3} = \ldots = \frac{(2\pi)^{n-1}}{(2n-1)!!}\alpha_1 = \frac{2^n\pi^{n-1}}{(2n-1)!!}.$$

In parricolare, come è giusto, $\alpha_2 = m_2(B(0,1)) = \pi$ e $\alpha_1 = m([-1,1]) = 2$.

Esercizio 6.7.5 Utilizzando il cambiamento in coordinate polari dell'esercizio 6.7.3, si ha

$$\int_{B(0,r)} f(|x|_N)\, dm_N = \int_0^1 f(r) r^{N-1}\, dr \prod_{j=1}^{N-2} (\sin\vartheta)^j\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = N\alpha_N \int_0^1 f(r) r^{N-1}\, dr.$$

Esercizio 6.7.6 La funzione g è continua perché è somma di una serie uniformemente convergente. Quindi $T \in C^1[0,1]$ e $T'(x) = g(x) = 0$ per ogni $x \in C_\xi$ perché $g = 0$ su $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} W_n^c = C_\xi$. Inoltre T è iniettiva, perché se si avesse $T(x) = T(y)$ con $x < y$, allora si troverebbe $\int_x^y g(t)\, dt = 0$, il che è impossibile, dato che fra x e y cadono sottointervalli dell'aperto C_ξ^c sul quale g è positiva. Dunque T verifica in $Y = [0,1]$ le ipotesi del teorema 6.7.7. Osserviamo poi che, in virtù del lemma 6.7.5, risulta $m(T(C_\xi)) = 0$, essendo $T' = 0$ su C_ξ.
Sia ora $V \subset C_\xi$ un insieme non misurabile. Si ha $T(V) \subseteq T(C_\xi)$, quindi $m(T(V)) = 0$. Posto $A = T(V)$, la funzione χ_A è misurabile, però $(\chi_A \circ T)(x) = \chi_{T(V)}(T(x)) = \chi_V(x)$ non è misurabile.

Esercizio 6.7.7 Sia A un aperto arbitrario di $\mathbb{R}^k$ e sia $f : A \to V \subset R^N$ la varietà: quindi f è iniettiva, con $Df(x)$ di rango massimo in ogni punto $x \in A$. Possiamo approssimare A dall'interno con una successione crescente di compatti $K_n = \overline{A_n}$, con A_n aperto, in modo che $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Su ciaacun K_n vale la formula, fornita dal teorema 6.7.9,

$$H_k(f(K_n)) = \int_{K_n} J(Df(x))\, dx;$$

per convergenza monotona, quando $n \to \infty$ si ricava

$$H_k(V) = H_k(f(A)) = \int_A J(Df(x))\, dx,$$

che è la tesi.

Capitolo 7

Spazi di Banach

07

7.1 Norme

gener

Abbiamo già incontrato vari esempi di spazi vettoriali dotati di norme; alcuni sono completi rispetto alla distanza indotta dalla norma, altri no. Vogliamo ora ricapitolare alcuni fatti già noti ed ampiamente usati, e descrivere in modo più organico questi spazi. Cominciamo con la definizione di norma.

norma

Definizione 7.1.1 *Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$. Una* norma *su X è una funzione $\|\cdot\| : X \to [0, \infty[$ dotata delle seguenti proprietà:*

(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$*;*

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *per ogni $x \in X$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ (oppure per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$);*

(iii) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ *per ogni $x, y \in X$.*

La coppia $(X, \|\cdot\|)$ è detta spazio normato *ed è uno spazio metrico con la distanza indotta $d(x, y) = \|x - y\|$; se tale spazio metrico è completo, $(X, \|\cdot\|)$ è detto* spazio di Banach*.*

Notiamo che da (iii) segue

$$| \|x\| - \|y\| | \le \|x - y\| \qquad \forall x, y \in X;$$

quindi la norma è una funzione continua da X in $[0, +\infty[$.
Conosciamo già i seguenti spazi di Banach:

(1) $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{C}^N$, con $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N |x^i|^2}$, oppure $\|x\| = \sum_{i=1}^N |x^i|$, oppure $\|x\| = \max\limits_{1 \le i \le N} |x^i|$;

(2) $L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$, con $\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu$;

(3) $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$, con $\|f\|_\infty = \operatorname{supess}_X |f|$;

(4) $C^k[a, b]$ $(k \in \mathbb{N})$, con $\|f\|_{C^k[a,b]} = \sum_{h=0}^k \max_{[a,b]} |f^{(h)}|$;

(5) $AC[a,b]$, con $\|f\|_{AC[a,b]} = \max_{[a,b]} |f| + \int_a^b |f'(t)|\, dt$;

(6) $BV[a,b]$, con $\|f\|_{BV[a,b]} = \sup_{[a,b]} |f| + T_a^b(f)$.

Il seguente lemma caratterizza gli spazi normati che sono anche spazi di Banach, ossia fornisce un criterio per stabilire se una data norma rende completo lo spazio X oppure no.

normBanach **Lemma 7.1.2** *Sia X uno spazio normato. Allora X è uno spazio di Banach se e solo se per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, per la quale risulti $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, esiste $y \in X$ tale che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge a y in X, ossia*

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=0}^{N} x_n - y \right\| = 0.$$

Dimostrazione ($\Longrightarrow$) Sia $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. La successione delle somme parziali $\{\sum_{n=0}^{N} x_n\}_{N\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in X, dato che

$$\left\| \sum_{n=M+1}^{N} x_n \right\| \leq \sum_{n=M+1}^{N} \|x_n\| \qquad \forall N, M \in \mathbb{N} \text{ con } N > M;$$

poiché X è completo, tale successione convergerà ad un opportuno $y \in X$.
($\Longleftarrow$) Sia $\{y_n\}$ una successione di Cauchy in X: allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k \in \mathbb{N}$ (e non è restrittivo supporre $n_{k+1} > n_k$) tale che

$$\|y_m - y_{n_k}\| < 2^{-k} \qquad \forall m \geq n_k\ .$$

Poniamo

$$\begin{cases} x_0 = y_{n_0} \\ x_{k+1} = y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\,, \quad k \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

allora $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ e

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| = \|y_{n_0}\| + \sum_{k=0}^{\infty} \|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\| \leq \|y_{n_0}\| + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} < \infty.$$

Quindi, per ipotesi, esiste $y \in X$ tale che

$$y_{n_m} = \sum_{k=0}^{m} x_k \to y \quad \text{in } X;$$

ma dato che $\{y_n\}$ è di Cauchy, l'intera successione $\{y_n\}$ converge a y. Dunque X è completo. □

Ricordiamo che due norme $\|\cdot\|, |\cdot|$ su uno spazio vettoriale X si dicono *equivalenti* se esistono due costanti positive c_1, c_2 tali che

$$c_1|x| \leq \|x\| \leq c_2|x| \qquad \forall x \in X;$$

ciò accade se e solo se entrambe le norme inducono su X la stessa topologia (esercizio 7.1.1). In generale, uno spazio può essere normato in relazione a due norme diverse e non confrontabili (esercizio 7.1.6); se però lo spazio vettoriale ha dimensione finita, questo non può accadere, come mostra la proposizione che segue.

Proposizione 7.1.3 *In uno spazio vettoriale finito-dimensionale X tutte le norme sono fra loro equivalenti.*

Dimostrazione Supponiamo che lo spazio vettoriale X sia reale, e sia $\dim X = n$. Scelta una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ di X, ogni $z \in X$ si scrive in modo unico come $z = \sum_{i=1}^n z^i e_i$, con $\{z^i\} \in \mathbb{R}^n$. Quindi possiamo considerare su X la norma

$$\|z\|_1 = \sum_{i=1}^n |z^i| \qquad \forall z \in X$$

e su $\mathbb{R}^n$ la norma

$$|\{z^i\}| = \sum_{i=1}^n |z^i| \qquad \forall \{z^i\} \in \mathbb{R}^n;$$

vi è una ovvia isometria bigettiva $j : (X, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^n, |\cdot|)$, data da $j(z) = \{z^i\}$ per ogni $z \in X$.
Sia ora $\|\cdot\|$ una norma qualunque su X. Per subadditività si trova subito

$$\|z\| = \left\| \sum_{i=1}^n z^i e_i \right\| \le \sum_{i=1}^n |z^i| \|e_i\| \le M \|z\|_1 \qquad \forall z \in X,$$

ove $M = \max_{1 \le i \le n} \|e_i\|$.
D'altra parte, consideriamo la funzione

$$f : X \to \mathbb{R}, \qquad f(z) = \|z\| \quad \forall z \in X;$$

essa è continua, quindi $f \circ j^{-1}$ è continua da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ e positiva su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pertanto $f \circ j^{-1}$ ha minimo $m > 0$ sul compatto $\Gamma = \{\{z^i\} \in \mathbb{R}^n : |\{z^i\}| = 1\}$. Per omogeneità si ricava allora, posto $z = j^{-1}(\{z^i\})$,

$$\|z\| = \|f \circ j^{-1}(\{z^i\})\| \ge m |\{z^i\}| = m |j(z)| \qquad \forall \{z^i\} \in \mathbb{R}^n,$$

ossia

$$\|z\| \ge m \|z\|_1 \qquad \forall z \in X.$$

Ne segue che la generica norma $\|\cdot\|$ è equivalente a $\|\cdot\|_1$. Il discorso è esattamente lo stesso se lo spazio X è complesso. □

Esercizi 7.1

noreq

1. Dimostrare che due norme su uno spazio vettoriale X sono equivalenti se e solo se esse inducono su X la stessa topologia.

noreqBV 2. Si provi che in $BV[a,b]$ le tre norme

$$\|f\|_{BV} = \sup_{[a,b]} |f| + T_a^b(f), \quad \|f\|_1 = \|f\|_\infty + T_a^b(f), \quad \|f\|_2 = |f(a)| + T_a^b(f)$$

sono fra loro equivalenti.

norCL1 3. Si provi che $C[a,b]$ è uno spazio normato con $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$. È completo?

norneq 4. Provare che in $C[a,b]$ le due norme $\|f\|_\infty$ e $\|f\|_1$ non sono equivalenti.

linfc0 5. Poniamo

$$\ell^\infty = \{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \{x_n\} \text{ è limitata}\},$$
$$c = \{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \{x_n\} \text{ ha limite finito}\},$$
$$c_0 = \{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \{x_n\} \text{ è infinitesima}\},$$
$$c_{00} = \{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \{x_n\} \text{ è definitivamente nulla}\}.$$

Verificare che $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$ è una norma in questi quattro spazi; mostrare poi che i primi tre sono spazi di Banach, ed il quarto no.

normenc 6. Nello spazio c_{00} consideriamo le due norme

$$\|x\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}^+} |x_n|, \qquad \|x\|_2 = \sup_{n\in\mathbb{N}^+} n|x_n| \qquad \forall x \in c_{00}\,.$$

Si provi che queste due norme non sono confrontabili fra loro.

Calfa 7. Fissato $\alpha \in]0,1[$, si consideri l'insieme delle funzioni α-Hölderiane su $[a,b]$, cioè

$$C^\alpha[a,b] = \left\{ f \in C^0[a,b] : [f]_\alpha = \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}.$$

(i) Si verifichi che $C^\alpha[a,b]$ è un sottospazio denso in $C[a,b]$.

(ii) Si dimostri che

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + [f]_\alpha$$

è una norma in $C^\alpha[a,b]$ che rende tale spazio uno spazio di Banach.

(iii) Posto $g_r(x) = |x-r|^\alpha$, si mostri che $g_r \in C^\alpha[a,b]$.

(iv) Si provi che

$$[g_r - g_s]_\alpha \geq 2 \qquad \forall r,s \in [a,b],$$

e se ne deduca che $C^\alpha[a,b]$ non è separabile (uno spazio topologico X si dice *separabile* se esiste un sottoinsieme numerabile D denso in X).

3implell2 8. Sia $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ una successione di elementi di ℓ^2. Si considerino le proprietà seguenti:

(a) $\sum_{k=1}^\infty \|x^{(k)}\|_{\ell^2} < \infty$;

(b) $\sum_{n=1}^\infty \left[\sum_{k=1}^\infty |x_n^{(k)}|\right]^2 < \infty$:

(c) $\sum_{k=1}^\infty x^{(k)}$ converge in ℓ^2.

Si provi che (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c), ma che tutte le implicazioni contrarie sono false.

7.2 Prodotti scalari

prosca

Una particolare categoria di spazi normati è costituita da quegli spazi in cui la norma è generata da un prodotto scalare. Questa circostanza rende tali spazi particolarmente ricchi di proprietà geometriche simili a quelle di $\mathbb{R}^N$ o di $\mathbb{C}^N$.

prodscal **Definizione 7.2.1** *Sia H uno spazio vettoriale complesso. Un* prodotto scalare *è una applicazione $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{C}$ con le seguenti proprietà:*

(i) *(x,x) è reale non negativo e $(x,x) = 0$ se e solo se $x = 0$;*

(ii) *$(x,y) = \overline{(y,x)}$ per ogni $x, y \in H$;*

(iii) *$x \mapsto (x,y)$ è lineare per ogni fissato $y \in H$.*

Da (ii) e (iii) segue che $y \mapsto (x,y)$ è *antilineare*, ossia

$$(x, \lambda y + \mu w) = \overline{\lambda}(x,y) + \overline{\mu}(x,w) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \forall x, y, w \in H.$$

Lo spazio H, munito di un prodotto scalare, si dice *spazio con prodotto scalare* o *spazio pre-Hilbertiano*. Nel caso in cui H sia uno spazio vettoriale reale, la definizione è perfettamente analoga: spariscono i complessi coniugati ed il prodotto scalare risulta lineare nei suoi due argomenti.
Per mostrare che ogni prodotto scalare genera una norma, è fondamentale la seguente proprietà:

Causch **Proposizione 7.2.2 (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)** *Sia H uno spazio con prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$. Allora*

$$|(x,y)| \le (x,x)^{1/2}(y,y)^{1/2} \qquad \forall x, y \in H.$$

Dimostrazione Siano $x, y \in H$. Se $x = 0$ la tesi è banale perché i due membri della disuguaglianza sono nulli. Sia allora $x \neq 0$, cosicché $(x,x) > 0$. Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &\le (\lambda x + y, \lambda x + y) = |\lambda|^2 (x,x) + \lambda(x,y) + \overline{\lambda}(y,x) + (y,y) = \\ &= |\lambda|^2 (x,x) + 2\,\mathrm{Re}\,(\lambda(x,y)) + (y,y), \end{aligned}$$

e scegliendo

$$\lambda = -\frac{\overline{(x,y)}}{(x,x)}$$

si ricava

$$0 \le -\frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} + (y,y),$$

che è la tesi. □

CSugu **Osservazione 7.2.3** Dalla dimostrazione precedente segue che la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si riduce ad un'uguaglianza se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $\lambda x + y = 0$, vale a dire se e solo se i vettori x e y sono paralleli, ovvero multipli uno dell'altro.

Corollario 7.2.4 *Sia H uno spazio con prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$. Allora*

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

è una norma su H; si dice che essa è indotta *dal prodotto scalare.*

Dimostrazione Le prime due proprietà della definizione 7.1.1 sono evidenti. Verifichiamo la subadditività: per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) = (x,x) + 2\mathrm{Re}(x,y) + (y,y) = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x,y) + \|y\|^2 \leq \\ \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \quad \square\end{aligned}$$

Uno spazio con prodotto scalare è dunque anche uno spazio normato.

Definizione 7.2.5 *Uno spazio con prodotto scalare si dice* spazio di Hilbert *se è completo rispetto alla norma indotta.*

Osservazione 7.2.6 Il prodotto scalare è continuo rispetto alla norma indotta: infatti per ogni $x, x_0, y, y_0 \in H$ si ha la stima

$$\begin{aligned}|(x,y) - (x_0,y_0)| &= |(x-x_0, y-y_0) + (x-x_0, y_0) + (x_0, y-y_0)| \leq \\ &\leq \|x-x_0\|\cdot\|y-y_0\| + \|x-x_0\|\cdot\|y_0\| + \|x_0\|\cdot\|y-y_0\|,\end{aligned}$$

e quindi $(x,y) \to (x_0,y_0)$ per $\|x-x_0\| \to 0$ e $\|y-y_0\| \to 0$.

Vediamo qualche esempio.

tantihilb **Esempi 7.2.7 (1)** $\mathbb{C}^N$ è uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$ col prodotto scalare usuale

$$(x,y) = \sum_{i=1}^N x^i \overline{y^i} \qquad \forall x, y \in \mathbb{C}^N,$$

che induce la norma euclidea

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N |x^i|^2}\ ;$$

la restrizione a $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ di questo prodotto scalare rende $\mathbb{R}^N$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{R}$ col prodotto scalare

$$(x,y) = \sum_{i=1}^N x^i y^i \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N,$$

il quale induce la stessa norma.

(2) Lo spazio $C[a,b]$, con il prodotto scalare

$$(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)\ dt \qquad \forall f, g \in C[a,b],$$

è uno spazio pre-Hilbertiano, ma non di Hilbert: ad esempio, le funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } a \le x \le \frac{a+b}{2} - \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}\left(x - \frac{a+b}{2} + \frac{1}{n}\right) & \text{se } \left|x - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{se } \frac{a+b}{2} + \frac{1}{n} \le x \le b \end{cases}$$

sono continue e convergono nella norma indotta, che è

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}\ ,$$

alla funzione discontinua $\chi_{[\frac{a+b}{2},b]}$, quindi formano una successione di Cauchy che non converge nello spazio $(C[a,b], \|\cdot\|)$.

(3) In un arbitrario spazio misurato $(X, \mathcal{F}, \mu)$ consideriamo lo spazio $\mathcal{L}^2(X)$ delle funzioni misurabili tali che $|f|^2$ è sommabile su X; indichiamo con $L^2(X)$ lo spazio quoziente rispetto alla consueta relazione di equivalenza che identifica le funzioni q.o. coincidenti. $L^2(X)$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare dell'esempio precedente. La dimostrazione della completezza di questo spazio rispetto alla norma indotta ricalca quella della completezza di $L^1(X)$ (teorema 4.6.2), e per essa si rimanda all'esercizio 7.2.1.

(4) Prendendo tutte le funzioni complesse f tali che $\mathrm{Re} f$ e $\mathrm{Im} f$ sono misurabili, e definendo l'integrale di f come

$$\int_X f\, d\mu = \int_X \mathrm{Re}\, f\, d\mu + i \int_X \mathrm{Im}\, f\, d\mu,$$

possiamo considerare, sullo spazio $L^2(X, \mathbb{C})$ delle funzioni di quadrato sommabile a valori complessi, il prodotto scalare

$$(f, g) = \int_X f\overline{g}\ d\mu \qquad \forall f, g \in L^2(X, \mathbb{C});$$

esso induce la stessa norma di prima, la quale risulta ancora completa.

Tramite il prodotto scalare si può dare la nozione di ortogonalità.

ortog **Definizione 7.2.8** *Sia H uno spazio con prodotto scalare. Due elementi $x, y \in H$ sono fra loro* ortogonali*, e scriviamo $x \perp y$, se risulta $(x, y) = 0$.*

Pita **Proposizione 7.2.9 (teorema di Pitagora)** *Sia H uno spazio con prodotto scalare, e siano $x, y \in H$ con $x \perp y$. Allora se H è reale*

$$\|x + y\|^2 = \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

mentre se H è complesso

$$\|x + y\|^2 = \|x - y\|^2 = \|x + iy\|^2 = \|x - iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Dimostrazione Supponiamo H complesso. Allora, essendo $(x, y) = 0$,

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}(x, y) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

$$\|x \pm iy\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}(x, iy) + \|y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\,\mathrm{Im}(x, y) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Il caso H reale è compreso nel precedente. □

Dato un qualunque spazio normato, come si fa a riconoscere se la norma è indotta da un prodotto scalare? La risposta è nella seguente

normehilb **Proposizione 7.2.10** *Sia X uno spazio normato. La norma di X è Hilbertiana, ossia è indotta da un prodotto scalare, se e solo se vale l'* identità del parallelogrammo*:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad \forall x, y \in H.$$

In tal caso, il prodotto scalare è dato da

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$$

se H è reale, e da

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left[\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right) + i\left(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\right)\right]$$

se H è complesso.

Dimostrazione ($\Longrightarrow$) Si tratta di un'ovvia verifica.

($\Longleftarrow$) Si tratta di verificare che le espressioni sopra scritte soddisfano le richieste della definizione 7.2.1: la cosa è facile ma noiosa e per essa rimandiamo all'esercizio 7.2.3. □

Esercizi 7.2

L2Hil 1. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. Si dimostri che $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ è uno spazio di Hilbert.
[**Traccia:** si ripeta, con le dovute modifiche, la dimostrazione del teorema 4.6.2.]

convolL2 2. Si mostri che se $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ allora la convoluzione $f \star g$ è ben definita ed appartiene a $L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$.

iparps 3. Dimostrare che se nello spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è vera l'identità del parallelogrammo, allora la norma $\|\cdot\|$ è indotta da uno dei prodotti scalari introdotti nella proposizione 7.2.10.
[**Traccia:** se X è reale, si provi dapprima che dall'ipotesi segue $(2x, y)+(2x', y) = 2(x + x', y)$, da cui, se $x' = 0$, $(2x, y) = 2(x, y)$. Se ne deduca, per induzione, che $(nx, y) = n(x, y)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e poi che $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{Q}$; si usi, poi, la continuità della norma. L'estensione al caso X complesso è facile.]

nl12inf 4. Si definiscano

$$\ell^1 = \left\{ x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}, \qquad \|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|,$$

$$\ell^2 = \left\{ x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2}.$$

Si provi che ℓ^1 e ℓ^2 sono spazi di Banach, e che il secondo è uno spazio di Hilbert mentre il primo no. Si provi inoltre che questi due spazi sono separabili (v. esercizio 7.1.7).

ell1preH 5. Si verifichi che l'applicazione $\Phi : \ell^1 \times \ell^1 \to \mathbb{C}$,

$$\Phi(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \, \overline{y_n} \, ,$$

definisce un prodotto scalare e rende ℓ^1, con la norma indotta, uno spazio con prodotto scalare. È completo?

fvsf^2 6. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione. Si provi che $\{x_n\} \in \ell^2$ se e solo se $\{x_n^2\} \in \ell^1$. Se f è una funzione definita su $[a, b]$, è vero che $f \in L^2(a, b)$ se e solo se $f^2 \in L^1(a, b)$?

CnoH 7. Si dimostri che $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ non è uno spazio di Hilbert.

ACH 8. Si provi che $\{f \in AC[a, b] : f' \in L^2(a, b)\}$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$(f, g)_{AC} = \int_a^b [f(t)g(t) + f'(t)g'(t)] \, dm.$$

giococonps 9. Sia H uno spazio con prodotto scalare. Se $\{x_n\}, \{y_n\} \subset H$ sono due successioni tali che $\|x_n\| \le 1$, $\|y_n\| \le 1$ e $(x_n, y_n) \to 1$, si provi che $\|x_n - y_n\| \to 0$.

sn=ns 10. Sia H uno spazio con prodotto scalare. Si provi che:

(i) se $x, y \in H$, allora $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ se e solo se $\mathrm{Re}\,(x, y) = \|x\|\|y\|$ ed anche se e solo se esiste $\alpha \ge 0$ tale che $x = \alpha y$;

(ii) si ha $x \perp y$ se e solo se $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, ed anche se e solo se $\|x + \lambda y\| \ge \|x\|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.

esdiff 11. Sia H uno spazio con prodotto scalare. Si provi che per ogni $x, y, z, w \in H$ vale la disuguaglianza

$$\|x - y\| \cdot \|z - w\| \le \|x - z\| \cdot \|y - w\| + \|x - w\| \cdot \|y - z\|.$$

[**Traccia:** si osservi anzitutto che si può supporre $w = 0$. Se a primo membro c'è $\mathrm{Re}(x - y, z)$, la disuguaglianza è facile. Altrimenti, fissato $u \in H$, si scelga $z = e^{-i\vartheta}u$ con $\vartheta \in \mathbb{R}$ tale che $(x - y, z) = \|x - y\| \cdot \|u\| = \|x - y\| \cdot \|z\|$...]

H12H 12. Sia X uno spazio normato 1-dimensionale: si provi che esiste un prodotto scalare su X. Si provi poi che se X è uno spazio normato tale che in ogni suo sottospazio 2-dimensionale è definito un prodotto scalare, allora si può definire un prodotto scalare su tutto X.

idparaN 13. Sia H uno spazio normato. Si provi che la norma di H è indotta da un prodotto scalare se e solo se per ogni $n \geq 2$ e per ogni n-pla di vettori $x_1, \ldots, x_n \in H$ vale la relazione

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n} \|x_j - x_k\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|^2 = n \cdot \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2.$$

Smchimag 14. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ sia $S_m = \{f \in L^2(0,1) : \|f\|_2 \leq m\}$; si provi che $S_m \subset L^1(0,1)$ e che esso è chiuso e magro (ossia S_m è unione numerabile di insiemi $E_{n,m}$ la cui chiusura ha parte interna vuota) in $L^1(0,1)$.

7.3 Operatori lineari e continui

oplin Siano X, Y spazi normati. Le più importanti fra le applicazioni da X in Y sono quelle che "rispettano" la struttura lineare degli insiemi di partenza e di arrivo, ossia sono le applicazioni lineari. Ad esse è dedicato questo paragrafo.

Definizione 7.3.1 *Un'applicazione $F : X \to Y$ è detta* operatore lineare *se si ha $F(\alpha x + \beta x') = \alpha F(x) + \beta F(x')$ per ogni $x, x' \in X$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (oppure per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$). Per gli operatori lineari si usa la scrittura Fx in luogo di $F(x)$.*

linlim **Definizione 7.3.2** *Un operatore lineare $F : X \to Y$ si dice* limitato *se esiste $M \geq 0$ tale che $\|Fx\|_Y \leq M\|x\|_X$ per ogni $x \in X$.*

Dunque, se $F : X \to Y$ è un operatore lineare e limitato, risulta

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Fx\|_Y}{\|x\|_X} < +\infty;$$

si noti che, a causa dell'omogeneità,

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Fx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|u\|_X = 1} \|Fu\|_Y = \sup_{\|v\|_X \leq 1} \|Fv\|_Y \,,$$

ed in particolare un operatore lineare è limitato se e solo se esso è una funzione limitata (in norma) sulla palla unitaria di X, che è l'insieme

$$B = \{u \in X : \|u\|_X \leq 1\}.$$

L'insieme degli operatori lineari limitati da X in Y ha un'ovvia struttura di spazio vettoriale e si indica con $\mathcal{L}(X, Y)$; se $X = Y$ si scrive $\mathcal{L}(X)$ anziché $\mathcal{L}(X, X)$.
Per gli operatori lineari fra spazi normati la condizione di limitatezza equivale alla continuità. Si ha infatti:

limcont **Proposizione 7.3.3** *Siano X, Y spazi normati e sia $F : X \to Y$ un operatore lineare. Sono fatti equivalenti:*

(i) *F è limitato;*

(ii) *esiste $x_0 \in X$ tale che F è continuo nel punto x_0;*

(iii) *F è* Lipschitziano*, cioè esiste $K \geq 0$ tale che*

$$\|Fx - Fx'\|_Y \leq K\|x - x'\|_X \qquad \forall x, x' \in X.$$

Dimostrazione **(i) $\Longrightarrow$ (iii)** Per ipotesi esiste $M \geq 0$ tale che

$$\|Fx\|_Y \leq M\|x\|_X \qquad \forall x \in X;$$

grazie alla linearità si deduce

$$\|Fx - Fx'\|_Y = \|F(x - x')\|_Y \leq M\|x - x'\|_X \qquad \forall x, x' \in X.$$

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Evidente.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|x - x_0\|_X \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \|Fx - Fx_0\|_Y \leq \varepsilon.$$

Sia $z \in X \setminus \{0\}$ (si noti che se $X = \{0\}$, allora per linearità deve essere $F = 0$ e quindi la tesi è ovvia). Posto $w = \delta z/\|z\|_X$, si ha

$$\|Fw\| = \frac{\delta}{\|z\|_X}\,\|Fz\|,$$

e poiché $\|w\|_X = \|(w + x_0) - x_0\| = \delta$, si ha $\|Fw\|_Y \leq \varepsilon$. Pertanto

$$\|Fz\|_Y = \frac{\|z\|_X}{\delta}\,\|Fw\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\,\|z\|_X \quad \forall z \in X \setminus \{0\}.$$

Dato che per $z = 0$ la stima precedente è ovvia, si conclude che F è limitato. □

Lo spazio vettoriale $\mathcal{L}(X, Y)$ diventa uno spazio normato con la norma

$$\|F\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Fx\|_Y}{\|x\|_X}$$

(le verifiche sono immediate).

LXYcompl **Teorema 7.3.4** *Siano X, Y spazi normati. Se Y è uno spazio di Banach, allora $\mathcal{L}(X, Y)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione Sia $\{F_n\}$ una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(X,Y)$: ciò significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|F_n - F_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq \nu$; quindi

$$\|F_n x - F_m x\|_Y < \varepsilon \|x\|_X \quad \forall x \in X, \quad \forall n, m \geq \nu.$$

In particolare, per ogni fissato $x \in X$ la successione $\{F_n x\}$ è di Cauchy in Y; poiché Y è completo, essa ha limite, per ogni fissato $x \in X$, nella norma di Y. Chiamiamo $F(x)$ tale limite: è immediato verificare che l'applicazione F così definita è lineare da X in Y. Inoltre per ogni $x \in X$ si ha

$$\begin{aligned} \|Fx\|_Y &= \lim_{n\to\infty} \|F_n x\|_Y \leq \liminf_{n\to\infty} \left[\|F_n x - F_\nu x\|_Y + \|F_\nu x\|_Y\right] \leq \\ &\leq \left[\varepsilon + \|F_\nu\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\right] \|x\|_X, \end{aligned}$$

cosicché F è un operatore limitato. Infine, se $x \in X$ con $\|x\|_X = 1$ si ha

$$\|F_n x - Fx\|_Y = \lim_{m\to\infty} \|F_n x - F_m x\|_Y \leq \liminf_{n\to\infty} \|F_n - F_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \nu,$$

da cui $\|F_n - F\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$ e dunque $F_n \to F$ in $\mathcal{L}(X,Y)$. □

Vale anche il viceversa di questo teorema, salvo casi "patologici": si veda l'esercizio 7.3.9.

duale **Definizione 7.3.5** *Il* duale *di uno spazio normato X è lo spazio $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ o lo spazio $\mathcal{L}(X,\mathbb{C})$, a seconda che X sia reale o complesso; esso si denota con X^*. Gli elementi del duale X^* di X si dicono* funzionali *lineari e limitati su X (ovvero lineari e continui, per la proposizione 7.3.3).*

Osserviamo che, essendo $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ completi, X^* è uno spazio di Banach per ogni spazio normato X.
Vediamo qualche esempio.

tantidual **Esempi 7.3.6 (1)** Se $X = \mathbb{R}^N$, il duale $(\mathbb{R}^N)^*$ è isomorfo ed isometrico a $\mathbb{R}^N$. Infatti ogni funzionale lineare F su $\mathbb{R}^N$ è completamente caratterizzato dai valori $Fe_1, \ldots, Fe_N$ assunti nei vettori della base canonica $e_1, \ldots, e_N$; posto allora $a = (Fe_1, \ldots, Fe_N)$, l'elemento $a \in \mathbb{R}^N$ così definito è tale che $Fx = F\left(\sum_{i=1}^N x^i e_i\right) = \sum_{i=1}^N x^i a^i = (x,a)_{\mathbb{R}^N}$, e si ha anche $\|F\|_{(\mathbb{R}^N)^*} = \|a\|_{\mathbb{R}^N}$ (poiché per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz risulta $|Fx| = |(x,a)_{\mathbb{R}^N}| \leq \|x\|_{\mathbb{R}^N}\|a\|_{\mathbb{R}^N}$ e per $x = a$ vale l'uguaglianza).

(2) Se $X = \mathbb{C}^N$, il duale $(\mathbb{C}^N)^*$ è isomorfo ed isometrico a $\mathbb{C}^N$(stesso discorso, solo che stavolta i numeri $a^i = Fe_i$ sono complessi anziché reali).

(3) Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato. Per ogni fissata $f \in L^1(X)$, il funzionale

$$Fg = \int_X g\,\overline{f}\,, d\mu, \qquad g \in L^\infty(X),$$

è ovviamente lineare; inoltre risulta

$$|Fg| \leq \int_X |gf|\, d\mu \leq \|g\|_\infty \|f\|_1 \qquad \forall g \in L^\infty(X),$$

quindi F è continuo, cioè è un elemento di $(L^\infty(X))^*$, e si ha $\|F\| \le \|f\|_1$. Proviamo che vale l'uguaglianza: ciò è evidente quando $f = 0$; altrimenti, se scegliamo

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) = 0 \\ \frac{f(x)}{|f(x)|} & \text{se } f(x) \neq 0, \end{cases}$$

otteniamo $\|g\|_\infty = 1$ e quindi

$$|Fg| = \left| \int_X g\,\overline{f}\,d\mu \right| = \int_X |f|\,d\mu = |g\|_\infty |f\|_1.$$

Si ha dunque l'immersione isometrica $i : L^1(X) \to (L^\infty(X))^*$, definita da $i(f) = F$; come vedremo, questa immersione *non è* surgettiva.

(4) Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato σ-finito. Per ogni fissata $f \in L^\infty(X)$, consideriamo ancora il funzionale F dell'esempio precedente, o più precisamente

$$Fg = \int_X g\,\overline{f}\,d\mu, \qquad g \in L^1(X).$$

Il calcolo fatto sopra mostra che $F \in (L^1(X))^*$ e che $\|F\| \le \|f\|_\infty$. Per provare l'uguaglianza, supposto che sia $f \neq 0$ (altrimenti è tutto ovvio) e dato $\varepsilon > 0$, sfruttando la σ-finitezza di X si può scegliere un insieme $A \in \mathcal{F}$ con $0 < \mu(A) < \infty$ tale che

$$|f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon \qquad \forall x \in A;$$

allora, scelta $g = \frac{f}{|f|}\chi_A$, risulta $\|g\|_1 = \mu(A)$ e dunque

$$|Fg| = \left| \int_X g\,\overline{f}\,d\mu \right| = \int_A |f|\,d\mu > (\|f\|_\infty - \varepsilon)\mu(A) = (\|f\|_\infty - \varepsilon)\|g\|_1,$$

cosicché

$$\|F\| \ge \|f\|_\infty - \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

e in definitiva $\|F\| = \|f\|_\infty$. Quindi si ha l'immersione isometrica $i : L^\infty(X) \to (L^1(X))^*$, definita da $i(f) = F$; vedremo nel seguito che tale isometria è surgettiva e che dunque, se la misura μ è σ-finita, il duale di $L^1(X)$ è isomorfo a $L^\infty(X)$. Se manca la σ-finitezza, questo risultato è in generale falso (esercizi 7.3.7 e 7.3.8).

Esercizi 7.3

dimXfinita

1. Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato finito-dimensionale. Si provi che:

   (i) ogni altra norma $[\,\cdot\,]$ su X è equivalente alla norma $\|\cdot\|$;

   (ii) X è completo;

   (iii) ogni funzionale lineare $F : X \to \mathbb{C}$ è continuo.

BoAlim 2. Siano X, Y, Z spazi normati; provare che se $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$, allora $B \circ A \in \mathcal{L}(X,Z)$ e

$$\|B \circ A\|_{\mathcal{L}(X,Z)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|B\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}.$$

esTlim 3. Sia $T : C[0,1] \to C[0,1]$ definito da

$$Tf(x) = \frac{x}{1+x^2}\, f(x), \quad x \in [0,1], \qquad \forall f \in C[0,1].$$

(i) Si calcoli la norma di T.

(ii) Si determini l'immagine $R(T)$.

(iii) Si verifichi che T è iniettivo.

(iv) Si provi che $T^{-1} : R(T) \to C[0,1]$ non è limitato.

esTlim2 4. Posto

$$T : C[0,1] \to C[0,1], \qquad Tf(x) = \int_0^x (x-s) f(s) ds, \quad x \in [0,1],$$

si provi che T è continuo, se ne calcoli la norma e se ne determini l'immagine $R(T)$.

Tmedia 5. Si consideri l'operatore F definito per ogni $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ da

$$Fg(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} g(t)\, dt, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(i) Si provi che $F \in \mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{R}))$ con norma uguale a 1.

(ii) Si determini il *nucleo* di F, ossia l'insieme $\ker F = \{g \in L^\infty(\mathbb{R}) : Fg = 0\}$.

(iii) Si caratterizzi $R(F)$.

(iv) Per quali $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ si ha $Fg \in C(\mathbb{R})$?

Afunzlim 6. Si definisca

$$Af = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, t\, e^{-|t|}\, dt.$$

Si provi che il funzionale A è limitato su $L^2(\mathbb{R})$, su $L^1(\mathbb{R})$ e su $L^\infty(\mathbb{R})$, e se ne calcoli la norma in tutti e tre i casi.

nodual1 7. Siano $X = [0,1]$, $\mathcal{F} = \{E \subseteq [0,1] : E$, oppure E^c, è numerabile$\}$, $\nu =$ misura "cardinalità". Si provi che:

(i) per ogni $f \in L^1(X)$ la funzione $x \to xf(x)$ appartiene a $L^1(X)$;

(ii) il funzionale F, definito da $Ff = \int_0^1 x\, f(x)\, d\nu$ per ogni $f \in L^1(X)$, è un elemento di $(L^1(X))^*$;

(iii) non esiste alcuna $g \in L^\infty(X)$ per cui si abbia

$$Ff = \int_0^1 fg\, d\nu \qquad \forall f \in L^1(X).$$

nodual2 8. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ lo spazio misurato dell'esempio 2.1.3 (8). Si provi che se $f \in L^\infty(X)$ e $\|f\|_\infty > 0$, allora il funzionale

$$Fg = \int_X g\,\overline{f} d\mu, \qquad g \in L^1(X),$$

appartiene a $(L^1(X))^*$, con $\|F\|_{(L^1(X))^*} < \|f\|_\infty$.

LXYcYc 9. Siano X, Y spazi normati, e si supponga che $X^* \neq \{0\}$. Si provi che se $\mathcal{L}(X, Y)$ è completo, allora Y è completo.
[**Traccia:** se $\{y_n\}$ è una successione di Cauchy in Y, si fissi $G \in X^* \setminus \{0\}$ e si definisca $F_n x = Gx \cdot y_n$. Osserviamo che l'ipotesi $X^* \neq \{0\}$ può essere sostituita dalla condizione più naturale $X \neq \{0\}$; ciò seguirà dal teorema di Hahn-Banach (teorema 10.1.3 e corollario 10.1.5.]

produal 10. Siano X, Y spazi di Banach. Si verifichi che $X \times Y$ è uno spazio di Banach con la norma

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y,$$

e si provi che $(X \times Y)^*$ è isomorfo a $X^* \times Y^*$.

normaR(T) 11. Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$ un operatore iniettivo. Si provi che

$$\|x\|_{R(T)} = \|T^{-1}x\|_X$$

è una norma su $R(T)$, e che tale norma rende $R(T)$ uno spoazio di Banach. Si verifichi poi che l'inclusione $i : R(T) \to X$ è continua e se ne calcoli la norma.

nomaxc0 12. Si definisca

$$Fx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{n!} \qquad \forall x = \{x_n\} \in c_0$$

(lo spazio c_0 è definito nell'esercizio 7.1.5). Si provi che $F \in c_0^*$, se ne calcoli la norma e si verifichi che $\|F\|_{c_0^*}$ non è un massimo.

Asuell1 13. Sia $a = \{a_n\} \in \ell^\infty$. Poniamo

$$A : \ell^1 \to \ell^1, \quad (Ax)_n = a_n x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(lo spazio ℓ^1 è definito nell'esercizio 7.2.4). Si provi che:

(i) $\|A\|_{\mathcal{L}(\ell^1)} = \|a\|_{\ell^\infty}$;

(ii) A è iniettivo se e solo se $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(iii) A è surgettivo e A^{-1} è continuo se e solo se $\inf_n |a_n| > 0$.

TL1L1 14. Sia $T : L^1(\mathbb{R}^2) \to L^1(\mathbb{R})$ definito da

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \qquad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^2).$$

Si provi che T è ben definito ed appartiene a $\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^2), L^1(\mathbb{R}))$, e se ne calcoli la norma.

or=1sudist 15. Sia X uno spazio di Banach, sia $F \in X^* \setminus \{0\}$. Posto $M = \{x \in X : Fx = 1\}$, si provi che

$$\operatorname{dist}(0, M) = \frac{1}{\|F\|_{X^*}},$$

ove $textrmdist(0, M) = \inf_{x\in M} \|x\|_X$.

BSele 16. Sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ un operatore fra due spazi normati. Si provi che per ogni $x_0 \in X$ e $r > 0$ si ha

$$r\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le \sup_{x\in B(x_0,r)} \|Tx\|_Y \le r\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} + \|Tx_0\|_X\,.$$

contipw 17. Sia X uno spazio normato e sia $A : X \to X$ un operatore lineare tale che $\{Ax_n\}$ sia una successione limitata in X per ogni successione $\{x_n\} \subset X$ infinitesima in norma. Si provi che A è continuo.

Axperpx 18. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A \in \mathcal{L}(H)$ tale che $(Ax, x) = 0$ per ogni $x \in H$. Si provi che se H è complesso allora $A = 0$, mentre se H è reale ciò non è detto in generale.

limAn 19. Siano X, Y spazi normati con Y completo, sia $\{A_n\} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ una successione di operatori tali che

$$\exists \lim_{n\to\infty} A_n x \quad \text{in } Y \qquad \forall x \in E,$$

ove E è un sottoinsieme denso in X. Provare che se esiste $M > 0$ tale che $\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora

$$\exists \lim_{n\to\infty} A_n x \quad \text{in } Y \qquad \forall x \in X,$$

mentre la cosa è in generale falsa senza l'ipotesi $\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le M$.

exptA 20. Sia X uno spazio di Banach, sia $A \in \mathcal{L}(X)$.

(i) Provare che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{ove} \quad A^0 = I, \quad A^n = A \circ A \circ \cdots \circ A \ (n \text{ volte}),$$

converge in $\mathcal{L}(X)$, e che quindi per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'operatore

$$T(t)x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n x, \qquad x \in X,$$

è lineare e continuo su X con

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le e^{|t|\|A\|_{\mathcal{L}(X)}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Verificare la *legge di gruppo*

$$T(0) = I, \qquad T(t+s) = T(t) \circ T(s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

(iii) Dimostrare che per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} = A \circ T(t) \quad \text{in } \mathcal{L}(X).$$

(L'operatore $T(t)$ si chiama *esponenziale* dell'operatore A e si indica con e^{tA}: la famiglia $\{T(t)\}$ è un *gruppo* di operatori.)

invert_op 21. Sia X uno spazio di Banach, sia $F \in \mathcal{L}(X)$ tale che $\|F\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$. Si provi che $I - F$ è invertibile con inversa continua, e che

$$(I-F)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} F^n, \qquad \|(I-F)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{1}{1 - \|F\|_{\mathcal{L}(X)}} \ ,$$

ove $F^n = F \circ F \circ \cdots \circ F$ (n volte).

invaper 22. Sia X uno spazio di Banach. Si provi che l'insieme $E = \{F \in \mathcal{L}(X) : F^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$ è aperto in $\mathcal{L}(X)$.
[**Traccia:** se $F \in E$, si scriva $G = F \circ (I + F^{-1} \circ (G - F))$ e si osservi che esiste $\delta > 0$ tale che se $\|G - F\|_{\mathcal{L}(X)} < \delta$, allora $\|F^{-1} \circ (G-F)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$; quindi si può applicare l'esercizio 7.3.21.]

TSvsST 23. Sia X uno spazio normato e siano T, S_1, S_2, S operatori lineari da X in X. Si provi che:

(i) se $TS_1 = S_2T = I_X$, allora $S_1 = S_2 = T^{-1}$;

(ii) se $TS = I_X$, non è detto che sia $ST = I_X$;

(iii) se $\dim X < \infty$, allora $TS = I_X$ implica $ST = I_X$.

c0*=l1 24. Si provi che c_0^* è isomorfo ed isometrico a ℓ^1 (esercizi 7.1.5 e 7.2.4).

dualell 25. Si provi che $(\ell^1)^*$ è isomorfo ed isometrico a ℓ^∞.

matrinfi 26. Sia $A = \{a_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}^+}$ una matrice infinita tale che

$$\text{(a)} \ \sup_{i\in\mathbb{N}^+} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = M < \infty, \qquad \text{(b)} \ \exists \lim_{i\to\infty} a_{ij} = a_j \in \mathbb{C} \ \forall j \in \mathbb{N}^+.$$

Posto $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j$, si provi che $A \in \mathcal{L}(c_0, c)$ e se ne calcoli la norma (gli spazi c_0 e c sono defriniti nell'esercizio 7.1.5).

Tnarctg 27. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri il funzionale T_n definito da

$$T_n f = \int_0^n f(t) \arctan nt \, dt, \quad f \in L^1(0,\infty).$$

(i) Si provi che $T_n \in (L^1(0,\infty))^*$ e se ne calcoli la norma.

(ii) Si dimostri che esiste $T \in (L^1(0,\infty))^*$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} T_n f = Tf \qquad \forall f \in L^1(0,\infty).$$

(iii) Si dica se T_n converge a T in $(L^1(0,\infty))^*$ per $n \to \infty$.

Titerato 28. Sia $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ l'operatore lineare definito da

$$(Tx)_n = x_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Si provi che per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ l'operatore T^k è continuo e surgettivo, e se ne calcoli la norma.

(ii) Si descriva esplicitamente il sottospazio

$$\ker T^k = \{x \in \ell^\infty : T^k x = 0\}.$$

(iii) Si determini la chiusura di $\bigcup_{k=1}^\infty \ker T^k$ in ℓ^∞.

(iv) Si consideri la restrizione di T a ℓ^1, si verifichi che tale restrizione manda ℓ^1 in ℓ^1 e si risponda nuovamente ai tre quesiti precedenti.

IfunzCmu 29. Siano $\{x_n\} \subset [a,b]$ e $\{\alpha_n\} \subset]0,\infty[$ due successioni, con $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n < \infty$. Posto $I(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \varphi(x_n)$ per ogni $\varphi \in C[a,b]$, si provi che:

(i) I è un funzionale lineare, limitato e non negativo su $C[a,b]$;

(ii) definita la misura $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}$, si ha $I(\varphi) = \int_a^b \varphi \, d\mu$ per ogni $\varphi \in C[a,b]$;

(iii) μ è una misura di Lebesgue-Stieltjes?

Jinvtra0 30. Sia J un funzionale lineare, limitato e non negativo sullo spazio $C_c(\mathbb{R})$. Definita, per $s \in \mathbb{R}$, la funzione $[\tau_s(f)](x) = f(x+s)$, si provi che, se risulta $J(\tau_s(f)) = J(f)$ per ogni $s \in \mathbb{R}$ e per ogni $f \in C_c(\mathbb{R})$, allora $J \equiv 0$.

0<p<1 31. Sia $0 < p < 1$ e si consideri lo spazio metrico (X,d) costituito dallo spazio vettoriale

$$X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \ f \text{ è misurabile e } \int_0^1 |f|^p \, dm < \infty\},$$

munito della distanza $d(f,g) = \int_0^1 |f-g|^p \, dt$.

(i) Si provi che se $f \in X$ esistono $f_1 \, , f_2 \in X$ tali che

$$f = f_1 + f_2 \, , \qquad d(f_1,0) = d(f_2,0) = \frac{1}{2} \, d(f,0);$$

(ii) si provi che l'unico funzionale lineare e continuo su X è quello identicamente nullo.

norL(H) 32. Sia H uno spazio di Hilbert. Si provi che la norma dello spazio $\mathcal{L}(H)$ non è (in generale) indotta da un prodotto scalare.

Soluzioni degli esercizi del capitolo 7

sol07

Esercizi del paragrafo 7.1

Esercizio 7.1.1 Se $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ sono due norme su X fra loro equivalenti, esiste $c>0$ tale che

$$\frac{1}{c}\,|x| \le \|x\| \le c\,|x| \qquad \forall x \in X.$$

Allora, posto

$$B_r = \{x \in X:\ |x| < r\}, \quad S_r = \{x \in X:\ \|x\| < r\},$$

si ha $B_r \subseteq S_{cr} \subseteq B_{c^2 r}$ per ogni $r>0$. Dunque gli intorni di 0 relativi a $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ inducono la stessa topologia su X.
Viceversa, se $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ inducono la stessa topologia su X, allora fissato $r>0$ esiste $\rho>0$ tale che $B_\rho \subseteq S_r$. Scegliamo $\delta>0$ che verifichi $\delta r<\rho$: ne segue $B_{\delta r} \subseteq B_\rho \subseteq S_r$. Analogamente, esiste $\sigma>0$ tale che $S_\sigma \subseteq B_{\delta r}$; quindi, scelto $\varepsilon>0$ tale che $\varepsilon\delta r<\sigma$, si deduce $S_{\varepsilon\delta r} \subseteq S_\sigma \subseteq B_{\delta r} \subseteq S_r$. Perciò, se $x \in X$ con $\|x\|=1$, risulta $\frac{1}{2}\,\varepsilon\,\delta\,r\,x \in S_{\varepsilon\delta r} \subseteq B_{\delta r}$, da cui $\frac{\varepsilon}{2}\,|x|<1$; dunque se $z \in X\setminus\{0\}$, posto $x=\frac{z}{\|z\|}$ si ha $|z|<\frac{2}{\varepsilon}\,\|z\|$. Similmente, se $x \in X$ con $|x|=1$, risulta $\frac{1}{2}\,\delta\,r\,x \in B_{\delta r} \subseteq S_r$, da cui $\frac{\delta}{2}\,\|x\|<1$; dunque se $z \in X\setminus\{0\}$, posto $x=\frac{z}{|z|}$ si ha $\|z\|<\frac{2}{\delta}\,|z|$. In definitiva,

$$|z| \le \frac{2}{\varepsilon}\,\|z\| \le \frac{4}{\varepsilon\delta}\,|z| \qquad \forall z \in X,$$

cosicché le due norme sono equivalenti.

Esercizio 7.1.2 Risulta

$$\|f\|_2 = |f(a)| + T_a^b(f) \le \sup_{[a,b]}|f| + T_a^b(f) = \|f\|_{BV}\,,$$

D'altra parte, fissato $\varepsilon>0$, sia $x_0 \in [a,b]$ tale che $|f(x_0)| > \sup_{[a,b]}|f| - \varepsilon$: allora

$$\|f\|_{BV} = \sup_{[a,b]}|f| + T_a^b(f) < |f(x_0)| + \varepsilon + T_a^b(f) \le |f(a)| + |f(x_0)-f(a)| + \varepsilon + T_a^b(f) \le \varepsilon + 2\|f\|_2\,,$$

da cui $\|f\|_{BV} \le 2\|f\|_2$. Inoltre, ovviamente,

$$\|f\|_1 \le \|f\|_{BV} \le 2\|f\|_2;$$

d'altronde, essendo

$$|f(a)| \le |f(a)-f(x)| + |f(x)| \le T_a^b(f) + |f(x)| \qquad \forall x \in [a,b],$$

ricordando l'esercizio 3.2.3 e scegliendo $x \in A$, ove $m([a,b]\setminus A)=0$ e $|f(x)| \le \|f\|_\infty$ per ogni $x \in A$, si ottiene $|f(a)| \le T_a^b(f) + \|f\|_\infty$ e quindi

$$\|f\|_2 \le 2\|f\|_1\,.$$

Dunque le tre norme sono fra loro equivalenti.

Esercizio 7.1.3 Sappiamo che la norma $\|\cdot\|_1$ è una funzione non negativa, positivamente omogenea

e subadditiva su $L^1(a,b)$, quindi lo è anche in $C[a,b]$. Proviamo che $\|f\|_1 = 0$ se e solo se $f = 0$. Se $f = 0$ la norma è nulla, ovviamente. Viceversa, sia $f \in C[a,b]$ tale che $\|f\|_1 = 0$. Se esistesse $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) \neq 0$, per continuità esisterebbe un intorno U di x_0 tale che

$$|f(x)| > \frac{1}{2}|f(x_0)| > 0 \qquad \forall x \in U \cap [a,b];$$

ma allora

$$\int_{U\cap[a,b]} |f|\,dx > 0$$

ed a maggior ragione avremmo $\|f\|_1 > 0$, il che è assurdo. Dunque $f \equiv 0$.
Proviamo che lo spazio $C[a,b]$, con la norma $\|\cdot\|_1$, non è completo. Per $n \in \mathbb{N}^+$ (abbastanza grande) sia

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{in } \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right] \\ n\left(x - \frac{a+b}{2}\right) & \text{in } \left[\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{1}{n}\right] \\ 1 & \text{in } \left[\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{1}{n}, b\right]. \end{cases}$$

Risulta allora per $n > m$

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+b}{2}+\frac{1}{m}} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx \leq \frac{2}{m},$$

cosicché la successione $\{f_n\}$ è di Cauchy in $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$; tuttavia essa non converge ad una funzione continua, poiché il suo limite in $L^1(a,b)$ è $\chi_{]\frac{a+b}{2},b]}$.

Esercizio 7.1.4 Per $n \in \mathbb{N}^+$ consideriamo le funzioni

$$f_n(x) = n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-1}, \qquad x \in [a,b].$$

Le funzioni f_n sono continue in $[a,b]$ e risulta

$$\|f_n\|_\infty = n, \qquad \|f_n\|_1 = \frac{n}{(b-a)^{n-1}} \int_a^b (x-a)^{n-1} dx = b - a.$$

Quindi non può esistere $c > 0$ tale che $\|f\|_\infty \leq c\|f\|_1$ per ogni $f \in C[a,b]$, e pertanto le due norme non sono equivalenti.

Esercizio 7.1.5 È evidente che $\|\cdot\|_\infty$ è una norma sui quattro spazi. Sia ora $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in ℓ^∞, oppure in c, oppure in c_0: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m \geq \nu,$$

ed inoltre esiste $M > 0$ tale che $\|x^{(n)}\|_\infty \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare, per ogni $k \in \mathbb{N}$ la successione $\{x_k^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ è di Cauchy e quindi converge ad un numero $x_k \in \mathbb{R}$. Mostriamo che la successione $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ appartiene a ℓ^∞, oppure a c: se $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, allora

$$|x_k| \leq |x_k - x_k^{(n)}| + \|x^{(n)}\|_\infty = \lim_{m\to\infty} |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}| + M \leq \varepsilon + M \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

e dunque $x \in \ell^\infty$; se $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \in c$, allora per ogni n l'elemento $x^{(n)}$ appartiene a c e quindi esiste $z_n = \lim_{k\to\infty} x_k^{(n)}$; in particolare sarà $|z_n - x_k^{(n)}| < \varepsilon$ per ogni $k \geq k_n$. Risulta allora

$$|z_n - z_m| = \lim_{k\to\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| \leq \varepsilon \qquad \forall n, m \geq \nu.$$

Dunque la successione numerica $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, essendo di Cauchy, converge a un numero z. Ne segue, scelti $n \geq \nu$ e $k \geq k_n$,

$$|x_k - z| \leq |x_k - x_k^{(n)}| + |x_k^{(n)} - z_n| + |z_n - z| < 3\varepsilon.$$

Ciò prova che $x \in c$, con $\lim_{k\to\infty} x_k = z$.
Se invece $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, possiamo scrivere

$$|x_k| \leq |x_k - x_k^{(\nu)}| + |x_k^{(\nu)}| \leq \varepsilon + |x_k^{(\nu)}| \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

d'altra parte, essendo $x^{(\nu)} \in c_0$, esiste $k_{\varepsilon,\nu} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|x_k^{(\nu)}| < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_{\varepsilon,\nu}.$$

Pertanto si ha $|x_k| \leq 2\varepsilon$ per ogni $k \geq k_{\varepsilon,\nu}$, cosicché $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ appartiene a c_0. Dunque ℓ^∞ e c_0 sono completi.
Consideriamo adesso un elemento $x \in c_0$ tale che $x_k \neq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e definiamo per $n \in \mathbb{N}$

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} x_k & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Allora $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset c_{00}$, ed inoltre, essendo $x \in c_0$,

$$\|x^{(n)} - x\|_\infty = \sup_{k>n} |x_k| \to 0 \qquad \text{per } n \to \infty,$$

con $x \notin c_{00}$. Dunque c_{00} non è completo.

Esercizio 7.1.6 Se scegliamo $x = e_N$, il vettore con tutte le componenti nulle tranne la N-esima che vale 1, si ha

$$\|e_N\|_1 = 1, \qquad \|e_N_2 = N,$$

mentre per il vettore $H_N = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{N}, 0, \ldots)$ risulta

$$\|h_N\|_1 = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\,, \qquad \|h_N\|_2 = 1.$$

Ne segue che non esiste alcuna costante $c > 0$ tale che $\|x\|_2 \leq c\|x\|_1$ per ogni $x \in c_{00}$, e nemmeno alcuina $c' > 0$ tale che $\|x\|_1 \leq c'\|x\|_2$ per ogni $x \in c_{00}$.

Esercizio 7.1.7 (i) Sappiamo che i polinomi sono densi in $C[a,b]$, grazie all'esercizio 4.7.11; in particolare, quindi, $C^1[a,b]$ è denso in $C[a,b]$. Essendo evidentemente $C^1[a,b] \subseteq C^\alpha[a,b]$, anche $C^\alpha[a,b]$ risulta denso in $C[a,b]$.
(ii) È immediato verificare che $\|\cdot\|_\alpha$ è positivamente omogenea, non negativa, con $\|f\|_\alpha = 0$ se e solo se $f \equiv 0$. Quanto alla subsdditività, si ha facilmente

$$\|f+g\|_\alpha = \|f+g\|_\infty + [f+g]_\alpha \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + [f]_\alpha + [g]_\alpha = \|f\|_\alpha + \|g\|_\alpha\,.$$

Dunque $\|\cdot\|_\alpha$ è una norma su $C^\alpha[a,b]$. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in $(C^\alpha[a,b], \|\cdot\|_\alpha)$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|f_n - f_m\|_\infty + [f_n - f_m]_\alpha < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq \nu,$$

ed inoltre esiste $M > 0$ tale che $\|f_n\|_\alpha \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare, $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy in $C[a,b]$ e quindi vi è $f \in C[a,b]$ tale che $f_n \to f$ uniformemente in $[a,b]$. Dato che

$$|f_(x) - f_(y)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_n(y)| \leq \liminf_{n\to\infty} [f_n]_\alpha |x-y|^\alpha \leq M|x-y|^\alpha,$$

risulta $f \in C^\alpha[a,b]$. Infine

$$\begin{aligned}\frac{|f(x)-f_n(x)-f(y)+f_n(y)|}{|x-y|^\alpha} &= \lim_{m\to\infty}\frac{|f_m(x)-f_n(x)-f_m(y)+f_n(y)|}{|x-y|^\alpha} \le \\ &\le \liminf_{m\to\infty}[f_m-f_n]_\alpha \le \varepsilon \qquad \forall n\ge\nu, \quad \forall x,y\in[a,b],\ x\ne y,\end{aligned}$$

e passando all'estremo superiore per $x \ne y$ si trova $[f-f_n]_\alpha \le \varepsilon$ per ogni $n \ge \nu$, cosicché $f_n \to f$ in $C^\alpha[a,b]$ per $n \to \infty$.

(iii) Risulta, essendo $h(t) = t^\alpha$ subadditiva in $[0,\infty[$,

$$|g_r(x)-g_r(y)| = ||x-r|^\alpha - |y-r|^\alpha| \le ||x-r|-|y-r||^\alpha \le |x-y|^\alpha \qquad \forall x,y\in[a,b].$$

(iv) Si ha

$$[g_r-g_s]_\alpha \ge \frac{|g_r(x)-g_r(y)-g_s(x)+g_s(y)|}{|x-y|^\alpha} \qquad \forall x,y\in[a,b],\ x\ne y;$$

scelti $x = r$, $y = s$, si trova

$$[g_r-g_s]_\alpha \ge \frac{|0-|s-r|^\alpha-|r-s|^\alpha+0|}{|r-s|^\alpha} = 2.$$

Se esistesse un sottoinsieme $D \subset C^\alpha[a,b]$, numerabile e denso in $C^\alpha[a,b]$, posto $D = \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ potremmo approssimare ciascuna g_r con una $h_{n_r} \in D$ in modo che $\|h_{n_r}-g_r\|_\alpha < \frac{1}{2}$, e in particolare $[h_{n_r}-g_r]_\alpha < \frac{1}{2}$: ma allora se $r \ne s$ avremmo

$$2 \le [g_r-g_s]_\alpha \le [gr-h_{n_r}]_\alpha + [h_{n_r}-h_{n_s}]_\alpha + [h_{n_s}-g_s]_\alpha \le 1 + [h_{n_r}-h_{n_s}]_\alpha\,,$$

da cui $[h_{n_r}-h_{n_s}]_\alpha \ge 1$: dunque l'applicazione $r \mapsto n_r$ da $[a,b]$ in $\mathbb{N}$ sarebbe iniettiva, il che è assurdo perché $[a,b]$ è più che numerabile, mentre $\mathbb{N}$ è numerabile. Perrtanto $C^\alpha[a,b]$ non è separabile.

Esercizio 7.1.8 Proviamo che (a) $\Longrightarrow$ (b). Si ha

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty\left[\sum_{k=1}^\infty|x_n^{(k)}|\right]^2 &= \sum_{n=1}^\infty\sum_{k,h=1}^\infty|x_n^{(k)}|\,|x_n^{(h)}| = \sum_{k,h=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty|x_n^{(k)}|\,|x_n^{(h)}| \le \\ &\le \sum_{k,h=1}^\infty\left[\sum_{n=1}^\infty|x_n^{(k)}|^2\right]^{\frac12}\left[\sum_{n=1}^\infty|x_n^{(h)}|^2\right]^{\frac12} = \left[\sum_{k=1}^\infty\left(\sum_{n=1}^\infty|x_n^{(k)}|^2\right)^{\frac12}\right]^2 = \\ &= \left[\sum_{k=1}^\infty\|x^{(k)}\|_{\ell^2}\right]^2.\end{aligned}$$

Proviamo che (b) $\Longrightarrow$ (c). La successione

$$a_m = \sum_{n=1}^\infty\left[\sum_{k=1}^m|x_n^{(k)}|\right]^2, \qquad m\in\mathbb{N}^+,$$

è monotona e limitata, dunque convergente. Perciò, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}^+$ tale che, per $m > j \ge \nu$,

si ha

$$\begin{aligned}
\varepsilon &> a_m - a_j = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left[\sum_{k=1}^{m}|x_n^{(k)}|\right]^2 - \left[\sum_{k=1}^{j}|x_n^{(k)}|\right]^2\right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left[\sum_{k=1}^{j}|x_n^{(k)}| + \sum_{k=j+1}^{m}|x_n^{(k)}|\right]^2 - \left[\sum_{k=1}^{j}|x_n^{(k)}|\right]^2\right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=j+1}^{m}|x_n^{(k)}|\right)\left[\sum_{k=j+1}^{m}|x_n^{(k)}| + 2\sum_{k=1}^{j}|x_n^{(k)}|\right] \geq \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=j+1}^{m}|x_n^{(k)}|\right)^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=j+1}^{m}x_n^{(k)}\right|^2 = \left\|\sum_{k=j+1}^{m}x^{(k)}\right\|_{\ell^2}^2;
\end{aligned}$$

dunque la successione $\left\{\sum_{k=1}^{m}x^{(k)}\right\}_{m\in\mathbb{N}^+}$ è di Cauchy in ℓ^2, e quindi vale (c).
Proviamo che (c) non implica (b). Poniamo

$$x^{(k)} = -\frac{1}{\sqrt{k}}\,e_k + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\,e_{k+1}\,, \quad k\in\mathbb{N}^+;$$

allora, fissato $N\in\mathbb{N}^+$, si ha

$$\sum_{k=1}^{N}x^{(k)} = \sum_{k=1}^{N}\left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\,e_k + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\,e_{k+1}\right) = -e_1 + \frac{1}{\sqrt{N+1}}\,e_{N+1}\,,$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{\infty}x^{(k)} = -e_1 \quad \text{in} \quad \ell^2,$$

mentre

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}|x_n^{(k)}|\right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=n}^{n+1}|x_n^{(k)}|\right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]^2 = \infty.$$

Proviamo infine che (b) non implica (a). Poniamo

$$x^{(k)} = -\frac{1}{k}\,e_k + \frac{1}{k+1}\,e_{k+1}\,, \quad k\in\mathbb{N}^+;$$

allora, ragionando come poco fa,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}|x_n^{(k)}|\right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right]^2 < \infty,$$

mentre

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|x^{(k)}\|_{\ell^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} \geq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{k+1} = \infty.$$

Esercizi del paragrafo 7.2

Esercizio 7.2.1 Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $L^2(X,\mathcal{F},\mu)$. Esiste allora una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_2 < 2^{-k} \qquad \forall k\in\mathbb{N}.$$

La serie di funzioni

$$f_{n_0} + \sum_{k=0}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

verifica

$$|f_{n_0}(x)| + \sum_{k=0}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < \infty \qquad \text{per q.o. } x \in X,$$

in quanto

$$\|f_{n_0}\|_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_2 < \|f_{n_0}\|_2 + 2 < \infty.$$

Quindi tale serie converge in $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ ed è assolutamente convergente q.o. in X; pertanto essa converge q.o. in X ad una funzione $f \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$. Essendo, per q.o. $x \in X$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f_{n_0}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) = f_{n_0}(x) + \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m-1} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) = \\ &= f_{n_0}(x) + \lim_{m\to\infty} (f_{n_m}(x) - f_{n_0}(x)) = \lim_{m\to\infty} f_{n_m}(x), \end{aligned}$$

risulta $f_{n_m} \to f$ puntualmente q.o. in X. Inoltre

$$\|f - f_{n_m}\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f_{n_m}\|_2 \le 2^{-m} \qquad \forall m \in \mathbb{N},$$

ossia $f_{n_m} \to f$ in $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$. Infine, fissato $\varepsilon > 0$, utilizzando la condizione di Cauchy si ricava, per un opportuno $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$,

$$\|f - f_n\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f_n\|_2 \le \varepsilon \qquad \forall n \ge n_\varepsilon :$$

dunque l'intera successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f in $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$.

Esercizio 7.2.2 Se $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ allora

$$|f \star g(x)| \le \int_{\mathbb{R}}^{N} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \le \left[\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^2\,dy\right]^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

cosicché $f \star g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Inoltre, analogamente,

$$|f\star g(x) - f\star g(x_0)| \le \left[\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y) - f(x_0-y)|^2\,dy\right]^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\tau_{(x-x_0)} f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\, \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

e in virtù della continuità delle traslazioni in $L^2(\mathbb{R}^N)$ (esercizio 8.1.9) si ottiene

$$\lim_{x\to x_0} |f \star g(x) - f \star g(x_0)| = 0.$$

Esercizio 7.2.3 Cominciamo dal caso reale. Se in $(X, \|\cdot\|)$ vale l'identità del parallelogrammo, dimostriamo che

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

è un prodotto scalare in X. Notiamo subito che $(x, y) = (y, x)$ e che $(x, x) = \|x\|^2$. Poi, siano $x, x', y \in H$: si ha

$$(2x, y) + (2x', y) = \frac{1}{4}\left(\|2x+y\|^2 - \|2x-y\|^2 + \|2x'+y\|^2 - \|2x'-y\|^2\right),$$

e usando l'identità del parallelogrammo per il primo e terzo addendo, e poi per il secondo e quarto, si ottiene

$$\begin{aligned} (2x, y) + (2x', y) &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\left(\|2x+2x'+2y\|^2 + \|2x-2x'\|^2 - \|2x+2x'-2y\|^2 - \|2x-2x'\|^2\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\|x+x'+y\|^2 - \|x+x'-y\|^2\right] = 2(x+x', y). \end{aligned}$$

Questa relazione ci fornirebbe l'additività, dividendo per 2, ma ancora non sappiamo se si possa estrarre il fattore 2 dal primo membro.
Scelto $x' = 0$, questa relazione dà $(2x, y) = 2(x, y)$. Se, per un certo $n \geq 2$, vale $(nx, y) = n(x, y)$, allora, usando la formula già provata per $n = 2$ e l'ipotesi induttiva,

$$\begin{aligned}((n+1)x, y) &= \frac{1}{2}\left[2(nx + x, y)\right] = \frac{1}{2}\left[(2nx, y) + (2x, y)\right] = \\ &= (nx, y) + (x, y) = n(x, y) + (x, y) = (n+1)(x, y).\end{aligned}$$

Dalla definizione di (x, y) segue anche $(-x, y) = -(x, y)$; quindi

$$(kx, y) = k(x, y) \qquad \forall k \in \mathbb{Z},$$

ed anche $\frac{1}{k}(kx, y) = (x, y)$, ossia $\frac{1}{k}(z, y) = \left(\frac{z}{k}, y\right)$, da cui

$$(rx, y) = r(x, y) \qquad \forall r \in \mathbb{Q}.$$

Infine, se $\lambda \in \mathbb{R}$ e se $\{r_n\} \subset \mathbb{Q}$ è tale che $r_n \to \lambda$ per $n \to \infty$, si ha

$$\begin{aligned}\lambda(x, y) &= \lim_{n\to\infty} r_n(x, y) = \lim_{n\to\infty}(r_n x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left[\|r_n x + y\|^2 - \|r_n x - y\|^2\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left[\|\lambda x + y\|^2 - \|\lambda x - y\|^2\right] = (\lambda x, y).\end{aligned}$$

Ciò prova l'omogeneità; di conseguenza, per quanto mostrato all'inizio, vale l'additività: ne segue la linearità e dunque la tesi è provata nel caso reale.
Nel caso complesso, dobbiamo dimostrare che

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\left(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\right)\right]$$

è un prodotto scalare in X. Da questa definizione, in modo noioso ma banale, segue $(x, y) = \overline{(y, x)}$ e $(x, x) = \|x\|^2$. L'additività e l'omogeneità seguono essenzialmente come in precedenza:

$$\begin{aligned}(2x, y) + (2x', y) &= \frac{1}{4}\left[\|2x + y\|^2 - \|2x - y\|^2 + \|2x' + y\|^2 - \|2x' - y\|^2 + \right. \\ &+ \left.\left(\|2x + iy\|^2 - \|2x - iy\|^2 + \|2x' + iy\|^2 - \|2x' - iy\|^2\right)\right],\end{aligned}$$

ed applicando l'identità del parallelogrammo alle coppie di addendi 1-3, 2-4, 5-7 e 6-8 si trova, con due cancellazioni di addendi uguali con segno opposto,

$$\begin{aligned}(2x, y) + (2x', y) &= \frac{1}{2}\left[\|x + x' + y\|^2 - \|x + x' - y\|^2 + \right. \\ &+ \left.\left(\|x + x' + iy\|^2 - \|x + x' - iy\|^2\right)\right] = 2(x + x', y).\end{aligned}$$

Da qui, come nel caso reale, $\lambda(x, y) = (\lambda x, y)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e dunque, semplificando la relazione sopra scritta, la linearità. Infine

$$\begin{aligned}(ix, y) &= \frac{1}{4}\left[\|ix + y\|^2 - \|ix - y\|^2 + i\left(\|ix + iy\|^2 - \|ix - iy\|^2\right)\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left[\|x - iy\|^2 - \|x + iy\|^2 + i\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)\right] = \\ &= \frac{i}{4}\left[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\left(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\right)\right] = i(x, y),\end{aligned}$$

e dunque $\lambda(x, y) = (\lambda x, y)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$. Ciò conclude la dimostrazione.

Esercizio 7.2.4 Il fatto che $\|\cdot\|_1$ sia una norma su ℓ^1 è facile. Verifichiamo che ℓ^1 è completo. Sia $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in ℓ^1: dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_1 <$

ε per ogni $n, m \geq \nu$, ed inoltre esiste $M \geq 0$ tale che $\|x^{(n)}\|_1 \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare, quindi,

$$|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m \geq \nu.$$

Perciò per ogni $k \in \mathbb{N}$ la successione numerica $\{x_k^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$; dunque esiste $x_k \in \mathbb{R}$ per cui

$$x_k^{(n)} \to x_k \qquad \text{per } n \to \infty, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

La successione $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ appartiene a ℓ^1, in quanto per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{k=0}^{N} |x_k| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} |x_k^{(n)}| \leq \|x^{(n)}\|_1 \leq M,$$

da cui, per $N \to \infty$, $\|x\|_1 \leq M$. In modo del tutto analogo si verifica che $x^{(n)} \to x$ in ℓ^1 per $n \to \infty$: per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{k=0}^{N} |x_k - x_k^{(n)}| = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{N} |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}| \leq \liminf_{m\to\infty} \|x^{(m)} - x^{(n)}\|_1 \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq \nu,$$

e per $N \to \infty$ si ottiene $\|x - x^{(n)}\|_1 < \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$.
Passiamo al caso di ℓ^2. Nuovamente, il fatto che $\|\cdot\|_2$ sia una norma su ℓ^2 è facile. Verifichiamo la completezza: se $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in ℓ^2, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_2 < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq \nu$, ed inoltre esiste $M \geq 0$ tale che $\|x^{(n)}\|_2 \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare, quindi, per ogni $k \in \mathbb{N}$ la successione numerica $\{x_k^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$; dunque esiste $x_k \in \mathbb{R}$ per cui

$$x_k^{(n)} \to x_k \qquad \text{per } n \to \infty, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

La successione $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ appartiene a ℓ^2, in quanto per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{k=0}^{N} |x_k|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} |x_k^{(n)}|^2 \leq \|x^{(n)}\|_2^2 \leq M^2,$$

da cui, per $N \to \infty$, $\|x\|_2 \leq M$. In modo del tutto analogo si verifica che $x^{(n)} \to x$ in ℓ^2 per $n \to \infty$: per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{k=0}^{N} |x_k - x_k^{(n)}|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{N} |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}|^2 \leq \liminf_{m\to\infty} \|x^{(m)} - x^{(n)}\|_2^2 \leq \varepsilon^2 \qquad \forall n \geq \nu,$$

e per $N \to \infty$ si ottiene $\|x - x^{(n)}\|_2 < \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$.
Lo spazio ℓ^2 è dotato del prodotto scalare

$$(x, y)_2 = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \, \overline{y_k}\,, \qquad x, y \in \ell^2,$$

quindi è uno spazio di Hilbert. Invece lo spazio ℓ^1 è di Banach ma non di Hilbert, perché non vale la relazione del parallelogrammo: infatti, con

$$x = (1, 0, 0, 0, ...), \qquad y = (0, 1, 0, 0, 0, ...)$$

si ha

$$\|x + y\|_1^2 + \|x - y\|_1^2 = 2^2 + 2^2 = 8, \qquad 2\|x\|_1^2 + 2\|y\|_1^2 = 2 + 2 = 4.$$

Infine, ℓ^1 e ℓ^2 sono separabili: un insieme numerabile denso in ℓ^1 è

$$\{x \in \ell^1 : \ x_k \in \mathbb{Q} \ \ \forall k \in \mathbb{N}\},$$

mentre l'insieme

$$\{x \in \ell^2 : \ x_k \in \mathbb{Q} \ \ \forall k \in \mathbb{N}\}$$

è numerabile e denso in ℓ^2.

Esercizio 7.2.5 Osserviamo che $\ell^1 \subset \ell^2$: infatti se $x \in \ell^1$ risulta $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$, e in particolare esiste $N \in \mathbb{N}^+$ tale che $|x_n| < 1$ per ogni $n > N$: pertanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=1}^{N} |x_n|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\mathbb{N}} |x_n|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n| < \infty.$$

Possiamo quindi scrivere $\Phi(x,y)| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 < \infty$ per ogni $x, y \in \ell^1$; dunque Φ è ben definita in $\ell^1 \times \ell^1$ ed è un prodotto scalare, perché tale è nello spazio più grande ℓ^2. Però ℓ^1 non è completo rispetto alla norma indotta, che è la norma $\|\cdot\|_2$. Ad esempio, se $\{x^{(n)}\}$ è la successione tale che

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} k^{-1} & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n, \end{cases}$$

si ha $x^{(n)} \to \left\{\frac{1}{k}\right\}_{k \in \mathbb{N}^+} \in \ell^2 \setminus \ell^1$ nella norma $\|\cdot\|_2$, e di conseguenza $\{x^{(n)}\}$ è una successione di Cauchy in ℓ^2; d'altra parte, $\{x^{(n)}\} \subset \ell^1$, e dunque $\{x^{(n)}\}$ è una successione di Cauchy in $(\ell^1, \|\cdot\|_2)$, che non converge ad alcun elemento di ℓ^1.

Esercizio 7.2.6 Se $\{x_n\} \in \ell^2$ si ha $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n^2| < \infty$, da cui $\{x_n^2\} \in \ell^1$; il viceversa è del tutto analogo.
Similmente, se $f \in L^2(a,b)$ allora $f^2 \in L^1(a,b)$; tuttavia il viceversa non è vero. Ad esempio, sia $V \subset [a,b]$ un insieme non misurabile e poniamo $f = \chi_V - \chi_{[a,b]\setminus V}$; allora $f^2 = \chi_{[a,b]}$ è misurabile e appartiene a $L^1(a,b)$, mentre f, non essendo misurabile (infatti $\{x \in [a,b] : \ f(x) > 0\} = V$), non può appartenere a $L^2(a,b)$.

Esercizio 7.2.7 Mostriamo che in $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ non vale la relazione del parallelogrammo. Siano $[a,b] = [0,1]$, $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$ in $[a,b]$: allora

$$\|f\|_\infty = 1, \quad \|g\|_\infty = 1, \quad \|f+g\|_\infty = 1, \quad \|f-g\|_\infty = 1,$$

da cui

$$\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 2, \qquad 2\|f\|_\infty^2 + 2\|g\|_\infty^2 = 4.$$

Esercizio 7.2.8 La quantità $(f,g)_{AC}$ definisce ovviamente un prodotto scalare (reale). Proviamo che la norma associata

$$\|f\|_{AC} = \sqrt{\int_a^b [|f(t)|^2 + |f'(t)|^2] \, dt}$$

è completa. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in $AC[a,b]$: allora esistono $f, g \in L^2(a,b)$ tali che $f_n \to f$ e $f_n' \to g$ in $L^2(a,b)$; per un'opportuna sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ si ha anche $f_{n_k}(x) \to f(x)$ in $\mathbb{R}$ per q.o. $x \in [a,b]$. Dunque, per q.o. $x, x_0 \in [a,b]$ si ha

$$f(x) - f(x_0) = \lim_{k\to\infty} \left(f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_0)\right) = \lim_{k\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_{n_k}'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt,$$

il che prova che $f \in AC[a,b]$ e che $f' = g$ q.o. in $[a,b]$. Ne segue $f_n \to f$ in $AC[a,b]$ e quindi lo spazio $AC[a,b]$ è di Hilbert.

Esercizio 7.2.9 Siano $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq H$ con $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$ e $(x_n, y_n) \to 1$ per $n \to \infty$. Allora per $n \to \infty$

$$\|x_n - y_n\|^2 = \|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 - 2\mathrm{Re}\,(x_n, y_n) \leq 2 - 2\mathrm{Re}\,(x_n, y_n) \to 0.$$

Esercizio 7.2.10 (i) Se x, oppure y, è nullo, la tesi è banale. Siano dunque $x, y \neq 0$: se $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, poiché

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(x,y), \qquad (\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\|,$$

si deduce subito $\mathrm{Re}\,(x,y) = \|x\|\,\|y\|$; ne segue, per $\alpha > 0$,

$$\|x-\alpha y\|^2 = \|x\|^2 + \alpha^2\|y\|^2 - 2\alpha \mathrm{Re}\,(x,y) = \|x\|^2 + \alpha^2\|y\|^2 - 2\alpha\|x\|\,\|y\| = (\|x\| - \alpha\|y\|)^2.$$

Scelto $\alpha = \|y\|/\|x\|$, si deduce $\|x - \alpha y\| = 0$. Viceversa, sia $x = \alpha y$ con $\alpha \geq 0$. Allora

$$\|x+y\| = \|\alpha y + y\| = (\alpha+1)\|y\| = \alpha\|y\| + \|y\| = \|x\| + \|y\|;$$

di conseguenza, come abbiamo visto, $\mathrm{Re}\,(x,y) = \|x\|\|y\|$.
Infine, se $\mathrm{Re}\,(x,y) = \|x\|\|y\|$, allora

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(x,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

e di conseguenza esiste $\alpha > 0$ per cui $x = \alpha y$.
(ii) La relazione $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ implica, scegliendo $\lambda = 1$,

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(x,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}\,(x,y),$$

da cui $\mathrm{Re}\,(x,y) = -\mathrm{Re}\,(x,y) = 0$. Scegliendo invece $\lambda = i$, si ricava analogamente $-\mathrm{Im}\,(x,y) = \mathrm{Im}\,(x,y) = 0$. Dunque $(x,y) = 0$, ovvero $x \perp y$.
Viceversa, se $(x,y) = 0$ allora con il calcolo precedente si ha $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.
La relazione $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ implica, passando ai quadrati,

$$|\lambda|^2\|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}(x,y) \geq 0.$$

Da qui, scelto $\lambda = -t\,(x,y)$ con $t > 0$, si deduce $|(x,y)|^2(t^2\|y\|^2 - 2t) \geq 0$, da cui $|(x,y)|^2(t\|y\|^2 - 2) \geq 0$.
Per $t \to 0$ segue necessariamente $(x,y) = 0$.
Viceversa, da $(x,y) = 0$ segue subito

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + |\lambda|^2|y\|^2 \geq \|x\|^2 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Esercizio 7.2.11 Supponiamo dapprima $w = 0$: dobbiamo provare che

$$\|x-y\|\,\|z\| \leq \|x-z\|\,\|y\| + \|x\|\,\|y-z\| \qquad \forall x,y,z \in H.$$

Si ha

$$(x-y,z) = (x,z) - (y,z) = (x,z-y) + (x,y) - (y,x) - (y,z-x),$$

da cui

$$|(x-y,z)| \leq \|x\|\,\|z-y\| + \|y\|\,\|z-x\| + 2|\mathrm{Im}\,(x,y)| \qquad \forall x,y,z \in H.$$

Possiamo rimpiazzare z con $e^{-i\vartheta}u$, ove $\vartheta \in [0, 2\pi[$ e $u \in H$: si ha

$$|(x-y, e^{-i\vartheta}u)| \leq \|x\|\,\|e^{-i\vartheta}u - y\| + \|y\|\,\|e^{-i\vartheta}u - x\| + 2|\mathrm{Im}\,(x,y)| \qquad \forall x,y,u \in H.$$

Si può determinare ϑ tale che $(x-y, e^{-i\vartheta}u) = \|x-y\|\,\|u\|$. Con tale scelta di ϑ si ottiene

$$\|x-y\|\,\|u\| \leq \|x\|\,\|e^{-i\vartheta}u - y\| + \|y\|\,\|e^{-i\vartheta}u - x\| + 2|\mathrm{Im}\,(x,y)| \qquad \forall x,y,u \in H,$$

ossia, posto $z = e^{-i\vartheta}u$,

$$\|x-y\|\,\|z\| \leq \|x\|\,\|z-y\| + \|y\|\,\|z-x\| + 2|\mathrm{Im}\,(x,y)| \qquad \forall x,y,z \in H.$$

Adesso rimpiazziamo x con $e^{i\alpha}v$, ove $\alpha \in [0, 2\pi[$ e $v \in H$. Otteniamo

$$\|e^{i\alpha}v - y\|\,\|z\| \leq \|v\|\,\|z-y\| + \|y\|\,\|z - e^{i\alpha}v\| + 2|\mathrm{Im}\,(e^{i\alpha}v, y)| \qquad \forall y,z,v \in H,$$

e possiamo scegliere α in modo che $\mathrm{Im}\,(e^{i\alpha}v, y) = 0$. Dunque, con questa scelta,

$$\|e^{i\alpha}v - y\|\,\|z\| \leq \|v\|\,\|z-y\| + \|y\|\,\|z - e^{i\alpha}v\| \qquad \forall y,z,v \in H,$$

vale a dire, posto $x = e^{i\alpha}v$,

$$\|x-y\|\,\|z\| \le \|x\|\,\|z-y\| + \|y\|\,\|z-x\| \qquad \forall x,y,z \in H,$$

che è la tesi nel caso $w = 0$. Il caso generale si ottiene applicando questa disuguaglianza ai vettori $x-w, y-w, z-w$.

Esercizio 7.2.12 Se X è 1-dimensionale, esiste $v \in X$ tale che $X = \{\lambda v : \ \lambda \in \mathbb{C}\}$. Definiamo

$$(\lambda v, \mu v) = \lambda\overline{\mu} \qquad \forall \lambda v, \mu v \in X.$$

La verifica che si tratta di un prodotto scalare è del tutto ovvia.
Sia ora X tale che, per ogni $v, w \in X$ linearmente indipendenti, nel sottospazio $[\{v,w\}]$ generato da v e w sia definito un prodotto scalare. Allora se $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ e $x = \lambda v$, $y = \mu w$, vale la relazione del parallelogrammo per la norma di X ristretta al sottospazio $[\{v,w\}]$:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Dato che v, w erano arbitrari, anche x, y lo sono: quindi la relazione del parallelogrammo vale per ogni $x, y \in X$ e pertanto la norma di X deriva da un prodotto scalare.

Esercizio 7.2.13 Se vale la relazione scritta per ogni $n \ge 2$, allora essa vale per $n = 2$ e quindi la norma di H è generata da un prodotto scalare.
Viceversa, se H è uno spazio dotato di prodotto scalare, la relazione vale per $n = 2$. Dimostriamo per induzione che essa vale per ogni $n \ge 2$, provando il passo induttivo. Supponiamo dunque che per ogni $x_1, \dots, x_n \in H$ si abbia

$$\sum_{1\le j<k\le n} \|x_j - x_k\|^2 + \left\|\sum_{j=1}^n x_j\right\|^2 = n \cdot \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2.$$

Consideriamo $n+1$ vettori $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in H$; si ha

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\le j<k\le n+1} \|x_j - x_k\|^2 + \left\|\sum_{j=1}^{n+1} x_j\right\|^2 = \\
&\quad = \sum_{1\le j<k\le n} \|x_j - x_k\|^2 + \sum_{j=1}^n \|x_j - x_{n+1}\|^2 + \left\|\sum_{j=1}^n x_j + x_{n+1}\right\|^2 = \\
&\quad = \sum_{1\le j<k\le n} \|x_j - x_k\|^2 + \sum_{j=1}^n \left[\|x_j\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 - 2\mathrm{Re}\,(x_j, x_{n+1})\right] + \\
&\qquad + \left\|\sum_{j=1}^n x_j\right\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 + 2\mathrm{Re} \sum_{j=1}^n (x_j, x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Applicando il passo induttivo e cancellando i termini opposti si ricava

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\le j<k\le +1} \|x_j - x_k\|^2 + \left\|\sum_{j=1}^{n+1} x_j\right\|^2 = \\
&\quad = n \cdot \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 + \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 + n\,\|x_{n+1}\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 = (n+1) \cdot \sum_{j=1}^{n+1} \|x_j\|^2.
\end{aligned}$$

Ne segue la tesi.

Esercizio 7.2.14 Se $f \in S_m$, si ha dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\int_0^1 |f|\,dt = (|f|,1)_2 \le \left[\int_0^1 |f|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}} \le m,$$

dunque $S_m \subset L^1(0,1)$. Inoltre S_m è ovviamente convesso. Proviamo che S_m è chiuso in $L^1(0,1)$: se $\{f_n\} \subset S_m$ e $f_n \to f$ in $L^1(0,1)$, allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ tale che $f_n(x) \to f(x)$ q.o. in $[0,1]$; ne segue, per il lemma di Fatou, $\|f\|_2 \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_2 \le m$, e dunque $f \in S_m$. Proviamo che S_m è magro: se $f \in S_m$ ed $\varepsilon > 0$, la funzione $g_\varepsilon(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{4\sqrt{x}}$ appartiene a $L^1(0,1)$ ma non a $L^2(0,1)$, e si ha $\|f - g_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$. Quindi il chiuso S_m ha parte interna vuota e in particolare è un insieme magro.

Esercizi del paragrafo 7.3

Esercizio 7.3.1 (i) Se X è uno spazio N-dimensionale, con $N \in \mathbb{N}^+$, ogni elemento $x \in X$ si scrive in modo unico come $x = \sum_{i=1}^N \lambda_i e_i$, ove $\{e_1,\dots,e_N\}$ è una base dello spazio vettoriale X e $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_N) \in \mathbb{C}^N$. Fissiamo una norma $[\,\cdot\,]$ su X. Definiamo

$$j : \mathbb{C}^N \to X, \quad j(\lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i e_i \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}^N.$$

Munendo $\mathbb{C}^N$ della norma $|\lambda|_N = \sum_{i=1}^N |\lambda_i|$, l'applicazione j è bigettiva e continua rispetto a $[\,\cdot\,]$, essendo

$$[j(\lambda)] = \left[\sum_{i=1}^N \lambda_i e_i\right] \le \sum_{i=1}^N |\lambda_i|[e_i] \le M \sum_{i=1}^N |\lambda_i| = M|\lambda|_N\,,$$

ove $M = \max\{[e_1],\dots,[e_N]\}$. D'altra parte, posto $S = \{\lambda \in \mathbb{C}^N : \ |\lambda|_N = 1\}$, S è chiuso e limitato in $\mathbb{C}^N$, quindi compatto. La funzione $f(\lambda) = [j(\lambda)]$ è continua da $\mathbb{C}^N$ in $\mathbb{R}$, come composizione di funzioni continue: quindi ha minimo m su S; tale minimo è positivo, perché se fosse $m = 0$, per il punto di minimo α avremmo

$$f(\alpha) = [j(\alpha)] = \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i e_i\right] = m = 0,$$

il che implicherebbe $\sum_{i=1}^N \alpha_i e_i = 0$ e quindi $\alpha = 0$ per l'unicità della rappresentazione dei vettori di X rispetto al sistema $\{e_1,\dots,e_N\}$: impossibile, essendo $[\alpha] = 1$. Dunque $m > 0$ e, per omogeneità,

$$[j(\lambda)] = f(\lambda) \ge m \sum_{i=1}^N |\lambda_i| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}^N.$$

Si ha pertanto

$$m \sum_{i=1}^N |\lambda_i| \le \left[\sum_{i=1}^N \lambda_i e_i\right] \le M \sum_{i=1}^N |\lambda_i| \qquad \forall x = \sum_{i=1}^N \lambda_i e_i \in X.$$

La stessa relazione, con diverse costanti positive m_0, M_0, vale per la norma $\|\cdot\|$; ne segue in particolare

$$\|x\| \le \frac{M_0}{m}[x] \le \frac{M_0\,M}{m_0\,m}\|x\| \qquad \forall x \in X,$$

ossia le norme $[\,\cdot\,]$ e $\|\cdot\|$ sono equivalenti.

(ii) Sia $\{x_n\} \subseteq X$ una successione di Cauchy, con $x_n = \sum_{i=1}^N \lambda_i^n e_i$. Dato $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, grazie a (i),

$$m_0 \sum_{i=1}^N |\lambda_i^n - \lambda_i^m| \le \|x_n - x_m\| < \varepsilon \qquad \forall n, m \ge \nu.$$

Dunque le successioni numeriche $\{\lambda_i^n\}$, $i = 1, \dots, N$, sono di Cauchy in $\mathbb{C}$ e quindi convergono a certi $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Posto allora $x = \sum_{i=1}^N \lambda_i e_i$, si ha $x \in X$ e

$$\|x_n - x\| \le M_0 \sum_{i=1}^N |\lambda_i^n - \lambda_i| \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Quindi $\{x_n\}$ converge a x in X.

(iii) Sia $F : X \to \mathbb{C}$ un funzionale lineare. Posto $F(e_i) = z_i$, $i = 1, \dots, N$, risulta

$$F(x) = F\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^N \lambda_i z_i,$$

da cui

$$|F(x)| \le K \sum_{i=1}^N |\lambda_i| \le \frac{K}{m_0}\|x\| \qquad \forall x \in X,$$

ove $K = \max\{|z_1|, \dots, |z_N|\}$. Ciò prova che F è continuo.

Esercizio 7.3.2 Se $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$, allora

$$\|(B \circ A)x\|_Z \le \|B\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}\|Ax\|_Y \le \|B\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|x\|_X \qquad \forall x \in X,$$

da cui

$$\|B \circ A\|_{\mathcal{L}(X,Z)} \le \|B\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\,.$$

Esercizio 7.3.3 (i) Essendo $D\frac{x}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > 0$, la funzione $\frac{x}{1+x^2}$ è crescente, e quindi $\|Tf\|_\infty \le \frac{1}{2}\|f\|_\infty$ per ogni $f \in C[0,1]$. Inoltre vale $\|Tf\|_\infty = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\|f\|_\infty$ quando $f \equiv 1$. Dunque $\|T\| = \frac{1}{2}$.

(ii) Se $g = Tf$, si ha $g \in C[0,1]$, $g(0) = 0$, ed esiste $g'(0) = f(0)$. Viceversa, se g ha queste proprietà, allora la funzione $f(x) = \frac{1+x^2}{x}\,g(x)$ è continua in $]0,1]$ ed anche in 0, visto che esiste $g'(0)$, e si ha $f(0) = g'(0)$. Dunque

$$R(T) = \{g \in C[0,1] :\ g(0) = 0,\ \exists g'(0) \in \mathbb{R}\}.$$

(iii) L'iniettività di T è immediata.

(iv) Poniamo

$$g_n(x) = \begin{cases} nx & \text{se } 0 \le x \le 1/n \\ 1 & \text{se } 1/n < x \le 1. \end{cases}$$

Allora $\{g_n\} \subseteq R(T)$, $\|g_n\|_\infty = 1$, e $T^{-1}g_n(x) = \frac{1+x^2}{x}\,g_n(x) \ge n$ per ogni $x \in [0, 1/n]$; quindi $\|T^{-1}g_n\|_\infty \ge n\|g_n\|_\infty$. Pertanto T^{-1} non è limitato.

Esercizio 7.3.4 Risulta

$$\|Tf\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1}\int_0^x (x-s)|f(s)|\,ds \le \sup_{0\le x\le 1}\int_0^x (x-s)\,ds\,\|f\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1}\frac{x^2}{2}\,\|f\|_\infty = \frac{1}{2}\,\|f\|_\infty;$$

quindi T è continuo e $\|T\| \le \frac{1}{2}$. Inoltre con $f \equiv 1$ si ha $\|Tf\|_\infty = \frac{1}{2}$, e pertanto $\|T\| = \frac{1}{2}$.
Se $g = Tf \in R(T)$, allora $g(0) = 0$, esistono $g'(x) = \int_0^x f(s)\,ds$ e $g''(x) = f(x)$, cosicché $g \in C^2[0,1]$, ed infine $g'(0) = 0$. Viceversa, se g è una funzione che verifica tutte queste condizioni, allora $g \in R(T)$ e, posto $f = g''$, vale $Tf = g$.

Esercizio 7.3.5 (i) Ovviamente si ha $\|Fg\|_\infty \le \|g\|_\infty$ per ogni $g \in L^\infty(\mathbb{R})$; inoltre con $g \equiv 1$ risulta $Fg \equiv 1$ e quindi $\|F|_{\mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{R}))} = 1$.

(ii) Si ottiene facilmente che $\ker F = \{g \in L^\infty(\mathbb{R}) :\ Fg = 0\}$ è costituito dalle funzioni dispari di $L^\infty(\mathbb{R})$. Infatti, se g è dispari allora $Fg(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Viceversa, se $g \in \ker F$, allora si ha $\int_0^x g(t)\,dt = \int_0^{-x} g(t)\,dt$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; perciò, derivando, si ottiene $g(x) = -g(-x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$. Pertanto g è dispari.

(iii) Si ha

$$R(F) = \{h \in L^\infty(\mathbb{R}) :\ xh(x) \in AC(\mathbb{R}),\ (xh)' \in L^\infty(\mathbb{R}),\ h \text{ è pari}\}.$$

Infatti, se $h \in R(F)$, $h = Fg$, allora $h(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} g(t)\,dt$ e quindi $h(x) = h(-x)$, ossia h è pari; inoltre $xh(x) = \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} g(t)\,dt$ è una funzione assolutamente continua con derivata $\frac{1}{2}(g(x) - g(-x)) \in L^\infty(\mathbb{R})$. Viceversa, se per una $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ valgono le proprietà elencate, allora $xh(x)$ è assolutamente continua e nulla in 0, essendo dispari; quindi è della forma $xh(x) = \int_0^x g(t)\,dt$. Per disparità e per il fatto che $xh(x)$ ha derivata in $L^\infty(\mathbb{R})$, si ha $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ e

$$xh(x) = \frac{1}{2}(xh(x) - (-x)h(-x)) = \frac{1}{2}\left(\int_0^x g(t)\,dt - \int_0^{-x} g(t)\,dt\right) = \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} g(t)\,dt,$$

da cui $xh(x) = Fg(x)$.

(iv) È chiaro che Fg è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ per ogni $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Affinché Fg sia continua nel punto 0, è necessario e sufficiente che 0 sia punto di Lebesgue per la funzione g; in tal caso esiste il limite

$$\lim_{x\to 0} Fg(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} g(t)\,dt = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 7.3.6 Consideriamo $A : L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Posto $g(t) = t\,e^{-|t|}$, si ha $Af = (f, g)_2$ per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$, quindi risulta

$$|Af| \le \|f\|_2\|g\|_2 \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \qquad |Ag| = \|g\|_2^2;$$

dunque $\|A\| = \|g\|_2$ e pertanto, integrando due volte per parti,

$$\|A\|^2 = \|g\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} t^2\,e^{-2|t|}\,dt = 2\int_0^\infty t^2\,e^{-2t}\,dt = 2\int_0^\infty t\,e^{-2t}\,dt = \int_0^\infty e^{-2t}\,dt = \frac{1}{2}\,,$$

da cui $\|A\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Passiamo al caso $A : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Anzitutto,

$$Af = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)\,dt \le \|f\|_1\|g\|_\infty = \|f\|_1 \sup_{t\ge 0} t\,e^{-t} = e^{-1}\|f\|_1 \qquad \forall f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Per $\varepsilon > 0$ sia $f_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\chi_{[1-\varepsilon,1+\varepsilon]}$: si ha $\|f_\varepsilon\|_1 = 1$ e, per $\varepsilon \to 0^+$,

$$Af_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} t\,e^{-t}\,dt \to e^{-1}.$$

Dunque $\|A\| = e^{-1}$.

Infine sia $A : L^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Si ha

$$Af = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)\,dt \le \|f\|_\infty\|g\|_1 = 2\|f\|_\infty\,,$$

e se $f(t) = t/|t|$ risulta $\|f\|_\infty = 1$ e $Af = \int_{\mathbb{R}} |t|\,e^{-|t|}\,dt = 2$. Pertanto $\|A\| = 2$.

Esercizio 7.3.7 (i) Se $f \in L^1(X)$, allora $|f| \in L^1(X)$; quindi gli insiemi $\{x \in [0,1] : |f(x)| > \alpha\}$, $\alpha \ge 0$, sono tutti misurabili con

$$\nu(\{x \in [0,1] : |f(x)| > \alpha\}) < \infty,$$

altrimenti $|f|$ non sarebbe sommabile. In particolare, tutti questi insiemi sono finiti. A maggior ragione, quindi, tutti gli insiemi $\{x \in [0,1] : x|f(x)| > \alpha\}$ sono finiti e quindi misurabili: pertanto, $x|f(x)|$ è misurabile ed anche sommabile, essendo maggiorata da $|f(x)|$.

(ii) Risulta, grazie a (i),

$$|Ff| = \left| \int_0^1 x\, f(x)\, d\nu \right| \leq \int_0^1 |f(x)|\, d\nu \qquad \forall f \in L^1(X);$$

quindi $\|F\|_{(L^1(X))^*} \leq 1$.

(iii) Se esistesse $g \in L^\infty(X)$ tale che $Ff = \int_0^1 g(x) f(x)\, d\nu$, tale g dovrebbe essere misurabile e verificare

$$\int_0^1 (g(x) - x) f(x)\, d\nu = 0 \qquad \forall f \in L^1(X).$$

Tuttavia, scegliendo $f = \chi_{\{x_0\}}$ con $x_0 \in [0,1]$, si avrebbe

$$0 = \int_0^1 (g(x) - x)\chi_{\{x_0\}}(x)\, dx = (g(x_0) - x_0)\nu(\{x_0\}) = g(x_0) - x_0,$$

e per l'arbitrarietà di x_0 si otterrebbe $g(x) = x$ per ogni $x \in [0,1]$. Questo però è assurdo, in quanto $h(x) = x$ non è misurabile, dato che $\{x \in [0,1] : x \geq 1/2\} = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ non appartiene a $\mathcal{F}$.

Esercizio 7.3.8 Consideriamo $(X, \mathcal{F}, \mu)$ con X insieme di cardinalità più che numerabile, $\mathcal{F} = \{E \subseteq X : \ E \text{ oppure } E^c \text{ è numerabile}\}$, $\mu(E) = 0$ se E è numerabile e $\mu(E) = \infty$ se E^c è numerabile. Sia $f \in L^\infty(X)$ con $\|f\|_\infty > 0$; allora il funzionale $Fg = \int_X fg\, d\mu$, $g \in L^1(X)$, ha norma strettamente minore di $\|f\|_\infty$: infatti, per ogni $g \in L^1(X)$ e per ogni $\alpha > 0$ si ha

$$\infty > \int_X |g|\, d\mu \geq \int_{\{x \in X:\ |g(x)| > \alpha\}} |g|\, d\mu \geq \alpha\, \mu(\{x \in X :\ |g(x)| > \alpha\}),$$

e dunque l'insieme $\{x \in X : \ |g(x)| > \alpha\}$ è numerabile. Ne segue che $g \neq 0$ su un insieme al più numerabile. Pertanto Fg vale 0, essendo l'integrale di una funzione q.o. nulla. In definitiva $\|F\|_{(L^1(X))^*} = 0 < \|f\|_\infty$.

Esercizio 7.3.9 Sia $\{y_n\}$ una successione di Cauchy in Y. Fissato $G \in X^* \setminus \{0\}$, definiamo $F_n x = Gx\, y_n$ per ogni $x \in X$: allora $F_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ e

$$\|F_n - F_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \|G\|_{X^*} \|y_n - y_m\|_Y\,,$$

quindi $\{F_n\}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(X,Y)$. Poiché tale spazio è completo per ipotesi, esiste $F \in \mathcal{L}(X,Y)$ tale che $Gx\, y_n = F_n x \to Fx$ in Y per $n \to \infty$. Scelto $x_0 \in X$ tale che $Gx_0 \neq 0$, si deduce

$$y_n \to \frac{Fx_0}{Gx_0} =: y \in Y.$$

Dunque Y è completo.

Esercizio 7.3.10 Il fatto che $\|x\|_X + \|y\|_Y$ sia una norma su $X \times Y$ è evidente. Proviamo la completezza. Sia $\{(x_n, y_n)\}$ una successione di Cauchy in $X \times Y$: allora $\{x_n\}$ è di Cauchy in X mentre $\{y_n\}$ è di Cauchy in Y. Per completezza, esistono $x \in X$ e $y \in Y$ tali che $x_n \to x$ in X e $y_n \to y$ in Y per $n \to \infty$. Pertanto $(x_n, y_n) \to (x, y)$ in $X \times Y$. Dunque $X \times Y$ è completo.
Proviamo che $(X \times Y)^*$ è isomorfo a $X^* \times Y^*$. Definiamo per ogni $(F, G) \in X^* \times Y^*$

$$[j(F,G)](x,y) = Fx + Gy \quad \forall (x,y) \in X \times Y,$$

ed osserviamo che $(x,y) \mapsto Fx + Gy$ appartiene a $(X \times Y)^*$, in quanto

$$|Fx + Gy| \leq \|F\|_{X^*}\|x\|_X + \|G\|_{Y^*}\|y\|_Y \leq [\|F\|_{X^*} + \|G\|_{Y^*}]\, \|(x,y)\|_{X \times Y} \qquad \forall (x,y) \in X \times Y.$$

Dunque j va da $X^* \times Y^*$ in $(X \times Y)^*$. La mappa j è surgettiva: dato $H \in (X \times Y)^*$, e posto

$$H_0 x = H(x,0) \quad \forall x \in X, \qquad H_1 y = H(0,y) \quad \forall y \in Y,$$

risulta $H_0 \in X^*$ e $H_1 \in Y^*$, poiché

$$|H_0 x| = |H(x,0| \le \|H\|_{(X\times Y)^*} \|(x,0)\|_{X\times Y} = \|H\|_{(X\times Y)^*} \|x\|_X \quad \forall x \in X,$$
$$|H_1 y| = |H(0,y)| \le \|H\|_{(X\times Y)^*} \|(0,y)\|_{X\times Y} = \|H\|_{(X\times Y)^*} \|y\|_Y \quad \forall y \in Y.$$

Inoltre

$$H(x,y) = H(x,0) + H(0,y) = H_0 x + H_1 y \qquad \forall (x,y) \in X \times Y,$$

dunque $H = j(H_0, H_1)$.
La mappa j è anche iniettiva: se $j(F,G) = F + G = 0$, ne segue $Fx + Gy = 0$ per ogni $x \in X$ e $y \in Y$, da cui, scelto $y = 0$, segue $Fx = 0$ per ogni $x \in X$, e scelto $x = 0$ segue $Gy = 0$ per ogni $y \in Y$. Dunque $(F,G) = 0$.
L'applicazione j è quindi un isomorfismo fra $X^* \times Y^*$ e $(X \times Y)^*$.

Esercizio 7.3.11 Il fatto che $\|\cdot\|_{R(T)}$ sia una norma è facile conseguenza dell'iniettività di T. Sia ora $\{x_n\} \subseteq R(T)$ una successione di Cauchy in $R(T)$, il che significa che $\{T^{-1}x_n\}$ è una successione di Cauchy in X: poiché X è completo, $T^{-1}x_n$ converge a un certo $y \in X$. Dunque $x_n = T(T^{-1}x_n) \to Ty$ in X, ed inoltre $\|x_n - Ty\|_{R(T)} = \|T^{-1}x_n - y\|_X \to 0$, ossia $x_n \to Ty$ in $R(T)$. Dunque $R(T)$ è completo.
Poi, se $x \in R(T)$ si ha $\|x\|_X = \|T(T^{-1}x)\|_X \le \|T\| \, \|T^{-1}x\|_X = \|T\| \, \|x\|_{R(T)}$, cosicché l'inclusione i è continua con norma non superiore a $\|T\|$. Sia $y \in X$ tale che $\|y\|_X = 1$ e $\|Ty\| > \|T\| - \varepsilon$: allora, posto $x = Ty$ si ha $\|x\|_{R(T)} = \|y\|_X = 1$ e $\|x\|_X = \|Ty\|_X > \|T\| - \varepsilon$, e ciò prova che la norma dell'inclusione i è uguale a $\|T\|$.

Esercizio 7.3.12 Si ha $F \in c_0^*$ perché

$$Fx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{n!} \le \|x\|_\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \|x\|_{c_0} \cdot e,$$

cosicché $\|F\|_{c_0^*} \le e$. Proviamo che vale l'uguaglianza: per ogni $k \in \mathbb{N}$, scelto $x^{(k)} \in c_0$ definito da

$$x_n^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{se } n \le k \\ 0 & \text{se } n > k, \end{cases}$$

si ha $\|x^{(k)}\|_{c_0} = 1$ e

$$Fx^{(k)} = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}\,;$$

quindi, dato $\varepsilon \in]0, e[$ esiste $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $Fx^{(k)} > e - \varepsilon$ per ogni $k \ge k_\varepsilon$. Dunque $\|F\|_{c_0^*} \ge e - \varepsilon$ per ogni $\varepsilon \in]0, e[$.
Non esiste alcun $x \in c_0$ per il quale risulti $\|x\|_{c_0} = 1$ e $Fx = e$: infatti il calcolo precedente mostra che per avere $Fx = e$ occorre che sia $x_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, il che impedisce a $x = \{x_n\}$ di essere una successione infinitesima per $n \to \infty$.

Esercizio 7.3.13 (i) È chiaro che

$$\|Ax\|_{\ell^1} \le \|a\|_{\ell^\infty} \|\|x\|_{\ell^1} \qquad \forall x \in \ell^1;$$

dunque $\|A\|_{\mathcal{L}(\ell^1)} \le \|a\|_{\ell^\infty}$. D'altra parte, fissato $\varepsilon \in]0, \|a\|_{\ell^\infty}[$ e selezionato $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|a_{n_0}| > \|a\|_{\ell^\infty} - \varepsilon$, possiamo scegliere $x^0 \in \ell^1$ della forma

$$x_n^0 = \begin{cases} 0 & \text{se } n \ne n_0 \\ 1 & \text{se } n = n_0\,, \end{cases}$$

e con tale x^0 si ha $\|x^0\|_{\ell^1} = 1$ e $\|Ax^0\|_{\ell^1} = |a_{n_0}| > \|a\|_{\ell^\infty} - \varepsilon$. Dunque $\|A\|_{\mathcal{L}(\ell^1)} = \|a\|_{\ell^\infty}$.
(ii) Se $a_n \ne 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora da $a_n x_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ segue $x_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e

quindi A è iniettivo. Viceversa, se A è iniettivo e, per assurdo, esistesse $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_0} = 0$, allora per il vettore x^0 sopra definito, che è non nullo, si avrebbe $Ax^0 = 0$, il che violerebbe l'iniettività.

(iii) Se $\inf_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = \delta > 0$, allora l'equazione $Ax = y$ ha soluzione per ogni $y \in \ell^1$: basta porre $x = \{x_n\}$ con $x_n = \frac{y_n}{a_n}$: si ha $x \in \ell^1$ con $\|x\|_{\ell^1} \le \frac{1}{\delta}\|y\|_{\ell^1}$, il che mostra che A è surgettivo e A^{-1} è continuo. Viceversa, supponiamo che A sia surgettivo e A^{-1} sia continuo; per assurdo, se fosse $\inf_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = 0$, potremmo ancora scrivere $x_n = \frac{y_n}{a_n}$, ma questa successione sarebbe mal definita nel caso in cui esista $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_0} = 0$ (in questo caso violando la surgettività); poi, anche se fosse $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, la successione $\{x_n\}$ potrebbe appartenere o no a ℓ^1, violando la surgettività o la continuità dell'inversa. Per esempio, se $a_n = \frac{1}{n+1}$, allora $x_n = (n+1)y_n$ non appartiene a ℓ^1 quando si sceglie $y_n = \frac{1}{(n+1)^2}$; se si sceglie invece $y_n^{(k)} = \frac{1}{(n+1)^2}$ per $n \le k$ e $y_n^{(k)} = 0$ per $n > k$, allora se $x^{(k)}$ risolve $x_n^{(k)} = (n+1)y_n^{(k)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ottiene che $x^{(k)}$ sta in ℓ^1 ma

$$\|x^{(k)}\|_{\ell^1} = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n+1}$$

e non esiste alcuna costante M per la quale risulti $\|x^{(k)}\|_{\ell^1} \le M\|y^{(k)}\|_{\ell^1}$ per qualunque $k \in \mathbb{N}$, cosicché A^{-1}, là dove è definito, non è continuo.

Esercizio 7.3.14 Se $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, l'integrale che definisce $Tf(x)$ è una funzione misurabile e sommabile su $\mathbb{R}$, grazie al teorema di Fubini (teorema 5.3.3); si ha dunque

$$\|Tf\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |Tf(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy \right| dx \le \int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\, dxdy = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\,,$$

ossia $\|T\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^2),L^1(\mathbb{R}))} \le 1$. Tuttavia se $f \ge 0$ la disuguaglianza precedente diventa un'uguaglianza, cosicché $\|T\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^2),L^1(\mathbb{R}))} = 1$.

Esercizio 7.3.15 Se $x \in M$, allora $1 = Fx \le \|F\|_{X^*}\|x\|_X$, da cui

$$\|x\|_X \ge \frac{1}{\|F\|_{X^*}}\,,$$

da cui, per l'arbitrarietà di x,

$$\operatorname{dist}(0, M) \ge \frac{1}{\|F\|_{X^*}}\,.$$

Sia ora $\varepsilon \in]0, \|F\|_{X^*}[$: esiste $x \in X$ tale che

$$\frac{Fx}{\|x\|_X} > \|F\|_{X^*} - \varepsilon.$$

In particolare, $Fx \neq 0$: quindi, posto $z = \frac{x}{Fx}$, si ha $z \in M$ e

$$\|z\|_X = \frac{\|x\|_X}{Fx} < \frac{1}{\|F\|_{X^*} - \varepsilon}\,;$$

ne segue

$$\operatorname{dist}(0, M) \le \frac{1}{\|F\|_{X^*} - \varepsilon} \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

da cui la tesi.

Esercizio 7.3.16 Proviamo la seconda disuguaglianza: se $x \in B(x_0, r)$, si ha

$$\|Tx\|_X \le \|T(x - x_0)\|_X + \|Tx_0\|_X \le \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|x - x_0\|_X + \|Tx_0\|_X \le r\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} + \|Tx_0\|_X\,.$$

Proviamo la prima disuguaglianza: sia $\varepsilon > 0$. Per definizione di norma di T, esiste $\xi \in X$, con $\|\xi\|_X = r$, tale che

$$\|T\xi\|_X \ge \left(\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} - \varepsilon\right)\|\xi\|_X = r\left(\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} - \varepsilon\right).$$

Sia $x \in B(x_0, r)$: si ha

$$\|Tx\|_X = \|Tx - T\xi + T\xi\|_X \geq \|T\xi\|_X - \|T(x-\xi)\|_X \geq r\left(\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} - \varepsilon\right) - \|T(x-\xi)\|_X\,,$$

da cui

$$\begin{aligned}\sup_{x\in B(x_0,r)} \|Tx\|_X &\geq \sup_{x\in B(x_0,r)} \left[r\left(\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} - \varepsilon\right) - \|T(x-\xi)\|_X\right] = \\ &= r\left(\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} - \varepsilon\right) - \inf_{x\in B(x_0,r)} \|T(x-\xi)\|_X = \\ &= r\left(\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} - \varepsilon\right) - \|T(\xi-\xi)\|_X = r\left(\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} - \varepsilon\right).\end{aligned}$$

Dato che ε è arbitrario, ne segue la tesi.

Esercizio 7.3.17 Se fosse

$$\sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \infty,$$

esisterebbe $\{z_n\} \subset X$ tale che $\|z_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\|Az_n\| \to \infty$ per $n \to \infty$. Allora, posto $x_n = z_n/\sqrt{\|Az_n\|}$, avremmo

$$\|x_n\| = \frac{1}{\sqrt{\|Az_n\|}} \to 0, \quad \|Ax_n\| = \sqrt{\|Az_n\|} \to \infty \qquad \text{per } n \to \infty,$$

contro l'ipotesi che $\{Ax_n\}$ sia una successione limitata. Si conclude perciò che $A \in \mathcal{L}(X)$.

Esercizio 7.3.18 Cominciamo dal caso reale. Se $H = \mathbb{R}^2$, e A è la rotazione di $\pi/2$, ossia

$$A(x,y) = (-y,x) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

allora si ha $(A(x,y),(x,y)) = -yx + xy = 0$ per ogni $(x,y) \in R^2$, ma ovviamente $A(0,1) = (-1,0) \neq (0,0)$.
Passiamo al caso complesso e supponiamo che $(Ax,x) = 0$ per ogni $x \in H$. Allora

$$0 = (A(x+y), x+y) = (Ax,x) + (Ax,y) + (Ay,x) + (Ay,y) = (Ax,y) + (Ay,x),$$

da cui

$$(Ax,y) = -(Ay,x) \qquad \forall x,y \in H;$$

d'altra parte

$$0 = (A(x+iy), x+iy) = (Ax,x) + i(Ay,x) - i(Ax,y) - (Ay,y) = i[(Ay,x) - (Ax,y)],$$

che implica

$$(Ax,y) = (Ay,x) \qquad \forall x,y \in H:$$

Si deduce allora $(Ay,x) = (Ax,y) = -(Ay,x)$, cioè $(Ay,x) = 0$ per ogni $x,y \in H$. Scelto $x = Ay$ si ricava $Ay = 0$ per ogni $y \in H$, ossia $A = 0$.

Esercizio 7.3.19 Sia $x \in X$ e sia $\varepsilon > 0$. Scelto $z \in E$ tale che $\|x - z\|_X < \varepsilon$, si ha $\|(A_n - A_m)z\|_Y < \varepsilon$ per $n, m \geq n_\varepsilon$, con $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ opportuno. Quindi

$$\|(A_n - A_m)x\|_Y \leq \|(A_n - A_m)(x-z)\|_Y + \|(A_n - A_m)z\|_Y \leq (2M+1)\varepsilon \quad \forall n,m \geq n_\varepsilon\,,$$

ossia $\{A_n x\}$ è una successione di Cauchy in Y per ogni $x \in X$. Essendo Y completo, si ha la tesi.
Togliendo l'ipotesi $\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq M$, il risultato è falso. Ad esempio, sia $X = \ell^2$, $Y = \mathbb{R}$ e poniamo

$$A_n x = \sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{3}}\, x_k, \qquad x \in \ell^2.$$

Si ha

$$\|A_n\|_{(\ell^2)^*} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{2}{3}}}\,:$$

infatti, per la disuguaglianza di Schwarz in $\mathbb{R}^n$,

$$\|A_n x\| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{2}{3}}}\|x\|_{\ell^2} \qquad \forall x \in \ell^2,$$

e prendendo $x_k = k^{-\frac{1}{3}}$ per $k \le n$ e $x_k = 0$ per $k > n$, si trova facilmente $A_n x = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{2}{3}}}\|x\|_{\ell^2}$. Ora scegliamo $E = c_{00}$ (lo spazio delle successioni definitivamente nulle), che è denso in ℓ^2: allora risulta

$$\exists \lim_{n\to\infty} A_n x = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{1}{3}}\, x_k \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in c_{00}\,,$$

poiché la serie si riduce ad una somma finita. Tuttavia, con $x = \{k^{-\frac{2}{3}}\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ si ha $x \in \ell^2$ e

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x\| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Esercizio 7.3.20 (i) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$ converge in $\mathcal{L}(X)$, in quanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n}{n!}\|A^n\|_{\mathcal{L}(X)} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n}{n!}\|A\|^n_{\mathcal{L}(X)}$$

e la serie a destra è la serie esponenziale che converge a $e^{|t|\|A\|_{\mathcal{L}(X)}}$. Definito $T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$, si ha dunque $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le e^{|t|\|A\|_{\mathcal{L}(X)}}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Ovviamente $T(0) = I_X$, e

$$\begin{aligned} T(t+s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} t^h s^{n-h} A^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{n} \frac{t^h s^{n-h}}{h!(n-h)!} A^h A^{n-h} = \\ &= \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{n=h}^{\infty} \frac{t^h}{h!} A^h \frac{s^{n-h}}{(n-h)!} A^{n-h} = \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} A^h\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k\right) = T(t)T(s). \end{aligned}$$

(iii) Si ha

$$\begin{aligned} \frac{T(t+h)-T(t)}{h} &= \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(t+h)^n}{n!}A^n - \frac{t^n}{n!}A^n\right) = \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} t^k h^{n-k} A^n - t^n A^n\right) = \\ &= \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k h^{n-k}}{k!(n-k)!}A^n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k h^{n-1-k}}{k!(n-k)!}A^n = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{t^k h^{m-k}}{k!(m+1-k)!}A^{m+1} = A\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{t^k A^k h^{m-k} A^{m-k}}{k!(m+1-k)!} = \\ &= A\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k\right)\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{h^p}{(p+1)!}A^p\right) = AT(t)\left(I_X + h\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h^{p-1}}{(p+1)!}A^p\right); \end{aligned}$$

per $h \to 0$ si ottiene

$$\frac{T(t+h)-T(t)}{h} \to AT(t) \qquad \text{in } \mathcal{L}(X).$$

Esercizio 7.3.21 Se $\|F\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} F^n$ converge totalmente, essendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|F\|^n_{\mathcal{L}(X)} = \frac{1}{1 - \|F|_{\mathcal{L}(X)}} ;$$

quindi essa converge in $\mathcal{L}(X)$ ad un operatore $G \in \mathcal{L}(X)$. Si ha $\|G\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{1-\|F\|_{\mathcal{L}(X)}}$ ed inoltre

$$G(I_X - F) = \sum_{n=0}^{\infty} F^n - \sum_{n=0}^{\infty} F^{n+1} = (I_X - F)G = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (F^n - F^{n+1}) = \lim_{N\to\infty} (I_X - F^{N+1}) = I_X \, .$$

Perciò $G = (I_X - F)^{-1}$.

Esercizio 7.3.22 Proviamo che E è aperto in $\mathcal{L}(X)$. Sia $F \in E$: per ogni $G \in \mathcal{L}(X)$ possiamo scrivere $G = F[I_X + F^{-1}(G - F)]$. Esiste $\delta > 0$ tale che, se $\|G - F\|_{\mathcal{L}(X)} < \delta$, allora $\|F^{-1}(G - F)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$; quindi, per l'esercizio 7.3.21, $I_X + F^{-1}(G - F)$ è invertibile. Dall'espressione di G sopra scritta segue allora

$$\exists G^{-1} = [I_X + F^{-1}(G - F)]^{-1} F^{-1},$$

e ciò prova che ogni $G \in \mathcal{L}(X)$ con $\|G - F||_{\mathcal{L}(X)} < \delta$ appartiene ad E. Dunque E è aperto.

Esercizio 7.3.23 (i) Si ha $S_1 = I_X S_1 = S_2 T S_1 = S_2 I_X = S_2$; posto $S = S_1 = S_2$ si ricava $ST = TS = I_X$, vale a dire $S = T^{-1}$.

(ii) Se $X = \ell^1$, e

$$(Tx)_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1 \\ x_{n-1} & \text{se } n > 1, \end{cases} \qquad (Sx)_n = x_{n+1} \qquad \forall x \in \ell^1,$$

allora

$$(STx)_n = (S\{0, x_1, x_2, \ldots\})_n = (\{x_1, x_2, \ldots\})_n = x_n \, ,$$

quindi $ST = I_X$; d'altra parte

$$(TSx)_n = (T\{x_2, x_3, \ldots\})_n = (\{0, x_2, x_3, \ldots\})_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1 \\ x_n & \text{se } n > 1, \end{cases}$$

dunque $TSe_1 = 0$, ossia $TS \neq I_X$.

(iii) Sia X finito-dimensionale e sia $TS = I_X$: allora S è iniettivo. Perciò, se $\{e_1, \ldots, e_N\}$ è una base di X, anche $\{Se_1, \ldots, Se_n\}$ lo è: infatti, se $\sum_{i=1}^N \lambda_i S e_i = 0$, allora $S\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i e_i\right) = 0$, e per iniettività $\sum_{i=1}^N \lambda_i e_i = 0$. Ne segue, per lineare indipendenza, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_N = 0$. Allora anche T è iniettivo; infatti se $Tx = 0$, scrivendo $x = \sum_{i=1}^N \mu_i S e_i$ si ricava

$$0 = T\left(\sum_{i=1}^{N} \mu_i S e_i\right) = TS\left(\sum_{i=1}^{N} \mu_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i e_i \, ,$$

da cui $\mu_1 = \ldots = \mu_N = 0$, ossia $x = 0$. Allora, se fosse $STe_j \neq e_j$, per iniettività avremmo $TSTe_j \neq Te_j$ ossia $Te_j \neq Te_j$, assurdo. Dunque ST coincide con I_X sulla base $\{e_1, \ldots, e_N\}$ e pertanto $ST = I_X$.

Esercizio 7.3.24 Per ogni $F \in c_0^*$ e per ogni $n \in$ sia $a_n = F(e_n)$, ove e_n è il vettore di c_0 che ha tutti gli elementi nulli tranne l'n-esimo, che vale 1. Se $x \in c_0$, con $\|x\|_\infty = 1$, si ha

$$|Fx| = \left|F\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n\right)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n||Fe_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

da cui $\|F\|_{c_0^*} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. D'altronde la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge: infatti, scelto

$$x_n^N = \begin{cases} \operatorname{sgn} a_n & \text{se } n \leq N, \\ 0 & \text{se } n > N, \end{cases}$$

risulta $x^N \in c_0$, $\|x^N\|_\infty = 1$ e $Fx^N = \sum_{n=0}^N |a_n|$. Essendo $|Fx^N| \le \|F\|_{c_0^*}$, si ottiene

$$\sum_{n=0}^N |a_n| \le \|F\|_{c_0^*} .$$

In definitiva, posto $a = \{a_n\}$, risulta $\|F\|_{c_0^*} = \|a\|_{\ell^1}$. L'applicazione che a F associa $\{a_n\}$ è dunque un'isometria da c_0^* a ℓ^1. Essa è surgettiva: data $a = \{a_n\} \in \ell^1$, possiamo definire $F : c_0 \to \mathbb{R}$ come $Fx = \sum_{n=0}^\infty a_n x_n$ per ogni $x \in c_0$, ossia $F(e_n) = a_n$, e si ha come sopra $F \in c_0^*$ e $\|F\|_{c_0^*} = \|a\|_{\ell^1}$.

Esercizio 7.3.25 Per ogni $F \in (\ell^1)^*$ sia $a_n = F(e_n)$, ove e_n è l'elemento di ℓ^1 che ha tutti gli elementi nulli tranne l'n-esimo, che vale 1. Si ha $|a_n| \le \|F\|_{(\ell^1)^*}$, quindi $a = \{a_n\} \in \ell^\infty$ e $\|a\|_\infty \le \|F\|_{(\ell^1)^*}$. D'altra parte, se $x \in \ell^1$ con $\|x\|_{\ell^1} = 1$, si ha

$$|Fx| = \left| F\left(\sum_{n=0}^\infty x_n e_n \right) \right| \le \sum_{n=0}^\infty |x_n a_n| \le \|x\|_{\ell^1} \|a\|_\infty = \|a\|_\infty,$$

e quindi si conclude che $\|F\|_{(\ell^1)^*} = \|a\|_\infty$. L'applicazione è surgettiva: se $a \in \ell^\infty$ e definiamo $F : \ell^1 \to \mathbb{R}$ come $Fx = \sum_{n=0}^\infty a_n x_n$ per ogni $x \in \ell^1$, cioè $Fe_n = a_n$, allora come sopra si ha $F \in (\ell^1)^*$ con $\|F\|_{(\ell^1)^*} = \|a\|_\infty$.

Esercizio 7.3.26 Fissiamo $x \in c_0$. Dato $\varepsilon > 0$ esiste $j_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ tale che $|x_j| < \varepsilon$ per $j > j_\varepsilon$; inoltre, esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$|a_{ij} - a_{kj}| < \frac{\varepsilon}{j_\varepsilon}, \quad j = 1, 2, \dots, j_\varepsilon, \qquad \forall i, k \ge \nu_\varepsilon .$$

Dunque

$$\begin{aligned} |(Ax)_i - (Ax)_k| &\le \sum_{j=1}^\infty |a_{ij} - a_{kj}||x_j| = \sum_{j=1}^{j_\varepsilon} |a_{ij} - a_{kj}||x_j| + \sum_{j=j_\varepsilon+1}^\infty |a_{ij} - a_{kj}||x_j| \le \\ &\le \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{j_\varepsilon} \frac{\varepsilon}{j_\varepsilon} + 2M\varepsilon = (\|x\|_\infty + 2M)\varepsilon \qquad \forall i, k \in \mathbb{N}^+. \end{aligned}$$

Pertanto esiste il limite di $(Ax)_i$ per $i \to \infty$, ossia $Ax \in c$. Per calcolare la norma di A in $\mathcal{L}(c_0, c)$ osserviamo che per ogni $x \in c_0$ si ha

$$\|Ax\|_c = \sup_{i \in \mathbb{N}^+} \left| \sum_{j=1}^\infty a_{ij} x_j \right| \le \sup_{i \in \mathbb{N}^+} |a_{ij}| \, \|x\|_{c_0} = M \|x\|_{c_0} .$$

D'altra parte, fissiamo $i, n \in \mathbb{N}^+$ e definiamo $x^{(n,i)} = \sum_{j=1}^n (\mathrm{sgn} a_{ij}) e_j$, ove $e_j = \{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}$ con 1 al posto j-simo. Allora $\|x^{(n,i)}\|_\infty = 1$ e

$$\|Ax^{(n,i)}\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}^+} \left| \sum_{j=1}^\infty a_{kj} x_j^{(n,i)} \right| \ge \left| \sum_{j=1}^\infty a_{ij} x_j^{(n,i)} \right| = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

da cui $\|A\|_{\mathcal{L}(c_0,c)} \ge \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ per ogni $i, n \in \mathbb{N}^+$. Ne segue $\|A\|_{\mathcal{L}(c_0,c)} \ge M$.

Esercizio 7.3.27 (i) Si ha

$$|T_n f| \le \int_0^\infty |f(t)| \arctan n^2 \, dt = \|f\|_{L^1(0,\infty)} \arctan n^2 \qquad \forall f \in L^1(0, \infty);$$

d'altronde, scegliendo, per $\varepsilon > 0$, $f_\varepsilon = \chi_{[n-\varepsilon, n]}$, si ha $\|f_\varepsilon\|_{L^1(0,\infty)} = \varepsilon$ e

$$\frac{T_n f_\varepsilon}{\|f_\varepsilon\|_{L^1(0,\infty)}} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{n-\varepsilon}^n \arctan nt \, dt = \frac{1}{n\varepsilon} \int_{n^2 - n\varepsilon}^{n^2} \arctan s \, ds \ge \arctan (n^2 - n\varepsilon),$$

il che mostra che $\|T_n\|_{(L^1(0,\infty))^*} = \arctan n^2$.

(ii) Poniamo $Tf = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty f(t)\,dt$ per ogni $f \in L^1(0,\infty)$. Ovviamente $T \in (L^1(0,\infty))^*$, e per ogni $f \in L^1(0,\infty)$ si ha

$$Tf - T_n f = \frac{\pi}{2}\int_n^\infty f(t)\,dt + \int_0^n \Big(\frac{\pi}{2} - \arctan nt\Big) f(t)\,dt;$$

il primo termine a secondo membro tende a 0 per $n \to \infty$, essendo f sommabile; il secondo addendo, riscritto come

$$\int_0^n \Big(\frac{\pi}{2} - \arctan nt\Big) f(t)\,dt = \int_0^\infty \arctan\frac{1}{nt}\, f(t)\,dt,$$

tende anch'esso a 0 per convergenza dominata.

(iii) Scegliamo $f = \chi_{[n,n+1]}$, cosicché $\|f\|_{L^1(0,\infty)} = 1$. Allora

$$\|T - T_n\|_{(L^1(0,\infty)^*} \geq \frac{Tf - T_n f}{\|f\|_{L^1(0,\infty)}} = Tf - T_n f = \frac{\pi}{2}\int_n^{n+1} f(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

Dunque T_n non converge a T in $(L^1(0,\infty))^*$ per $n \to \infty$.

Esercizio 7.3.28 (i) Per $k \in \mathbb{N}^+$ calcoliamo la norma di T^k: si ha

$$(Tx)_n = x_{2n}, \quad (T^2x)_n = x_{4n}, \quad \ldots \quad (T^k x)_n = x_{2^k n} \qquad \forall x \in \ell^\infty,$$

da cui $\|T^k\|_{\mathcal{L}(\ell^\infty)} \leq 1$; scelta come x la successione costantemente uguale a 1 si trova $T^k x = x$ e dunque $\|T^k\|_{\mathcal{L}(\ell^\infty)} = 1$.

Proviamo la surgettività: se $y \in \ell^\infty$, le equazioni $x_{2^k n} = y_n$, $n \in \mathbb{N}^+$, sono risolte ad esempio da $x = \{x_m\}_{m\in\mathbb{N}^+}$, con

$$x_m = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq 2^k n \ \ \forall k \in \mathbb{N}, \\ y_n & \text{se } m = 2^k n. \end{cases}$$

(ii) Risulta

$$\ker T^k = \{x \in \ell^\infty :\ x_{2^k n} = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}^+\}.$$

(iii) Si ha

$$\bigcup_{k=1}^\infty \ker T^k = \{x \in \ell^\infty :\ \exists k \in \mathbb{N}^+ :\ x_{2^k n} = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}^+\}.$$

Si può caratterizzare la chiusura K di questa unione nel modo seguente:

$$K = \Big\{x \in \ell^\infty :\ \exists \{p_k\}_{k\in\mathbb{N}^+} \subseteq \mathbb{N}^+,\ \text{crescente, tale che } \lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}^+} |x_{2^{p_k} n}| = 0\Big\}.$$

Infatti, se $x \in K$ esiste $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}^+}$, contenuta nell'unione dei $\ker T^k$, tale che

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n^{(k)} - x_n| = 0;$$

poiché $x^{(k)} \in \ker T^{p_k}$ con $p_k \in \mathbb{N}^*$ opportuno, avremo $x^{(k)}_{2^{p_k} n} = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, e quindi

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}^+} |x_{2^{p_k} n}| = 0.$$

Viceversa, se $x \in \ell^\infty$ e verifica questa condizione, allora possiamo definire $x^{(k)} \in K$ come segue:

$$x_m^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{se } m = 2^{p_k} n \text{ con } n \in \mathbb{N}^+ \\ x_m & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si ha allora

$$\|x - x^{(k)}\|_\infty = \sup_{m\in\mathbb{N}^+} |x_m - x_m^{(k)}| = \sup_{n\in\mathbb{N}^+} |x_{2^{p_k}n}|,$$

da cui

$$\lim_{k\to\infty} \|x - x^{(k)}\|_\infty = 0.$$

(iv) Consideriamo $T : \ell^1 \to \ell^1$. Ripercorriamo tutti i passi, cominciando dal calcolo della norma di T^k: si ha

$$\|T^k x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_{2^k n}| \le \sum_{m=1}^{\infty} |x_m| = \|x\|_1 \qquad \forall x \in \ell^1,$$

quindi $\|T^k\|_{\mathcal{L}(\ell^1)} \le 1$. Però, scegliendo $x \in \ell^1$ di norma unitaria e $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ con

$$y_n = \begin{cases} x_m & \text{se } m = 2^k n \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}^+,$$

si ha $\|y\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |y_{2^k n}| \le 1$, e risulta

$$\|T^k y\| = \sum_{m=1}^{\infty} |y_{2^k m}| = \|y\|_1.$$

Quindi la norma di T^k è uguale a 1.
Per la surgettività si ragiona in modo esattamente uguale al caso $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$.
Quanto ai nuclei di T^k, si ha chiaramente

$$\ker T^k = \{x \in \ell^1 : \ x_{2^k n} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^+\},$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \ker T^k = \{x \in \ell^1 : \ \exists k \in \mathbb{N}^* : \ x_{2^k n} = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}^+\}.$$

La chiusura K dell'unione si caratterizza così:

$$K = \left\{ x \in \ell^1 : \ \exists \{p_k\}_{k\in\mathbb{N}^+} \subseteq \mathbb{N}^+, \text{ crescente, tale che } \lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |x_{2^{p_k}n}| = 0 \right\}.$$

Infatti, se $x \in K$ esiste $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}^+}$, con $x^{(k)} \in \ker T^{p_k}$, p_k opportuno, tale che $x^{(k)} \to x$ in ℓ^1 per $k \to \infty$. Essendo $x^{(k)}_{2^{p_k}n} = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, si ha

$$0 = \lim_{k\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |x_m^{(k)} - x_m| \ge \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |x_{2^{p_k}n}|,$$

da cui segue

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |x_{2^{p_k}n}| = 0.$$

Viceversa, se $x \in \ell^1$ verifica questa condizione, definiamo $x^{(k)}$ come nel caso di ℓ^∞:

$$x_m^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{se } m = 2^{p_k} n \text{ con } n \in \mathbb{N}^+ \\ x_m & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si ha allora $x^{(k)} \in \ker T^{p_k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, e

$$\|x - x^{(k)}\|_1 = \sum_{m=1}^{\infty} |x_m - x_m^{(k)}| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_{2^{p_k}n}| \to 0 \quad \text{per } k \to \infty.$$

Esercizio 7.3.29 (i) Ovviamente I è lineare. Poi, si ha

$$|I(\varphi)| = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\,\varphi(x_n)\right| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\,\|\varphi\|_\infty \qquad \forall \varphi \in C[a,b],$$

e inoltre $I(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\,\varphi(x_n) \ge 0$ se $\varphi \ge 0$.
(ii) Se $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\,\delta_{x_n}$ si ha

$$I(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\,\varphi(x_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\,\delta_{x_n}(\varphi) = \int_a^b \varphi\,d\mu \qquad \forall \varphi \in C[a,b].$$

(iii) Definiamo per ogni $x \in]a,b]$

$$g(x) = \sum_{n\in A_x} \alpha_n\,, \qquad \text{ove} \quad A_x = \{n\in\mathbb{N}:\ x_n < x\}.$$

Ovviamente, g è crescente ed è discontinua nei punti x_n, essendo

$$g(x_n^-) = \sum_{k\in A_{x_n}} \alpha_k\,, \qquad g(x_n^+) \ge \sum_{k\in A_{x_n}} \alpha_k + \alpha_n\,.$$

Inoltre, per ogni sottointervallo $[c,d[\,$,

$$\mu([c,d[\,) = \sum_{n\in A_d\setminus A_c} \alpha_n = g(d) - g(c) = \mu_g([c,d[\,).$$

Dunque $\mu = \mu_g$ è una misura di Lebesgue-Stieltjes.

Esercizio 7.3.30 (i) Sia $f \in C_c(\mathbb{R})$, e sia $s \in \mathbb{R}$ tale che i supporti di f e di $\tau_s(f)$ siano disgiunti. Allora

$$J(f) = \frac{1}{n}\,J(nf) = J\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\tau_{ks}(f)\right) \le \frac{1}{n}\,\|J\|\,\left\|\sum_{k=0}^{n-1}\tau_{ks}(f)\right\|_\infty = \frac{1}{n}\,\|J\|\,\|f\|_\infty\,.$$

Quindi, per l'arbitrarietà di n, $J(f) = 0$.

Esercizio 7.3.31 Chiaramente, d è una funzione simmetrica e subadditiva, nulla solo per $f = g$, e quindi è una distanza su X. Proviamo (i): se $f \in X$, fissato $a \in]0,1[$ e posto $f_1 = f\,\chi_{[0,a]}$ e $f_2 = f\,\chi_{]a,1]}$, si ha $f = f_1 + f_2$ e $d(f_1,0) + d(f_2,0) = d(f,0)$. Dato che $a \mapsto \int_0^a |f|^p\,dt$ è una funzione continua, esiste a tale che $d(f_1,0) = d(f_2,0) = \frac{1}{2}\,d(f,0)$.
Proviamo (ii): supponiamo che F sia un funzionale lineare e continuo su X, tale che sia $F(f) \ge 1$ per una certa $f \in X$. Per (i), sarà $f = g_1 + g_2$ con $d(g_1,0) = d(g_2,0) = \frac{1}{2}\,d(f,0)$. Essendo $F(f) \ge 1$, risulta $F(g_1) \ge \frac{1}{2}$ oppure $F(g_2) \ge \frac{1}{2}$: supponiamo $F(g_1) \ge \frac{1}{2}$. Definiamo $f_1 = 2g_1$; ne segue $F(f_1) \ge 1$ e $d(f_1,0) = 2^p d(g_1,0) = 2^{p-1}d(f,0)$. Induttivamente, supponiamo di aver costruito f_n tale che $F(f_n) \ge 1$ e $d(f_n,0) = 2^{n(p-1)}d(f,0)$; come prima, sarà $f_n = g_{n1} + g_{n2}$, con $d(g_{n1},0) = d(g_{n2},0) = \frac{1}{2}\,d(f_n,0)$. Nuovamente, sarà $F(g_{n1}) \ge \frac{1}{2}$ oppure $F(g_{n2}) > \frac{1}{2}$: supponiamo $F(g_{n1}) \ge \frac{1}{2}$. Posto $f_{n+1} = 2g_{n1}$, si ha $F(f_{n+1}) \ge 1$ e $d(f_{n+1},0) = 2^p d(g_{n1},0) = 2^{p-1}d(f_n,0) = 2^{(n+1)(p-1)}d(f,0)$. Essendo $p < 1$, risulta $d(f_n,0) \to 0$ e $F(f_n) \ge 1$, e pertanto F non è continuo.

Esercizio 7.3.32 Basta provare che non vale l'identità del parallelogrammo (proposizione 7.2.10). Consideriamo le proiezioni ortogonali P_M e $P_{M^\perp}$, essendo M un sottospazio chiuso di H tale che $\{0\} \subset M \subset H$. Allora si ha $\|P_M\|_{\mathcal{L}(H)} = 1$, $\|P_{M^\perp}\|_{\mathcal{L}(H)} = 1$; inoltre $\|P_M + P_{M^\perp}\|_{\mathcal{L}(H)} = \|I\|_{\mathcal{L}(H)} = 1$, e

$$\|(P_M - P_{M^\perp})x\|_H^2 = \|P_M x\|_H^2 + \|P_{M^\perp}x\|_H^2 = \|x\|_H^2 \qquad \forall x \in H,$$

da cui $\|P_M - P_{M^\perp}\|_{\mathcal{L}(H)} = 1$. Dunque il primo membro dell'identità del parallelogrammo vale 2, mentre il secondo membro vale 4.

Capitolo 8

Spazi di Hilbert

08

8.1 Proiezioni su convessi chiusi

proiez

Abbiamo già visto nel paragrafo 7.2 alcuni aspetti della geometria degli spazi dotati di prodotto scalare. Se lo spazio è anche completo rispetto alla norma indotta, le analogie fra le sue proprietà e quelle caratteristiche di $\mathbb{R}^N$, o di $\mathbb{C}^n$, sono ancora più strette ed interessanti.
Sia dunque H uno spazio di Hilbert. Per fissare le idee, supporremo H complesso; le modifiche da fare agli enunciati nel caso di H reale sono evidenti. In questo paragrafo consideriamo i sottoinsiemi convessi e chiusi di H, i quali possiedono speciali proprietà. Notiamo che in questa classe rientrano in particolare i sottospazi chiusi di H.

minnorma **Proposizione 8.1.1** *Sia K un sottoinsieme convesso, chiuso e non vuoto di uno spazio di Hilbert H. Allora per ogni $y \in H$ esiste un unico $x_0 \in K$ tale che*

$$\|y - x_0\| = \min_{x \in K} \|y - x\|.$$

Tale elemento si chiama proiezione *di y sul convesso K e si indica con $P_K(y)$.*

Dimostrazione Sia $\lambda = \inf_{x \in K} \|y - x\|$: ovviamente $\lambda \geq 0$. Se $\lambda = 0$, allora $y \in \overline{K} = K$, quindi si ha la tesi con $x_0 = y$ (e tale x_0 è unico). Sia dunque $\lambda > 0$: in tal caso possiamo costruire una successione $\{x_n\} \subseteq K$ tale che $\lambda \leq \|y - x_n\| < \lambda + \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Applichiamo l'identità del parallelogrammo (proposizione 7.2.10) ai vettori $\frac{x_n - y}{2}, \frac{x_m - y}{2}$: dato che $\frac{x_n + x_m}{2} \in K$, si trova

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{x_n - x_m}{2} \right\|^2 &= -\left\| \frac{x_n + x_m}{2} - y \right\|^2 + 2\left\| \frac{x_n - y}{2} \right\|^2 + 2\left\| \frac{x_m - y}{2} \right\|^2 \leq \\
&\leq -\lambda^2 + \frac{1}{2}\left[\|x_n - y\|^2 + \|x_m - y\|^2 \right] < \\
&< -\lambda^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\lambda + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\lambda + \frac{1}{m}\right)^2 \right],
\end{aligned}$$

e l'ultimo membro tende a 0 per $n, m \to \infty$. Perciò $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in H, la quale dunque converge in H ad un elemento $x_0 \in K$ (in quanto H è completo

e K è chiuso). Se ne deduce

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \|y - x_n\| = \|y - x_0\|,$$

cosicché λ è un minimo.
Proviamo l'unicità del punto di minimo. Se $\overline{x}$ è un altro punto di minimo in K, applicando l'identità del parallelogrammo ai vettori $\frac{x_0-y}{2}, \frac{\overline{x}-y}{2}$ si trova, essendo $\frac{x_0+\overline{x}}{2} \in K$ e $\|x_0 - y\| = \|\overline{x} - y\| = \lambda$,

$$\left\|\frac{x_0-\overline{x}}{2}\right\|^2 = -\left\|\frac{x_0+\overline{x}}{2} - y\right\|^2 + 2\left\|\frac{x_0-y}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{\overline{x}-y}{2}\right\|^2 \leq -\lambda^2 + \frac{1}{2}\left[\lambda^2+\lambda^2\right],$$

cioè $\overline{x} = x_0$. $\square$

ossproi **Osservazioni 8.1.2 (1)** Se il convesso K *non* è un sottospazio, l'operatore di proiezione P_K *non* è lineare: ad esempio, se $0 \notin K$ si ha $P_K(0) \neq 0$.

(2) Se $x_0 \in K$, allora ovviamente $P_K(x_0) = x_0$; ciò mostra che l'immagine di P_K è esattamente uguale al convesso K.

La proprietà di minimalità della proiezione su un convesso si traduce nella seguente caratterizzazione:

proiezdv **Proposizione 8.1.3** *Sia H uno spazio di Hilbert, sia $K \subseteq H$ un convesso chiuso e non vuoto e siano $y, x_0 \in H$. Risulta $x_0 = P_K(y)$ se e solo se x_0 verifica la seguente* disequazione variazionale*:*

$$\begin{cases} x_0 \in K \\ \mathrm{Re}\,(y - x_0, x - x_0) \leq 0 \qquad \forall x \in K. \end{cases}$$

Dimostrazione Osserviamo preliminarmente che per ogni $x \in H$ si ha

$$\|y - x\|^2 = \|(y - x_0) - (x - x_0)\|^2 = \|y - x_0\|^2 - 2\mathrm{Re}\,(y - x_0, x - x_0) + \|x - x_0\|^2,$$

da cui

$$\|y - x_0\|^2 - \|y - x\|^2 = 2\mathrm{Re}\,(y - x_0, x - x_0) - \|x - x_0\|^2 \quad \forall x \in H.$$

Ciò premesso, supponiamo che x_0 verifichi la disequazione variazionale; allora da questa e dalla relazione precedente si ottiene

$$\|y - x_0\|^2 - \|y - x\|^2 \leq 0 \qquad \forall x \in K,$$

e dato che $x_0 \in K$ si deduce che $x_0 = P_K(y)$.

Supponiamo viceversa che $x_0 = P_K(y)$; allora per definizione $x_0 \in K$ e

$$\|y - x_0\|^2 - \|y - x\|^2 \leq 0 \qquad \forall x \in K,$$

cosicché, tenendo conto della relazione dimostrata all'inizio, si ricava

$$2\mathrm{Re}\,(y - x_0, x - x_0) \leq \|x - x_0\|^2 \qquad \forall x \in K.$$

Ora, fissato $x \in K$, poniamo $v = (1-t)x_0 + tx$, con $t \in]0,1]$. Poiché K è convesso, si ha $v \in K$, e sostituendo v al posto di x si ottiene

$$2\mathrm{Re}\,(y - x_0, t(x - x_0)) \leq t^2 \|x - x_0\|^2 \qquad \forall x \in K,\ \forall t \in]0,1].$$

Quindi, dividendo per t,

$$2\mathrm{Re}\,(y - x_0, x - x_0) \leq t\|x - x_0\|^2 \qquad \forall x \in K,\ \forall t \in]0,1],$$

e finalmente al limite per $t \to 0^+$ si ottiene che x_0 verifica la disequazione variazionale. □

proiezlip **Corollario 8.1.4** *Sia K un convesso chiuso non vuoto di uno spazio di Hilbert H. Allora la proiezione P_K è un operatore Lipschitziano; più precisamente si ha*

$$\|P_K(y) - P_K(z)\| \leq \|y - z\| \qquad \forall y, z \in H.$$

Dimostrazione Poniamo $u = P_K(y), v = P_K(z)$. Per la proposizione 8.1.3 si ha

$$\begin{cases} u \in K \\ \mathrm{Re}\,(y - u, x - u) \leq 0 \quad \forall x \in K, \end{cases} \qquad \begin{cases} v \in K \\ \mathrm{Re}\,(z - v, x - v) \leq 0 \quad \forall x \in K. \end{cases}$$

Sostituiamo $x = v$ nella prima disequazione e $x = u$ nella seconda: si ottiene

$$\mathrm{Re}\,(y - u, v - u) \leq 0, \qquad \mathrm{Re}\,(v - z, v - u) \leq 0.$$

Sommando le due relazioni abbiamo

$$\mathrm{Re}\,(y - u + v - z, v - u) = \mathrm{Re}\,(y - z, v - u) + \|v - u\|^2 \leq 0,$$

da cui

$$\|v - u\|^2 \leq \mathrm{Re}\,(z - y, v - u) \leq \|z - y\| \cdot \|v - u\|.$$

Se $\|v - u\| = 0$, la tesi è ovvia; altrimenti, semplificando, si trova

$$\|v - u\| \leq \|z - y\|$$

che è la tesi. □

Dunque l'operatore non lineare P_K è Lipschitziano su H, con costante di Lipschitz non superiore a 1 (in effetti la costante è esattamente 1 se K contiene almeno due punti distinti, in quanto $P_K(y) = y$ per ogni $y \in K$; invece se K è costituito da un solo punto x_0, allora $P_K(x) = x_0$ per ogni $x \in H$). Nel caso particolare in cui K è un sottospazio chiuso, vedremo che la proiezione P_K risulta lineare, ed avrà lo stesso significato geometrico di "proiezione ortogonale" che conosciamo nel caso di $\mathbb{R}^N$. Per illustrare questi fatti, premettiamo la seguente

Definizione 8.1.5 *Sia S un sottoinsieme non vuoto di uno spazio di Hilbert H. L'* ortogonale *di S è l'insieme*

$$S^\perp = \{x \in H : (x, y) = 0 \ \ \forall y \in S\}.$$

Notiamo che, a causa della linearità e della continuità del prodotto scalare, $S^\perp$ è un sottospazio chiuso di H, comunque sia fatto l'insieme S. Inoltre si ha

$$S \cap S^\perp = \begin{cases} \emptyset & \text{se } 0 \notin S \\ \{0\} & \text{se } 0 \in S : \end{cases}$$

infatti se $x \in S \cap S^\perp$ allora $(x, x) = 0$ e quindi $x = 0$.
La linearità della proiezione su un sottospazio chiuso è conseguenza del seguente risultato:

teoproi **Teorema 8.1.6 (delle proiezioni)** *Sia H uno spazio di Hilbert, sia M un sottospazio chiuso di H. Allora esiste un'unica coppia di operatori $P, Q : H \to H$ tali che:*

(i) *$R(P) = M$ e $R(Q) = M^\perp$;*

(ii) *$x = Px + Qx$ per ogni $x \in H$;*

(iii) *$x = Px$ per ogni $x \in M$, $x = Qx$ per ogni $x \in M^\perp$;*

(iv) *P e Q sono operatori lineari e continui;*

(v) *se $M \neq \{0\}$ allora $\|P\|_{\mathcal{L}(H)} = 1$, e se $M \neq H$ allora $\|Q\|_{\mathcal{L}(H)} = 1$.*

Gli operatori P, Q si chiamano proiezioni ortogonali *su M e su $M^\perp$ rispettivamente.*

Ricordiamo che $R(P), R(Q)$ sono le immagini degli operatori P, Q.

Dimostrazione **(i)** Poniamo

$$P(x) = P_M(x), \quad Q(x) = x - P_M(x) \qquad \forall x \in H :$$

questa definizione è lecita dato che M è un convesso chiuso non vuoto. Poiché $P_M(x) \in M$ e $P_M(x) = x$ per ogni $x \in M$, si ha $R(P) = M$; inoltre per la proposizione 8.1.3 risulta per ogni $x \in H$

$$\mathrm{Re}\,(x - P(x), z - P(x)) \leq 0 \qquad \forall z \in M.$$

Poiché M è un sottospazio, possiamo scegliere $z = P(x) \pm v$, con $v \in M$, ottenendo

$$\mathrm{Re}\,(x - P(x), \pm v) \leq 0 \qquad \forall v \in M,\ \forall x \in H,$$

e dunque

$$\mathrm{Re}\,(x - P(x), v) = 0 \qquad \forall v \in M,\ \forall x \in H.$$

Sostituendo poi in questa relazione iv al posto di v, troviamo anche

$$\mathrm{Im}\,(x - P(x), v) = \mathrm{Re}\,(x - P(x), iv) = 0 \qquad \forall v \in M, \quad \forall x \in H;$$

ne segue

$$(x - P(x), v) = 0 \qquad \forall v \in M, \quad \forall x \in H,$$

ossia $Q(x) = x - P(x) \in M^\perp$ per ogni $x \in H$; in particolare se $x \in M^\perp$ questa relazione implica $(P(x), v) = 0$ per ogni $v \in M$, da cui $P(x) \in M \cap M^\perp$ ossia $P(x) = 0$. Dunque $Q(x) = x$ per ogni $x \in M^\perp$ e pertanto $R(Q) = M^\perp$. Ciò prova (i).

(ii) Evidente per definizione di P e Q.

(iii) Se $x \in M$, allora $x = P_M(x) = P(x)$, mentre se $x \in M^\perp$ si ha, come si è visto, $Q(x) = x$.

(iv) Se $x, y \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, si ha da (ii)

$$\alpha x = \alpha P(x) + \alpha Q(x), \qquad \beta y = \beta P(y) + \beta Q(y),$$

$$\alpha x + \beta y = P(\alpha x + \beta y) + Q(\alpha x + \beta y),$$

da cui, sommando,

$$\alpha P(x) + \alpha Q(x) + \beta P(y) + \beta Q(y) = \alpha x + \beta y = P(\alpha x + \beta y) + Q(\alpha x + \beta y),$$

cioè

$$\alpha P(x) + \beta P(y) - P(\alpha x + \beta y) = -\alpha Q(x) - \beta Q(y) + Q(\alpha x + \beta y).$$

Ricordando (i), in questa relazione il primo membro appartiene a M ed il secondo membro appartiene a $M^\perp$; essa perciò definisce un elemento di $M \cap M^\perp = \{0\}$. Dunque entrambi i membri sono nulli e questo prova la linearità di P e Q (in particolare, quindi, le proiezioni su sottospazi chiusi sono lineari). Inoltre, poiché $Px \perp Qx$ per ogni $x \in H$, dal teorema di Pitagora (proposizione 7.2.9) segue

$$\|Px\|^2 + \|Qx\|^2 = \|x\|^2 \qquad \forall x \in H,$$

il che mostra che $P, Q \in \mathcal{L}(H)$ con norme non superiori a 1.

(v) Sappiamo che $\|P\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$ e $\|Q\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$. Se $M \neq \{0\}$, essendo $Px = x$ per $x \in M$, si ottiene $\|P\|_{\mathcal{L}(H)} = 1$. Se $M \neq H$, per $x \in M^\perp$ si ha $Px = 0$ e quindi $Qx = x$: pertanto $\|Q\|_{\mathcal{L}(H)} = 1$. Ciò conclude la dimostrazione. □

caratt_orto **Osservazione 8.1.7** Sia $P \in \mathcal{L}(H)$. Come si riconosce se P è una proiezione ortogonale su un opportuno sottospazio chiuso $M \subseteq H$? Si dimostra facilmente che P è una proiezione ortogonale se e solo se $P^2 = P$ e $(Px, y) = (x, Py)$ per ogni $x, y \in H$, ed in tal caso il sottospazio M è $R(P)$. Per verificare queste affermazioni, osserviamo innanzitutto che se $P = P_M$, con M sottospazio chiuso, allora $(P_M)^2 = P_M$ ed inoltre per ogni $x, y \in H$, essendo $I - P_M = P_{M^\perp}$, risulta

$$\begin{aligned}(P_M x, y) &= (P_M x, y - P_M y) + (P_M x, P_M y) = (P_M x, P_M y) = \\ &= (P_M x - x, P_M y) + (x, P_M y) = (x, P_M y).\end{aligned}$$

Viceversa, supponiamo che $P^2 = P$ e $(Px, y) = (x, Py)$ per ogni $x, y \in H$; allora si ha:

- $M = R(P)$ è chiuso. Infatti se $\{x_n\} \subseteq M$ e $x_n \to x$, allora sarà $x_n = Pz_n$ con $z_n \in H$ e $Pz_n \to x$; ne segue $P^2 z_n \to Px$. Ma $P^2 z_n = Pz_n \to x$, e dunque $Px = x$, da cui $x \in M$.

- $Px = x$ per ogni $x \in M$. Infatti se $x \in M$ sarà $x = Py$ con $y \in H$, da cui $Px = P^2y = Py = x$.
- $Px = 0$ per ogni $x \in M^\perp$. Infatti se $x \in M^\perp$ e $y \in H$ risulta $(Px, y) = (x, Py) = 0$, in quanto $Py \in M$ e $x \in M^\perp$. Pertanto $(Px, y) = 0$ per ogni $y \in H$, ossia $Px = 0$.

Ciò mostra che $P = P_M$, e naturalmente $I - P = P_{M^\perp}$.

Esercizi 8.1

convnonch

1. Sia H uno spazio di Hilbert, sia $u \in H$ con $\|u\| = 1$. Si verifichi che la palla aperta $B(u, 1) = \{x \in H : \|x - u\| < 1\}$ è un convesso non chiuso, privo di elementi di norma minima.

minnorL2

2. Si verifichi che, posto $K = \left\{ f \in L^2(0,1) : \int_0^{1/2} f(t)\ dt - \int_{1/2}^1 f(t)\ dt = 1 \right\}$, si ha
$$\min_{f \in K} \|f\|_2 = 1.$$

minnorC

3. Poniamo $K = \left\{ f \in C[0,1] : \int_0^{1/2} f(t)\ dt - \int_{1/2}^1 f(t)\ dt = 1 \right\}$. Si provi che K è un convesso chiuso negli spazi $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ e $(C[0,1], \|\cdot\|_2)$, privo in entrambi i casi di elementi di norma minima.

minnorLip

4. Poniamo
$$\mathrm{Lip}[a,b] = \left\{ f \in C[a,b] : [f]_1 = \sup_{x \neq x'} \frac{|f(x) - f(x')|}{|x - x'|} < \infty \right\},$$
e sia $K = \left\{ f \in \mathrm{Lip}[0,1] : \|f\|_\infty \le 4,\ [f]_1 \le 8,\ \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt = 1 \right\}$. Si provi che K è un convesso chiuso e non vuoto di $L^2(0,1)$, e che $\min_{f \in K} \|f\|_2 > 1$.

calcproj

5. Poniamo
$$K_2 = \{f \in L^2(a,b) : \|f\|_2 \le 1\}, \quad K_\infty = \{f \in L^\infty(a,b) : \|f\|_\infty \le 1\}.$$
Dimostrare che K_2 e K_∞ sono convessi chiusi di $L^2(a,b)$ e determinare esplicitamente le proiezioni P_{K_2} e P_{K_∞}.

projC

6. Poniamo
$$K = \{f \in L^2(a,b) : f \ge 0 \text{ q.o. in } [a,b]\}, \qquad K_0 = K \cap C[a,b].$$
   (i) Si verifichi che K e K_0 sono sottoinsiemi convessi di $L^2(a,b)$.
   (ii) Si provi che K è chiuso in $L^2(a,b)$ e che $K \cap L^\infty(a,b)$ è chiuso in $L^\infty(a,b)$, mentre K_0 è chiuso in $L^\infty(a,b)$ ma non in $L^2(a,b)$.
   (iii) Si determini esplicitamente la proiezione P_K.

chnonconv 7. In uno spazio di Hilbert, un sottoinsieme chiuso non possiede necessariamente un elemento di norma minima, né questo, se esiste, è necessariamente unico.

densL2 8. Sia X uno spazio misurato. Si provi che $\mathcal{S}_0$ è denso in $L^2(X)$; se ne deduca che $C[a,b]$ è denso in $L^2(a,b)$.
[**Traccia:** adattare le dimostrazioni delle proposizioni 4.7.1 e 4.7.5.]

contraL2 9. *(Continuità delle traslazioni in $L^2(\mathbb{R}^N)$)* si provi che:

(i) $C_c(\mathbb{R}^N)$ e $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ sono densi in $L^2(\mathbb{R}^N)$;

(ii) per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ si ha

$$\lim_{|h|_N \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+h) - f(x)|^2 \, dx = 0.$$

[**Traccia:** per (i), si faccia uso dell'esercizio 8.1.8 e si adattino le dimostrazioni delle proposizioni 4.7.3 e 4.7.5; per (ii) si utilizzi la proprietà provata in (i).]

sspperp 10. Determinare $M^\perp$ nei casi seguenti:

(i) $M = \{f \in L^2(a,b) : f = \text{costante q.o.}\}$,

(ii) $M = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{ è dispari}\}$,

(iii) $M = \overline{[\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}]} \subseteq L^2(a,b)$

(ove $\overline{[\{f_i\}_{i\in I}]}$ indica il sottospazio chiuso generato dalla famiglia $\{f_i\}_{i\in I}$, cioè la chiusura dell'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi della famiglia).

2altratribu 11. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato e sia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ un'altra σ-algebra.

(i) Il sottospazio $L^2(X, \mathcal{G}, \mu)$ è chiuso in $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$?

(ii) Si caratterizzi esplicitamente tale sottospazio nei due casi seguenti:

(a) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{G} = \mathcal{B}$, $\mathcal{F} = \mathcal{M}$, $\mu = m$;

(b) $X = [0,1]$, $\mathcal{G} = \{\emptyset, [0,1]\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{M}$, $\mu = m$.

trigorto 12. Si provi che le funzioni $1, \cos nx, \sin nx$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ sono a due a due ortogonali in $L^2(-\pi, \pi)$.

minespl 13. Determinare:

(i) $\min\{\int_{-\pi}^{\pi} |x - a - b\sin x - c\sin^2 x|^2 dx : a, b, c \in \mathbb{R}\}$;

(ii) $\min\{\int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx : a, b, c \in \mathbb{R}\}$;

(iii) la proiezione ortogonale del vettore $1 + \sin x + \cos x + \sin^3 x$ sul sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato da $\{1, \sin x, \sin 3x\}$.

biorto 14. Sia H uno spazio di Hilbert, sia $S \subseteq H, S \neq \emptyset$. Provare che $S^{\perp\perp} = \overline{[S]}$.

Sneqbiperp

15. Sia $H = (c_{00}, \|\cdot\|_2)$, e sia $S = \left\{x \in c_{00} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} = 0\right\}$. Provare che S è un sottospazio chiuso di H con $S^{\perp\perp} \neq \overline{[S]}$.
[**Traccia:** si verifichi per induzione che $z \in S^{\perp}$ se e solo se $z_n = \frac{1}{n} z_1$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, e se ne deduca che $S^{\perp} = \{0\}$.]

min=max

16. Sia M un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert H. Si dimostri che

$$\min_{x \in M} \|x - y\| = \max\{|(z, y)| : z \in M^{\perp}, \|z\| = 1\}.$$

PiPj

17. Siano $P_1, \ldots, P_n$ proiezioni ortogonali sui sottospazi chiusi $M_1, \ldots, M_n$ di uno spazio di Hilbert H. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) $P_i P_j = 0$ se $i \neq j$;

(ii) $M_1, \ldots, M_n$ sono a due a due ortogonali;

(iii) per ogni $k = 1, \ldots, n$ e per ogni k-pla di indici distinti $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$, l'operatore $P = \sum_{h=1}^{k} P_{i_h}$ è una proiezione ortogonale.

Descrivere in tal caso l'immagine $R(P)$.

P1-P2

18. Siano P_1, P_2 proiezioni ortogonali sui sottospazi chiusi M_1, M_2 di uno spazio di Hilbert H. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) $M_1 \subseteq M_2$;

(ii) $P = P_2 - P_1$ è una proiezione ortogonale.

Descrivere in tal caso l'immagine $R(P)$.

M1+M2

19. Sia H uno spazio di Hilbert, e siano M_1, M_2 due sottospazi chiusi di H con $M_1 \cap M_2 = \{0\}$; poniamo $M_1 + M_2 = \{x + y : x \in M_1, y \in M_2\}$. Si provino i seguenti enunciati:

(i) se M_1 e M_2 sono ortogonali, allora $M_1 + M_2$ è un sottospazio chiuso;

(ii) se H ha dimensione finita allora $M_1 + M_2$ è chiuso;

(iii) detto M il sottospazio generato da $M_1 \cup M_2$, risulta $\overline{M_1 + M_2} = \overline{M}$.

sspradiali

20. Sia $B = \{x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : |x|_2 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} < 1\}$, e consideriamo l'insieme delle funzioni di $L^2(B)$ di tipo *radiale*:

$$R = \left\{f \in L^2(B) : f(x) = \varphi(|x|_2) \text{ q.o. in } B\right\},$$

ove $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ è un'arbitraria funzione di $L^2(0, 1; r\,dr)$, variabile al variare di f.

(i) Provare che R è un sottospazio chiuso di $L^2(B)$.

(ii) Descrivere il sottospazio $R^{\perp}$.

(iii) Determinare esplicitamente la proiezione ortogonale P_R.

8.2 Il duale di uno spazio di Hilbert

dualhilb

Un'altra somiglianza fra gli spazi di Hilbert e gli spazi euclidei $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{C}^N$ è il fatto che l'insieme dei funzionali lineari e continui su uno spazio di Hilbert H è uno spazio isomorfo ed isometrico ad H stesso. Vale infatti il seguente fondamentale risultato:

dualisom

Teorema 8.2.1 (di Riesz-Fréchèt) *Sia H uno spazio di Hilbert. Per ogni $F \in H^*$ esiste un unico $z \in H$ tale che*

$$Fx = (x, z)_H \qquad \forall x \in H,$$

ed inoltre si ha

$$\|F\|_{H^*} = \|z\|_H.$$

Dimostrazione Sia $F \in H^*$: se $F = 0$, allora scelto $z = 0$ si ha ovviamente la tesi. Supponiamo dunque $F \neq 0$; allora il sottospazio

$$M = \ker F = \{x \in H : Fx = 0\}$$

è chiuso e non coincide con H, cosicché il suo sottospazio ortogonale $M^\perp$ contiene propriamente $\{0\}$. Scegliamo allora un arbitrario elemento $w \in M^\perp \setminus \{0\}$: allora $Fw \neq 0$ e per ogni $x \in H$ si ha

$$F\left(x - \frac{Fx}{Fw}\, w\right) = 0$$

cioè

$$x - \frac{Fx}{Fw}\, w \in M.$$

Dunque, essendo $w \in M^\perp$,

$$(x - \frac{Fx}{Fw}\, w, w)_H = 0 \qquad \forall x \in H,$$

da cui

$$Fx = \frac{Fw}{\|w\|_H^2}(x, w)_H \qquad \forall x \in H;$$

in definitiva, scelto

$$z = \frac{\overline{Fw}}{\|w\|_H^2}\, w\,,$$

risulta

$$Fx = (x, z)_H \qquad \forall x \in H.$$

Da questa relazione segue subito $\|F\|_{H^*} \leq \|z\|_H$, mentre dalla definizione di z otteniamo

$$\|z\|_H = \frac{|Fw|}{\|w\|_H} \leq \|F\|_{H^*}.$$

Ciò prova che il vettore z ha i requisiti richiesti. Resta da verificare l'unicità di z: se $z' \in H$ è un altro vettore tale che

$$Fx = (x, z')_H \qquad \forall x \in H,$$

allora avremo

$$(x, z - z')_H = Fx - Fx = 0 \qquad \forall x \in H,$$

e scelto $x = z - z'$ otteniamo subito $z = z'$. $\square$

isoantil **Osservazione 8.2.2** Vi è dunque una isometria bigettiva $j : H \to H^*$, definita da $z \mapsto j_z$, ove j_z è il funzionale definito da

$$j_z(x) = (x, z)_H \qquad \forall x \in H,$$

che rende ogni spazio di Hilbert isomorfo al suo duale. Si noti che j è un operatore *antilineare*, in quanto per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e per ogni $x, z, z' \in H$ si ha

$$j_{\alpha z + \beta z'}(x) = (x, \alpha z + \beta z')_H = \overline{\alpha}\,(x, z)_H + \overline{\beta}\,(x, z')_H = \overline{\alpha}\, j_z(x) + \overline{\beta}\, j_{z'}(x).$$

Esercizi 8.2

estfl 1. Sia H uno spazio di Hilbert, sia M un sottospazio di H; sia inoltre F un funzionale lineare e continuo su M. Provare che esiste un unico funzionale $\overline{F}$ lineare e continuo su H, tale che

$$\overline{F}|_M = F, \qquad \|\overline{F}\|_{H^*} = \|F\|_{M^*}.$$

kerFdenso 2. Sia H uno spazio di Hilbert, e sia $F : H \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare non continuo. Si provi che $\ker F$ è denso in H.
[**Traccia:** sia $\{y_n\}$ tale che $\|y_n\| \to 0$ e $Fy_n = 1$; se $z \in (\ker F)^\perp$, si provi che $\frac{z}{Fz} - y_n \in \ker F$ e se ne deduca che $z = 0$.]

carattL2 3. Sia $f \in L^1(a, b)$. Si provi che $f \in L^2(a, b)$ se e solo se esiste $g \in AC[a, b]$, crescente, tale che

$$\left[\int_x^y f(t)\,dt\right]^2 \leq [g(y) - g(x)](y - x) \qquad \forall x, y \in [a, b].$$

[**Traccia:** per l'implicazione ($\Longleftarrow$), utilizzare la densità delle funzioni costanti a tratti in $L^2(a, b)$ (esercizio 8.1.8), e la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.]

aggiun 4. Sia H uno spazio di Hilbert. Fissato $T \in \mathcal{L}(H)$, si verifichi che la relazione

$$(Sx, y)_H = (x, Ty)_H \quad \forall x, y \in H$$

definisce univocamente un operatore $S : H \to H$ lineare e limitato, e che risulta $\|S\|_{\mathcal{L}(H)} = \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$. L'operatore S si dice *aggiunto* di T e si denota con T^*.

aagg

5. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore *autoaggiunto*, ossia tale che
$$(Tx, y) = (x, Ty) \quad \forall x, y \in H;$$
supponiamo inoltre che esista $c > 0$ per cui risulti $\|Tx\| \geq c\|x\|$ per ogni $x \in H$. Provare che T è bigettivo e T^{-1} è continuo.

eqpro

6. Sia H uno spazio di Hilbert. Si provi che un operatore $P \in \mathcal{L}(H)$ è una proiezione ortogonale se e solo se si ha $P^2 = P$ e P è autoaggiunto (secondo la definizione fornita nell'esercizio precedente).

Tspeciale

7. Siano $u = \{u_k\}, v = \{v_k\}$ elementi di ℓ^2. Indicata con $\{e^{(n)}\}$ la base canonica di ℓ^2, definiamo
$$Te^{(n)} = u_n\, v \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
(i) Si estenda T a tutto ℓ^2 in modo che $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ e se ne calcoli la norma.
(ii) Si determinino $R(T)$ e $\ker T$.
(iii) Sotto quali ipotesi su u e v risulta $T = T^2$?
(iv) Sotto quali ipotesi su u e v l'operatore T è una proiezione ortogonale?

normaA*

8. Sia H uno spazio di Hilbert. Se $A \in \mathcal{L}(H)$, detto A^* l'aggiunto di A introdotto nell'esercizio 8.2.4, si provi che:
(i) $\|A \circ A^*\|_{\mathcal{L}(H)} = \|A^* \circ A\|_{\mathcal{L}(H)} = \|A\|^2_{\mathcal{L}(H)}$;
(ii) Se A è autoaggiunto, allora $\|A^n\|_{\mathcal{L}(H)} = \|A\|^n_{\mathcal{L}(H)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

psaagg

9. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto e *positivo*, ossia tale che $(Ax, x) \geq 0$ per ogni $x \in H$. Si provi che
$$|(Ax, y)| \leq \sqrt{(Ax, x)}\sqrt{(Ay, y)} \qquad \forall x, y \in H,$$
e che se A è *strettamente positivo*, ossia $(Ax, x) > 0$ per ogni $x \in H \setminus \{0\}$, allora $(x, y)_1 = (Ax, y)$ definisce un prodotto scalare in H.

spautoagg

10. Sia H uno spazio di Hilbert. Si provi che:
(i) la somma e il prodotto per scalari reali di un operatore autoaggiunto sono operatori autoaggiunti;
(ii) l'inverso di un operatore autoaggiunto, se esiste, è autoaggiunto;
(iii) Se S, T sono autoaggiunti, allora ST è autoaggiunto se e solo se $ST = TS$.

nilpo

11. Sia H uno spazio di Hilbert. Un operatore $K \in \mathcal{L}(H)$ si dice *nilpotente* se $K \neq 0$ ed esiste $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $K^n = 0$.
(i) fornire un esempio di operatore nilpotente;
(ii) provare che un operatore autoaggiunto non nullo non può essere nilpotente.

T=I-2P

12. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto tale che $T^2 = I$. Si provi che $T = I - 2P$, ove P è una proiezione ortogonale.

8.3 Sistemi ortonormali

sistorto

In $\mathbb{R}^N$ ed in $\mathbb{C}^N$, come sappiamo, ogni elemento x si può scrivere in modo unico come combinazione lineare degli elementi di una fissata base. Vediamo se è possibile trovare una proprietà analoga negli spazi con prodotto scalare, e in particolare negli spazi di Hilbert.

so **Definizione 8.3.1** *Una famiglia $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ di elementi di uno spazio con prodotto scalare H si chiama* sistema ortonormale *se si ha*

$$(e_\alpha, e_\beta)_H = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & se \quad \alpha = \beta \\ 0 & se \quad \alpha \neq \beta \end{cases} \qquad \forall \alpha, \beta \in A.$$

Vediamo qualche esempio.

tantiso **Esempi 8.3.2 (1)** Fissato $e \in H$ con $\|e\| = 1$, l'insieme $\{e\}$ costituisce un sistema ortonormale in H.

(2) $\{e_1, \ldots, e_N\}$ è un sistema ortonormale in $\mathbb{R}^N$ ed in $\mathbb{C}^N$.

(3) In ℓ^2 un sistema ortonormale è dato dalla famiglia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ove e_n è l'elemento con tutte le componenti nulle tranne la n-sima che vale 1.

(4) Se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ e se f è pari e g è dispari, con $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, allora $\{f, g\}$ è un sistema ortonormale in $L^2(\mathbb{R})$.

(5) Il *sistema trigonometrico*

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ , \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \ , \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \ ; \ n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

è un sistema ortonormale in $L^2(-\pi, \pi)$ (esercizio 8.1.12).

(6) In $L^2(a, b)$ esistono altri sistemi ortonormali: vedere ad esempio gli esercizi 8.3.11, 8.3.12 e 8.3.13.

hilbnonsep **Osservazione 8.3.3** Se H è separabile, allora ogni sistema ortonormale $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è costituito al più da un'infinità numerabile di elementi. Infatti si ha

$$\|e_\alpha - e_\beta\| = \sqrt{2} \qquad \forall \alpha \neq \beta,$$

e dunque le palle $B\left(e_\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ son tutte disgiunte. Sia D un insieme numerabile denso in H: poiché ogni palla $B\left(e_\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ deve contenere almeno un elemento di D, si conclude che A è al più numerabile.

Hnonnum **Esempio 8.3.4** Costruiamo uno spazio di Hilbert non separabile. Sia

$$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} \text{ è numerabile}\},$$

e poniamo

$$H = \left\{ f \in E : \sum_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|^2 < \infty \right\} :$$

la definizione ha senso perché la somma è fatta al più su un'infinità numerabile di punti, la serie è a termini positivi e l'ordine degli addendi è irrilevante. L'insieme H è dotato del prodotto scalare

$$(f,g)=\sum_{x\in\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)},$$

il quale ha senso perché tale somma costituisce una serie assolutamente convergente. Lo spazio H è di Hilbert, come è facile verificare; esso non è separabile perché possiede il sistema ortonormale $\{\chi_{\{x\}}\}_{x\in\mathbb{R}}$, il quale è più che numerabile. Si noti che H coincide con $L^2(\mathbb{R},\mathcal{F},\nu)$, ove ν è la misura "cardinalità" e

$$\mathcal{F}=\{A\subseteq\mathbb{R}: A,\ \text{oppure } A^c,\ \text{è numerabile}\}.$$

Veniamo alla proprietà fondamentale dei sistemi ortonormali, ossia la disuguaglianza di Bessel. Premettiamo un po' di terminologia.

fourier **Definizione 8.3.5** *Sia H uno spazio con prodotto scalare e sia $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un sistema ortonormale in H. Se $x\in H$, i numeri $(x,e_\alpha)_H$ si chiamano* coefficienti di Fourier *di x relativi al sistema $\{e_\alpha\}$. La serie $\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)_H\ e_\alpha$ (la quale, come si vedrà nell'osservazione 8.3.7(1), contiene al più un'infinità numerabile di termini) si chiama* serie di Fourier *di x relativa al sistema $\{e_\alpha\}$.*

A priori non sappiamo dire se la serie di Fourier di un elemento $x\in H$ converga, né, tantomeno, se essa converga proprio a x come sarebbe lecito aspettarsi.

disbessel **Proposizione 8.3.6 (disuguaglianza di Bessel)** *Sia $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un sistema ortonormale in uno spazio con prodotto scalare H. Allora*

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^N |(x,e_{\alpha_i})_H|^2 : N\in\mathbb{N}^+,\alpha_1,\dots\alpha_N\in A\right\}\le\|x\|_H^2\qquad\forall x\in H.$$

Dimostrazione Per ogni $N\in\mathbb{N}^+$ e per ogni N-pla di indici distinti $\alpha_1,\dots\alpha_N$ si ha, grazie all'ortonormalità di $\{e_\alpha\}$,

$$\begin{aligned}
0 &\le \left\|x-\sum_{i=1}^N (x,e_{\alpha_i})e_{\alpha_i}\right\|_H^2 = \\
&= \|x\|_H^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(x,\sum_{i=1}^N (x,e_{\alpha_i})_H\,e_{\alpha_i}\right)_H + \left\|\sum_{i=1}^N (x,e_{\alpha_i})_H\,e_{\alpha_i}\right\|_H^2 = \\
&= \|x\|_H^2 - 2\,\mathrm{Re}\sum_{i=1}^N \overline{(x,e_{\alpha_i})_H}\,(x,e_{\alpha_i})_H + \sum_{i,j=1}^N (x,e_{\alpha_i})_H\,\overline{(x,e_{\alpha_j})_H}\,\delta_{ij} = \\
&= \|x\|_H^2 - 2\sum_{i=1}^N |(x,e_{\alpha_i})_H|^2 + \sum_{i=1}^N |(x,e_{\alpha_i})_H|^2 = \|x\|_H^2 - \sum_{i=1}^N |(x,e_{\alpha_i})_H|^2.
\end{aligned}$$

Ne segue la tesi. □

convFou **Osservazioni 8.3.7 (1)** Se lo spazio H non è separabile, dato un qualunque sistema ortonormale $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è facile verificare che per ogni $x \in H$ l'insieme degli indici $\alpha \in A$ tali che $(x, e_\alpha)_H \neq 0$ è al più numerabile: infatti per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ l'insieme $\{\alpha \in A : |(x, e_\alpha)_H| > 1/k\}$ è finito in virtù della disuguaglianza di Bessel.

(2) Se H è uno spazio di Hilbert, dalla disuguaglianza di Bessel e da (1) segue che la serie di Fourier di un generico $x \in H$, relativa a un qualunque sistema ortonormale, converge in H; infatti con un conto del tutto analogo a quello svolto nella dimostrazione precedente si verifica che, detti α_n gli indici tali che $(x, e_{\alpha_n})_H \neq 0$ e posto $w_N = \sum_{n=0}^{N} (x, e_{\alpha_n})_H \, e_{\alpha_n}$, si ha

$$\|w_N - w_M\|_H^2 = \sum_{n=M+1}^{N} |(x, e_{\alpha_n})_H|^2 \qquad \forall N, M \in \mathbb{N} \text{ con } N > M,$$

e dunque $\{w_N\}_{N\in\mathbb{N}}$, essendo una successione di Cauchy, converge in H. Non è detto che la somma della serie di Fourier di x sia proprio x: basta pensare al caso banale di un sistema ortonormale costituito da un solo elemento.

socompl **Definizione 8.3.8** *Un sistema ortonormale $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ in uno spazio di Hilbert H si dice* completo *se $\overline{[\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}]} = H$, ossia se le combinazioni lineari finite di elementi di $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ sono dense in H.*

In altre parole, un sistema ortonormale $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è completo se e solo se $\{e_\alpha\}^\perp = \{0\}$: ciò è facile conseguenza del teorema delle proiezioni (teorema 8.1.6). Vediamo alcuni esempi di sistemi ortonormali completi.

tantisoc **Esempi 8.3.9 (1)** Il sistema $\{e_1, \dots, e_N\}$ è completo in $\mathbb{R}^N$ ed in $\mathbb{C}^N$.

(2) Il sistema $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è completo in ℓ^2.

(3) Il sistema trigonometrico è completo in $L^2(\pi, \pi)$ (esercizio 8.3.3).

(4) I *polinomi di Legendre*, definiti da

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\, 2^n \sqrt{n + \frac{1}{2}}} \, \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n, \qquad x \in [-1, 1], \ n \in \mathbb{N},$$

costituiscono un sistema ortonormale in $L^2(-1, 1)$ (esercizio 8.3.11); esso è anche completo. Ciò segue dalla densità dei polinomi in $C[-1, 1]$ (esercizio 4.7.11) e dalla densità di $C[-1, 1]$ in $L^2(-1, 1)$ (proposizione 4.7.3 ed osservazione 4.7.4).

(5) I *polinomi di Hermite*, definiti da

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\, 2^n \sqrt{\pi}}} \, e^{x^2} \, \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}^+,$$

formano un sistema ortonormale completo in $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}, e^{-x^2} dx)$. Li esamineremo in dettaglio, provando questo fatto, nell'esempio 8.4.15.

Proposizione 8.3.10 *Ogni spazio di Hilbert $H \neq \{0\}$ ha un sistema ortonormale completo.*

Dimostrazione Faremo uso del *lemma di Zorn*. Ricordiamo che un *ordinamento parziale* $\leq$ su un insieme P è una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva, e si dice che $(P, \leq)$ è un insieme *parzialmente ordinato*. Un sottoinsieme Q di P si dice *totalmente ordinato* se per ogni $a, b \in Q$ si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$. Un elemento $c \in P$ è un *maggiorante* per Q se si ha $q \leq c$ per ogni $q \in Q$, e un elemento $m \in P$ è *massimale* se non esiste alcun $x \in P$, diverso da m, tale che $m \leq x$ (ossia, $x \in P$ e $m \leq x$ implica $x = m$). Ciò posto, vale questo risultato che non dimostriamo:

zorn **Lemma 8.3.11 (di Zorn)** *Sia $(P, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato. Se ogni sottoinsieme totalmente ordinato Q di P ha un maggiorante in P, allora in P esiste un elemento massimale.* □

Prendiamo ora

$$P = \{B \subset H : B \text{ è un sistema ortonormale in } H\} :$$

chiaramente P è un insieme non vuoto che è parzialmente ordinato rispetto alla relazione di inclusione $\subseteq$. Verifichiamo le ipotesi del lemma di Zorn. Se Q è un sottoinsieme totalmente ordinato di P, verifichiamo che l'insieme $B_0 = \bigcup_{B \in Q} B$ è un elemento di P che è maggiorante per Q: per cominciare, ogni $e \in B_0$ ha norma unitaria, in quanto è membro di un certo sistema ortonormale $B \in Q$. Poi, se $e, e' \in B_0$ ed $e \neq e'$, allora sarà $e \in B$ ed $e' \in B'$ per certi $B, B' \in Q$; dato che Q è totalmente ordinato, sarà ad esempio $B \subseteq B'$. Ma allora avremo $e, e' \in B'$ e quindi, per l'ortonormalità del sistema B', risulterà $(e, e')_H = 0$. Ciò prova che B_0 è un sistema ortonormale in H; dunque B_0 è un elemento di P. D'altronde è chiaro per definizione di B_0 che $B \subseteq B_0$ per ogni $B \in Q$, cosicché B_0 è un maggiorante di Q.
Per il lemma di Zorn, deduciamo che in P esiste un elemento massimale $\overline{B}$; proviamo che il sistema ortonormale $\overline{B}$ è completo. Se così non fosse, esisterebbe $x \in \overline{B}^{\perp} \setminus \{0\}$, e quindi $\overline{B} \cup \{\frac{x}{\|x\|}\}$ sarebbe un sistema ortonormale, cioè un elemento di P, che contiene strettamente $\overline{B}$, contraddicendo la massimalità di $\overline{B}$. □

La proposizione che segue caratterizza i sistemi ortonormali completi.

besspars **Proposizione 8.3.12** *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un sistema ortonormale in H. I seguenti fatti sono equivalenti:*

(i) *$\{e_\alpha\}$ è completo;*

(ii) *$\{e_\alpha\}^{\perp} = \{0\}$;*

(iii) *vale l'*uguaglianza di Bessel

$$\|x\|_H^2 = \sum_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)_H|^2 \qquad \forall x \in H;$$

(iv) *vale l'*identità di Parseval

$$(x,y)_H = \sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)_H\,\overline{(y,e_\alpha)_H} \qquad \forall x,y\in H;$$

(v) *per ogni $x\in H$ la serie di Fourier di x, cioè $\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)_H\,e_\alpha$, converge in H ed ha somma x.*

Ricordiamo che in virtù dell'osservazione 8.3.7 le serie che compaiono nell'enunciato contengono al più un'infinità numerabile di termini.

Dimostrazione **(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)** Lo sappiamo già, come osservato subito dopo la definizione 8.3.8.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (v) Se vale (v) e $x\perp\{e_\alpha\}$, allora

$$x = \sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)_H\,e_\alpha = \sum_{\alpha\in A}0\cdot e_\alpha = 0.$$

Viceversa, supponiamo che valga (ii). Dall'osservazione 8.3.7 segue che la serie di Fourier di x converge in H ad un certo elemento w; si tratta di verificare che $w=x$. Ma per ogni fissato $\beta\in A$ si ha, in virtù della continuità del prodotto scalare,

$$(w,e_\beta)_H = \left(\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)_H\,e_\alpha,e_\beta\right)_H = \sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)_H\,(e_\alpha,e_\beta)_H = (x,e_\beta)_H,$$

da cui, per l'arbitrarietà di β, otteniamo $w-x\in\{e_\alpha\}^\perp$; per (ii), ciò significa $w-x=0$.

(iii) $\Longleftrightarrow$ (v) Questa doppia implicazione è immediata conseguenza della seguente uguaglianza che già conosciamo: per ogni $x\in H$, per ogni $N\in\mathbb{N}^+$ e per ogni $\alpha_1,\dots,\alpha_N\in A$ si ha

$$\left\|x-\sum_{n=1}^N(x,e_{\alpha_n})_H\,e_{\alpha_n}\right\|_H^2 = \|x\|_H^2-\sum_{n=1}^N|(x,e_{\alpha_n})_H|^2;$$

basta ora passare al limite per $N\to\infty$.

(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) Se vale (iv), basta scegliere $y=x$ per ottenere (iii). Viceversa, se vale (iii), possiamo scrivere

$$\|x+y\|_H^2 = \|x\|_H^2+\|y\|_H^2+2\,\mathrm{Re}(x,y)_H$$

ed anche

$$\begin{aligned}\|x+y\|_H^2 &= \sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)_H+(y,e_\alpha)_H|^2 = \\ &= \sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)_H|^2+\sum_{\alpha\in A}|(y,e_\alpha)_H|^2+2\,\mathrm{Re}\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)_H\overline{(y,e_\alpha)_H},\end{aligned}$$

da cui

$$\mathrm{Re}\,(x,y)_H = \mathrm{Re}\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)_H\overline{(y,e_\alpha)_H}.$$

In modo analogo, considerando $x+iy$ in luogo di $x+y$, si ricava

$$\mathrm{Im}\,(x,y)_H = \mathrm{Im}\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)_H\overline{(y,e_\alpha)_H}.$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

Esercizi 8.3

bestappr

1. (*Proprietà di miglior approssimazione*) Sia $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un sistema ortonormale nello spazio di Hilbert H; fissati $\alpha_1,\dots,\alpha_N\in A$, sia $M=[\{e_{\alpha_1},\dots,e_{\alpha_N}\}]$. Si provi che

$$P_M x = \sum_{n=1}^{N}(x,e_{\alpha_n})_H\, e_{\alpha_n}\,.$$

potridens

2. Per ogni $n\in\mathbb{N}$ definiamo

$$P_n(t) = k_n\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n, \qquad t\in[-\pi,\pi],$$

ove k_n è una costante scelta in modo che $\int_{-\pi}^{\pi}P_n(t)dt=1$. Si provi che:

(i) P_n è un polinomio trigonometrico di grado n, ossia è combinazione lineare delle $2n+1$ funzioni $1,\cos kx,\sin kx$, $1\le k\le n$, ed è non negativo in $]-\pi,\pi[$;

(ii) risulta

$$k_n = \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n dt} \le \frac{n+1}{4} \qquad \forall n\in\mathbb{N},$$

e dunque

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\delta\le|t|\le\pi} P_n(t) = 0 \qquad \forall\delta\in]0,\pi[\,;$$

(iii) se f è una funzione continua su $\mathbb{R}$ e periodica di periodo 2π, allora per ogni $n\in\mathbb{N}^+$ la funzione

$$f_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)P_n(s)ds, \qquad t\in[-\pi,\pi],$$

è un polinomio trigonometrico di grado al più n;

(iv) si ha $f_n\to f$ uniformemente in $[-\pi,\pi]$ per $n\to\infty$.

sistri

3. Si provi che il sistema trigonometrico

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\ ,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\ ;\ n\in\mathbb{N}^+\right\},$$

o, equivalentemente, il sistema

$$\left\{\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}};\ k\in\mathbb{Z}\right\},$$

è ortonormale completo in $L^2(-\pi,\pi)$.
[**Traccia:** si provi che i polinomi trigonometrici sono densi in $C_c(\,]-\pi,\pi[\,)$, e quindi anche in $L^2(-\pi,\pi)$, facendo uso dell'esercizio 8.3.2.]

sF2modi

4. Sia $f\in L^2(-\pi,\pi)$. Si verifichi che la serie di Fourier di f (relativa al sistema trigonometrico) si può scrivere nei due modi equivalenti

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\gamma_k e^{ikt}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

ove

$$\gamma_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)e^{-iks}ds\qquad\forall k\in\mathbb{Z},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\cos ns\ ds,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\sin ns\ ds\qquad\forall n\in\mathbb{N}^+.$$

Si verifichi inoltre che $a_0=2\gamma_0$, $a_n=\gamma_n+\gamma_{-n}$, $b_n=i(\gamma_n-\gamma_{-n})$ per ogni $n\in\mathbb{N}^+$.

PortD

5. Posto

$$P=\{f\in L^2(-\pi,\pi):f\text{ è pari}\},\quad D=\{f\in L^2(-\pi,\pi):f\text{ è dispari}\},$$

si provi che P e D sono sottospazi chiusi di $L^2(-\pi,\pi)$ tali che $P=D^\perp$.

2sorto

6. Provare che i sistemi

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right\}_{n\in\mathbb{N}^+},\qquad\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right\}\cup\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx\right\}_{n\in\mathbb{N}^+}$$

sono entrambi ortonormali e completi in $L^2(0,\pi)$.
[**Traccia:** per la completezza si prolunghi una $f\in L^2(0,\pi)$, ortogonale a tutti gli elementi di uno dei due sistemi, in modo pari oppure dispari su $\,]-\pi,\pi[\ldots.$]

limlim

7. Sia H uno spazio di Hilbert separabile e sia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ un sistema ortonormale completo in H. Sia $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}^+}\subset H$ una successione limitata. Se

$$\lim_{m\to\infty}(e_n,y_m)_H=0\qquad\forall n\in\mathbb{N}^+,$$

si provi che

$$\lim_{m\to\infty}(x,y_m)_H=0\qquad\forall x\in H.$$

sFspec 8. Si scriva la serie di Fourier (relativa al sistema trigonometrico) di

$$f(x) = \left(\frac{\pi - |x|}{2}\right)^2, \quad x \in [-\pi, \pi];$$

si provi che tale serie converge uniformemente e se ne deduca che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

sFconvo 9. Fissata $f \in L^2(-\pi, \pi)$, la si prolunghi a tutto $\mathbb{R}$ per periodicità. Posto, per ogni $g \in L^2(-\pi, \pi)$,

$$f \star g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy, \qquad x \in [-\pi, \pi],$$

si provi che $f \star g$ è continua e che la sua serie di Fourier, relativa al sistema $\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\}_{k\in\mathbb{Z}}$, converge uniformemente in $[-\pi, \pi]$.

serieFfac 10. Sia $f \in AC[-\pi, \pi]$ tale che $f(-\pi) = f(\pi)$, e poniamo $\gamma_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-iks}ds$, $k \in \mathbb{Z}$. Si provi che:

(i) $f' \in L^2(-\pi, \pi)$ se e solo se $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|\gamma_k|^2 < \infty$;

(ii) in tal caso la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k e^{ikt}$ converge assolutamente ed uniformemente a f in $[-\pi, \pi]$;

(iii) tale serie è inoltre derivabile termine a termine, e la serie delle derivate converge a f' in $L^2(-\pi, \pi)$;

(iv) si deduca che se $f \in C^2[-\pi, \pi]$ con $f(-\pi) = f(\pi) = 0$, la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k e^{ikt}$ converge assolutamente ed uniformemente a f in $[-\pi, \pi]$, la serie delle derivate prime converge assolutamente ed uniformemente a f' in $[-\pi, \pi]$ e la serie delle derivate seconde converge a f'' in $L^2(-\pi, \pi)$.

poLeg 11. Si verifichi che il sistema dei polinomi di Legendre

$$P_n(x) = \frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{n!\,2^n}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \qquad x \in [-1, 1],\ n \in \mathbb{N},$$

è ortonormale in $L^2(-1, 1)$.

poHe 12. Si consideri il sistema dei polinomi di Hermite introdotti nell'esempio 8.3.9 (5).

(i) Si verifichi che

$$\frac{d}{dx}\left[H_{n-1}(x)\,e^{-x^2}\right] = -\sqrt{2n}\,H_n(x)\,e^{-x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Si mostri che il sistema $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è ortonormale in $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}, e^{-x^2}dx)$.

(iii) Si provi che se $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}, e^{-x^2}dx)$ è ortogonale a tutti gli H_n, allora f è ortogonale a tutti i polinomi.

[**Traccia:** per (iii), si usi l'induzione per mostrare che $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, x^n\, e^{-x^2}\, dx = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.]

fzRade

13. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\psi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $\psi_n(x) = (-1)^{[2^n x]}$, ove $[a]$ denota la parte intera di a. Dimostrare che:

(i) $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale in $L^2(0,1)$;

(ii) il sistema non è completo perché la funzione $g = 1 - 2\chi_{[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}$ è ortogonale a tutte le ψ_n;

(iii) risulta

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \psi_n(t) f(t)\ dt = 0 \qquad \forall f \in L^1(0,1).$$

prortoorto

14. Siano $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due sistemi ortonormali completi in $L^2(a,b)$ e $L^2(c,d)$ rispettivamente. Provare che il sistema $\{f_{nm}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$, ove

$$f_{nm}(x,y) = \varphi_n(x)\psi_m(y), \qquad (x,y) \in]a,b[\times]c,d[\,,$$

è ortonormale completo in $L^2(\,]a,b[\times]c,d[\,)$.

sorto2dim

15. Sia V il sottospazio di ℓ^2 generato dagli elementi $x = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ e $y = \{\frac{1}{2^n}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$; determinare un sistema ortonormale in V.

essoproj

16. Sia H uno spazio di Hilbert separabile e sia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ un sistema ortonormale completo in H. Per ogni $h \in \mathbb{N}^+$ poniamo

$$M_h = \left\{ x \in H :\ \exists c > 0 :\ |(x, e_n)_H| \le \frac{c}{n^h} \ \ \forall n \in \mathbb{N}^+ \right\},$$

$$K_h = \left\{ x \in H :\ |(x, e_n)_H| \le \frac{1}{n^h} \ \ \forall n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

(a) Verificare che:

(i) K_h è un convesso chiuso contenuto in M_h e $K_h \supset K_{h+1}$ per ogni $h \in \mathbb{N}^+$;

(ii) M_h è un sottospazio denso in H e $M_h \supset M_{h+1}$ per ogni $h \in \mathbb{N}^+$.

(b) Caratterizzare il convesso $K = \bigcap_{h=1}^{\infty} K_h$ e provare che il sottospazio $M = \bigcap_{h=1}^{\infty} M_h$ è denso in H.

(c) Scrivere esplicitamente gli operatori P_{K_h}, $h \in \mathbb{N}^+$, e P_K.

sossp

17. Sia H uno spazio di Hilbert separabile e sia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ un sistema ortonormale completo in H; si definisca

$$M = \left\{ x \in H : (x, e_{n+2})_H = \frac{1}{2}(x, e_n)_H \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

(i) Si verifichi che M è un sottospazio finito-dimensionale di H.

(ii) Si trovi una base di M.

(iii) Si determini la proiezione ortogonale P_M.

ordserorto 18. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di H fra loro ortogonali, e tali che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ sia convergente in H. Si dimostri che per ogni permutazione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la serie riordinata $\sum_{n=0}^{\infty} v_{\sigma(n)}$ è convergente e che si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \ .$$

Cosa succede se si toglie l'ipotesi $(v_n, v_m)_H = 0$ per $n \neq m$?

TT* 19. Sia H uno spazio di Hilbert separabile e siano $\{e_n\}, \{f_m\}$ sistemi ortonormali completi in H. Se $T \in \mathcal{L}(H)$, si provi che $\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2$ converge se e solo se $\sum_{m=0}^{\infty} \|T^* f_m\|^2$ converge (T^* è definito nell'esercizio 8.2.4), e che in tal caso le somme delle due serie coincidono con $\sum_{n,m=0}^{\infty} |(Te_n, f_m)|^2$.

operHS 20. Sia H uno spazio di Hilbert separabile, e sia $A \in \mathcal{L}(H)$ un *operatore di Hilbert-Schmidt*, ossia tale che esista un sistema ortonormale completo $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in H per cui $\sum_{n=0}^{\infty} \|Ae_n\|_H^2 < \infty$. Dimostrare che:

(i) l'operatore A^* (definito nell'esercizio 8.2.4) è di Hilbert-Schmidt;

(ii) per ogni sistema ortonormale completo $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ in H risulta

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|Af_m\|_H^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|Ae_n\|_H^2 < \infty;$$

(iii) la famiglia degli operatori di Hilbert-Schmidt su H è uno spazio di Hilbert col prodotto scalare

$$(S, T) = \sum_{j=0}^{\infty} (Sh_j, Th_j)_H \ ,$$

ove $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è un arbitrario sistema ortonormale completo in H;

(iv) il prodotto scalare sopra definito non dipende dalla scelta del sistema ortonormale, ossia per ogni coppia di sistemi ortonormali completi $\{e_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ si ha

$$\sum_{m=0}^{\infty} (Se_m, Te_m)_H = \sum_{k=0}^{\infty} (Sf_k, Tf_k)_H.$$

[**Traccia:** per (ii) si osservi che $(A^*)^* = A$ e si utilizzi l'esercizio precedente; per (iv) si faccia uso di (ii) e dell'identità di Parseval.]

limsinnx 21. (i) Fissato $[a, b] \subset \mathbb{R}$, si verifichi che

$$\lim_{n\to\infty} \int_F \sin nx \ dx = \lim_{n\to\infty} \int_F \cos nx \ dx = 0$$

per ogni sottoinsieme misurabile F di $[a, b]$.

(ii) Sia $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione crescente di numeri naturali; posto

$$E = \{x \in [a,b] : \exists \lim_{k\to\infty} \sin n_k x = \lambda(x)\},$$

si provi che $\lambda(x) = 0$ q.o. in E.

(iii) Si deduca che

$$\lim_{k\to\infty} \int_E \sin^2 n_k x \; dx = 0.$$

(iv) Si concluda che risulta $m(E) = 0$.

8.4 Trasformata di Fourier

trasfou

Vogliamo descrivere brevemente un operatore che è di fondamentale importanza in analisi ed in molti settori della matematica applicata: la trasformata di Fourier. Si tratta di uno strumento utilissimo, ad esempio, per trovare soluzioni esplicite di molte equazioni differenziali alle derivate parziali; interi capitoli dell'analisi numerica sono dedicati allo studio di algoritmi e procedure legati alla struttura di questo operatore e delle sue versioni "discrete". Noi ci limiteremo allo studio delle sue proprietà basilari, senza troppi approfondimenti.

Definizione 8.4.1 *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. La* trasformata di Fourier *di f è la funzione $\widehat{f}$ così definita:*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i(x,\xi)} \, dm_N(x), \qquad \xi \in \mathbb{R}^N,$$

dove (x,ξ) è il prodotto scalare in $\mathbb{R}^N$. L'operatore $f \mapsto \widehat{f}$ si indica con $\mathcal{F}$.

La funzione $\widehat{f}$ è dunque a valori complessi, anche se f è reale; ma in questo contesto è naturale prendere anche f a valori complessi. Ricordiamo che l'integrale per funzioni complesse è stato introdotto nell'esempio 7.2.7 (4) ed è soggetto alle usuali regole di calcolo. Calcoliamo la trasformata di Fourier in qualche caso significativo.

estras **Esempi 8.4.2 (1)** Sia $N = 1$ e $f = \chi_{[-1,1]}$: allora per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ si ha

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi} \, dx = \left[-\frac{e^{-ix\xi}}{i\xi} \right]_{-1}^{1} = \frac{i}{\xi} \left(e^{-i\xi} - e^{i\xi} \right) = 2 \, \frac{\sin \xi}{\xi}.$$

Si osservi che $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$: quindi l'operatore $\mathcal{F}$ non preserva la sommabilità delle funzioni.

(2) Calcoliamo la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{-a|x|^2}$, con $a > 0$ fissato: si ha

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-a|x|^2} e^{-i(x,\xi)} \, dm_N(x) = \prod_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax_j^2 - ix_j\xi_j} \, dx_j \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N;$$

quindi ci si riduce a

$$\widehat{f}(\xi) = [g(\xi)]^N,$$

ove

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - ix\xi}\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Per calcolare $g(\xi)$ osserviamo che, utilizzando il teorema 4.3.4 ed integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= -i \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ax^2 - ix\xi}\, dx = \frac{i}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dx}\, e^{-ax^2} \right] e^{-ix\xi}\, dx = \\ &= \frac{i}{2a} \left[e^{-ax^2} e^{-ix\xi} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{\xi}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - ix\xi}\, dx = -\frac{\xi}{2a} g(\xi). \end{aligned}$$

L'equazione differenziale $g'(\xi) = -\frac{\xi}{2a}\, g(\xi)$ ha le soluzioni $g(\xi) = ke^{-\frac{\xi^2}{4a}}$, con $k \in \mathbb{C}$; d'altra parte per l'esercizio 5.3.2 si ha

$$k = g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\ ,$$

cosicché

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - ix\xi}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

ed in definitiva

$$\widehat{f}(\xi) = [g(\xi)]^N = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

basicFou **Proposizione 8.4.3** *La trasformata di Fourier è un operatore lineare e continuo dallo spazio $L^1(\mathbb{R}^N)$ allo spazio $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, con norma uguale a 1. Inoltre per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ la funzione $\widehat{f}$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}^N$ e verifica*

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

Dimostrazione Dalla definizione segue subito

$$|\widehat{f}(\xi)| \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

e dunque $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^N), L^\infty(\mathbb{R}^N))$ con $\|\mathcal{F}\| \le 1$. D'altra parte scegliendo $f(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ si ha, ricordando l'esempio 8.4.2 (2),

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \right)^N = (2\pi)^{\frac{N}{2}} = \|\widehat{f}\|_\infty\ ,$$

e dunque $\|\mathcal{F}\| = 1$.
Proviamo l'uniforme continuità. Se $h \in \mathbb{R}^N$ si ha

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} |\widehat{f}(\xi+h) - \widehat{f}(\xi)| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x)[e^{-i(x,h)} - 1]e^{-i(x,\xi)}\, dm_N(x) \right| =$$
$$= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} \left| \mathcal{F}([e^{-i(\cdot,h)} - 1]f(\cdot))(\xi) \right| = \|\mathcal{F}([e^{-i(\cdot,h)} - 1]f(\cdot))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq$$
$$\leq \|[e^{-i(\cdot,h)} - 1]f(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\,,$$

e l'ultimo membro tende a 0 per $|h| \to 0$, in virtù del teorema di convergenza dominata (teorema 4.3.4).
Proviamo infine che $\widehat{f}(\xi)$ tende a 0 per $|\xi| \to \infty$. Osservando che

$$e^{-i\pi\frac{(\xi,\xi)}{|\xi|^2}} = -1 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

posto $v_\xi = -\frac{\pi\xi}{|\xi|^2}$ ed effettuando il cambiamento di variabile $x - v_\xi = y$, possiamo scrivere

$$\widehat{f}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{-i(x+\frac{\pi\xi}{|\xi|^2},\xi)}\, dm_N(x) = -\int_{\mathbb{R}^N} \tau_{v_\xi} f(y)e^{-i(y,\xi)}\, dm_N(y),$$

ove $\tau_{v_\xi} f(y) = f(y + v_\xi)$; ne segue

$$|2\widehat{f}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} [f(y) - \tau_{v_\xi} f(y)]e^{-i(y,\xi)}\, dm_N(y) \right| \leq \|f - \tau_{v_\xi} f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\,.$$

Se ora $|\xi| \to \infty$, si ha $|v_\xi| \to 0$ e dunque, ricordando l'esercizio 4.7.2 (che è relativo a $L^1(\mathbb{R})$ ma vale anche, con analoga dimostrazione, in $L^1(\mathbb{R}^N)$), si conclude che $|\widehat{f}(\xi)| \to 0$. Ciò prova la tesi. □

derivFou **Osservazione 8.4.4** La trasformata di Fourier regolarizza le funzioni: se f è solo sommabile, come abbiamo visto $\widehat{f}$ è continua; analogamente, se $x \mapsto |x|f(x)$ è sommabile, utilizzando come in precedenza il teorema 4.3.4 si deduce che $\widehat{f}$ è di classe C^1 e

$$D_j\widehat{f}(\xi) = [\mathcal{F}(-ix_j f(x))](\xi).$$

La trasformata di Fourier ha anche l'importante proprietà di tramutare il prodotto di convoluzione (v. esercizio 5.4.5) in un prodotto ordinario:

convolFou **Proposizione 8.4.5** *Per $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ si ha*

$$\widehat{f \star g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Dimostrazione Per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$ la funzione

$$(x, y) \mapsto f(x - y)g(y)e^{-i(x,\xi)}$$

è sommabile su $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$; quindi, applicando il teorema di Fubini (teorema 5.4.4) otteniamo

$$\begin{aligned}
\widehat{f \star g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} f \star g(x) e^{-i(x,\xi)}\, dm_N(x) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) e^{-i(x,\xi)} dm_N(y) \right] dm_N(x) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) e^{-i(x,\xi)} dm_N(x) \right] dm_N(y) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} f(u) g(y) e^{-i(u+y,\xi)} dm_N(u) \right] dm_N(y) = \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(u) e^{-i(u,\xi)} dm_N(u) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(y) e^{-i(y,\xi)}\, dm_N(y) \right) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi). \quad \square
\end{aligned}$$

Osservazione 8.4.6 Lo spazio $L^1(\mathbb{R}^N)$, munito del prodotto di convoluzione, è un'*algebra*, ossia è chiuso rispetto al prodotto, ed è *privo di unità*, cioè non esiste alcuna funzione $h \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tale che risulti $h \star f = f$ per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Infatti se tale funzione h esistesse, avremmo per la proposizione precedente $\widehat{f} = \widehat{h}\widehat{f}$; dunque, scegliendo f in modo che $\widehat{f}(\xi) \neq 0$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$, dedurremmo $\widehat{h} \equiv 1$ in $\mathbb{R}^N$. Ma ciò è in contraddizione con la proposizione 8.4.3, perchè $\widehat{h}(\xi)$ non sarebbe infinitesima per $|\xi| \to \infty$.

Introduciamo adesso uno spazio di funzioni regolari, lo *spazio di Schwartz*, sul quale, come vedremo fra poco, la trasformata di Fourier è bigettiva ed è un isomorfismo.

Schwartz **Definizione 8.4.7** *Lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è definito da*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : x \mapsto x^\alpha D^\beta \varphi(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N\}.$$

Ricordiamo che $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{\alpha_N}$ e che $D^\beta = D_1^{\beta_1} \ldots D_N^{\beta_N}$; inoltre si definisce $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_N$ per $\beta \in \mathbb{N}^N$.
È immediato verificare che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è un sottospazio di $L^p(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p \in [1, \infty]$. Si noti poi che $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e che l'inclusione è propria in quanto la funzione $f(x) = e^{-|x|^2}$ appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e non ha supporto compatto; da questa inclusione segue in particolare che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è denso in tutti gli spazi $L^p(\mathbb{R}^N)$ con $p \in [1, \infty[$.
Nello spazio di Schwartz la trasformata di Fourier mostra la sua caratteristica più importante, che è quella di scambiare fra loro le operazioni di derivazione e di moltiplicazione per monomi: di qui scaturisce l'utilità di questo operatore per la risoluzione di equazioni differenziali.

formuleFou **Proposizione 8.4.8** *Se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ allora*

$$\widehat{D^\alpha \varphi}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

$$D^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha \varphi(x))(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Dimostrazione La prima proprietà si ottiene integrando per parti $|\alpha|$ volte nell'integrale che definisce $\widehat{D^\alpha \varphi}$; ciò è possibile perché

$$\lim_{|x|\to\infty} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| = 0 \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

La seconda proprietà si ottiene per induzione a partire dal risultato dell'osservazione 8.4.4. □

SchwisomFou **Proposizione 8.4.9** *La trasformata di Fourier manda $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ in sé.*

Dimostrazione Basta osservare che se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$ si ha, per la proposizione precedente,

$$\xi^\alpha D^\beta \widehat{\varphi}(\xi) = \xi^\alpha (-i)^{|\beta|} \mathcal{F}(x^\beta \varphi(x))(\xi) = (-1)^{|\beta|} i^{|\beta|-|\alpha|} \mathcal{F}(D^\alpha (x^\beta \varphi(x)))(\xi),$$

da cui, per la proposizione 8.4.3,

$$|\xi^\alpha D^\beta \widehat{\varphi}(\xi)| \le \|D^\alpha (x^\beta \varphi(x))\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < \infty \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \quad \square$$

La trasformata di Fourier non avrebbe l'importanza applicativa che ha, se non ci fosse un modo per ricostruire la funzione originaria a partire dalla sua trasformata. Ciò è possibile nello spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$:

inversaFou **Teorema 8.4.10 (formula di inversione)** *Se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, allora si ha*

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\varphi}(\xi) e^{i(x,\xi)}\, dm_N(\xi) = (2\pi)^{-N}\, \widehat{\widehat{\varphi}}\,(-x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N;$$

in particolare $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è bigettiva.

Dimostrazione Non possiamo procedere nel modo più naturale, che è quello di sostituire la definizione di $\widehat{\varphi}(\xi)$ nell'integrale candidato a fornire la formula di inversione, in quanto per un fissato $x \in \mathbb{R}^N$ la funzione

$$(y, \xi) \mapsto \varphi(y) e^{-i(y,\xi)} e^{i(x,\xi)}$$

non è sommabile in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ (salvo che quando $\varphi \equiv 0$), cosicché non possiamo applicare il teorema di Fubini. Otterremo il risultato con un procedimento di approssimazione. Premettiamo il

simmFou **Lemma 8.4.11** *Per ogni $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi(\xi) \widehat{\varphi}(\xi) e^{i(x,\xi)}\, dm_N(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\psi}(u) \varphi(x+u)\, dm_N(u) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Dimostrazione La funzione

$$(y, \xi) \mapsto \varphi(y) \psi(\xi) e^{-i(y,\xi)} e^{i(x,\xi)}$$

appartiene a $L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$; dunque per il teorema 5.4.4 si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \psi(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)e^{i(x,\xi)}\,dm_N(\xi) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \psi(\xi)\left[\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y)e^{-i(y,\xi)}dm_N(y)\right] e^{i(x,\xi)}\,dm_N(\xi) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y)\left[\int_{\mathbb{R}^N} \psi(\xi)e^{-i(y-x,\xi)}\,dm_N(\xi)\right] dm_N(y) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\psi}(y-x)\varphi(y)\,dm_N(y),\end{aligned}$$

e la tesi del lemma segue tramite il cambiamento di variabile $u = y - x$. □

Dimostriamo la formula di inversione per una fissata $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Scegliamo $f(\xi) = e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}$; osserviamo che si ha

$$f(0) = 1, \quad \widehat{f}(u) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{1}{2}|u|^2}, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(u)\,dm_N(u) = (2\pi)^N.$$

Adesso, fissato $\varepsilon > 0$, applichiamo il lemma precedente alla funzione $\psi(\xi) = f(\varepsilon\xi)$: ricordando l'esempio 8.4.2 (2), si ha

$$\widehat{\psi}(u) = \varepsilon^{-N}\widehat{f}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^{-N}(2\pi)^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{|u|^2}{\varepsilon^2}},$$

cosicché dal lemma 8.4.11 ricaviamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} f(\varepsilon\xi)\widehat{\varphi}(\xi)e^{i(x,\xi)}\,dm_N(\xi) &= \varepsilon^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\varphi(x+u)\,dm_N(u) = \left[y = \frac{u}{\varepsilon}\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(y)\varphi(x+\varepsilon y)\,dm_N(y).\end{aligned}$$

Per $\varepsilon \to 0$ dal teorema di Lebesgue (teorema 4.3.4) segue la relazione

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\varphi}(\xi)e^{i(x,\xi)}\,dm_N(\xi) = (2\pi)^N\varphi(x),$$

che è la tesi del teorema. □

scambioint **Osservazione 8.4.12** Dal lemma 8.4.11 segue in particolare, scelto $x = 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)\,dm_N(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\psi}(u)\varphi(u)\,dm_N(u) \qquad \forall \psi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Enunciamo adesso il più importante risultato della teoria della trasformata di Fourier: esso esprime il fatto che l'operatore $\mathcal{F}$ è un isomorfismo dello spazio normato $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, munito della norma $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, in sé, e che di conseguenza esso si può estendere in modo unico, per densità, ad un isomorfismo di $L^2(\mathbb{R}^N)$ in sé.

Plancherel **Teorema 8.4.13 (di Plancherel)** *Per ogni $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ vale la* formula di Parseval

$$(\widehat{f}, \widehat{g})_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (2\pi)^N (f, g)_{L^2(\mathbb{R}^N)} \ ;$$

in particolare

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \qquad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Dimostrazione Applicando l'osservazione 8.4.12 si ha

$$(\widehat{f},\widehat{g})_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)\,\overline{\widehat{g}(\xi)}\,dm_N(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)\,\widehat{\overline{\widehat{g}}}\,(u)\,dm_N(u).$$

D'altra parte risulta

$$\overline{\widehat{g}}(\xi) = \overline{\widehat{g}(\xi)} = \overline{\int_{\mathbb{R}^N} g(x)e^{-i(x,\xi)}\,dm_N(x)} = \int_{\mathbb{R}^N} \overline{g(x)}e^{i(x,\xi)}\,dm_N(x) = \widehat{\overline{g}}(-\xi),$$

ed anche, posto $y=-x$,

$$\overline{\widehat{g}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \overline{g(x)}e^{i(x,\xi)}\,dm_N(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \overline{g(-y)}e^{-i(y,\xi)}\,dm_N(y) = \widehat{\overline{g(-\cdot)}}(\xi);$$

quindi, per la formula di inversione,

$$\widehat{\overline{\widehat{g}}}\,(u) = \widehat{\widehat{\overline{g(-\cdot)}}}(u) = (2\pi)^N\overline{g(-\cdot)}(-u) = (2\pi)^N\overline{g(u)}.$$

Pertanto

$$(\widehat{f},\widehat{g})_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (2\pi)^N \int_{\mathbb{R}^N} f(u)\overline{g(u)}\,dm_N(u) = (2\pi)^N (f,g)_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,. \quad \square$$

isomFou **Corollario 8.4.14** *La trasformata di Fourier si estende in modo unico ad un isomorfismo di $L^2(\mathbb{R}^N)$ in sé, che denotiamo con lo stesso simbolismo. In particolare si ha*

$$(\widehat{f},\widehat{g})_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (2\pi)^N (f,g)_{L^2(\mathbb{R}^N)} \qquad \forall f,g \in L^2(\mathbb{R}^N),$$

$$f(x) = (2\pi)^{-N}\,\widehat{\widehat{f}}\,(-x) \quad \textit{q.o. in } \mathbb{R}^N \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^N);$$

inoltre, posto per $R>0$ e per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$

$$\varphi_R(\xi) = \int_{\{|x|\le R\}} f(x)e^{-i(x,\xi)}\,dm_N(x), \qquad \xi \in \mathbb{R}^N,$$

$$\psi_R(x) = (2\pi)^{-N} \int_{\{|\xi|\le R\}} \widehat{f}(\xi)e^{i(x,\xi)}\,dm_N(\xi), \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

risulta

$$\lim_{R\to\infty} \|\varphi_R - \widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0, \qquad \lim_{R\to\infty} \|\psi_R - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Dunque la formula esplicita della trasformata di Fourier si estende a tutte le funzioni di $L^2(\mathbb{R}^N)$ non in modo automatico, ma soltanto in un senso opportuno: $\widehat{f}$ è limite in $L^2(\mathbb{R}^N)$ delle funzioni φ_R il cui valore è una approssimazione della formula della trasformata di Fourier.

Dimostrazione Se $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, e $\{\varphi_n\}$ è una successione contenuta in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ che converge a f in $L^2(\mathbb{R}^N)$, poniamo $\widehat{f} = \lim_{n\to\infty} \widehat{\varphi_n}$; questo limite esiste in $L^2(\mathbb{R}^N)$ grazie

al teorema di Plancherel. È immediato verificare che la definizione non dipende dalla successione approssimante, ma solo dalla f. È allora facile ottenere che l'operatore $\mathcal{F}$, definito da $F(f) = \widehat{f}$, è un isomorfismo che soddisfa la prima uguaglianza dell'enunciato. La seconda proprietà dell'enunciato si ottiene passando ad una sottosuccessione di $\{\varphi_n\}$ che converga q.o. a f.
Proviamo l'ultima parte della tesi. Posto $\chi_R = \chi_{\{|x|\le R\}}$ per ogni $R > 0$, osservato che $\chi_R f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ si vede subito che

$$\varphi_R = \widehat{(\chi_R f)}, \qquad \lim_{R\to\infty} \|\chi_R f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0,$$

da cui

$$\lim_{R\to\infty} \|\varphi_R - \widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Similmente, si ha

$$\psi_R(x) = (2\pi)^{-N}\widehat{(\chi_R \widehat{f})}(-x), \qquad \lim_{R\to\infty} \|\chi_R \widehat{f} - \widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0,$$

da cui

$$\lim_{R\to\infty} \|(2\pi)^N \psi_R(-\cdot) - \widehat{\widehat{f}}\,\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0,$$

e infine, invertendo il segno della variabile di integrazione ed applicando poi la formula di inversione,

$$\lim_{R\to\infty} \|\psi_R - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0. \quad \square$$

poHermite **Esempio 8.4.15** Riprendiamo in considerazione il sistema dei polinomi di Hermite dell'esempio 8.3.9 (5). Si prova abbastanza facilmente (esercizio 8.3.12(ii)) che si tratta di un sistema ortonormale in $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}, e^{-x^2}dx)$; la completezza si dimostra con un po' più di fatica. Supponiamo dunque che $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}, e^{-x^2}\,dx)$ sia una funzione ortogonale in tale spazio ad ogni polinomio P. Poniamo

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{zx}\, e^{-x^2}\, dx, \qquad z \in \mathbb{C}:$$

questa funzione è olomorfa su $\mathbb{C}$, in quanto per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha facilmente, per convergenza dominata,

$$F'(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, x\, e^{zx}\, e^{-x^2}\, dx, \qquad z \in \mathbb{C},$$

e più in generale

$$F^{(n)}(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, x^n\, e^{zx}\, e^{-x^2}\, dx, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Si riconosce allora, in virtù dell'ipotesi fatta su f, che per $z = 0$

$$F^{(n)}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, x^n\, e^{-x^2}\, dx = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$

dunque

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, x^n\, e^{-x^2}\, dx = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

In particolare, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$0 = F(i\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{i\xi x}\, e^{-x^2}\, dx = \mathcal{F}(f(x)e^{-x^2})(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Dunque la funzione $f(x)\, e^{-x^2}$ ha trasformata di Fourier identicamente nulla: ne segue, per l'esercizio 8.4.6, $f \equiv 0$.
Infine, dall'esercizio 8.3.12(iii) segue che se $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}, e^{-x^2}dx)$ è ortogonale a tutti gli H_n, allora f è ortogonale a tutti i polinomi; quindi, per quanto visto, $f = 0$. Pertanto il sistema dei polinomi di Hermite è completo in $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}, e^{-x^2}dx)$.

Concludiamo il paragrafo mostrando come applicare la trasformata di Fourier per risolvere un'equazione alle derivate parziali. Consideriamo l'*equazione del calore*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times]0, \infty[\,,$$

dove Δ è l'*operatore di Laplace*, definito da

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} D_i^2 u, \qquad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Procederemo formalmente, cercando di ricavare in forma esplicita una funzione "candidata" al ruolo di soluzione: a posteriori, poi, potremo verificare rigorosamente che essa risolve davvero l'equazione.
Applichiamo la trasformata di Fourier ad entrambi i membri dell'equazione del calore: coinvolgendo solo le variabili x_i ma non la t, essa commuta con la derivazione rispetto a t e quindi, ricordando la proposizione 8.4.8, troviamo l'equazione

$$0 = \widehat{\Delta u} - \frac{\widehat{\partial u}}{\partial t} = -|\xi|^2 \widehat{u} - \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}, \qquad (\xi,t) \in \mathbb{R}^N \times]0, \infty[\,.$$

Risolviamo questa equazione differenziale ordinaria nella variabile t: le soluzioni sono della forma

$$\widehat{u}(\xi,t) = c(\xi) e^{-|\xi|^2 t},$$

con $c(\xi)$ funzione arbitraria. Dato che la trasformata di Fourier è un isomorfismo, possiamo porre $c(\xi) = \widehat{\gamma}(\xi)$, con γ funzione altrettanto arbitraria, mentre dall'esempio 8.4.2 (2), con $a = \frac{1}{4t}$, segue che

$$e^{-|\xi|^2 t} = \mathcal{F}\left(\frac{e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{N/2}} \right)(\xi);$$

quindi possiamo scrivere

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{\gamma}(\xi)\,\mathcal{F}\left(\frac{e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{N/2}}\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(\gamma \star \frac{e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{N/2}}\right)(\xi),$$

ovvero

$$u(x,t) = \gamma \star \frac{e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{N/2}}(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \gamma(y)\, dm_N(y).$$

Non è troppo difficile verificare che questa funzione risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0,\infty[\\ u(\cdot,0) = \gamma & \text{in } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

nel senso che essa è soluzione dell'equazione differenziale in $\mathbb{R}^N \times]0,\infty[$ ed inoltre verifica

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = \gamma(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

purché la funzione γ sia continua in $\mathbb{R}^N$ e soddisfi la condizione

$$x \mapsto e^{-\alpha|x|}\gamma(x) \in L^1(\mathbb{R}^N) \quad \text{per qualche } \alpha > 0$$

(ad esempio è ovviamente sufficiente che γ sia continua e limitata su $\mathbb{R}^N$).
Il "nucleo" dell'integrale di convoluzione che definisce la soluzione u, ossia la funzione

$$K(x,t) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{N/2}}\,, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times]0,\infty[\,,$$

si chiama *soluzione fondamentale* dell'equazione del calore, o anche *nucleo del calore*.

Esercizi 8.4

omotFou

1. Per $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ si ponga $m_\lambda f(x) = f(\lambda x)$. Si provi che

$$\widehat{m_\lambda f} = |\lambda|^{-N} m_{1/\lambda} \widehat{f}.$$

traslFou

2. Per ogni $v \in \mathbb{R}^N$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ si ponga

$$\tau_v f(x) = f(x+v), \qquad e_v f(x) = e^{i(x,v)_N} f(x).$$

Si provi che

$$\widehat{\tau_v f} = e_v \widehat{f}, \qquad \tau_v \widehat{f} = \widehat{(e_{-v} f)}.$$

matrFou

3. Sia A una matrice reale $N \times N$ unitaria, ossia tale che $A^* = A^{-1}$. Provare che per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ si ha

$$\widehat{f \circ A} = \widehat{f} \circ A.$$

fposFou 4. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ una funzione reale strettamente positiva. Provare che

$$|\widehat{f}(\xi)| < \widehat{f}(0) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

pdFou 5. Sia $N = 1$ e sia $f \in L^1(\mathbb{R})$; si provi che se f è pari allora

$$\widehat{f}(\xi) = 2\int_0^\infty f(x)\cos x\xi \, dx \qquad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

mentre se f è dispari allora

$$\widehat{f}(\xi) = -2i\int_0^\infty f(x)\sin x\xi \, dx \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

iniFou 6. Provare che l'applicazione $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^N) \to L^\infty(\mathbb{R}^N)$ è iniettiva.
[**Traccia:** sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tale che $\widehat{f} = 0$; si consideri la convoluzione $f \star \varphi_\varepsilon$, ove φ_ε è una mollificatrice (esercizio 5.4.7), si verifichi che $f \star \varphi_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e si osservi che $\widehat{f \star \varphi_\varepsilon} = 0$.]

tanteFou 7. Calcolare la trasformata di Fourier delle funzioni

$$f(x) = e^{-\lambda|x|}, \quad g(x) = \frac{1}{\lambda^2 + x^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R},$$

ove λ è una costante positiva.

convchiFou 8. Calcolare esplicitamente la funzione $f_n = \chi_{[-n,n]} \star \chi_{[-1,1]}$; trovare poi la funzione φ tale che $f_n = \widehat{\varphi}$.

tanteFou2 9. Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni definite su $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \max\{1 - |x|, 0\},\\
f_2(x) &= \operatorname{sgn}(x) \cdot f_1(x),\\
f_3(x) &= \cos\tfrac{x}{2} \cdot \chi_{[-\pi,\pi]}(x),\\
f_4(x) &= \operatorname{sgn}(x) \cdot \chi_{[-1,1]}(x) \cdot e^{-|x|},\\
f_5(x) &= \operatorname{sgn}(x) \cdot \max\{1 - |x|, \tfrac{1}{2}\} \cdot \chi_{[-1,1]}(x).
\end{aligned}$$

finver 10. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tale che $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Dimostrare che vale la formula di inversione

$$f(x) = (2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)\, d\xi \quad \text{q.o. in } \mathbb{R}^N.$$

FouL1L2 11. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tale che $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Provare che allora $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, che $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e che $\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (2\pi)^{N/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.

f*f=f 12. Risolvere in $L^1(\mathbb{R}^N)$ l'equazione $f \star f = f$.

prod=Fou*

13. Dimostrare che $\widehat{fg} = \widehat{f} \star \widehat{g}$ per ogni $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tali che $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Fou4=I

14. Si provi che $\mathcal{F}^2 f(x) = (2\pi)^{-N} f(-x)$ per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, e si deduca che $\mathcal{F}^4 f = (2\pi)^{-2N} f$ per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$.
[**Traccia:** provare le uguaglianze dapprima per $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.]

Foumisu

15. Sia μ una misura finita su $(\mathbb{R}, \mathcal{M})$. Si definisca la seguente funzione $\widehat{\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}\, d\mu(x), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(i) Si provi che $\widehat{\mu}$ è una funzione continua e limitata.

(ii) Se inoltre μ è concentrata su un insieme limitato, si mostri che $\widehat{\mu} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(iii) Si scriva esplicitamente $\widehat{\mu}$ nei casi seguenti:

$$\text{(a) } \mu = f\, dm,\ f \in L^1(\mathbb{R}); \quad \text{(b) } \mu = \delta_0\,; \quad \text{(c) } \mu = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\delta_n\,.$$

Soluzioni degli esercizi del capitolo 8

sol08

Esercizi del paragrafo 8.1

Esercizio 8.1.1 Sia $u \in H$ con $\|u\| = 1$. È facile verificare che $B(u,1)$ è un convesso: se $x, y \in B(u,1)$ e $\lambda \in [0,1]$, si ha

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y - u\| \le (1-\lambda)\|x-u\| + \lambda\|y-u\| < 1 - \lambda + \lambda = 1.$$

È pure facile verificare che $B(u,1)$ è aperto: se $y \in B(u,1)$ e se $\|z-y\| < 1 - \|y-u\|$, si ricava

$$\|z-u\| \le \|z-y\| + \|y-u\| < 1.$$

In particolare, $B(u,1)$ non è chiuso: se $z \in H$ verifica $\|z-u\| = 1$, allora $z \notin B(u,1)$ ma si ha

$$z_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) z + \frac{1}{n}\, u \in B(u,1), \qquad z_n \to z \quad \text{per } n \to \infty.$$

Verifichiamo che $B(u,1)$ non ha elementi di norma minima. Per ogni $z \in B(u,1)$, sia $t \in]0,1[$ tale che $tz \in B(u,1)$: tale t esiste in quanto $B(z,\varepsilon) \subseteq B(u,1)$ per ε abbastanza piccolo, e $tz \in B(z,\varepsilon)$ per $1 - \delta_\varepsilon < t < 1$, con $\delta_\varepsilon > 0$ opportuno. Allora

$$tz \in B(u,1), \qquad \|tz\| = t\|z\| < \|z\|,$$

quindi nessun $z \in B(U,1)$ ha norma minima.

Esercizio 8.1.2 La funzione $g = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} - \chi_{]\frac{1}{2},1]}$ appartiene a K, e $\|g\|_{L^2(0,1)} = 1$. Dunque

$$\min_{f \in K} \|g\|_{L^2(0,1)} \le 1.$$

D'altra parte, se $f \in K$ si ha dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (proposizione 7.2.2)

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{\frac{1}{2}} f\, dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f\, dt \le \|f\|_{L^2(0,\frac{1}{2})} \frac{1}{\sqrt{2}} + \|f\|_{L^2(\frac{1}{2},1)} \frac{1}{\sqrt{2}} \le \\ &\le \sqrt{\|f\|^2_{L^2(0,\frac{1}{2})} + \|f\|^2_{L^2(\frac{1}{2},1)}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2(0,1)}\,, \end{aligned}$$

e pertanto il minimo è proprio 1. Si noti che se g è la funzione sopra definita, allora risulta

$$K = \{f \in L^2(0,1) : \ (f,g)_{L^2(0,1)} = 1\},$$

quindi K è un convesso chiuso.

Esercizio 8.1.3 L'insieme K è chiuso in $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ e in $(C[0,1], \|\cdot\|_2)$: infatti, se $\{f_n\} \subset K$ e $f_n \to f$ in $L^\infty(0,1)$ o in $L^2(0,1)$, allora, posto $\varphi = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} - \chi_{]\frac{1}{2},1]}$, si ha

$$|(f_n - f, \varphi)_2| \le \begin{cases} \|f_n - f\|_\infty \, \|\varphi\|_1 = \|f_n - f\|_\infty \\ \|f_n - f\|_2 \, \|\varphi\|_2 = \|f_n - f\|_2 \, , \end{cases}$$

quindi $(f,\varphi)_2 = \lim_{n\to\infty}(f_n,\varphi)_2 = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$, ossia $f \in K$. Notiamo ora che $\inf_{f\in K} \|f\|_2 = 1$ perché, definendo

$$f_n(x) = \begin{cases} -\frac{4n}{(n-1)(n-2)}\, x + \frac{n+1}{n-1} & \text{se } 0 \le x \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ -\frac{n}{2}\, x + \frac{n}{4} & \text{se } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ -\frac{4n}{(n-1)(n-2)}\, x + \frac{4n-(n+1)(n-2)}{(n-1)(n-2)} & \text{se } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

risulta, con verifica noiosa ma facile, $f_n \in K$ e $\|f_n\|_2 \ge 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, e $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = 1$. Però non esiste alcun elemento di K che abbia norma minima. Infatti, se $f \in K$ e $\|f\|_2 = 1$, allora

$$1 = (f,\varphi)_2 \le \|f\|_2 \|\varphi\|_2 = 1,$$

da cui

$$(f,\varphi)_2 = \|f\|_2 \|\varphi\|_2 = 1.$$

Perció

$$\|f - \varphi\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2 - 2(f,\varphi)_2 = 1 + 1 - 2 = 0,$$

ossia $f = \varphi \notin C[0,1]$.

Esercizio 8.1.4 L'insieme K è convesso perché le norme sono funzioni convesse e la condizione integrale è lineare. Verifichiamo che K è chiuso. Sia $\{f_n\}$ una successione contenuta in K che converge a f in $L^2(0,1)$: la condizione integrale passa al limite. Inoltre vi è una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converge puntualmente q.o. a f, ossia esiste un insieme misurabile $A \subset [0,1]$, con $m(A^c) = 0$, tale che $f_{n_k}(x) \to f(x)$ per $k \to \infty$ per ogni $x \in A$. Essendo

$$|f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x')| \le 8|x - x'| \qquad \forall x, x' \in [0,1],$$

si deduce che vale la stessa relazione per f, per ogni $x, x' \in A$. Dato che $m(A^c) = 0$, esiste un'unica funzione $g \in C[0,1]$ tale che $f = g$ in A, ossia f appartiene alla classe di equivalenza di g. Quindi $f = g \in C[0,1]$ e, in particolare, $f \in K$. Dunque K è chiuso.
Esiste dunque un elemento f_0 in K che ha norma di $L^2(0,1)$ minima. Se fosse $\|f_0\|_2 = 1$, lo stesso argomento sviluppato nello svolgimento dell'esercizio 8.1.3 ci direbbe che $f_0 = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} - \chi_{]\frac{1}{2},1]} \notin C[0,1]$, il che è assurdo.

Esercizio 8.1.5 La convessità di K_2 e K_∞ è conseguenza della convessità delle norme $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$. Il fatto che K_2 sia chiuso segue dalla continuità della norma di $L^2 a, b)$. Anche K_∞ è chiuso: se $\{f_n\} \subset K_\infty$ converge a f in $L^2(a,b)$, esiste $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ tale che $f_{n_k} \to f$ puntualmente q.o. in $[a,b]$. Ne segue

$$|f(x)| = \lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(x)| \le \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k}\|_\infty \le 1 \quad \text{per q.o. } x \in [a,b];$$

dunque $\|f\|_\infty \le 1$ e pertanto $f \in K$.
Determiniamo P_{K_2}: per $f \in L^2(a,b)$ sia

$$g = \begin{cases} \frac{f}{\|f\|_2} & \text{se } \|f\|_2 > 1, \\ f & \text{se } \|f\|_2 \le 1. \end{cases}$$

Allora se $\|f\|_2 \leq 1$ si ha $g = f$ e quindi, ovviamente,

$$(f-g, h-g)_2 = 0 \leq 0 \qquad \forall h \in K_2.$$

Se invece $\|f\|_2 > 1$, allora

$$(f-g, h-g)_2 = \left(1 - \frac{1}{\|f\|_2}\right)\left(f, h - \frac{f}{\|f\|_2}\right)_2;$$

Dunque

$$(f-g, h-g)_2 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{\|f\|_2}\right)(f,h)_2 \leq \|f\|_2 - 1;$$

ma quest'ultima relazione è vera, poiché

$$\left(1 - \frac{1}{\|f\|_2}\right)(f,h)_2 \leq \left(1 - \frac{1}{\|f\|_2}\right)\|f\|_2\|h\|_2 \leq \left(1 - \frac{1}{\|f\|_2}\right)\|f\|_2 = \|f\|_2 - 1.$$

Dunque abbiamo verificato che

$$(f-g, h-g)_2 \leq 0 \qquad \forall h \in K_2\,,$$

e questa proprietà, come sappiamo dalla proposizione 8.1.3, caratterizza il vettore $P_{K_2} f$. Pertanto $g = P_{K_2} f$.
Passiamo allo studio di P_{K_∞}. Se $g \in K_\infty$ si ha

$$\begin{aligned} \|f-g|_2^2 &= \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx = \\ &= \int_{\{f>1\}} [f(x) - g(x)]^2 dx + \int_{\{|f|\leq 1\}} |f(x) - g(x)|^2 dx + \int_{\{f<-1\}} [g(x) - f(x)]^2 dx; \end{aligned}$$

il secondo membro risulta minimo se si sceglie

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } f)x) > 1 \\ f(x) & \text{se } |f(x)| \leq 1 \\ -1 & \text{se } f(x) < -1. \end{cases}$$

Dunque questa g coincide con $P_{K_\infty} f$.

Esercizio 8.1.6 (i) La verifica è immediata.
(ii) L'insieme K è chiuso in $L^2(a,b)$: infatti, se $\{f_n\} \subset K$ e $f_n \to f$ in $L^2(a,b)$ per $n \to \infty$, esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ tale che $f_{n_k}(x) \to f(x)$ per $k \to \infty$ q.o. in $[a,b]$; da $f_{n_k}(x) \geq 0$ q.o segue subito $f(x) \geq 0$ q.o. e dunque $f \in K$.
Similmente, $K \cap L^\infty(a,b)$ è chiuso in $L^\infty(a,b)$, poiché se $\{f_n\} \subset K \cap L^\infty(a,b)$ e $f_n \to f$ in $L^\infty(a,b)$, allora $f \in L^\infty(a,b)$ e, con lo stesso ragionamento di prima, $f \in K$.
Analizziamo l'insieme K_0: esso è chiuso in $L^\infty(a,b)$. Infatti, se $\{f_n\} \subset K_0$ e $f_n \to f$ in $L^\infty(a,b)$, allora $\{f_n\}$ è di Cauchy in $L^\infty(a,b)$; ricordando l'esercizio 3.2.9, $\{f_n\}$ è di Cauchy in $C[a,b]$ e quindi esiste $g \in C[a,b]$ tale che $f_n \to g$ uniformemente in $[a,b]$. Ne segue $f = g$ q.o., vale a dire $f = g \in C[a,b]$; inoltre $f \geq 0$ in $[a,b]$, ossia $f \in K_0$.
L'insieme K_0 non è chiuso in $L^2(a,b)$. Infatti, se $\{f_n\} \subset K_0$ e $f_n \to f$ in $L^2(a,b)$, non è detto che f sia continua. Ad esempio, supponiamo che

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{in } \left[a, \frac{a+b}{2} - \frac{1}{n}\right] \\ -n\,\left(x - \frac{a+b}{2}\right) & \text{in } \left[\frac{a+b}{2} - \frac{1}{n}, \frac{a+b}{2}\right] \\ 0 & \text{in } \left[\frac{a+b}{2}, b\right]. \end{cases}$$

Si ha $f_n \to g$ in $L^2(a,b)$, ove $g = \chi_{[a,\frac{a+b}{2}[}$ è discontinua e quindi non appartiene a K_0.

(iii) Risulta

$$g = P_K f \quad \Longleftrightarrow \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

Infatti in questo caso si ha evidentemente

$$\|f - g\|^2_{L^2(a,b)} = \int_{\{f<0\}} |f(x)|^2 \, dx$$

mentre per ogni $h \in K$ vale

$$\|f - h\|^2_{L^2(a,b)} = \int_{\{f<0\}} |f(x)|^2 \, dx + \int_{\{f\geq 0\}} |f(x) - h(x)|^2 \, dx.$$

Esercizio 8.1.7 Sia $H = \ell^2$ e poniamo $F = \{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$, ove

$$x^{(n)}_k = \begin{cases} n^{-1/2} & \text{se } k \leq n+1 \\ 1 & \text{se } k = n+2 \\ 0 & \text{se } k \geq n+3. \end{cases}$$

Allora

$$\|x^{(n)}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n} + 1} = \sqrt{\frac{n+1}{n} + 1} \to \sqrt{2}, \qquad \|x^{(n)}\|_2 > \|x^{(n+1)}\|_2 > \sqrt{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Dunque F non ha elementi di minima norma; tuttavia F è chiuso, perché costituito da punti isolati: infatti per $n > m$ si ha

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_2^2 = \sum_{k=1}^{m+1} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{m}} \right|^2 + \left| 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right|^2 + \sum_{k=m+3}^{n+1} \frac{1}{n} + 1 > 1.$$

Infine, l'elemento di minima norma può esistere e non essere unico, come mostra l'esempio $F = \{x \in H : \ \|x\| = 1\}$, valido in ogni spazio di Hilbert $H \neq \{0\}$.

Esercizio 8.1.8 Per il primo enunciato basta ripetere esattamente, sostituendo L^2 a L^1, la dimostrazione della proposizione 4.7.1.
Per il secondo enunciato, si deve fare la stessa operazione con la dimostrazione della proposizione 4.7.5.

Esercizio 8.1.9 (i) Sappiamo dall'esercizio 8.1.8 che l'insieme $\mathcal{S}_0$ delle funzioni semplici su $\mathbb{R}^N$ nulle fuori da un insieme di misura finita è denso in $L^2(\mathbb{R}^N)$. Come primo passo, approssimiamo la funzione χ_E, essendo $E \in \mathcal{M}_N$ un insieme di misura finita, con una funzione g continua e di quadrato sommabile. A questo scopo basta fissare un aperto $A \supseteq E$, ed un chiuso $C \subseteq E$, con $m_N(A \setminus C)) < \varepsilon$, e scegliere

$$g(x) = \frac{d(x, A^c)}{d(x, A^c) + d(x, C)} :$$

La g è continua, si ha $0 \leq g \leq 1$, $g = 1$ su C, $g = 0$ su A^c, cosicché $|g|^2$ è sommabile; inoltre

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g - \chi_E|^2 \, dx = \int_{A\setminus C} |g - \chi_E|^2 \, dx \leq m_N(A \setminus C) < \varepsilon.$$

Come secondo passo, approssimiamo una funzione $f \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ con una funzione di $C_c(\mathbb{R}^N)$. A questo scopo basta prendere

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x|_N \leq n \\ n + 1 - |x|_N & \text{se } n < |x|_N < n+1 \\ 0 & \text{se } |x|_N \geq n, \end{cases}$$

e scegliere la successione $\{\varphi_n f\}$, che è contenuta in $C_c(\mathbb{R}^N)$ e verifica, grazie al teorema di Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - \varphi_n(x) f(x)|^2 \, dx = 0.$$

Per provare che $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ è denso in $C_c(\mathbb{R}^N)$, si deve adattare l'argomentazione usata per risolvere l'esercizio 4.7.12.

(ii) Grazie a (i), basta provare la tesi per una $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$. Tale f è uniformemente continua: quindi, fissato $M > 0$ tale che $f(x) = 0$ per $|x|_N \geq M - 1$, e dato $\varepsilon \in]0, 1[$, esiste δ_ε tale che

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x+h) - f(x)|^2 \, dx = \int_{|x|_N < M} |f(x+h) - f(x)|^2 \, dx \leq \varepsilon^2 M^N \qquad \text{per } |h|_N < \delta_\varepsilon \,,$$

da cui la tesi.

Esercizio 8.1.10 (i) Si ha

$$M^\perp = \left\{ g \in L^2(a,b) : \ \int_a^b g(x) \, dx = 0 \right\}.$$

Infatti, se $f(x) \equiv c$ in $[a,b]$ e $g \in L^2(a,b)$ con $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, allora $(f,g)_{L^2(a,b)} = \int_a^b c\, g(x)\,dx = 0$. Viceversa, se $g \in M^\perp$ si ha per $c \neq 0$

$$0 = (c,g)_{L^2(a,b)} = c \int_a^b g(x) \, dx,$$

da cui $\int_a^b g(x)\,dx = 0$.

(ii) Si ha

$$M^\perp = \{ g \in L^2(\mathbb{R}) : \ g \text{ è pari} \}.$$

Infatti, se $g \in L^2(\mathbb{R})$ è pari, allora anche la coniugata $\overline{g}$ è pari, quindi $f\,\overline{g}$ è dispari per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$ dispari; pertanto $\int_{\mathbb{R}} f\,\overline{g}\,dx = 0$ per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$ dispari, ossia $g \in M^\perp$.
Viceversa, sia $g \in M^\perp$: posto

$$g_1(x) = \frac{1}{2}[g(x) - g(-x)], \qquad g_2(x) = \frac{1}{2}[g(x) + g(-x)],$$

si ha $g = g_1 + g_2$, g_1 è dispari e g_2 è pari. Dato che, per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$ dispari, $g_2\,\overline{f}$ è dispari, si ha $(g_2, f)_{L^2(\mathbb{R})} = 0$. Dunque, dall'ipotesi $(g,f)_{L^2(\mathbb{R})} = 0$ per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$ dispari, segue $(g_1, f)_{L^2(\mathbb{R})} = 0$ per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$ dispari. Pertanto $g_1 \in M \cap M^\perp$, ossia $g_1 = 0$ e $g = g_2$, ossia g è pari.

(iii) Proviamo che $M^\perp = \{0\}$. Se $g \in L^2(a,b)$ e $\int_a^b g(x)\,x^n\,dx = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora per ogni polinomio P si ha $\int_a^b g(x)\,P(x)\,dx = 0$. In virtù della densità dei polinomi in $C[a,b]$ (esercizio 4.7.11), si deduce $\int_a^b g(x)\,f(x)\,dx = 0$ per ogni $f \in C[a,b]$, e infine per la densità di $C[a,b]$ in $L^2(a,b)$ (esercizio 8.1.8) si ottiene $\int_a^b g(x)\,f(x)\,dx = 0$ per ogni $f \in L^2(a,b)$, ossia $g = 0$.

Esercizio 8.1.11 È evidente che $L^2(X,\mathcal{G},\mu)$ è un sottospazio di $L^2(X,\mathcal{F},\mu)$; inoltre dalla definizione 4.2.1 si ha

$$\|g\|_{L^2(X,\mathcal{G},\mu)} \leq \|g\|_{L^2(X,\mathcal{F},\mu)} \qquad \forall g \in L^2(X,\mathcal{G},\mu).$$

Il sottospazio $L^2(X,\mathcal{G},\mu)$ è chiuso in $L^2(X,\mathcal{F},\mu)$? Vediamo. Il ragionamento è delicato, quindi distingueremo fra funzioni e classi di equivalenza; più in dettaglio, denoteremo con $[\cdot]_\mathcal{G}$ la classe di equivalenza in $L^2(X,\mathcal{G},\mu)$ e con $[\cdot]_\mathcal{F}$ la classe di equivalenza in $L^2(X,\mathcal{F},\mu)$. Sia allora $\{[f_n]_\mathcal{G}\} \subseteq L^2(X,\mathcal{G},\mu)$ una successione tale che $[f_n]_\mathcal{F}] \to [f]_\mathcal{F}$ in $L^2(X,\mathcal{F},\mu)$ per $n \to \infty$. Allora, grazie alla disuguaglianza precedente, $\{[f_n]_\mathcal{G}\}$ è di Cauchy in $L^2(X,\mathcal{G},\mu)$; quindi esiste $[g]_\mathcal{G} \in L^2(X,\mathcal{G},\mu)$ tale che $[f_n]_\mathcal{G} \to [g]_\mathcal{G}$ in $L^2(X,\mathcal{G},\mu)$ per $n \to \infty$. Passando ad opportune sottosuccessioni, esiste $\{[f_{n_k}]_\mathcal{G}\}$ tale che

$$f_{n_k}(x) \to g(x) \quad \forall x \in B, \text{ con } B \in \mathcal{G} \text{ e } \mu(B^c) = 0,$$
$$f_{n_k}(x) \to f(x) \quad \forall x \in A, \text{ con } A \in \mathcal{F} \text{ e } \mu(A^c) = 0.$$

Su $A \cap B$ si ha dunque $g(x) = f(x)$, con $\mu((A \cap B)^c) = \mu(A^c \cup B^c) = 0$. Però $A \cap B \in \mathcal{F}$; dunque $[g]_{\mathcal{F}} = [f]_{\mathcal{F}}$, ossia le due classi coincidono come elementi di $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$. Se non si ha $A \cap B \in \mathcal{G}$, la f non sarà $\mathcal{G}$-misurabile e quindi non sarà un elemento di $L^2(X, \mathcal{G}, \mu)$. Dunque in generale $L^2(X, \mathcal{G}, \mu)$ non è chiuso in $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$.

(ii)(a) Siano $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{G} = \mathcal{B}$, $\mathcal{F} = \mathcal{M}$ e $\mu = m$; allora $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{G}, m)$ è lo spazio delle funzioni Boreliane di quadrato sommabile. Sia $E \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{B}$ con $m(E) < \infty$ (esercizio 3.1.9); si ha $\chi_E \in L^2(X, \mathcal{M}, m)$, ma $\chi_E \notin L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$. Il risultato di (i) è vero, perché esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $B \supseteq E$ e $m(B \setminus E) = 0$ (proposizione 1.7.3(iii)); quindi $\chi_B \in L^2(X, \mathcal{B}, m)$ e $\chi_B = \chi_E$ su $E \cup B^c$, con $m((E \cup B^c)^c) = m(E^c \cap B) = m(B \setminus E) = 0$. Quindi $[\chi_B] = [\chi_E]$ in $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$.

(ii)(b) Siano $X = [0,1]$, $\mathcal{G} = \{\emptyset, [0,1]\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{M}$, $\mu = m$: allora $L^2([0,1], \mathcal{G}, m)$ è lo spazio delle costanti, perché se g assume due valori distinti non può essere $\mathcal{G}$-misurabile. In questo caso, il sottospazio $L^2([0,1], \mathcal{G}, m)$ è chiuso in $L^2([0,1], \mathcal{M}, m)$, perché se $\{f_n\} \subseteq L^2([0,1], \mathcal{G}, m)$ verifica $f_n \to f$ in $L^2([0,1], \mathcal{F}, m)$, allora le f_n sono costanti, per cui anche f è costante: dunque $f \in L^2([0,1], \mathcal{G}, m)$. In questo caso, gli insiemi A e B di (i) coincidono entrambi con $[0,1]$.

Esercizio 8.1.12 Si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = \left[\frac{1}{n} \sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = \left[-\frac{1}{n} \cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

ed anche

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, \sin nx \, dx = 0,$$

essendo l'integrale di una funzione dispari su un intervallo simmetrico rispetto all'origine.

Esercizio 8.1.13 (i) Deriviamo l'integrale rispetto ai parametri a, b, c, il che è lecito per una facile applicazione del teorema di convergenza dominata ai rapporti incrementali:

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} (x - a - b \sin x - c \sin^2 x) \, dx = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} (x - a - b \sin x - c \sin^2 x) \sin x \, dx = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} (x - a - b \sin x - c \sin^2 x) \sin^2 x \, dx = 0. \end{cases}$$

Osservato che (immediata verifica)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} x \, \sin x \, dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \, dx = \frac{3}{4} \pi,$$

il sistema precedente equivale a

$$\begin{cases} -2a\pi - c\pi = 0 \\ 2\pi - b\pi = 0 \\ -a\pi - \frac{3}{4} \pi = 0 \end{cases}$$

ed è facile constatare che esso è risolto da

$$a = 0, \qquad b = 2, \qquad c = 0.$$

Il valore minimo dell'integrale dato è dunque, co calcoli immediati,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x - 2 \sin x|^2 \, dx = \frac{2}{3} \pi^3 - 4\pi.$$

(ii) Deriviamo rispetto ai parametri a, b, c, nuovamente grazie al teorema di convergenza dominata:

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} (x^3 - a - bx - cx^2) \, dx = 0 \\ \int_{-1}^{1} (x^3 - a - bx - cx^2) \, x \, dx = 0 \\ \int_{-1}^{1} (x^3 - a - bx - cx^2) \, x^2 \, dx = 0. \end{cases}$$

Calcolando facili integrali, questo sistema si riduce a

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - 2a - b - \frac{2}{3}\, c = 0 \\ \frac{2}{5} - a - \frac{2}{3}\, b - \frac{1}{2}\, c = 0 \\ \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\, a - \frac{1}{2}\, b - \frac{2}{5}\, c = 0. \end{cases}$$

Con elementare ma noiosa verifica si trova

$$a = \frac{1}{20}\,, \qquad b = -\frac{3}{5}\,, \qquad c = \frac{3}{2}\,.$$

Dunque il minimo è, dopo altri laboriosi ma semplici calcoli,

$$\int_{-1}^{1} \left| x^3 - \frac{1}{20} + \frac{3}{5}\, x - \frac{3}{2}\, x^2 \right|^2 dx = \frac{1}{1400}\,.$$

(iii) Lo spazio $[\{1, \sin x, \sin 3x\}]$ ha una base ortonormale in $L^2(-\pi, \pi)$ data da

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 3x \right\}.$$

La proiezione del vettore $1 + \sin x + \cos x + \sin^3 x$ su tale spazio è dunque

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \left[\int_{\pi}^{\pi} (1 + \sin t + \cos t + \sin^3 t) dt \right] + \\ &+ \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \sin t + \cos t + \sin^3 t) \sin t \, dt \right] \sin x + \\ &+ \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \sin t + \cos t + \sin^3 t) \sin 3t \, dt \right] \sin 3x = \\ &= 1 + \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin^2 t + \sin^4 t \right) dt \right] \sin x + \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 t \, \sin 3t \, dt \right] \sin 3x. \end{aligned}$$

Come sappiamo, $\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin^2 t + \sin^4 t \right) \, dt = \frac{7}{4}\, \pi$, mentre

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 t \, \sin 3t \, dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 t \, \sin(2t + t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 t \, (\sin 2t \, \cos t + \cos 2t \, \sin t) dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} (2 \sin t \, \cos t) \sin^2 t \, \sin 2t + \sin^4 t \, \cos 2t \right] dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} \, \sin^2 t \sin^2 2t + \sin^4 t \cos 2t \right] dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} \, \frac{1 - \cos 2t}{2} \, \frac{1 - \cos 4t}{2} + \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 \cos 2t \right] dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{8} (1 - \cos 2t - \cos 4t + \cos 2t \, \cos 4t) + \frac{1}{4} \left(1 - 2 \cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) \cos 2t \right] dt = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}\,. \end{aligned}$$

Pertanto la proiezione cercata è

$$1 + \frac{7}{4} \, \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x.$$

Esercizio 8.1.14 Dato che $\overline{[S]}$ è un sottospazio chiuso di H, per il teorema delle proiezioni (teorema 8.1.6) si ha

$$\overline{[S]} \oplus \overline{[S]}^{\perp} = H.$$

Ma $\overline{[S]}^{\perp} = S^{\perp}$: infatti, essendo $S \subseteq \overline{[S]}$, si ha $\overline{[S]}^{\perp} \subseteq S^{\perp}$; d'altronde, se $x \in S^{\perp}$ allora $(x,y)_H = 0$ per ogni $y \in S$; dunque, per additività, $(x,y)_H = 0$ per ogni $y \in [S]$ e, per continuità, $(x,y)_H = 0$ per ogni $y \in \overline{[S]}$, ossia $x \in \overline{[S]}^{\perp}$. Pertanto

$$H = \overline{[S]} \oplus \overline{[S]}^{\perp} = \overline{[S]} \oplus S^{\perp};$$

ma vale anche $H = S^{\perp\perp} \oplus S^{\perp}$, da cui, per l'unicità delle proiezioni, $S^{\perp\perp} = \overline{[S]}$.

Esercizio 8.1.15 Sia $x \in S^{\perp}$; allora $(x,y)_2 = 0$ per ogni $y \in S$. Scelto $y = e_1 - 2e_2 \in S$, si trova $x_1 - 2x_2 = 0$, ossia $x_2 = \frac{1}{2}x_1$. Similmente, scelto $y = e_1 - n\,e_n \in S$, si ottiene $x_n = \frac{1}{n}x_1$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Perciò $x = \left\{\frac{x_1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^+}$, e x non appartiene a c_{00}, il che mostra che $S^{\perp} = \{0\}$ e $S^{\perp\perp} = c_{00}$. D'altra parte, S è ovviamente diverso da c_{00} ed è un sottospazio chiuso in c_{00}: infatti, se $\{x^{(N)}\}_{N\in\mathbb{N}} \subset c_{00}$ converge a un elemento $x \in c_{00}$, allora

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}\right| \leq \|x - x^{(N)}\|_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^{(N)}}{n}\right| \leq c\|x - x^{(N)}\|_2 + 0 \to 0 \quad \text{per } N \to \infty.$$

Dunque $S = [S] = \overline{[S]} \neq S^{\perp\perp} = c_{00}$. Ovviamente ci'o non contraddice l'esercizio 8.1.14 perché c_{00} non 'e completo.

Esercizio 8.1.16 Siano $z \in M^{\perp}$, con $\|z\| = 1$, e $y \in H$. Allora

$$|(z,y)| = |(z, y - P_M y)| \leq \|y - P_M y\| \leq \|y - x\| \quad \forall x \in M,$$

da cui

$$\min_{x\in M} \|y - x\| = \|y - P_M y\| \geq \max\{|(z,y)| :\ z \in M^{\perp},\ \|z\| = 1\}.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \|y - P_M y\| &= \left(\frac{y - P_M y}{\|y - P_M y\|}, y - P_M y\right) \leq \\ &\leq \max\{|(z, y - P_M y)| :\ z \in M^{\perp},\ \|z\| = 1\} = \max\{|(z,y)| :\ z \in M^{\perp},\ \|z\| = 1\}. \end{aligned}$$

Esercizio 8.1.17 (i) $\Longrightarrow$ (ii) Se $P_i P_j = 0$, allora $P_i(M_j) = \{0\}$, per cui $M_j \subseteq M_i^{\perp}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Se gli M_i sono ortogonali e se, per assurdo, esiste $x \in H$ tale che $P_i P_j x \neq 0$, allora posto $y = P_j x$ si ha $y \in M_j$ e $P_i y \neq 0$, contraddicendo l'ipotesi che M_j e M_i siano fra loro ortogonali.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Se gli M_i sono ortogonali, la somma $\sum_{h=1}^{k} P_{i_h}$ è una proiezione ortogonale in virtù dell'osservazione 8.1.7, in quanto, grazie a (i),

$$\left(\sum_{h=1}^{k} P_{i_h}\right) \circ \left(\sum_{h=1}^{k} P_{i_h}\right) = \sum_{h=1}^{k} P_{i_h}^2 + \sum_{h\neq l} P_{i_h} P_{i_l} = \sum_{h=1}^{k} P_{i_h},$$

$$\left(\sum_{h=1}^{k} P_{i_h} x, y\right) = \sum_{h=1}^{k} (P_{i_h} x, y) = \sum_{h=1}^{k} (x, P_{i_h} y) = \left(x, \sum_{h=1}^{k} P_{i_h} y\right) \quad \forall x, y \in H.$$

L'immagine di questa proiezione è, chiaramente, $M_{i_1} \oplus M_{i_2} \oplus \cdots \oplus M_{i_k}$. Infatti, se $z \in H$ allora $\sum_{h=1}^{k} P_{i_h} z \in M_{i_1} \oplus M_{i_2} \oplus \cdots \oplus M_{i_k}$; d'altra parte, se $z \in M_{i_1} \oplus M_{i_2} \oplus \cdots \oplus M_{i_k}$, allora $z = z_1 + z_2 + \cdots + z_k$ con $z_h \in M_{i_h}$; quindi $z_h = P_{i_h} z_h$ da cui, essendo $P_{i_h} z_l = 0$ per $h \neq l$, $\sum_{h=1}^{k} P_{i_h} z = \sum_{h=1}^{k} P_{i_h} z_h = \sum_{h=1}^{k} z_h = z$. Perciò, $M_{i_1} \oplus M_{i_2} \oplus \cdots \oplus M_{i_k} = R\left(\sum_{h=1}^{k} P_{i_h}\right)$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Se per ogni $k \in \{1, \ldots, n\}$ e per ogni k-pla di indici distinti $i_1, \ldots, i_k$ l'operatore $P = \sum_{h=1}^{k} P_{i_h}$ è una proiezione ortogonale, proviamo che $P_i P_j = 0$ per $i \neq j$. Scegliamo $k = 2$ e $i_1 = i$, $i_2 = j$: dato che $P_i + P_j$ è una proiezione ortogonale, si ha

$$P_i + P_j = (P_i + P_j)^2 = P_i^2 + P_j^2 + P_i P_j + P_j P_i = P_i + P_j + P_i P_j + P_j P_i,$$

da cui $P_iP_j + P_jP_i = 0$, ossia $P_iP_jx = -P_jP_ix$ per ogni $x \in H$. Se per qualche $x \in H$ si avesse $z = P_iP_jx = -P_jP_ix \neq 0$, sarebbe $z \in M_i \cap M_j$, e quindi troveremmo $(P_i + P_j)z = z + z = 2z$, contro l'ipotesi che $P_i + P_j$ sia una proiezione ortogonale e che quindi abbia norma in $\mathcal{L}(H)$ non superiore a 1. Pertanto, per ogni $x \in H$ si ha $P_iP_jx = -P_jP_ix = 0$.

Esercizio 8.1.18 (i) $\Longrightarrow$ (ii) Se $M_1 \subseteq M_2$, allora $M_2 \cap M_1^\perp$ è un sottospazio chiuso e risulta $M_2 = M_1 \oplus (M_2 \cap M_1^\perp)$. Sia $P = P_{M_2 \cap M_1^\perp}$: si ha $P_2 = P_1 + P$, ossia $P = P_2 - P_1$. Vale evidentemente $R(P) = M_2 \cap M_1^\perp$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Se $P = P_2 - P_1$ è una proiezione ortogonale, e se $x \in M_2^\perp$, allora $P_2x = 0$ e dunque $Px = -P_1x$: questo però implica $\|Px\|^2 = (Px, x) = -(P_1x, x) = -\|P_1x\|^2 = 0$, ossia $x \in M_1^\perp$. Perciò $M_2^\perp \subseteq M_1^\perp$, e dunque $M_1 \subseteq M_2$.

Esercizio 8.1.19 (i) Se $M_1 \perp M_2$, proviamo che $M_1 + M_2$ è chiuso. Sia infatti $\{x_n + y_n\} \subseteq M_1 + M_2$ una successione convergente in H a z. Allora

$$P_{M_1}(x_n + y_n) = P_{M_1}x_n \to P_{M_1}z, \qquad P_{M_2}(x_n + y_n) = P_{M_2}y_n \to P_{M_2}z,$$

e quindi $z = P_{M_1}z + P_{M_2}z \in M_1 + M_2$.

(ii) Sia $\dim H = N$: allora tutti i sottospazi di H, dunque anche $M_1 + M_2$, sono chiusi. Infatti, sia M un sottospazio di H, con base ortonormale $\{e_1, \dots, e_m\}$; se $\{x_n\} \subseteq M$, e $x_n \to x$, sarà $x_n = \sum_{k=1}^m c_k^{(n)} e_k$. Si ottiene che $\{c_k^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{C}$ per $k = 1, \dots, m$; dunque $c_k^{(n)} \to c_k$ in $\mathbb{C}$ per $k = 1, \dots, m$, e di conseguenza $x_n \to x = \sum_{k=1}^m c_k e_k \in M$.

(iii) Poiché $M_1 \subseteq M$ e $M_2 \subseteq M$, e poiché M è il sottospazio generato da $M_1 \cup M_2$, esso deve contenere anche $M_1 + M_2$. Ne segue $\overline{M_1 + M_2} \subseteq \overline{M}$.
Viceversa, essendo $M_1 \subseteq M_1 + M_2$ e $M_2 \subseteq M_1 + M_2$, si ricava $M_1 \cup M_2 \subseteq M_1 + M_2$. Dunque $M_1 + M_2$, essendo un sottospazio, deve contenere anche M. Ne segue $\overline{M} \subseteq \overline{M_1 + M_2}$.

Esercizio 8.1.20 (i) Proviamo che R è chiuso in $L^2(B)$. Se f è limite in $L^2(B)$ di funzioni f_n tali che $f_n(x) = \varphi_n(|x|_2)$ q.o. in B, allora passando ad una sottosuccessione che converge q.o. a f si deduce $f(x) = \varphi(|x|_2)$ q.o. in B, e ciò prova la tesi.

(ii) Se $g \in R^\perp$, allora per ogni $f \in L^2(B)$ si ha

$$\begin{aligned} 0 &= (g, f)_{L^2(B)} = \int_B g(x)\,\varphi(|x|_2)\,dx = \int_0^1 \int_0^{2\pi} g(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)\,\varphi(r)\,r\,d\vartheta dr = \\ &= \int_0^1 \varphi(r) \int_0^{2\pi} g(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)\,d\vartheta\,r\,dr; \end{aligned}$$

dunque la funzione $r \mapsto \int_0^{2\pi} g(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)\,d\vartheta$ è ortogonale a $r \mapsto \varphi(r)$ in $L^2(0,1; r\,dr)$ per ogni $\varphi \in L^2(0,1; r\,dr)$. Ne segue

$$\int_0^{2\pi} g(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)\,d\vartheta = 0 \qquad \text{per q.o. } r \in [0,1].$$

Viceversa, se g verifica questa condizione, allora moltiplicando per $r\,\varphi(r)$ e integrando in $[0,1]$ si ottiene $\int_B g(x)\,\varphi(|x|_2)\,dx = 0$ per ogni $\varphi \in L^2(0,1; r\,dr)$, vale a dire $(g, f)_{L^2(B)} = 0$ per ogni $f \in R$.

(iii) Se $f \in R$ e $g \in L^2(B)$, si ha

$$\|g - f\|^2_{L^2(B)} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} |g(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) - \varphi(r)|^2\,d\vartheta\,r\,dr;$$

dato che nell'integrale più interno la quantità $\varphi(r)$è una costante (rispetto a ϑ), l'integrale si minimizza se si sceglie la costante $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r\cos\alpha, r\sin\alpha)\,d\alpha$, ossia la media integrale di $g(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$ rispetto a ϑ. Dunque

$$\|g - f\|^2_{L^2(B)} \geq \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| g(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r\cos\alpha, r\sin\alpha)\,d\alpha \right|^2 r\,dr \qquad \forall f \in R.$$

Pertanto $P_R g$ è la funzione radiale

$$P_R g(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r\cos\alpha, r\sin\alpha)\, d\alpha.$$

Esercizi del paragrafo 8.2

Esercizio 8.2.1 Estendiamo anzitutto il funzionale F alla chiusura $\overline{M}$: se $x \in \overline{M}$ e $\{x_n\} \subseteq M$ è tale che $x_n \to x$ in H, allora $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in H, e quindi $\{Fx_n\}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{C}$. Dunque esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $Fx_n \to \lambda$; possiamo definire $Fx = \lambda$ perché se $\{y_n\} \subseteq M$ è un'altra successione tale che $y_n \to x$, alllora $x_n - y_n \to 0$ e dunque $Fx_n - Fy_n \to 0$, cosicché $Fy_n \to \lambda$. Definito univocamente $F : \overline{M} \to \mathbb{C}$, per il teorema di Riesz-Fréchèt (teorema 8.2.1), applicato allo spazio di Hilbert $\overline{M}$, esiste un unico $x_0 \in \overline{M}$ tale che $Fx = (x, x_0)_H$ per ogni $x \in \overline{M}$. Estendiamo F a tutto H definendo $\overline{F}x = (x, x_0)_H$ per ogni $x \in H$. Questa $\overline{F}$ è un'estensione di F che è nulla su $\overline{M}^\perp$; ogni altra estensione G di F, per il teorema di Riesz-Fréchèt, ha la forma $Gx = (x, \xi)_H$, con $\xi \in H$: Dato che

$$Gx = (x, P_{\overline{M}}\xi)_H + (x, P_{\overline{M}^\perp}\xi)_H\,,$$

se si sceglie $x \in \overline{M}$ si ottiene $(x, x_0)_H = Fx = Gx = (x, P_{\overline{M}}\xi)_H$ per ogni $x \in \overline{M}$, da cui $P_{\overline{M}}\xi = x_0$. Inoltre

$$\|G\| = \|x_0 + P_{\overline{M}^\perp}\xi\|_H = \sqrt{\|x_0\|_H^2 + \|P_{\overline{M}^\perp}\xi\|_H^2}\,, \qquad \|\overline{F}\| = \|x_0\|_H\,,$$

e pertanto l'unica estensione di F che ne preservi la norma è quella con $P_{\overline{M}^\perp}\xi = 0$, ossia con $\xi = x_o$.

Esercizio 8.2.2 Poiché F non è continuo, esiste $\{x_n\} \subseteq H$ tale che $\|x_n\| \to 0$ ma $Fx_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia ora $z \in (\ker F)^\perp$: allora in particolare $Fz \neq 0$ e $\frac{z}{Fz} - x_n \in \ker F$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per $n \to \infty$ si ottiene $z \in \overline{\ker F}$, ossia $z \in \overline{\ker F} \cap (\ker F)^\perp = \{0\}$. Abbiamo così provato che $(\ker F)^\perp \subseteq \{0\}$, ossia $\overline{\ker F} = H$.

Esercizio 8.2.3 ($\Longrightarrow$) Supponiamo $f \in L^2(a,b)$. Posto

$$g(x) = \int_a^x [f(t)]^2\, dt,$$

g è assolutamente continua e crescente; inoltre, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$\left[\int_x^y f(t)\, dt\right]^2 \leq \left|\int_x^y [f(t)]^2\, dt\right| |y - x| = [g(y) - g(x)](y - x).$$

($\Longleftarrow$) Supponiamo che esista $g \in AC[a,b]$ crescente, tale che

$$\left[\int_x^y f(t)\, dt\right]^2 \leq [g(y) - g(x)](y - x) \qquad \forall x, y \in [a,b].$$

Allora, se φ è una funzione costante a tratti,

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k\, \chi_{[x_{k-1}, x_k]} \quad \text{con} \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x_0 = a,\ x_m = b,$$

risulta

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f\,\varphi\, dt\right| &= \left|\sum_{k=1}^m \alpha_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} f\, dt\right| \leq \sum_{k=1}^m |\alpha_k| \left|\int_{x_{k-1}}^{x_K} f\, dt\right| \leq \sum_{k=1}^m |\alpha_k| \sqrt{g(x_k) - g(x_{k-1})}\sqrt{x_k - x_{k-1}} \leq \\ &\leq \left[\sum_{k=1}^m [g(x_k) - g(x_{k-1})]\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum \alpha_k^2 (x_k - x_{k-1})\right]^{\frac{1}{2}} = [g(b) - g(a)]^{\frac{1}{2}}\, \|\varphi\|_{L^2(a,b)}\,.\end{aligned}$$

Dato che le funzioni costanti a tratti sono dense in $L^2(a,b)$ (esercizio 8.1.8), fissata una funzione $h \in L^2(a,b)$ esiste una successione $\{\varphi_n\}$ di tali funzioni che converge ad h in $L^2(a,b)$. Inserendo φ_n al posto di φ nella stima precedente, al limite per $n \to \infty$ si ottiene

$$\left| \int_a^b f\, h\, dt \right| \leq [g(b) - g(a)]^{\frac{1}{2}} \|h\|_{L^2(a,b)} .$$

Ne segue che f appartiene a $L^2(a,b)^*$, con norma non superiore a $[g(b) - g(a)]^{\frac{1}{2}}$. Per il teorema 8.2.1 e l'osservazione 8.2.2 si ha $f \in L^2(a,b) \equiv L^2(a,b)^*$ e $\|f\|_{L^2(a,b)} \leq [g(b) - g(a)]^{\frac{1}{2}}$.

Esercizio 8.2.4 Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ e supponiamo che risulti $(Sx, y) = (x, Ty)$ per ogni $x, y \in H$. Allora, per ogni $y, x, x' \in H$,

$$(S(\lambda x + \mu x'), y) = (\lambda x + \mu x', Ty) = \lambda(x, Ty) + \mu(x', Ty) = \lambda(Sx, y) + \mu(Sx', y),$$

cosicché la relazione S è lineare e Sx è l'elemento di H che rappresenta, mediante il teorema di Riesz Fréchèt (teorema 8.2.1), l'operatore lineare e continuo $y \mapsto (x, Ty)$, dipendente da x. Risulta

$$\|Sx\| = \sup_{\|y\|=1} |(Sx, y)| = \sup_{\|y\|=1} |(x, Ty)| \leq \|x\| \sup_{\|y\|=1} \|Ty\| \qquad \forall x \in H,$$

cioè $\|S\| \leq \|T\|$. Ma, analogamente,

$$\|Ty\| = \sup_{\|x\|=1} |(x, Ty)| = \sup_{\|x\|=1} |(Sx, y)| \leq \|y\| \sup_{\|x\|=1} \|Sx\| \qquad \forall y \in H,$$

e dunque $\|T\| \leq \|S\|$.

Esercizio 8.2.5 Anzitutto, si vede immediatamente che T è iniettivo, ossia $\ker T = \{0\}$. Se $y \in R(T)^\perp$, allora $(Ty, x) = (y, Tx) = 0$ per ogni $x \in H$, ossia $Ty = 0$: quindi $y = 0$, vale a dire $R(T)^\perp = \{0\}$, da cui $\overline{R(T)} = H$. Se però $y \in \overline{R(T)}$, esiste $\{y_n\} = \{Tx_n\} \subset R(T)$ tale che $Tx_n = y_n \to y$. Essendo $c\|x_n - x_m\| \leq \|Tx_n - Tx_m\|$, la successione $\{x_n\}$ è di Cauchy. Perciò esiste $x \in H$ tale che $x_n \to x$ in H, da cui $Tx_n \to Tx = y$. Pertanto $R(T) = \overline{R(T)} = H$ e in definitiva T è bigettivo; inoltre T^{-1} è continuo, essendo $\|y\| \geq c\|T^{-1}y\|$ per ogni $y \in H$.

Esercizio 8.2.6 Se P è una proiezione ortogonale, allora chiaramente $P^2 = P$ e, di conseguenza,

$$(Px, y) = (Px, (I - P)y + Py) = (Px, Py) = (Px + (I - P)x, Py) = (x, Py) \quad \forall x, y \in H.$$

Viceversa, sia $P^2 = P$ e $(Px, y) = (x, Py)$ per ogni $x, y \in H$. Osserviamo che $(I - P)Px = 0$ per ogni $x \in H$, quindi $R(P) \subseteq \ker(I - P)$, e vale l'uguaglianza essendo $x = Px$ per ogni $x \in \ker(I - P)$. In particolare, $R(P)$ è chiuso. D'altra parte si verifica subito che $\ker(I - P) = R(I - P)^\perp$, in quanto

$$x \in \ker(I-P) \iff ((I-P)x, z) = 0 \ \forall z \in H \iff (x, (I-P)z) = 0 \ \forall z \in H \iff x \in R(I-P)^\perp.$$

Dunque $R(P) = R(I-P)^\perp$; in particolare $x = Px + (I-P)x$ per ogni $x \in H$, ovvero $R(P) \oplus R(I-P) = H$. In definitiva, P è la proiezione ortogonale su $M := R(P)$.

Esercizio 8.2.7 (i) Per ogni $x \in \ell^2$ risulta $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e^{(n)}$: pertanto dalla defrinizione di T segue

$$Tx = \sum_{n=1}^\infty x_n T e^{(n)} = \sum_{n=1}^\infty x_n\, u_n\, v = (x, u)_2\, v.$$

Si ha allora $\|Tx\|_2 = |(x, u)_2| \|v\|_2 \leq \|x\|_2 \|u\|_2 \|v\|_2$, e scegliendo $x = u$ si trova $\|Tu\|_2 = \|u\|_2^2 \|v\|_2$. Dunque $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ e $\|T\| = \|u\|_2 \|v\|_2$.

(ii) Chiaramente, $R(T) = [\{v\}]$. Inoltre, $Tx = 0$ se e solo se $(x, u)_2 = 0$, dunque $\ker T = [\{u\}]^\perp$.

(iii) Risulta $T^2 x = T(Tx) = (Tx, u)_2\, v = (x, u)_2 (v, u)_2\, v$; dunque $Tx = T^2 x$ per ogni $x \in \ell^2$ se e solo se $(v, u)_2 = 1$.

(iv) Per l'esercizio 8.2.6, T è una proiezione ortogonale se e solo se $T = T^2$ e inoltre $(Tx, y)_2 = (x, Ty)_2$ per ogni $x, y \in \ell^2$. Dunque, per (iii) deve essere $(v, u)_2 = 1$; inoltre, essendo

$$(Tx, y)_2 = (x, u)_2 (v, y)_2 = (x, u)\overline{(y, v)_2}, \qquad (x, Ty)_2 = \overline{(y, u)_2}(x, v)_2 \,,$$

la seconda condizione vale se e solo se $(x, u)\overline{(y, v)_2} = (x, v)_2\overline{(y, u)_2}$ per ogni $x, y \in \ell^2$. Scegliendo $x = u$ e $y = v$ si deduce che, se T è una proiezione ortogonale, allora $\|u\|_2^2 \|v\|_2^2 = |(u, v)_2|^2$; dall'osservazione 7.2.3 segue che di conseguenza si deve avere $v = \lambda\, u$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$. Pertanto, se T è una proiezione ortogonale, allora $(v, u)_2 = 1$ e $v = \lambda\, u$, da cui $\lambda = 1/\|u\|_2^2$. Viceversa, le due condizioni sono sufficienti affinché T sia una proiezione ortogonale, poiché dalla prime segue $T^2 = T$, e dalla seconda si ottiene

$$(Tx, y)_2 = \frac{1}{\|u\|_2^2}\,(x, u)_2 (y, u)_2 = (x, Ty)_2 \qquad \forall x, y \in \ell^2.$$

Esercizio 8.2.8 (i) Si ha

$$|(AA^* x, y)| = |(A^* x, A^* y)| \le \|A^*\|^2 \|x\|\, \|y\| \qquad \forall x, y \in H,$$

e similmente

$$|(A^* Ax, y)| = |(Ax, Ay)| \le \|A\|^2 \|x\|\, \|y\| \qquad \forall x, y \in H;$$

ne segue, grazie all'esercizio 8.2.4,

$$\|AA^* x\| \le \|A^*\|^2 \|x\| = \|A\|^2 \|x\|, \quad \|A^* Ax\| \le \|A\|^2 \|x\| = \|A^*\|^2 \|x\| \qquad \forall x \in H.$$

D'altra parte

$$\|Ax\|^2 = (A^* Ax, x) \le \|A^* A\|\, \|x\|^2, \quad \|A^* x\|^2 = (AA^* x, x) \le \|AA^*\|\, \|x\|^2 \qquad \forall x \in H,$$

e dunque $\|A\|^2 \le \|A^* A\|$, $\|A^*\|^2 \le \|AA^*\|$. Si conclude allora che

$$\|A\|^2 = \|A^*\|^2 = \|AA^*\| = \|A^* A\|.$$

(ii) Se A è autoaggiunto, da (i) segue che $\|A\|^2 = \|A^2\|$. Per induzione, $\|A\|^{2^n} = \|A^{2^n}\|$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Se ora $k \in \mathbb{N}^+$, e $2^n > k$, si ha

$$\|A\|^k = \left[\|A\|^{2^n}\right]^{\frac{k}{2^n}} = \|A^{2^n}\|^{\frac{k}{2^n}} \le \|A^k\|^{\frac{k}{2^n}} \|A^{2^n - k}\|^{\frac{k}{2^n}} \le \|A^k\|^{\frac{k}{2^n}} \|A\|^{\frac{(2^n - k)k}{2^n}};$$

dunque

$$\|A\|^{k - \frac{(2^n - k)k}{2^n}} \le \|A^k\|^{\frac{k}{2^n}},$$

ovvero, elevando ambo i membri alla potenza $\frac{2^n}{k}$,

$$\|A\|^k \le \|A^k\| \le \|A\|^k.$$

Esercizio 8.2.9 Per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $x, y \in H$ si ha

$$(A(x + ty), x + ty) = (Ax, x) + 2t\,\mathrm{Re}\,(Ax, y) + t^2 (Ay, y) \ge 0;$$

quindi il discriminante di questo trinomio di secondo grado è non positivo:

$$[\mathrm{Re}\,(Ax, y)]^2 - (Ax, x)(Ay, y) \le 0.$$

Perciò

$$|\mathrm{Re}\,(Ax, y)| \le \sqrt{(Ax, x)}\sqrt{Ay, y)} \qquad \forall x, y \in H.$$

Inseriamo ora $e^{i\vartheta} y$, con $\vartheta \in \mathbb{R}$, al posto di y: allora

$$|\mathrm{Re}\, e^{-i\vartheta}(Ax, y)| = |\mathrm{Re}\,(Ax, e^{i\vartheta} y)| \le \sqrt{(Ax, x)}\sqrt{|e^{2i\vartheta}|(Ay, y)} = \sqrt{(Ax, x)}\sqrt{(Ay, y)} \qquad \forall x, y \in H.$$

Se $(Ax, y) = 0$ la tesi è banale: altrimenti, scegliendo

$$e^{-i\vartheta} = \frac{\overline{(Ax, y)}}{|(Ax, y)|}$$

si deduce

$$|(Ax, y)| \leq \sqrt{(Ax, x)}\sqrt{(Ay, y)} \qquad \forall x, y \in H.$$

Se poi A è strettamente positivo, allora

$$(x, y)_1 := (Ax, y)$$

è un prodotto scalare in quanto è una forma sesquilineare e, in più, $(x, x)_1 = (Ax, x) = 0$ equivale a $x = 0$.

Esercizio 8.2.10 (i) Si tratta di una verifica del tutto elementare.
(ii) Se $B = B^*$ e B^{-1} esiste, posto $Bx = y$ e $B^*g = f$ si ha

$$(y, (B^{-1})^* f)_H = (B^{-1}y, f)_H = (x, f)_H = (x, B^*g)_H = (Bx, g)_H = (y, g)_H;$$

per l'arbitrarietà di y si deduce $(B^{-1})^* f = g$, da cui $B^*(B^{-1})^* = I = (B^{-1})^* B^*$ e quindi $(B^{-1})^* = (B^*)^{-1}$. Ma, essendo B autoaggiunto, $(B^*)^{-1} = B^{-1}$, cioè $B^{-1} = (B^{-1})^*$.
(iii) Se S e T sono autoaggiunti, $ST = TS$ implica $(ST)^* = T^*S^* = TS = ST$; viceversa, da $ST = (ST)^*$ segue $ST = (ST)^* = T^*S^* = TS$.

Esercizio 8.2.11 (i) In $X = \mathbb{R}^n$, poniamo $K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, x_1, \ldots, x_{n-1})$: allora $K \neq 0$ e $K^n = 0$.
(ii) Se $K = K^* \neq 0$ e se $K^n = 0$ si ha, per l'esercizio 8.2.8, $0 = \|K^n\| = \|K\|^n$, da cui $K = 0$: assurdo.

Esercizio 8.2.12 Sia $Q = \frac{1}{2}(I - T)$: allora $Q = Q^*$ perché per ogni $x, y \in H$ si ha, essendo T autoaggiunto,

$$(Qx, y) = \frac{1}{2}((I - T)x, y) = \frac{1}{2}[(x, y) - (x, Ty)] = \frac{1}{2}(x, (I - T)y) = (x, Qy).$$

Inoltre, essendo $T^2 = I$, si ha per ogni $x \in H$

$$Q^2x = \frac{1}{4}(I - T)(I - T)x = \frac{1}{4}(I - T - T + T^2)x = \frac{1}{4}(2I - 2T)x = Qx.$$

Dall'esercizio 8.2.6 segue che Q è una proiezione ortogonale.

Esercizi del paragrafo 8.3

Esercizio 8.3.1 Per ogni $v \in M$, $v = \sum_{h=1}^N b_h\, e_{\alpha_h}$, risulta

$$\begin{aligned} \|x - v\|^2 &= \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\sum_{h=1}^N b_h\overline{(x, e_{\alpha_h})} + \sum_{h=1}^N |b_h|^2 = \\ &= \|x\|^2 - \sum_{h=1}^N |(x, e_{\alpha_h})|^2 + \sum_{h=1}^N |(x, e_{\alpha_h}) - b_h|^2 \geq \|x\|^2 - \sum_{h=1}^N |(x, e_{\alpha_h})|^2, \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{h=1}^N (x, e_{\alpha_h})\, e_{\alpha_h} \right\|^2 &= \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\sum_{h=1}^N (x, e_{\alpha_h})\overline{(x, e_{\alpha_h})} + \sum_{h=1}^N |(x, e_{\alpha_h})|^2 = \\ &= \|x\|^2 - \sum_{h=1}^N |(x, e_{\alpha_h})|^2 . \end{aligned}$$

Ne segue, per minimalità della distanza da x, che

$$P_M x = \sum_{h=1}^{N} (x, e_{\alpha_h})\, e_{\alpha_h}\,.$$

Esercizio 8.3.2 (i) Ovviamente si ha $P_n(t) \geq 0$ per ogni $t \in [-\pi, \pi]$. Poi, P_n è un polinomio trigonometrico di grado n perché le funzioni $1, \cos t, \cos^2 t, \ldots, \cos^n t$ si possono esprimere in funzione di $1, \cos t, \cos 2t, \ldots, \cos nt$. Infatti, dalla formula di duplicazione $2\cos^2 t - 1 = \cos 2t$, segue $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$; inoltre, se $\cos^k t = \sum_{h=0}^{k} A_h \cos ht$, allora $\cos^{k+1} t = \sum_{h=1}^{k} A_h \cos ht \cos t$, e dalle formule di Werner segue che $\cos ht \cos t = \sum_{j=0}^{k_h} B_{jh} \cos jt$ per opportuni coefficienti $B_{0h}, \ldots, B_{k_h h}$.

(ii) Si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_n} &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n dt = 2\int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n dt > 2\int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n \sin t\, dt = \\ &= 2\int_{-1}^{1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^n dx = \frac{2}{2^n}\left[\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{2\cdot 2^{n+1}}{2^n(n+1)} = \frac{4}{n+1}\,.\end{aligned}$$

Quindi per ogni $\delta \in]0, \pi[$ si ha

$$\limsup_{\delta \leq |t| \leq \pi} P_n(t) \leq \limsup_{\delta \leq |t| \leq \pi} \frac{n+1}{4}\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^n = 0.$$

(iii) Sia f continua e 2π-periodica. La funzione $f_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)P_n(s)\, ds$ è un polinomio trigonometrico: infatti vale

$$f_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\sigma)P_n(t-\sigma)\, d\sigma = k_n \int_{-\pi}^{\pi} f(\sigma)\left(\frac{1+\cos(t-\sigma)}{2}\right)^n d\sigma;$$

questo integrale contiene un polinomio trigonometrico in $t-\sigma$, ed utilizzando le formule di addizione esso si trasforma in una somma di coefficienti integrali moltiplicati per $\cos^k t$ e $\sin^k t$. Ne segue la tesi grazie a quanto provato in (i).

(iv) Si ha per $0 < \delta < \pi$

$$f_n(t) - f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(\sigma) - f(t)]P_n(t-\sigma)\, d\sigma = \left[\int_{|t-\sigma|\geq\delta} + \int_{|t-\sigma|<\delta}\right][f(\sigma) - f(t)]P_n(t-\sigma)\, d\sigma.$$

Il primo integrale, grazie a (ii), per $n \geq n_\varepsilon$ si maggiora in questo modo:

$$\left|\int_{|t-\sigma|\geq\delta} [f(\sigma) - f(t)]P_n(t-\sigma)\, d\sigma\right| \leq 2\|f\|_\infty \int_{|t-\sigma|\geq\delta} P_n(t-\sigma)\, d\sigma \leq 2\|f\|_\infty \varepsilon.$$

Il secondo integrale, per continuità di f, se $0 < \delta < \delta_\varepsilon$ si maggiora così:

$$\left|\int_{|t-\sigma|<\delta} [f(\sigma) - f(t)]P_n(t-\sigma)\, d\sigma\right| \leq < \varepsilon \int_{|t-\sigma|<\delta} P_n(t-\sigma)\, d\sigma < \varepsilon.$$

Dunque $f_n \to f$ uniformemente in $[-\pi, \pi]$.

Esercizio 8.3.3 Grazie all'esercizio 8.3.2, i polinomi trigonometrici sono densi rispetto alla norma uniforme in $C_c(\,]-\pi, \pi[\,)$, spazio che a sua volta è denso in $L^2(-\pi, \pi)$. Allora, dato $\varepsilon > 0$ e fissata $f \in L^2(-\pi, \pi)$, esiste $g \in C_c(\,]-\pi, \pi[\,)$ tale che $\|f - g\|_2 < \varepsilon$; inoltre esiste un polinomio trigonometrico P tale che $\|P - g\|_\infty < \varepsilon$. Pertanto

$$\|P - f\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - P\|_2 \leq \varepsilon + \sqrt{2\pi}\,\varepsilon.$$

Esercizio 8.3.4 Consideriamo la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k\, e^{ikt}$, con $\gamma_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, e^{-iks}\, ds$. Allora per $m \geq 0$ si ha

$$\gamma_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, \cos ms\, ds + \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, \sin ms\, ds,$$

$$\gamma_{-m} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, \cos ms\, ds - \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, \sin ms\, ds,$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, ds.$$

Di conseguenza

$$\gamma_m + \gamma_{-m} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos ms\, ds = a_m\,,$$

$$i(\gamma_m - \gamma_{-m}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin ms\, ds = b_m\,,$$

$$2\gamma_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, ds = a_0\,.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k\, e^{ikt} &= \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k\, e^{ikt} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \gamma_k\, e^{ikt} = \\
&= \gamma_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\gamma_m + \gamma_{-m}) \cos mt + i \sum_{m=1}^{\infty} (\gamma_m - \gamma_{-m}) \sin mt = \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mt + b_m \sin mt)\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 8.3.5 Gli insiemi P e D sono chiusi in $L^2(-\pi,\pi)$ perché se $\{f_n\} \subset P$ e $f_n \to f$ in $L^2(-\pi,\pi)$, allora esiste una sottosuccessione che converge a f q.o. in $[-\pi,\pi]$; ne segue che $f \in P$. Discorso analogo per D. Inoltre $P \subseteq D^\perp$, in quanto se $f \in P$ allora $\int_{-\pi}^{\pi} f\, g\, dt = 0$ per ogni $g \in D$, dato che $f\, g$ è dispari. Viceversa, se $h \in D^\perp$ allora $(h, \sin kt)_2 = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, cosicché la serie di Fourier di h è di soli coseni. In virtù della completezza del sistema trigonometrico (esercizio 8.3.3), la serie di Fourier di h converge in $L^2(-\pi,\pi)$ ad h. Passando a sottosuccessioni, vi è convergenza puntuale q.o.; dato che la serie è di soli coseni, si deduce che $h \in P$, ossia $D^\perp = P$.

Esercizio 8.3.6 Il sistema $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \sin nx\right\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ è ortonormale: infatti, se $n \in \mathbb{N}^+$ si ha

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^{n\pi} \sin^2 t\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 t\, dt = \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi}{2} = 1,$$

e per $m \neq n$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin mnx\, \sin mx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin nx\, \sin mx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, \sin mx\, dx = 0,$$

visto che $\sin nx \perp \sin mx$ in $L^2(-\pi,\pi)$.
Discorso analogo per il sistema $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right\} \cup \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \cos nx\right\}_{n\in\mathbb{N}^+}$.
Proviamo ora la completezza del sistema $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \sin nx\right\}_{n\in\mathbb{N}^+}$. Sia $f \in L^2(0,\pi)$ e supponiamo che $\int_0^{\pi} f(x)\, \sin nx\, dx = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Prolunghiamo f in modo dispari a $]-\pi,\pi[$: allora si ha $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos nx\, dx = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; inoltre, grazie all'ipotesi fatta su f, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \sin nx\, dx = 2\int_0^{\pi} f(x)\, \sin nx\, dx = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Quindi f ha tutti i coefficienti di Fourier nulli, per cui la sua serie di Fourier è nulla. Ne segue $f = 0$ e dunque il sietema è completo.

Per il sistema $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right\} \cup \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\cos nx\right\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ si procede allo stesso modo, prolungando stavolta f in modo pari.

Esercizio 8.3.7 Sia $x \in H$: per la proposizione 8.3.12(v) sarà $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, e_k$. Dall'ipotesi segue che

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\, e_k, y_m \right)_H = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{N} x_k (e_k, y_m)_H = 0.$$

Allora, fissato $\varepsilon > 0$, esiste N_ε tale che

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} x_k\, e_k - x \right\|_H < \varepsilon \qquad \forall N \geq N_\varepsilon;$$

dunque, se M è un maggiorante di tutte le norme $\|y_m\|_H$, possiamo scrivere

$$(x, y_m)_H = \left(x - \sum_{k=1}^{N} x_k\, e_k, y_m \right)_H + \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\, e_k, y \right)_H ,$$

e a secondo membro il primo termine è dominato da $M\varepsilon$, mentre il secondo tende a 0 quando $m \to \infty$. Pertanto

$$\limsup_{m\to\infty} |(x, y_m)_H| \leq \varepsilon + 0 = \varepsilon,$$

con ε arbitrario.

Esercizio 8.3.8 La funzione f è pari, quindi i coefficienti di Fourier relativi ai seni sono tutti nulli. Invece

$$\left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi - |x|}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} (\pi - t)^2\, dt = \frac{\pi^3}{6\sqrt{2\pi}} ,$$

ed inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$,

$$\left(f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \cos nx \right)_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi - |x|}{2} \right)^2 \cos nx\, dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} (\pi - t)^2\, \cos nt\, dt;$$

con due integrazioni per parti, si trova

$$\left(f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \cos nx \right)_2 = \frac{1}{n^2\sqrt{\pi}} [(\pi - t)(-\cos nt)]_0^{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{n^2} .$$

Si conclude che la serie di Fourier di f è

$$\frac{\pi^3}{6\sqrt{2\pi}}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{n^2}\, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} ,$$

ed essa converge a f uniformemente e totalmente. Quindi

$$\frac{\pi^2}{4} = f(0) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

Inoltre, in virtù dell'uguaglianza di Bessel (proposizione 8.3.12),

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi - |x|}{2} \right)^4 dx = \left| \left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)_2 \right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(f, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right)_2 \right|^2 ;$$

il primo membro vale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi - |x|}{2}\right)^4 dx = \frac{2}{16} \int_0^{\pi} (\pi - t)^4 \, dt = \frac{\pi^5}{40} \,,$$

ed il secondo membro, per quanto già calcolato, vale

$$\left| \left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)_2 \right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(f, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right)_2 \right|^2 = \frac{\pi^5}{72} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^4} \,,$$

da cui, facilmente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \,.$$

Esercizio 8.3.9 La continuità di $f \star g$ segue dall'esercizio 7.2.2. Calcoliamo i coefficienti di Fourier di $f \star g$: si ha

$$\begin{aligned}
(f \star g)_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \star g(t) \, e^{-ikt} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-y) \, g(y) \, dy \, e^{-ikt} \, dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-y) \, g(y) \, e^{-ik(t-y)} \, e^{-iky} \, dt dy = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \, e^{-iky} \, dy \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \, e^{-iks} \, ds = 2\pi \, g_k \, f_k \,.
\end{aligned}$$

Dunque

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |(f \star g)_k| = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f_k| \, |g_k| \leq 2\pi \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} |g_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

e pertanto la serie di Fourier di $f \star g$ converge uniformemente e totalmente, ovviamente con somma $f \star g$.

Esercizio 8.3.10 (i) Sia $f \in AC[-\pi, \pi]$ con $f(-\pi) = f(\pi) = 0$; sia poi $\gamma_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, e^{-ikt} \, dt$. Se $f' \in L^2(-\pi, \pi)$, allora, detto $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \, e^{-ikt} \, dt$, integrando per parti si trova

$$c_k = \frac{ik}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, e^{-ikt} \, dt = ik \, \gamma_k \,.$$

Quindi

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 \, |\gamma_k|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \|f'\|^2_{L^2(-\pi,\pi)} < \infty.$$

Viceversa, se $\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 \, |\gamma_k|^2 < \infty$, allora $c_k = ik \, \gamma_k$ verifica $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$, e quindi $f' \in L^2(-\pi, \pi)$.
(ii) Se $\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 \, |\gamma_k|^2 < \infty$, la serie $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k \, e^{ikt}$ converge totalmente, perché

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma_k \, e^{ikt}| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma_k| \leq \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k^2 |\gamma_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \,,$$

e la somma è $f(t)$, dato che tale serie è la serie di Fourier di f.
(iii) Se $\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 \, |\gamma_k|^2 < \infty$, allora da (i) segue $f' \in L^2(-\pi, \pi)$ e la serie $\sum_{k \in \mathbb{Z}} ik \, \gamma_k \, e^{ikt}$ converge a f' in $L^2(-\pi, \pi)$. Quindi

$$\frac{d}{dt} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k \, e^{ikt} = \frac{d}{dt} f(t) = f'(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} ik \, \gamma_k \, e^{ikt} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{d}{dt} \gamma_k \, e^{ikt}.$$

(iv) Se $f \in C^2[-\pi,\pi]$ è periodica, allora in particolare $f, f' \in AC[-\pi,\pi]$ e, detti c_k, d_k i coefficienti di Fourier di f', f'', vale $d_k = ik\,c_k = -k^2\,\gamma_k$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Poiché $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \|f'\|^2 < \infty$, e similmente $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |d_k|^2 = \|f''\|^2 < \infty$, risulta

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\gamma_k| \le |\gamma_0| + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{|c_k|}{|k|} \le |\gamma_0| + \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |c_k|^2\right]^{\frac12} \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{k^2}\right]^{\frac12} < \infty,$$

e analogamente

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |c_k| \le \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{k^2}\right]^{\frac12} \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} |d_k|^2\right]^{\frac12} < \infty.$$

Pertanto le due serie di Fourier $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k e^{ikt}$ e $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$ convergono uniformemente e totalmente, e le loro somme sono necessariamente f e f'; inoltre, grazie a (iii) (applicato a f'), la serie $\sum_{k\in Z} d_k e^{ikt}$ converge a f'' in $L^2(-\pi,\pi)$.

Esercizio 8.3.11 Anzitutto proviamo che $(P_n, P_m)_{L^2(-1,1)} = 0$ per $n \neq m$. Notiamo che P_n ha grado n, essendo la derivata n-esima di un polinomio di grado $2n$ con primo termine x^{2n}. Notiamo anche che $D^k(x^2-i)^n = D^k(x-1)^n(x+1)^n$ vale 0 in ±1 per $k = 0, 1, 2, \dots n-1$. Allora per $n > m$, omettendo il fattore moltiplicativo, si ha, integrando $m+1$ volte per parti,

$$\begin{aligned}(P_n, P_m)_{L^2(-1,1)} &= \int_{-1}^{1} D^n(x^2-1)^n\, D^m(x^2-1)^m\, dx = \\ &= (-1)^{m+1} \int_{-1}^{1} D^{n-m-1}(x^2-1)^n\, D^{2m+1}(x^2-1)^m\, dx = \int_{-1}^{1} 0\, dx = 0,\end{aligned}$$

mentre se $n < m$

$$(P_n, P_m)_{L^2(-1,1)} = (P_m, P_n)_{L^2(-1,1)} = 0$$

per quanto appena visto. Resta da calcolare la norma di P_n. Poiché $D^{2n}(x^2-1)^n = (2n)!$, si ha, integrando n volte per parti,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{n} |D^n(x^2-1)^n|^2\, dx &= \int_{-1}^{1} D^n(x^2-1)^n\, D^n(x^2-1)^n\, dx = \\ &= (-1)^n \int_{-1}^{1} D^{2n}(x^2-1)^n\, (x^2-1)^n\, dx = \\ &= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\, dx = (2n)! \int_{-1}^{1} (1-x)^n (1+x)^n\, dx :\end{aligned}$$

Integrando ancora n volte per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} |D^n(x^2-1)^n|^2\, dx &= (2n)! \int_{-1}^{1} \frac{(1-x)^{2n}}{2n(2n-1)\dots(n+1)}\, n!(1+x)^0\, dx = \\ &= (n!)^2 \int_{-1}^{1} (1-x)^{2n}\, dx = \frac{(n!)^2}{2n+1}\, 2^{n+1},\end{aligned}$$

ossia $\|P_n\|_{L^2(-1,1)} = 1$.
Proviamo ora che il sistema $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è completo. Sia $f \in L^2(-1,1)$ ortogonale a tutti i polinomi di Legendre P_n: vogliamo mostrare che f è ortogonale a tutti i monomi x^h, $h \in \mathbb{N}$. Innanzitutto, per ipotesi,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = (f, 1)_{L^2(-1,1)} = (f, P_0)_{L^2(-1,1)} = 0.$$

Sia $\{f_k\} \subset C_c^\infty(\,]-1,1[\,)$ tale che $\|f_k - f\|_{L^2(-1,1)} < \frac{1}{k}$ (esercizio 8.1.9, opportunamente modificato). Per ottenere $(f, x^h)_{L^2(-1,1)} = 0$, ragioniamo per induzione. Il passo iniziale è già stato fatto. Supponiamo

che $(f, x^h)_{L^2(-1,1)} = 0$ per $h = 0, 1, \ldots, m-1$, e consideriamo $(f, x^m)_{L^2(-1,1)}$. Si ha, integrando per parti m volte,

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\, x^m\, dx \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \int_{-1}^{1} f_k(x)\, x^m\, dx \right| = c_m \lim_{k\to\infty} \left| \int_{-1}^{1} f_k^{(m)}(x)\, x^{2m}\, dx \right|,$$

ove c_m è una costante. Quindi

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\, x^m\, dx \right| \le c_m \lim_{k\to\infty} \left| \int_{-1}^{1} f_k^{(m)}(x)\, (x^2-1)^m\, dx \right| + c_m \lim_{k\to\infty} \left| \int_{-1}^{1} f_k^{(m)}(x)\, Q_{2m-2}(x)\, dx \right|,$$

ove Q_{2m-2} è un polinomio di grado $2m-2$. Allora integrando m volte per parti all'indietro,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^{1} f(x)\, x^m\, dx \right| &= c'_m \lim_{k\to\infty} \left| \int_{-1}^{1} f_k(x)\, D^m (x^2-1)^m\, dx \right| + c''_m \lim_{k\to\infty} \left| \int_{-1}^{1} f_k(x) R_{m-2}(x)\, dx \right| = \\ &= c'_m \left| \int_{-1}^{1} f(x)\, D^m (x^2-1)^m\, dx \right| + c''_m \left| \int_{-1}^{1} f(x)\, R_{m-2}(x)\, dx \right|, \end{aligned}$$

dove R_{m-2} è la derivata m-esima di Q_{2m-2}, dunque è un polinomio di grado $m-2$. Il primo termine all'ultimo membro è nullo per ipotesi, mentre il secondo è nullo per ipotesi induttiva. Quindi $(f, x^m)_{L^2(-1,1)} = 0$.
Ne segue che f, essendo ortogonale a tutti i monomi e dunque a tutti i polinomi, è ortogonale a tutto $L^2(-1,1)$, ossia è nulla. Perciò il sistema $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è completo.

Esercizio 8.3.12 (i) Si ha

$$\frac{d}{dx}\left[H_{n-1}(x)\, e^{-x^2} \right] = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!\, 2^{n-1}\sqrt{\pi}}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = -\sqrt{2n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\, 2^n \sqrt{\pi}}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = -\sqrt{2n} H_n(x)\, e^{-x^2}.$$

(ii) Supponiamo $m \le n$. Allora, posto $\gamma_n = \frac{1}{\sqrt{n!\, 2^n \sqrt{\pi}}}$, si ha dopo n integrazioni per parti

$$\begin{aligned} (H_m, H_n)_{L^2(\mathbb{R},\mathcal{M},e^{-x^2}dx)} &= \int_{\mathbb{R}} H_m(x)\, H_n(x)\, e^{-x^2}\, dx = \\ &= (-1)^n \gamma_n \int_{\mathbb{R}} H_m(x)\, \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\, dx = \gamma_n \int_{\mathbb{R}} \frac{d^n}{dx^n} H_m(x)\, e^{-x^2}\, dx. \end{aligned}$$

Se $m < n$, l'ultimo membro è nullo perché vi compare la derivata n-esima si un polinomio di grado m; se invece $m = n$, osservato che $\frac{d^n}{dx^n} H_n(x) = \gamma_n n!\, a_n$, ove a_n è il coefficiente del termine di grado massimo di $\frac{1}{\gamma_n} H_n$, si ottiene

$$(H_n, H_n)_{L^2(\mathbb{R},\mathcal{M},e^{-x^2}dx)} = \gamma_n^2 n!\, a_n \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \gamma_n^2 n!\, a_n \sqrt{\pi}.$$

D'altra parte si verifica agevolmente per induzione che $a_n = 2^n$: infatti, per $n = 0$ dalla definizione di H_0 segue $a_0 = 1$, mentre se assumiano che $a_{n-1} = 2^{n-1}$, allora nella relazione provata in (i) il primo membro diventa

$$\begin{aligned} &\gamma_{n-1} \frac{d}{dx}\left[(2^{n-1}x^{n-1} + \ldots) e^{-x^2} \right] = \\ &= \gamma_{n-1} \left[[(n-1)\, 2^{n-1} x^{n-2} + \ldots + (2^{n-1}x^{n-1} + \ldots)(-2x)] e^{-x^2} \right] = \gamma_{n-1}(-2^n x^n + \ldots) e^{-x^2}, \end{aligned}$$

mentre a secondo membro c'è $\sqrt{2n}\,\gamma_n (a_n x^n + \ldots) e^{-x^2}$. Essendo $\sqrt{2n}\,\gamma_n = \gamma_{n-1}$, si conclude che $a_n = 2^n$. In definitiva

$$(H_n, H_n)_{L^2(\mathbb{R},\mathcal{M},e^{-x^2}dx)} = \gamma_n^2 n!\, a_n \sqrt{\pi} = \gamma_n^2 n!\, 2^n \sqrt{\pi} = 1.$$

(iii) Sia $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}, e^{-x^2}dx)$ una funzione ortogonale a tutti i polinomi H_n in $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}, e^{-x^2}dx)$: dunque si ha

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\, dx = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dobbiamo provare che f è ortogonale a tutti i polinomi. A questo scopo mostriamo che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, x^m\, e^{-x^2}\, dx = 0 \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Ragioniamo per induzione. Per $m = 0$ sappiamo già che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-x^2}\, dx = 0.$$

Supponiamo che risulti

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, x^h\, e^{-x^2}\, dx = 0 \qquad \text{per} \quad h = 0, 1, \ldots, m-1,$$

e consideriamo l'integrale $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, x^m\, e^{-x^2}\, dx$. Notiamo che

$$\frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2} = Q_m(x)\, e^{-x^2},$$

ove Q_m è un polinomio di grado m; detto b_m il coefficiente del termine di grado massimo di Q_m, si può scrivere $Q_m(x) = b_m\, x^m + R_{m-1}(x)$, con R_{m-1} polinomio di grado $m-1$. Pertanto

$$\begin{aligned} b_m \int_{\mathbb{R}} f(x)\, x^m\, e^{-x^2}\, dx &= \int_{\mathbb{R}} f(x)[Q_m(x) - R_{m-1}(x)]\, e^{-x^2}\, dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2}\, dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)\, R_{m-1}(x)\, e^{-x^2}\, dx; \end{aligned}$$

Il primo termine all'ultimo membro è nullo per ipotesi, mentre il secondo è nullo per ipotesi induttiva. Dunque f è ortogonale a tutti i monomi x^m, con $m \in \mathbb{N}$, e quindi $f \perp \mathcal{P}$, ove $\mathcal{P}$ è la famiglia di tutti i polinomi.

Esercizio 8.3.13 (i) La funzione ψ_n vale $(-1)^k$ sull'intervallo $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$; in particolare, $\int_0^1 |\psi_n|^2 dx = 1$. Poi, se $n > m$, l'integrale di $\psi_n\, \psi_m$ su $\left[\frac{h}{2^m}, \frac{h+1}{2^m}\right[$ è l'integrale di ψ_n moltiplicata per $(-1)^h$: la ψ_n cambia segno su ciascuno dei sottointervalli $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[$, con $2^{n-m}h \le k \le 2^{n-m}(k+1)$, per cui l'integrando vale $(-1)^h(1-1+1-1+\ldots)$ (2^{n-m} addendi). Perciò l'integrale su $\left[\frac{h}{2^m}, \frac{h+1}{2^m}\right[$ vale 0 per ogni $h = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$. In definitiva, $\int_0^1 \psi_n\, \psi_m\, dx = 0$.

(ii) La funzione $g = 1 - 2\chi_{\left]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]}$ vale 1 su $[0, \frac{1}{4}[\cup]\frac{3}{4}, 1]$ e vale -1 su $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. Se $n > 2$ la ψ_n ha integrale nullo su ciascuno di tali intervalli, cosicché $\int_0^1 \psi_n\, g\, dx = 0$. Se $n = 0$ si ha $\psi_0 \equiv 1$ e si vede subito che $\int_0^1 \psi_0\, g\, dx = 0$. Se $n = 1$, la ψ_1 vale 1 su $[0, \frac{1}{2}[$ e vale -1 su $[\frac{1}{2}, 1[$, da cui ancora $\int_0^1 \psi_1\, g\, dx = 0$. Infine, se $n = 2$ la ψ_2 vale 1 su $[0, \frac{1}{4}[\cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$, e vale -1 su $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[\cup [\frac{3}{4}, 1[$, per cui, nuovamente, $\int_0^1 \psi_2\, g\, dx = 0$.

(iii) Sia $f \in L^1(0,1)$. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste una funzione φ costante a tratti, $\varphi = \sum_{k=1}^p c_k\, \chi_{I_k}$, tale che $\|f - \varphi\|_{L^1(0,1)} < \varepsilon$. Allora

$$\left| \int_0^1 \psi_n\, f\, dx \right| \le \|\psi_n\|_\infty \|f - \varphi\|_1 + \left| \int_0^1 \psi_n\, \varphi\, dx \right| < \varepsilon + \left| \sum_{k=1}^p c_k \int_{I_k} \psi_n\, dx \right|.$$

L'integrale di ψ_n su I_k è la somma di $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ (per ciascun intervallo $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[$ contenuto in I_k), più due possibili "avanzi", entrambi di ampiezza minore di $\frac{1}{2^n}$, situati subito dopo il primo estremo e subito prima del secondo estremo di I_k. Perciò

$$\left| c_k \int_{I_k} \psi_n\, dx \right| \le |c_k|\, \frac{2}{2^n},$$

e denque

$$\left|\int_0^1 \psi_n\, f\, dx\right| \le \varepsilon + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{p} |c_k|.$$

Per $n \to \infty$ si ricava

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\int_0^1 \psi_n\, f\, dx\right| \le \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

da cui la tesi.

Esercizio 8.3.14 Posto $Q = [a,b] \times [c,d]$, sia $f \in L^2(Q)$ ortogonale alla famiglia $\{\varphi_n\, \psi_m\}$. Dunque

$$\int_Q f(x,y)\, \varphi_n(x)\, \psi_m(y)\, dxdy = 0 \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Quindi

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, \psi_m(y)\, dy\right] \varphi_n(x)\; dx = 0 \qquad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

da cui, per la completezza del sistema $\{\varphi_n\}$, per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste un insieme N_m con $m(N_m) = 0$, tale che

$$\int_c^d f(x,y)\, \psi_m(y)\, dy = 0 \qquad \forall x \notin N_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Pertanto, per l'insieme $N = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} N_m$, che verifica $m(N) = 0$, si ha

$$\int_c^d f(x,y)\, \psi_m(y)\, dy = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall x \notin N.$$

Per la completezza del sistema $\{\psi_n\}$, ragionando come sopra si trova

$$f(x,y) = 0 \qquad \forall x \notin N, \quad \forall y \notin P,$$

ove $m(P) = 0$. Ne segue

$$f(x,y) = 0 \qquad \forall (x,y) \in N^c \times P^c,$$

con $m_2((N^c \times P^c)^c) = m_2((N \times P^c) \cup (N^c \times P) \cup (N \times P)) = 0$, visto che nei tre insiemi dell'unione uno almeno dei due fattori ha misura m nulla. Si conclude allora che $f = 0$ q.o. in Q e pertanto il sistema $\{\varphi_n\, \psi_m\}$ è completo.

Esercizio 8.3.15 Un sistema ortonormale in $V = [\{x, y\}]$ è $\{u, v\}$, ove

$$u = \frac{x}{\|x\|_2} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^+},$$

$$v = \frac{y - (y,u)_2\, u}{\|y - (y,u)_2\, u\|_2}.$$

Calcoliamo v: dato che

$$(y,u)_2 = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\, dt = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t}\, dt = \frac{\sqrt{6}\, \log 2}{\pi},$$

si ha

$$y - (y,u)_2\, u = \left\{2^{-n} - \frac{6\, \log 2}{\pi^2\, n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^+},$$

e

$$\begin{aligned}\|y-(y,u)_2\,u\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{-n}-\frac{6\,\log 2}{\pi^2\,n}\right)^2 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(4^{-n}-\frac{12\,\log 2\cdot 2^{-n}}{\pi^2\,n}+\frac{36\,(\log 2)^2}{\pi^4\,n^2}\right)=\frac{1}{3}-\frac{6\,(\log 2)^2}{\pi^2}\,.\end{aligned}$$

Quindi

$$v=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{6}{\pi^2}\,(\log 2)^2}}\left\{2^{-n}-\frac{6\,\log 2}{\pi^2\,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^+}\,.$$

Esercizio 8.3.16 (a) È evidente che K_h è un convesso chiuso e che $K_{h+1}\subseteq K_h$. Inoltre l'inclusione è propria in generale, perché se $H=\ell^2$ e $x=\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}_{n\in\mathbb{N}^+}$, se $h\le\alpha<h+1$ si ha $x\in K_h\setminus K_{h+1}$.
Il sottospazio M_h è denso in H, perché l'insieme degli elementi di H tali che la successione $\{(x,e_n)_H\}$ è definitivamente nulla è denso in H ed è contenuto in M_h. Infine l'inclusione $M_{h+1}\subseteq M_h$ è ovvia, ed è anche propria, perché in ℓ^2 l'elemento x sopra definito appartiene a $K_h\setminus M_{h+1}\subset M_h\setminus M_{h+1}$.
(b) L'insieme K è ovviamente convesso. Se $x\in K$, si ha

$$|(x,e_n)_H|\le\frac{1}{n^h}\qquad\forall n,h\in\mathbb{N}^+;$$

dunque, al limite per $h\to\infty$, $(x,e_n)_H=0$ per ogni $n\ge 2$. Pertanto

$$K\subseteq\{x\in H:\ x=\lambda\,e_1,\ \lambda\in\mathbb{C},\ |\lambda|\le 1\};$$

l'inclusione opposta è banale.
Inoltre, il sottospazio M è denso in H per la stessa ragione illustrata nel caso di M_h.
(c) Risulta per ogni $x\in H$

$$P_K x=\begin{cases}(x,e_1)_H\,e_1 & \text{se } |(x,e_1)_H|\le 1\\ \frac{(x,e_1)_H}{|(x,e_1)_H|}\,e_1 & \text{se } |(x,e_1)_H|>1:\end{cases}$$

infatti, con questa scelta si ha per ogni $v=\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(v,e_n)_H\,e_n\in K$, denotando con $\mathbb{N}_0$ l'insieme degli indici n tali che $|(x,e_n)_H|<1$ e con $\mathbb{N}_1$ l'insieme degli indici n tali che $|(x,e_n)_H|<1$,

$$\begin{aligned}\|x-v\|_H^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0}|(x,e_n)_H-(v,e_n)_H|^2+\sum_{n\in\mathbb{N}_1}|(x,e_n)_H-(v,e_n)_H|^2\ge\\ &\ge 0+\sum_{n\in\mathbb{N}_1}|(x,e_n)_H|^2\left(1-\frac{1}{|(x,e_n)_H|^2}\right)=\|x-P_Kx\|_H^2\,.\end{aligned}$$

Poi, per ogni $x\in H$ si ha $y=P_{K_h}x$ se e solo se $y=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\,e_n$ con

$$\lambda_n=\begin{cases}(x,e_n)_H & \text{se } |(x,e_n)_H|\le\dfrac{1}{n^h}\\ \dfrac{1}{n^h} & \text{se } (x,e_n)_H>\dfrac{1}{n^h}\\ -\dfrac{1}{n^h} & \text{se } (x,e_n)_H<-\dfrac{1}{n^h}\,;\end{cases}$$

infatti, analogamente, in questo modo siamo sicuri che

$$\|x-y\|_H^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)_H-\lambda_n|^2\le\|x-z\|_H^2\qquad\forall z\in K_h\,.$$

Esercizio 8.3.17 (i)-(ii) Se $x \in M$ si ha induttivamente

$$(x, e_{2n})_H = \frac{1}{2^{n-1}}(x, e_2)_H, \quad (x, e_{2n-1})_H = \frac{1}{2^{n-1}}(x, e_1)_H \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Quindi

$$\|x\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} \left[|(x, e_1)|^2 + |(x, e_2)|^2\right] = \frac{4}{3} \left[|(x, e_1)|^2 + |(x, e_2)|^2\right] \quad \forall x \in H.$$

Ne segue $M \cap [\{e_1, e_2\}]^\perp = \{0\}$. Poniamo

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} e_{2n} \qquad w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} e_{2n-1}\,.$$

Allora

$$M = \{\lambda\, v + \mu\, w :\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}\},$$

in quanto l'inclusione $\supseteq$ è ovvia, mentre per l'altra risulta, per ogni $x \in M$,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_{2n})_H\, e_{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_{2n-1})_H\, e_{2n-1} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} (x, e_2)_H\, e_{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} (x, e_1)_H\, e_{2n-1} = (x, e_2)_H\, v + (x, e_1)_H\, w. \end{aligned}$$

Quindi M è bi-dimensionale e una base di M è ovviamente $\{v, w\}$.
(iii) Dato che $\|v\|_H^2 = \|w\|_H^2 = \frac{4}{3}$, si ha

$$P_M x = \frac{3}{4} \left[(x, v)_H\, v + (x, w)_H\, w\right] = \frac{3}{4} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+m-2}} \left[(x, e_{2n})_H\, e_{2m} + (x, e_{2n-1})_H\, e_{2m-1}\right].$$

Esercizio 8.3.18 Sia $v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$. Allora, per ortogonalità,

$$\|v\|^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\,, \sum_{m=0}^{\infty} v_m\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (v_n, v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\|^2,$$

e, per la proprietà di riordinamento delle serie a termini positivi,

$$\|v\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \|v_{\sigma(m)}\|^2.$$

Allora, ancora per ortogonalità,

$$\begin{aligned} \left\| v - \sum_{m=0}^{N} v_{\sigma(m)} \right\|^2 &= \|v\|^2 + \sum_{m=0}^{N} \|v_{\sigma(m)}\|^2 - 2\mathrm{Re}\left(v, \sum_{m=0}^{N} v_{\sigma(m)}\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\|^2 + \sum_{m=0}^{N} \|v_{\sigma(m)}\|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\,, \sum_{m=0}^{N} \|v_{\sigma(m)}\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\|^2 + \sum_{m=0}^{N} \|v_{\sigma(m)}\|^2 - 2 \sum_{m=0}^{N} \|v_{\sigma(m)}\|^2, \end{aligned}$$

e per $N \to \infty$

$$\lim_{N-to\infty} \left\| v - \sum_{m=0}^{N} v_{\sigma(m)} \right\|^2 = 2\|v\|^2 - 2\|v\|^2 = 0.$$

Se manca l'ortogonalità, la proprietà non è vera: sia $\sum a_n$ una serie di numeri non nulli, convergente ad un numero $a \in \mathbb{R}$, ma non assolutamente convergente: allora esiste un riordinamento di $\sum a_n$ tale che $\sum a_{\sigma(m)}$ ha somma 0. Se $x \in H \setminus \{0\}$ e si sceglie $v_n = a_n\, x$, allora $(v_n, v_m) = a_n\, a_m \|x\|^2 \neq 0$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n = a\, x, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} v_{\sigma(m)} = 0 \cdot x = 0.$$

Esercizio 8.3.19 Supponiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2$ sia convergente. Allora, essendo

$$\|Te_n\|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} |(Te_n, f_m)|^2,$$

la serie doppia $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |(Te_n, f_m)|^2$ è convergente. Ma, analogamente,

$$\|T^* f_m\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(T^* f_m, e_n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(Te_n, f_m)|^2,$$

da cui

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|T^* f_m\|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |(T^* f_m, e_n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |(Te_n, f_m)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2.$$

Viceversa, se $\sum_{m=0}^{\infty} \|T^* f_m\|^2$ è convergente, la stessa procedura, *mutatis mutandis*, porta all'uguaglianza $\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \|T^* f_m\|^2$.

Esercizio 8.3.20 (i) Segue dall'esercizio 8.3.19.

(ii) Sia $\{f_m\}$ un arbitrario sistema ortonormale completo in H. Allora

$$\|Ae_n\|_H^2 = \sum_{m=0}^{\infty} |(Ae_n, f_m)_H|^2,$$

cosicché, ancora grazie all'esercizio 8.3.19,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|Ae_n\|_H^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |(Ae_n, f_m)_H|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \|A^* f_m\|_H^2.$$

Se si applica l'uguaglianza precedente con $\{e_n\} = \{f_m\}$, si ricava

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|Af_m\|_H^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \|A^* f_m\|_H^2$$

e quindi, mettendo insieme le due uguaglianze,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|Af_m\|_H^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|Ae_n\|_H^2.$$

(iii)-(iv) È facile verificare che (S, T) gode delle proprietà di un prodotto scalare, e che esso induce la norma

$$\|S\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|Se_n\|_H^2\,,$$

la quale non dipende dalla scelta del sistema ortonormale completo $\{e_n\}$. Infatti dall'identità di Parseval (proposizione 8.3.12(iv))

$$(Sf_m, Tf_m)_H = \sum_{n=0}^{\infty} (Sf_m, e_n)_H\, \overline{(Tf_m, e_n)_H}\,,$$

da cui

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}(Sf_m,Tf_m)_H &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(Sf_m,e_n)_H\,\overline{(Tf_m,e_n)_H}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\overline{(S^*e_n,f_m)_H}\,(T^*e_n,f_m)_H=\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(T^*e_n,S^*e_n)_H=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(T^*e_n,e_m)_H\,\overline{(S^*e_n,e_m)_H}=\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(Se_m,e_n)_H\,\overline{(Te_m,e_n)_H})=\sum_{m=0}^{\infty}(Se_m,Te_m)_H\,.\end{aligned}$$

Esercizio 8.3.21 (i) Sia F un sottoinsieme misurabile di $[a,b]$. Esistono $k,m\in\mathbb{Z}$ tali che $2k\pi<a<b<2m\pi$. Si ha

$$\int_F \sin nx\,dx=\sum_{h=k}^{m}\int_{2k\pi}^{2m\pi}\chi_F(x)\,\sin nx\,dx\to 0\quad\text{per } n\to\infty,$$

perché $\chi_F\in L^2(2k\pi,2m\pi)$ e $\sin nx\rightharpoonup 0$ in $L^2(2k\pi,2m\pi)$; per lo stesso motivo,

$$\lim_{n\to\infty}\int_F\cos nx\,dx=0.$$

(ii) L'insieme E è misurabile in virtù della proposizione 3.1.6. Risulta, per (i),

$$\lim_{k\to\infty}\int_E\sin n_kx\,dx=0,$$

ma per definizione di E, essendo $|\sin n_kx|\le 1$ per ogni $k\in\mathbb{N}$ e $x\in\mathbb{R}$, per convergenza dominata si ha

$$\lim_{k\to\infty}\int_E\sin n_kx\,dx=\int_E\lambda(x)\,dx:$$

quindi $\int_E\lambda(x)\,dx=0$. Detto poi $G=\{x\in E:\ \lambda(x)>\delta\}$, si ha

$$\lim_{k\to\infty}\int_G\sin n_kx\,dx=0,\qquad\lim_{k\to\infty}\int_G\sin n_kx\,dx=\int_G\lambda(x)\,dx\ge\delta\,m(G).$$

Pertanto $m(G)=0$ e analogamente $m(\{x\in E:\ \lambda(x)<-\delta\})=0$, da cui $\lambda(x)=0$ q.o. in E.

(iii) Per convergenza dominata, si ha

$$\lim_{k\to\infty}\int_E\sin^2 n_kx\,dx=\int_E\lambda(x)^2\,dx=0.$$

(iv) Da (iii) segue che

$$0=\lim_{k\to\infty}\int_E\cos 2n_kx\,dx=\lim_{k\to\infty}\int_E(1-2\sin^2 n_kx)\,dx=m(E).$$

Esercizi del paragrafo 8.4

Esercizio 8.4.1 Siano $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $f\in L^1(\mathbb{R}^N)$. Allora

$$\begin{aligned}\widehat{m_\lambda f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N}e^{-i(\xi,x)_N}f(\lambda x)\,dx=|\lambda|^{-N}\int_{\mathbb{R}^N}e^{-i(\xi,y/\lambda)_N}f(y)\,dy=\\ &= |\lambda|^{-N}\int_{\mathbb{R}^N}e^{-i(\xi/\lambda,y)_N}f(y)\,dy=|\lambda|^{-N}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)=|\lambda|^{-N}(m_{1/\lambda}\widehat{f})(\xi).\end{aligned}$$

Esercizio 8.4.2 Siano $v\in\mathbb{R}^N$ e $f\in L^1(\mathbb{R}^N)$. Allora

$$\widehat{\tau_v}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^N}e^{-i(\xi,x)_N}f(x+v)\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}e^{-i(\xi,y-v)_N}f(y)\,dy=e^{i(\xi,v)_N}\int_{\mathbb{R}^N}e^{-i(\xi,y)_N}f(y)\,dy=e_v\widehat{f}(\xi),$$

$$\tau_v\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(v+\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\,(\xi+v,x)_N} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(\xi,x)_N} e^{-i(v,x)_N} f(x)\,dx = \widehat{e_{-v}f}(\xi).$$

Esercizio 8.4.3 Poiché $|\det A| = 1$, si ha

$$\begin{aligned}\widehat{f\circ A}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(\xi,x)_N} f(Ax)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(\xi,A^{-1}Ax)_N} f(Ax)\,dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(\xi,A^{-1}y)_N} f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(\xi,A^*y)_N} f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(A\xi,y)_N} f(y)\,dy = \widehat{f}\circ A(\xi).\end{aligned}$$

Esercizio 8.4.4 Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ reale e strettamente positiva. Allora per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$ si ha

$$|\widehat{f}(\xi)| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(\xi,x)_N} f(x)\,dx\right| = \sqrt{\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\cos(\xi,x)_N\,dx\right)^2 + \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\sin(\xi,x)_N\,dx\right)^2};$$

essendo f strettamente positiva, i due integrali cambiano segno e quindi risulta

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\cos(\xi,x)_N\,dx\right| &< \int_{\mathbb{R}^N} f(x)|\cos(\xi,x)_N|dx,\\ \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\sin(\xi,x)_N\,dx\right| &< \int_{\mathbb{R}^N} f(x)|\sin(\xi,x)_N|dx;\end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(\xi)| &< \sqrt{\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,|\cos(\xi,x)_N|\,dx\right)^2 + \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,|\sin(\xi,x)_N|\,dx\right)^2} = \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\left[|\cos(\xi,x)_N| + i|\sin(\xi,x)_N|\right]dx\right| = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = \widehat{f}(0).\end{aligned}$$

Esercizio 8.4.5 Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se f è pari,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\cos\xi x\,dx = 2\int_0^\infty f(x)\,\cos\xi x\,dx;$$

se f è dispari, similmente,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{-i\xi x}\,dx = -i\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\sin\xi x\,dx = -2i\int_0^\infty f(x)\,\sin\xi x\,dx.$$

Esercizio 8.4.6 Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tale che $\widehat{f} = 0$. Sia φ_ε una mollificatrice: dunque $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ con $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \geq 0$, $\varphi = 0$ fuori della palla unitaria. Allora, come sappiamo, la convoluzione (esercizio 5.4.5) $f \star \varphi_\varepsilon$ appartiene a $C^\infty(\mathbb{R}^N)$; ma essa appartiene anche a $L^2(\mathbb{R}^N)$, poiché, utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\int_{R^N} |f\star\varphi_\varepsilon(x)|^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N}\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy\right|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N}\left[\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)|\varphi_\varepsilon(y)\,dy\right]^2 dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\left[\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)|^{\frac12}\left[|f(x-y)|^{\frac12}\varphi_\varepsilon(y)\right]dy\right]^2 dx \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)|dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)|\varphi_\varepsilon(y)^2 dy\right)dx = \\ &= \|f\|^2_{L^1(\mathbb{R}^N)}\|\varphi_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon^{-2N}\|f\|^2_{L^1(\mathbb{R}^N)} < \infty.\end{aligned}$$

Inoltre, per la proposizione 8.4.5,

$$\widehat{f\star\varphi_\varepsilon}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{\varphi_\varepsilon}(\xi) = 0.$$

Essendo $\mathcal{F}$ un isomorfismo su $L^2(\mathbb{R}^N)$, si ricava $f \star \varphi_\varepsilon = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$, da cui, per $\varepsilon \to 0$, $f = 0$.

Esercizio 8.4.7 Per $f(x) = e^{-\lambda|x|}$ si ha

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{-\lambda|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-i\xi x} e^{\lambda x}\,dx + \int_0^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-\lambda x}\,dx = \\ &= \frac{1}{\lambda - i\xi}\left[e^{x(\lambda - i\xi)}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{\lambda + i\xi}\left[e^{-x(\lambda + i\xi)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda - i\xi} + \frac{1}{\lambda + i\xi} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + \xi^2}\,.\end{aligned}$$

Per $g(x) = \frac{1}{\lambda^2 + x^2}$, posto $\widehat{f} = g$ si trova, grazie al conto precedente, $f(x) = \frac{1}{2\lambda}\, e^{-\lambda|x|}$; quindi, per la formula di inversione,

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{\widehat{f}}(\xi) = 2\pi\, f(-\xi) = \frac{\pi}{\lambda}\, e^{-\lambda|\xi|}.$$

Esercizio 8.4.8 Si ha

$$\begin{aligned}\chi_{[-n,n]} \star \chi_{[-1,1]}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-n,n]}(x - y)\, \chi_{[-1,1]}(y)\, dy = \int_{-1}^{1} \chi_{[-n,n]}(x - y)\, dy = \\ &= \int_{-1}^{1} \chi_{[x-n,x+n]}(y)\, dy = m([-1,1] \cap [x - n, x + n]);\end{aligned}$$

dunque

$$\chi_{[-n,n]} \star \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le -n - 1 \\ x + n + 1 & \text{se } -n - 1 \le x \le -n + 1 \\ 2 & \text{se } -n + 1 \le x \le n - 1 \\ 1 - x + n & \text{se } n - 1 \le x \le n + 1 \\ 0 & \text{se } n + 1 \le x. \end{cases}$$

Risulta allora $\chi_{[-n,n]} \star \chi_{[-1,1]} = \widehat{\varphi}$ se e solo se

$$\widehat{\chi_{[-n,n]}}(\xi)(\,\widehat{\chi_{[-1,1]}}(\xi) = \widehat{\widehat{\varphi}}(\xi) = 2\pi\varphi(-\xi),$$

ossia se e solo se

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\widehat{\chi_{[-n,n]}}(-\xi)(\,\widehat{\chi_{[-1,1]}}(-\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{i\xi x}\,dx \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{i\xi x}\,dx = \\ &= \frac{1}{(2\pi\,\xi)^2}(e^{in\xi} - e^{-in\xi})(e^{i\xi} - e^{-i\xi}) = -\frac{1}{(\pi\,\xi)^2}\sin nx\,\sin x.\end{aligned}$$

Esercizio 8.4.9 Tutte le funzioni date appartengono a $L^1(\mathbb{R})$. Per f_1 si ha

$$\begin{aligned}\widehat{f_1}(\xi) &= \int_{-1}^{1} e^{-i\xi x}(1 - |x|)\,dx = \int_0^1 e^{-i\xi x}(1 - x)\,dx + \int_{-1}^{0} e^{-i\xi x}(1 + x)\,dx = \\ &= \left[-\frac{1}{i\xi}e^{-i\xi x}(1 - x)\right]_0^1 - \left[\frac{1}{i\xi}e^{-i\xi x}(1 + x)\right]_{-1}^{0} - \int_0^1 \frac{1}{i\xi}\, e^{-i\xi x}dx + \int_{-1}^{0} \frac{1}{i\xi}\, e^{-i\xi x}dx = \\ &= \frac{1}{i\xi} - \frac{1}{i\xi} + \frac{1}{(i\xi)^2}\left[e^{-i\xi x}\right]_0^1 - \frac{1}{(i\xi)^2}\left[e^{-i\xi x}\right]_{-1}^{0} = \\ &= -\frac{e^{-i\xi} - 1}{\xi^2} + \frac{1 - e^{i\xi}}{\xi^2} = \frac{1}{\xi^2}[2 - e^{i\xi} - e^{-i\xi}] = \frac{2}{\xi^2}(1 - \cos\xi).\end{aligned}$$

Passiamo alla f_2:

$$\begin{aligned}
\widehat{f_2}(\xi) &= \int_0^1 e^{-i\xi x}(1-x)\,dx - \int_{-1}^0 e^{-i\xi x}(1+x)\,dx = \\
&= \left[-\frac{1}{i\xi}e^{-i\xi x}(1-x)\right]_0^1 + \left[\frac{1}{i\xi}e^{-i\xi x}(1+x)\right]_{-1}^0 - \int_0^1 \frac{1}{i\xi}\,e^{-i\xi x}dx - \int_{-1}^0 \frac{1}{i\xi}\,e^{-i\xi x}dx = \\
&= \frac{1}{i\xi} + \frac{1}{i\xi} + \frac{1}{(i\xi)^2}\left[e^{-i\xi x}\right]_0^1 + \frac{1}{(i\xi)^2}\left[e^{-i\xi x}\right]_{-1}^0 = \\
&= \frac{2}{i\xi} - \frac{e^{-i\xi}-1}{\xi^2} - \frac{1-e^{i\xi}}{\xi^2} = \frac{2}{i\xi} - \frac{1}{\xi^2}[e^{-i\xi} - e^{i\xi}] = \frac{2i}{\xi^2}\,\sin\xi - \frac{2i}{\xi} = 2i\,\frac{\sin\xi - \xi}{\xi^2}.
\end{aligned}$$

Per la f_3 troviamo:

$$\begin{aligned}
\widehat{f_3}(\xi) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\xi x}\cos\frac{x}{2}\,dx = \left[2\,e^{-i\xi x}\sin\frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} 2i\xi\,e^{-i\xi x}\sin\frac{x}{2}\,dx = \\
&= 2e^{-i\xi\pi} + 2e^{i\xi\pi} - \left[4i\xi\,e^{-i\xi x}\cos\frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} 4\xi^2\,e^{-i\xi x}\cos\frac{x}{2}\,dx;
\end{aligned}$$

dunque

$$\widehat{f_3}(\xi) = \frac{4\cos\xi\pi}{1-4\xi^2}$$

(si noti che questa funzione è continua in $\pm\frac{1}{2}$).
Consideriamo la f_4: si ha

$$\begin{aligned}
\widehat{f_4}(\xi) &= \int_0^1 e^{-i\xi x}e^{-x}\,dx - \int_{-1}^0 e^{-i\xi x}e^{x}\,dx = \\
&= -\frac{1}{1+i\xi}\left[e^{-(i\xi+1)x}\right]_0^1 - \frac{1}{1-i\xi}\left[e^{(1-i\xi)x}\right]_{-1}^0 = \frac{e^{-1-i\xi}-1}{1+i\xi} - \frac{1-e^{i\xi-1}}{1-i\xi}.
\end{aligned}$$

Questa funzione, con facili passaggi, può essere riscritta nella forma

$$f_4(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}\left[-2 + \frac{2}{e}\,\cos\xi - \frac{2}{e}\,\xi\,\sin\xi\right].$$

Infine, per la f_5, essendo

$$f_5(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ 1-x & \text{se } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1-x & \text{se } -\frac{1}{2} < x \le 0, \\ -\frac{1}{2} & \text{se } -1 \le x \le -\frac{1}{2} \end{cases}$$

si trova

$$\begin{aligned}
\widehat{f_5}(\xi) &= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} e^{-i\xi x}\,dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} e^{-i\xi x}(1+x)\,dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} e^{-i\xi x}(1-x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{-i\xi x}\,dx = \\
&= \frac{1}{2i\xi}\left(e^{\frac{i\xi}{2}} - e^{i\xi}\right) + \frac{1}{i\xi}\left[e^{-i\xi x}(1+x)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} - \frac{1}{i\xi}\int_{-\frac{1}{2}}^{0} e^{-i\xi x}\,dx - \\
&- \frac{1}{i\xi}\left[e^{-i\xi x}(1-x)\right]_{0}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{i\xi}\int_{0}^{\frac{1}{2}} e^{-i\xi x}\,dx - \frac{1}{2i\xi}\left(e^{-i\xi} - e^{-\frac{i\xi}{2}}\right) = \\
&= \frac{1}{2i\xi}\left(e^{\frac{i\xi}{2}} - e^{i\xi} - e^{-i\xi} + e^{-\frac{i\xi}{2}}\right) + \frac{1}{i\xi} - \frac{1}{2i\xi}\,e^{\frac{i\xi}{2}} + \\
&+ \frac{1}{(i\xi)^2}\left[e^{-i\xi x}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} - \frac{1}{2i\xi}\,e^{-\frac{i\xi}{2}} + \frac{1}{i\xi} + \frac{1}{(i\xi)^2}\left[e^{-i\xi x}\right]_{0}^{\frac{1}{2}} = \\
&= -\frac{1}{2i\xi}\left(e^{i\xi} + e^{-i\xi}\right) + \frac{2}{i\xi} - \frac{1}{\xi^2}\left(1 - e^{\frac{i\xi}{2}} + e^{-\frac{i\xi}{2}} - 1\right) = \\
&= -i\left[\frac{1-\cos\xi}{\xi} + \frac{\xi - 2\sin(\xi/2)}{\xi^2}\right].
\end{aligned}$$

Esercizio 8.4.10 Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ con $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Se φ_ε è una mollificatrice (esercizio 5.4.7), per $\varepsilon \to 0^+$ si ha $\varphi_\varepsilon \star f \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$ e quindi $\widehat{\varphi_\varepsilon \star f} \to \widehat{f}$ uniformemente in $\mathbb{R}^N$. Osserviamo inoltre che $\widehat{\varphi_\varepsilon}(\xi) \to 1$ per $\varepsilon \to 0^+$: infatti risulta, per convergenza dominata,

$$\widehat{\varphi_\varepsilon}(\xi) = \varepsilon^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi x}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\varepsilon y}\varphi(y) \to \int_{\mathbb{R}^N}\varphi(y)\,dy = 1.$$

Quindi, usando la formula di inversione fornita dalla proposizione 8.4.10, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha, grazie alla proposizione 8.4.5,

$$\varphi_\varepsilon \star f(x) = (2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi}\,\widehat{\varphi_\varepsilon \star f}(\xi)\,d\xi = (2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi}\,\widehat{\varphi_\varepsilon}(\xi)\,\widehat{f}(\xi)\,d\xi.$$

Per $\varepsilon \to 0^+$, il primo membro, passando eventualmente a sottosuccessioni, converge q.o. a $f(x)$, mentre il secondo membro, per convergenza dominata, tende a $(2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)\,d\xi$. Ciò prova la formula cercata. Si noti che da tale formula segue

$$f(x) = \widehat{\widehat{f}}(-x) \qquad \text{q.o. in } \mathbb{R}^N.$$

Esercizio 8.4.11 Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ con $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Dalla formula di inversione dell'esercizio 8.4.10 segue che $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e che $\|f\|_\infty \le (2\pi)^{-N}\|\widehat{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$. Di conseguenza

$$|f(x)|^2 = f(x)\overline{f(x)} \le |f(x)|\|f\|_\infty\,, \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

da cui

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\|f\|_\infty < \infty.$$

Pertanto $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e dunque $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Inoltre, utilizzando ancora la formula di inversione,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|f(x)|^2\,dx = (2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\overline{\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi}\,\widehat{f}(\xi)\,d\xi}\,dx = (2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\int_{\mathbb{R}^N}\overline{\widehat{f}}(\xi)e^{-i\xi x}\,d\xi dx;$$

in virtù del teorema di Fubini ricaviamo allora

$$\int_{\mathbb{R}^N}|f(x)|^2\,dx = (2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N}\overline{\widehat{f}}(\xi)\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi x}f(x)\,dx = (2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{R}^N}|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi.$$

Esercizio 8.4.12 Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $f \star f = f$, allora dalla proposizione 8.4.5 si deduce $(\widehat{f})^2 = \widehat{f \star f} = \widehat{f}$; dato che $\widehat{f}$ è continua, si può avere $\widehat{f} \equiv 0$ oppure $\widehat{f} \equiv 1$, che però è impossibile essendo $\widehat{f}$ infinitesima per $|\xi|_N \to \infty$. Dunque $\widehat{f} \equiv 0$. Dall'esercizio 8.4.6 segue allora che $f = 0$.

Esercizio 8.4.13 Partiamo dalla formula $\widehat{f \star g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$ della proposizione 8.4.5, che è valida per ogni $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Possiamo sostituire $\widehat{f}$ e $\widehat{g}$ al posto di f e g, in quanto per ipotesi tali funzioni appartengono a $L^1(\mathbb{R}^N)$. Dunque, per quanto osservato alla fine dello svolgimento dell'esercizio 8.4.10,

$$\widehat{\widehat{f} \star \widehat{g}}(x) = \widehat{\widehat{f}}(x)\,\widehat{\widehat{g}}(x) = f(-x)\,g(-x) \qquad \text{q.o. in } \mathbb{R}^N,$$

ovvero $f(x)\,g(x) = \left[\widehat{\widehat{f} \star \widehat{g}}\right](-x)$ q.o. in $\mathbb{R}^N$. Si noti che, per l'esercizio 8.4.11, f e g appartengono a $L^2(\mathbb{R}^N)$ e dunque $fg \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Ne segue

$$\widehat{fg}(\xi) = \mathcal{F}\left(\left[\widehat{\widehat{f} \star \widehat{g}}\right](-x)\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(\left[\widehat{\widehat{f} \star \widehat{g}}\right]\right)(-\xi) = \widehat{f} \star \widehat{g}(\xi).$$

Esercizio 8.4.14 Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si ha, usando la formula di inversione (teorema 8.4.10),

$$\mathcal{F}^2 f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,\xi)}\widehat{f}(\xi)\,d\xi = (2\pi)^{-N} f(-x).$$

Di conseguenza, sempre per $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,

$$\mathcal{F}^4 f(x) = \mathcal{F}^2[\mathcal{F}^2 f](x) = (2\pi)^{-N}[\mathcal{F}^2 f](-x) = (2\pi)^{-2N} f(x).$$

Le uguaglianze precedenti si estendono a tutto $L^2(\mathbb{R}^N)$ utilizzando la densità di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Esercizio 8.4.15 (i) Poiché μ è una misura finita, si ha

$$|\widehat{\mu}(\xi)| = \left|\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} d\mu(x)\right| \le \mu(\mathbb{R}) < \infty,$$

quindi $\widehat{\mu} \in L^\infty(\mathbb{R})$. Inoltre, per convergenza dominata,

$$|\widehat{\mu}(\xi) - \widehat{\mu}(\xi_0)| \le \int_{\mathbb{R}} |e^{-i(\xi-\xi_0)x} - 1| d\mu(x) \to 0 \quad \text{per} \quad \xi \to \xi_0\,.$$

(ii) Sia $B \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato tale che μ sia nulla su tutti i sottoinsiemi misurabili disgiunti da B. Allora, sempre per convergenza dominata,

$$\exists\, \widehat{\mu}^{(k)}(\xi) = \int_B (-ix)^k e^{-i\xi x} d\mu(x) \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

quindi $\widehat{\mu} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(iii) Nel caso (a) si ha chiaramente $\widehat{\mu} = \widehat{f}$. Nel caso (b), $\widehat{\mu}(\xi) = e^{-i\xi\,0} = 1$. Infine nel caso (c) si trova la serie di Fourier

$$\widehat{\mu}(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} e^{-in\xi}.$$

Capitolo 9

Spazi L^p

09

9.1 La norma di L^p

normap

Descriviamo in questo capitolo una nuova famiglia di spazi di Banach, assai importanti per la ricchezza delle proprietà di cui godono: gli spazi L^p. Fra tutti gli spazi di Banach, la struttura di questi spazi è quella che più si avvicina a quella Hilbertiana. Di questa famiglia conosciamo già alcuni membri, e cioè L^∞ (paragrafo 3.3), L^1 (paragrafo 4.6) e L^2 (esercizio 7.2.1).
Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato, e sia $1 \le p < \infty$. Poniamo

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ è misurabile e } \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\};$$

si vede facilmente che $\mathcal{L}^p(X)$ è uno spazio vettoriale. Infatti se $f \in \mathcal{L}^p(X)$ allora ovviamente $\lambda f \in \mathcal{L}^p(X)$; poi, se $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$ allora anche $f + g \in \mathcal{L}^p(X)$, in quanto tale funzione è misurabile ed inoltre, per la convessità in $[0, \infty[$ della funzione $t \mapsto t^p$, si ha

$$|f(x) + g(x)|^p \le [|f(x)| + |g(x)|]^p \le 2^{p-1}[|f(x)|^p + |g(x)|^p],$$

da cui, integrando su X,

$$\int_X |f + g|^p \, d\mu \le 2^{p-1} \left[\int_X |f|^p \, d\mu + \int_X |g|^p \, d\mu \right] < \infty.$$

Indicata con $\simeq$ l'abituale relazione d'equivalenza che identifica le funzioni q.o. coincidenti, diamo la seguente

Lp **Definizione 9.1.1** *Lo spazio quoziente $\mathcal{L}^p(X)/\simeq$ si indica con $L^p(X)$.*

È chiaro che $L^p(X)$ è uno spazio vettoriale. Definiamo

$$\|f\|_p = \left[\int_X |f|^p \, d\mu \right]^{\frac{1}{p}};$$

dimostreremo che $\|\cdot\|_p$ è una norma che rende $L^p(X)$ uno spazio di Banach. Si osservi che le prime due proprietà caratteristiche della norma sono immediate, e che l'unica

verifica non banale è quella della subadditività.
A questo scopo proveremo dapprima un'altra fondamentale disuguaglianza. Per $p \in [1,\infty]$ indichiamo con q l'*esponente coniugato* di p, cioè il numero definito dalla relazione

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1;$$

dunque

$$q=\begin{cases} 1 & \text{se } p=\infty \\ \frac{p}{p-1} & \text{se } 1<p<\infty \\ \infty & \text{se } p=1. \end{cases}$$

È chiaro che q è l'esponente coniugato di p se e solo se p è l'esponente coniugato di q. Si noti anche che 2 è il coniugato di se stesso.

Holder **Proposizione 9.1.2 (disuguaglianza di Hölder)** *Sia $p \in [1,\infty]$ e sia q l'esponente coniugato di p. Se $f \in L^p(X)$ e $g \in L^q(X)$, allora $fg \in L^1(X)$ e*

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q \,.$$

Dimostrazione La disuguaglianza è banale se $p=1$ (oppure, simmetricamente, se $p=\infty$): in tal caso infatti la tesi segue integrando la disuguaglianza

$$|f(x)g(x)| \le |f(x)| \|g\|_\infty \qquad \text{q.o. in } X.$$

Supponiamo dunque $p \in]1,\infty[$ e, di conseguenza, $q=\frac{p}{p-1} \in]1,\infty[$. Si osservi anche che se $p=q=2$ la disuguaglianza di Hölder si riduce a quella di Cauchy-Schwarz (proposizione 7.2.2). Si noti poi che se $\|f\|_p=0$ oppure $\|g\|_q=0$ allora si ha $fg=0$ q.o. in X, cosicché la tesi è evidente; supporremo pertanto $\|f\|_p$ e $\|g\|_q$ non nulle.
Proviamo la disuguaglianza. In virtù della convessità di $t \mapsto e^t$, per ogni $a,b>0$ vale la relazione (*disuguaglianza di Young*)

$$ab = e^{\frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q} \le \frac{1}{p}\, e^{\log a^p} + \frac{1}{q}\, e^{\log b^q} = \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q};$$

d'altronde questa disuguaglianza è ovviamente vera anche per $a=0$ oppure $b=0$. Perciò

$$|f(x)g(x)| \le \frac{|f(x)|^p}{p}+\frac{|g(x)|^q}{q} \qquad \text{q.o. in } X,$$

da cui, integrando su X,

$$\|fg\|_1 \le \frac{1}{p}\,\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\,\|g\|_q^q \,.$$

Ora, se $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ la tesi è provata perché otteniamo $\|fg\|_1 \le \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; altrimenti, posto

$$F(x)=\frac{f(x)}{\|f\|_p}, \qquad G(x)=\frac{g(x)}{\|g\|_q}\,,$$

risulta $\|F\|_p = \|G\|_q = 1$ e dunque, per quanto già dimostrato,

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} = \|FG\|_1 \leq 1,$$

che è la tesi. □

Holdinf **Osservazione 9.1.3** La dimostrazione precedente dice qualcosa di più: la relazione $|f(x)g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}$ q.o. in X vale anche, ovviamente, nei punti in cui $|f(x)|$ oppure $|g(x)|$ valgono $+\infty$, e pertanto, integrando su X, si ottiene che la disuguaglianza vale per ogni coppia di funzioni misurabili f, g (eventualmente nella forma $+\infty \leq +\infty$). In particolare, se p e q sono esponenti coniugati e se fg non appartiene a L^1, si deduce che o $f \notin L^p$, o $g \notin L^q$.

Minkowski **Corollario 9.1.4 (disuguaglianza di Minkowski)** *Se $p \in [1, \infty]$ e $f, g \in L^p(X)$, allora*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Dimostrazione I casi $p = 1$ e $p = \infty$ (ed anche quello in cui $p = 2$) sono già noti. Se $1 < p < \infty$ si ha

$$\int_X |f + g|^p \, d\mu = \int_X |f + g||f + g|^{p-1} \, d\mu \leq \int_X [|f| + |g|]|f + g|^{p-1} \, d\mu.$$

Osservando che $|f + g|^{p-1} \in L^q(X)$ (in quanto $(p - 1)q = p$) ed applicando la disuguaglianza di Hölder si ottiene

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_X |f + g|^p \, d\mu \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \left\| |f + g|^{p-1} \right\|_q = \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left[\int_X |f + g|^{(p-1)q} \, d\mu \right]^{\frac{1}{q}} = (\|f\|_p + \|g\|_p) \, \|f + g\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Ne segue la tesi, semplificando, se $\|f + g\|_p > 0$; d'altronde quando $\|f + g\|_p = 0$ la tesi stessa è banale. □

La funzione $f \mapsto \|f\|_p$ è dunque una norma sullo spazio $L^p(X)$.

complLp **Proposizione 9.1.5** *$L^p(X)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione Utilizzando il lemma 7.1.2, sarà sufficiente mostrare che per ogni successione $\{f_n\} \subseteq L^p$, tale che $\sum_{n=0}^{\infty} \|f\|_p < \infty$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ è convergente nella norma $\| \cdot \|_p$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)|, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|, \qquad x \in X;$$

allora $\{g_n\} \subseteq L^p$ e

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_p \leq M < \infty \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

e per il teorema di B. Levi

$$\int_X g^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n^p \, d\mu \le M^p,$$

cioè $g \in L^p$. Ne segue che g è q.o. finita, ossia la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ è assolutamente convergente per q.o. $x \in X$, e dunque la sua somma $f(x)$ è definita q.o. in X; per di più, tale funzione f individua un elemento di L^p in quanto

$$\int_X |f|^p \, d\mu \le \int_X g^p \, d\mu \le M^p.$$

Inoltre, posto

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \qquad x \in X,$$

si ha $s_n \to f$ q.o. per $n \to \infty$ e $|s_n| \le g$ q.o. per ogni n; dunque $|s_n - f|^p \le (2g)^p$ q.o. per ogni n. Per il teorema di convergenza dominata, si ottiene $s_n \to f$ in L^p, ossia la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge a f nella norma $\|\cdot\|_p$. $\square$

convdomLp **Osservazione 9.1.6** La proposizione precedente si può dimostrare anche ripetendo le argomentazioni usate per provare la completezza di L^1 (teorema 4.6.2). In tal modo si ottiene qualcosa di più, cioè il fatto che se $f_n \to f$ in L^p, allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ tale che $f_{n_k}(x) \to f(x)$ per q.o. $x \in X$, e $|f_{n_k}(x)| \le g(x)$ q.o. in X, con $g \in L^p$.

Lpcomplesso **Osservazione 9.1.7** In analogia con l'esempio 7.2.7 (4), si può considerare anche lo spazio $L^p(X, \mathbb{C})$ delle funzioni $f : X \to \mathbb{C}$ tali che $|f|^p$ è sommabile su X. Ciò accade se e solo se $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ appartengono a $L^p(X)$. La norma su tale spazio è ancora $\|f\|_p = \left[\int_X |f|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}}$.

opinte **Esempio 9.1.8** Sia $K : [0,T] \times [0,T] \to \mathbb{C}$ una funzione continua e simmetrica, ossia tale che $K(x,y) = K(y,x)$. Per ogni $f \in L^p(0,T)$ consideriamo l'*operatore integrale*

$$[Af)(x) = \int_0^T K(x,y) f(y) \, dy, \qquad x \in [0,T].$$

Mostriamo che $A \in \mathcal{L}(L^p(0,T))$, con

$$\|A\|_{\mathcal{L}(L^p(0,T))} \le \sup_{0\le x\le T} \int_0^T |K(x,\eta)| \, d\eta.$$

Infatti, indicata con M la quantità a secondo membro, la tesi è banale per $p = \infty$. Per $p = 1$ basta usare il teorema di Tonelli:

$$\|Af\|_1 \le \int_0^T \int_0^T |K(x,y)||f(y)| \, dydx = \int_0^T \int_0^T |K(y,x)| \, dx \, |f(y)| \, dy \le M\|f\|_1 .$$

Se $1 < p < \infty$, si ha, detto q l'esponente coniugato di p,

$$\begin{aligned}
\|Af\|_p^p &\leq \int_0^T \left[\int_0^T |K(x,y)|\,|f(y)|\,dy\right]^p dx = \int_0^T \left[\int_0^T |K(x,y)|^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}|f(y)|\,dy\right]^p dx \leq \\
&\leq \int_0^T \left[\int_0^T |K(x,y)|\,dy\right]^{\frac{p}{q}} \int_0^T |K(x,y)|\,|f(y)|^p dydx \leq \\
&\leq M^{\frac{p}{q}} \int_0^T \int_0^T |K(y,x)|\,|f(y)|^p\,dydx \leq M^{\frac{p}{q}+1} \int_0^T |f(y)|^p dy = M^p \|f\|_p^p .
\end{aligned}$$

Ciò prova che la norma dell'operatore A non supera M.

Concludiamo con la seguente

Lp_con_p<1 **Osservazione 9.1.9** Si può definire con la definizione 9.1.1 lo spazio $L^p(X)$ anche per $0 < p < 1$: esso è ancora uno spazio vettoriale, essendo $|f+g|^p \leq |f|^p + |g|^p$, ma la quantità $\left[\int_X |f|^p\,d\mu\right]^{\frac{1}{p}}$ non è una norma poiché, pur essendo ancora positivamente omogenea, non è più subadditiva. Tuttavia L^p è uno spazio metrico completo con la distanza $d(f,g) = \int_X |f-g|^p\,d\mu$ (esercizio 9.1.37). Si veda anche l'esercizio 7.1.31.

Esercizi 9.1

Holdugu 1. Siano $p, q > 1$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dimostrare che la disuguaglianza di Hölder diventa un'uguaglianza se e solo se esistono $\alpha, \beta \geq 0$, non entrambi nulli, tali che

$$\alpha|f(x)|^p = \beta|g(x)|^q \qquad \text{q.o. in } X.$$

Si mostri poi, nel caso $p = 1$, $q = \infty$, che $\|fg\|_1 = \|f\|_1\|g\|_\infty$ se e solo se $|g| = c$, $c \geq 0$.

Minkougu1 2. Siano $f, g \in L^1(X)$: si provi che $\|f+g\|_1 = \|f\|_1 + \|g\|_1$ se e solo se $fg \geq 0$ q.o. in X.

Minkougup 3. Sia $p \in]1, \infty[$. Dimostrare che la disuguaglianza di Minkowski diventa un'uguaglianza se e solo se esistono $\gamma, \delta \geq 0$, non entrambi nulli, tali che

$$\gamma f(x) = \delta g(x) \qquad \text{q.o. in } X.$$

L2cL1pro 4. Per ogni $r > 0$ sia $B_r = \{f \in L^2(a,b) : \|f\|_2 \leq r\}$. Si nprovi che $B_r \subset L^1(a,b)$, e che B_r è un chiuso in $L^1(a,b)$ privo di punti interni. Se ne deduca che l'inclusione $L^2(a,b) \subset L^1(a,b)$ è propria.

LpcLr 5. Si provi che se $\mu(X) < \infty$ si ha $L^p(X) \subset L^r(X)$ per $p > r$, mentre ciò è falso se $\mu(X) = \infty$.

ellp 6. Posto per $1 \le p < \infty$ (v. anche gli esercizi 7.2.4 e 7.1.5)

$$\ell^p = \left\{ x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \|x\|_{\ell^p}^p = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\},$$

si verifichi che ℓ^p coincide con $L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$, ove ν è la misura "cardinalità"; si provi poi che $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^r \subset \ell^\infty$ per $1 < p < r < \infty$, e che le corrispondenti inclusioni sono continue con norme uguali a 1.

disstretta 7. Siano $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, $1 < p < \infty$. Si provi che se $a \neq 0$ allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^\lambda |a_{n+1}|^{p-\lambda} < \|a\|_{\ell^p}^p \qquad \forall \lambda \in]0, p[\,.$$

L2noLp 8. Si verifichi che la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1 + |\log x|)}\,, \qquad x > 0,$$

appartiene a $L^2(0,\infty)$ ma non sta in alcun $L^p(0,\infty)$ con $p \neq 2$. Fissato $p \in [1,\infty]$, si trovi poi, analogamente, una funzione g che stia in $L^p(0,\infty)$ ma non in $L^r(0,\infty)$ per $r \neq p$.

capLp 9. Sia $X = \bigcap_{1\le p<\infty} L^p(0,1)$; si verifichi che $L^\infty(0,1)$ è contenuto propriamente in X. Si provi che, similmente, si ha l'inclusione propria $L^p(0,1) \subset \bigcap_{1\le r<p} L^r(0,1)$. Si verifichi infine che $\bigcap_{1\le r<p} L^r(0,1)$ è chiuso rispetto alla moltiplicazione.

proprLp 10. Sia μ una misura σ-finita su $(X, \mathcal{F})$ e sia $f \in L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$; si provi che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme $A_\varepsilon \in \mathcal{F}$ tale che

$$\frac{1}{\varepsilon} < \mu(A_\varepsilon) < \infty, \qquad \int_{A_\varepsilon} |f|^p \, d\mu < \varepsilon.$$

primLpHol 11. Sia $f \in L^p(a,b)$, con $p > 1$. Si provi che $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è una funzione Hölderiana in $[a,b]$ di esponente $1 - \frac{1}{p}$, ossia esiste $K \ge 0$ tale che

$$|F(x) - F(y)| \le K|x-y|^{1-\frac{1}{p}} \qquad \forall x, y \in [a,b],$$

e che risulta addirittura

$$\lim_{r\to 0^+} \sup_{0<|x-y|\le r} \frac{|F(x) - F(y)|}{|x-y|^{1-\frac{1}{p}}} = 0.$$

limprimLp 12. Sia $f \in L^p(\mathbb{R})$, con $1 < p < \infty$. Posto $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, si provi che se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si ha

$$\lim_{x\to 0} |x|^{-\frac{1}{q}} F(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} |x|^{-\frac{1}{q}} F(x) = 0.$$

limnorp 13. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato con $\mu(X) < \infty$. Se f è misurabile su X, si provi che

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty \,.$$

limnorp2 14. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato con $\mu(X) < \infty$. Se f è misurabile e tale che $0 < \int_X |f|^n d\mu < \infty$ definitivamente, si provi che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_X |f|^{n+1}\, d\mu}{\int_X |f|^n\, d\mu} = \|f\|_\infty \,.$$

prs 15. Sia $f \in L^p \cap L^r$, con $1 \le p < r \le \infty$; si provi che $f \in L^s$ per ogni $s \in]p, r[$, e che si ha (con $\frac{1}{r} = 0$ quando $r = \infty$)

(i) $\|f\|_s \le \|f\|_p^{\lambda} \|f\|_r^{1-\lambda}$, ove $\frac{1}{s} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$;

(ii) $\|f\|_s \le \varepsilon \|f\|_r + \varepsilon^{-\eta} \|f\|_p \quad \forall \varepsilon > 0$, ove $\eta = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{s}}{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}}$.

limpfLr 16. Sia $\mu(X) < \infty$ e sia $\{f_n\}$ una successione limitata in L^r, ove $1 < r \le \infty$. Se $f_n(x) \to f(x)$ q.o. in X e se $1 \le p < r$, si provi che $f_n \to f$ in L^p. Si verifichi che il risultato è falso se $p = r$ oppure se $\mu(X) = \infty$.
[**Traccia:** usare il teorema di Severini-Egorov.]

esercesame 17. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato con $\mu(X) < \infty$, e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni sommabili su X, tali che

(a) $f_n \to 0$ in misura;

(b) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_1 < \infty$.

Si provi che risulta

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \sqrt{|f_n g|}\, d\mu = 0 \qquad \forall g \in L^1(X).$$

convdebp 18. Sia $\{f_n\}$ una successione limitata in L^p, con $p \in]1, \infty[$. Se $f_n(x) \to f(x)$ q.o., si provi che $f \in L^p$ e che

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n g\, d\mu = \int_X f g\, d\mu \qquad \forall g \in L^q,$$

ove $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si provi anche che l'enunciato è falso per $p = 1$.
[**Traccia:** dopo avere ridotto il problema al caso $\mu(X) < \infty$, usare il teorema di Severini-Egorov.]

convdomp 19. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili tali che $f_n(x) \to f(x)$ q.o. e $|f_n(x)| \le g(x)$ q.o., con $g \in L^p$, $1 \le p < \infty$; si provi che $f_n \to f$ in L^p.

convqoenor 20. Siano $f, f_n \in L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$, $1 \le p < \infty$, tali che $f_n \to f$ q.o. e $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$; si provi che $f_n \to f$ in L^p. Verificare che la tesi è falsa se si sopprime l'ipotesi $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

onvp/lambda 21. Se $f_n \to f$ in L^p, e $\lambda \in]0, p]$, si provi che $|f_n|^\lambda \to |f|^\lambda$ in $L^{\frac{p}{\lambda}}$.

LPuc0 22. Dimostrare che se $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, e f è uniformemente continua su $\mathbb{R}$, allora $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

S0densLp 23. Si provi che $\mathcal{S}$ è denso in $L^p(X)$ per $1 \le p \le \infty$, e che $\mathcal{S}_0$ è denso in $L^p(X)$ per $1 \le p < \infty$.

cinfdensLp 24. Si provi che $C_c(\mathbb{R})$ e $C_c^\infty(\mathbb{R})$ sono densi in $L^p(\mathbb{R})$ per $1 \le p < \infty$.

rattidensLp 25. Si provi che le funzioni costanti a tratti (nulle fuori da un compatto) sono dense in $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$.

contraLp 26. Sia $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$; provare che

$$\lim_{\lambda\to 1} \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda x) - f(x)|^p \, dx = 0, \qquad \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx = 0.$$

[**Traccia:** utilizzare la densità di $C_c(\mathbb{R})$.]

Lpseparab 27. Si provi che $L^p(\mathbb{R})$ è separabile per $1 \le p < \infty$.

convoL1Lp 28. Siano $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^p(\mathbb{R})$. Si provi che la convoluzione $f \star g$ (v. esercizio 5.4.5) appartiene a $L^p(\mathbb{R})$ e che $\|f \star g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$. Si provi inoltre che se $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, allora $f \star g$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.

convoLp 29. Si considerino le mollificatrici φ_ε definite nell'esercizio 5.4.7. Nelle notazioni ivi introdotte, si provi che se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \le p < \infty$, allora $f_\varepsilon = f \star \varphi_\varepsilon \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ per $\varepsilon \to 0^+$.

illimLp 30. Sia $\mu(X) = \infty$, e sia f una funzione misurabile, illimitata sul complementare di ogni insieme di misura finita. È possibile che f appartenga a L^p?

illimLp2 31. Trovare una funzione $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, illimitata sul complementare di ogni compatto. Trovarne un'altra che, in più, sia di classe C^∞ su $\mathbb{R}$.

teoVitali 32. (*Teorema di Vitali*) Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato e sia $\{f_n\} \subset L^p(X)$. Si provi che esiste $f \in L^p(X)$ tale che $f_n \to f$ in $L^p(X)$ se e solo se valgono le seguenti condizioni:

(i) $\{f_n\}$ è fondamentale in misura;

(ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\int_E |f_n|^p \, d\mu < \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $E \in \mathcal{F}$ con $\mu(E) < \delta$;

(iii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $Y \subseteq X$, con $\mu(Y) < \infty$, tale che $\int_{X\setminus Y} |f_n|^p \, d\mu < \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

convomolt 33. Sia μ la misura su $]0,\infty[$ definita da

$$\mu(E) = \int_E \frac{dt}{t} \quad \forall E \in \mathcal{M},\ E \subseteq]0,\infty[,$$

e si consideri la *convoluzione moltiplicativa*

$$(f * g)(\lambda) = \int_0^\infty f(\lambda t) g(t)\, d\mu(t), \quad \lambda > 0, \qquad f, g \in L^1(\mu).$$

(i) Si verifichi che $f * g(\lambda) = g * f(\frac{1}{\lambda})$ per ogni $f, g \in L^1(\mu)$.

(ii) Si provi che se $f \in L^1(\mu)$ e $g \in L^p(\mu)$, $1 \le p \le \infty$, allora $f * g \in L^p(\mu)$ e

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p.$$

traslsimm 34. Per ogni $h \in \mathbb{R}$ si consideri l'operatore

$$(T_h f)(x) = f(x + h) - f(x - h), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Si provi che $T_h \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))$ per ogni $p \in [1,\infty]$, con $\|T_h\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))} \le 2$.

(ii) Si dimostri che se $p \in [1,\infty[$ allora per ogni $f \in L^p(\mathbb{R})$ si ha

$$T_h f \to 0 \qquad \text{in } L^p(\mathbb{R}) \qquad \text{per } h \to 0,$$

e che ciò è falso per $p = \infty$.

convodiscr 35. Fissata una successione $a \in \ell^1$, sia K l'operatore definito da:

$$(Kx)_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x_k\,, \qquad x \in \ell^p.$$

Si provi che $K \in \mathcal{L}(\ell^p)$ per ogni $p \in [1,\infty]$, e che

$$\|K\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} \le \|a\|_{\ell^1}\,.$$

opmolt 36. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e sia T l'operatore definito da $Tf(x) = \varphi(x) f(x)$. Determinare condizioni necessarie e sufficienti affinché:

(a) T sia continuo da $L^p(\mathbb{R})$ in $L^p(\mathbb{R})$;

(b) T sia continuo ed iniettivo;

(c) T sia continuo con inverso continuo.

smcp 37. Per $p \in]0,1[$ si definisca $L^p(X)$ come nella definizione 9.1.1. Si provi che:

(i) $\|\cdot\|_p$ non è subadditiva;

(ii) la funzione

$$d(f,g) = \int_X |f - g|^p\, d\mu, \qquad f, g \in L^p(X),$$

è una distanza su $L^p(X)$ ed inoltre lo spazio $(L^p(X), d)$ è completo.

Jensen

38. (*Disuguaglianza di Jensen*) Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato con $\mu(X) = 1$; sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che $a < f(x) < b$ per ogni $x \in X$ (ove $-\infty \le a < b \le +\infty$), e sia $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Si provi che

$$\varphi\left(\int_X f\,d\mu\right) \le \int_X \varphi \circ f\,d\mu.$$

[**Traccia:** si verifichi anzitutto che $\varphi \circ f$ è misurabile. Poi, posto $t = \int_X f\,d\mu$, si ricordi che i rapporti incrementali di φ sono crescenti...]

explog<L1

39. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato con $\mu(X) = 1$; sia $f \in L^1$ con $f \ge 0$. Posto $\log 0 = -\infty$, si provi che

$$\exp\left[\int_X \log f\,d\mu\right] \le \int_X f\,d\mu,$$

e che vale l'uguaglianza se e solo se f è q.o. costante.

vartotp

40. Sia $1 < p < \infty$. Per $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ e per ogni partizione $\pi : 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = 1$ di $[0,1]$ si definisca

$$t_p(f,\pi) = \sum_{i=1}^{k} \frac{|f(x_i) - f(x_{i-1})|^p}{(x_i - x_{i-1})^{p-1}}, \qquad T_p(f) = \sup_\pi t_p(f,\pi).$$

Si provi che $T_p(f) < \infty$ se e solo se $f \in AC[0,1]$ e $f' \in L^p(0,1)$, e che in tal caso si ha

$$T_p(f) = \|f'\|^p_{L^p(0,1)}.$$

diMin

41. Siano $p, q > 1$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e sia $K(x,y)$ una funzione misurabile a supporto compatto. Si provi che per ogni funzione $\psi \in L^q(\mathbb{R}^N)$ risulta

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}\left[\int_{\mathbb{R}^N} K(x,y)\,dy\right]\psi(x)\,dx\right| \le \int_{\mathbb{R}^N} \|K(\cdot,y)\|_p\,dy \cdot \|\psi\|_q;$$

scegliendo $\psi(x) = \left|\int_{\mathbb{R}^N} K(x,y)\,dy\right|^{p-2} \cdot \int_{\mathbb{R}^N} K(x,y)\,dy$, si deduca la *disuguaglianza integrale di Minkowski*

$$\left[\int_{\mathbb{R}^N}\left|\int_{\mathbb{R}^N} K(x,y)\,dy\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \le \int_{\mathbb{R}^N}\left[\int_{\mathbb{R}^N} |K(x,y)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} dy.$$

Si noti che la tesi equivale a

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^N} K(\cdot,y)\,dy\right\|_p \le \int_{\mathbb{R}^N} \|K(\cdot,y)\|_p\,dx.$$

Hardy

42. (*Disuguaglianza di Hardy*) Sia $1 < p < \infty$. Posto $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ per ogni $f \in L^p(0,\infty)$, si provi che $\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$, e che $\frac{p}{p-1}$ è la migliore costante possibile.
[**Traccia:** si provi anzitutto che $\int_{\mathbb{R}} |F(x)|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left|\int_0^1 f(sx)\,ds\right|^p dx$; poi si adatti la dimostrazione della disuguaglianza integrale di Miìnkowski. Per l'ultima affermazione si considerino le funzioni $x \mapsto x^{-\frac{1}{p}}\chi_{[1,n]}(x)$, $n \in \mathbb{N}^+$.]

Hardydiscr

43. Sia $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} \in \ell^p$, $1 \le p < \infty$, con $|a_n| \ge |a_{n+1}|$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Si provi la disuguaglianza

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right]^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \qquad \forall a \in \ell^p, \quad \forall p \in [1,\infty[.$$

Traccia: si applichi la disuguaglianza di Hardy alla funzione f che vale $|a_n|$ sull'intervallo $[n-1, n[\,,\ n \in \mathbb{N}^+$.]

int[x,x+1]

44. Sia T l'operatore così definito:

$$Tf(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Si provi che per ogni $p \in [1,\infty]$ si ha $T \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R}))$ con norma non superiore a 1;

(ii) Si dimostri che per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ si ha:

(a) la funzione Tf è uniformemente continua su $\mathbb{R}$;

(b) la funzione Tf è assolutamente continua in ogni $[a,b] \subset \mathbb{R}$;

(c) la funzione Tf è infinitesima per $x \to \pm\infty$.

spaziX_teta

45. Fissato $\vartheta \in [0,1]$ si consideri l'insieme X_ϑ costituito dalle funzioni $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili che verificano la seguente proprietà:

$$\exists C > 0 : \int_E |f|\,dm_N \le C m_N(E)^\vartheta \quad \forall E \in \mathcal{M}_N \text{ con } m_N(E) \le 1.$$

(i) Verificare che se $\vartheta \ge \alpha$ si ha $X_\vartheta \subseteq X_\alpha$.

(ii) Provare che $L^p(\mathbb{R}^N) \subset X_{1-\frac{1}{p}}$ per ogni $p \in]1,\infty[$.

(iii) Dimostrare che $L^\infty(\mathbb{R}^N) = X_1$.

peruc

46. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato e siano $f, g \in L^p(X)$. Si provi che se $p \ge 2$

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \le \left[\|f\|_p + \|g\|_p\right]^p + \left|\|f\|_p - \|g\|_p\right|^p,$$

mentre se $p \le 2$ vale la disuguaglianza opposta.
[**Traccia:** nel caso $p \ge 2$, si può assumere $\|f\|_p \ge \|g\|_p > 0$. Riscrivendo il secondo membro come

$$\begin{aligned}\left([\|f\|_p + \|g\|_p]^{p-1} + [\|f\|_p - \|g\|_p]^{p-1}\right)\|f\|_p + \\ + \left([\|f\|_p + \|g\|_p]^{p-1} - [\|f\|_p - \|g\|_p]^{p-1}\right)\|g\|_p\,,\end{aligned}$$

e poi raccogliendo il fattore $\|f\|_p^p$, il secondo membro diventa

$$a\left(\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right)\|f\|_p^p + b\left(\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right)\|g\|_p^p\,,$$

ove $a(r) = (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}$ e $b(r) = r^{1-p}\,[1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1}]$, $r \in [0,1]$. Si deduca che ci si può ridurre alla stima puntuale

$$|A+B|^p + |A-B|^p \le a(r)|A|^p + b(r)|B|^p, \qquad r \in [0,1], \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Si mostri che non è restrittivo assumere $|A| \ge |B|$ mostrando che $F(r) = a(r) - b(r)$ è crescente e negativa in $[0,1]$; si mostri infine che, posto $G(r) = a(r)|A|^p + b(r)|B|^p$, risulta $G(r) \ge G\left(\frac{|B|}{|A|}\right)$, e infine si ricavi la tesi. Nel caso $p \le 2$ si proceda analogamente, riducendosi ancora al caso $|A| \ge |B|$ ed osservando che adesso G avrà un massimo nel punto $|B|/|A|$.]

9.2 Il duale di L^p

dualeLp

Questo paragrafo è dedicato alla caratterizzazione del duale dello spazio $L^p(X)$, $1 \le p < \infty$, nel caso in cui la misura μ sia σ-finita e che le funzioni siano a valori reali: il caso complesso è trattato nell'esercizio 9.2.1. Vale il seguente, importante risultato:

eszFischer **Teorema 9.2.1 (di Riesz-Fischer)** *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato σ-finito e sia $p \in [1, \infty[$. Per ogni $F \in (L^p(X))^*$ esiste un'unica funzione $f \in L^q(X)$, ove q è l'esponente coniugato di p, tale che*

$$Fg = \int_X g\, f\, d\mu \qquad \forall g \in L^p(X);$$

si ha inoltre

$$\|F\|_{(L^p)^*} = \|f\|_q\,.$$

Dimostrazione Proviamo anzitutto l'ultima affermazione, ossia che se F è il funzionale $g \mapsto \int_X g\, f\, d\mu$, con $f \in L^q$, allora la norma di F è uguale a $\|f\|_q$. Se $p = 1$, questo lo sappiamo già (esempio 7.3.6 (4)). Se $1 < p < \infty$, dalla disuguaglianza di Hölder segue subito $|Fg| \le \|g\|_p \|f\|_q$ e quindi $\|F\|_{(L^p)^*} \le \|f\|_q$; d'altra parte, scelta $g = |f|^{q/p}\,\mathrm{sgn}(f)$, si trova $Fg = \int_X |f|^q\, d\mu = \|g\|_p \|f\|_q$, da cui $\|F\|_{(L^p)^*} = \|f\|_q$.

Proviamo ora l'unicità della funzione f: se due funzioni $f_1, f_2 \in L^q$ soddisfano entrambe la tesi, allora risulta

$$\int_X g\,(f_1 - f_2)\, d\mu = 0 \qquad \forall g \in L^p.$$

Dunque il funzionale F_0, definito da $F_0 g = \int_X g\,(f_1 - f_2)\, d\mu$ è identicamente nullo; ne segue, per quanto appena visto, $0 = \|F_0\|_{(L^p)^*} = \|f_1 - f_2\|_q$, cosicché $f_1 = f_2$.

Veniamo alla dimostrazione dell'esistenza di f. Proveremo dapprima il risultato per i funzionali *positivi*, cioè i funzionali F (lineari e continui) tali che

$$g \ge 0 \quad \text{q.o. in } X \qquad \Longrightarrow \qquad Fg \ge 0;$$

nel primo passo supporremo $\mu(X) < \infty$, e nel secondo passo tratteremo il caso generale in cui μ è σ-finita. Infine, il terzo passo consisterà in una proposizione in cui si mostrerà

che ogni funzionale lineare e continuo si decompone nella differenza di due funzionali positivi, e da qui seguirà il teorema per qualunque elemento di $(L^p)^*$.

1° passo Sia dunque $\mu(X) < \infty$ e fissiamo un funzionale positivo $F \in (L^p)^*$. Se $F = 0$, la tesi è evidentemente soddisfatta prendendo $f = 0$; supponiamo quindi $\|F\|_{(L^p)^*} > 0$. Definiamo

$$\lambda(E) = F\chi_E \qquad \forall E \in \mathcal{F},$$

e verifichiamo che la funzione di insieme λ è una misura su $\mathcal{F}$. Intanto, essa è non negativa per la positività di F, ed è finitamente additiva sugli insiemi disgiunti grazie alla linearità di F. La numerabile additività di λ è conseguenza dalla continuità di F: infatti se $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$, con gli E_n elementi disgiunti di $\mathcal{F}$, allora posto $A_n = \bigcup_{k=0}^{n} E_k$ si ha $A_n \subseteq A_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = E$. Ne segue, in virtù della proposizione 2.1.5,

$$\|\chi_E - \chi_{A_n}\|_p = (\mu(E \setminus A_n))^{\frac{1}{p}} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty,$$

da cui, essendo F continuo, $F\chi_{A_n} \to F\chi_E$; osservato che $\chi_{A_n} = \sum_{k=0}^{n} \chi_{E_k}$, ricaviamo per $n \to \infty$

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda(E_k) = \sum_{k=0}^{n} F\chi_{E_k} = F\chi_{A_n} \to F\chi_E = \lambda(E).$$

Ciò prova che $\lambda(E) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(E_n)$. Dato che, ovviamente, $\lambda(\emptyset) = F(0) = 0$, concludiamo che λ è una misura; essendo poi $\lambda(X) = F\chi_X \leq \|F\|_{(L^p)^*} \mu(X)^{\frac{1}{p}}$, la misura λ è finita. Notiamo infine che $\lambda \ll \mu$ poiché

$$\begin{aligned} E \in \mathcal{F},\ \mu(E) = 0 \implies \chi_E = 0 \text{ q.o.} \implies \|\chi_E\|_p = 0 \implies \\ \implies F\chi_E = 0 \implies \lambda(E) = 0. \end{aligned}$$

Possiamo allora applicare il teorema di Radon-Nikodým (teorema 4.5.9), ottenendo che esiste un'unica funzione $f \in L^1(X, \mu)$, q.o. non negativa, tale che

$$F\chi_E = \lambda(E) = \int_E f \, d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{F}.$$

Per la linearità di F, ed essendo $\mu(X) < \infty$, si deduce subito

$$F\varphi = \int_X \varphi f \, d\mu \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S};$$

dalla densità di $\mathcal{S}$ in $L^\infty(X, \mu)$ (esercizio 3.3.4, ovvero osservazione 3.1.8), otteniamo che per ogni $g \in L^\infty$ esiste $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}$ tale che $\varphi_n \to g$ in L^p e in L^∞. Dunque dalla relazione precedente scritta per le φ_n, per la continuità di F su L^p e per convergenza dominata si deduce

$$Fg = \int_X gf \, d\mu \qquad \forall g \in L^\infty.$$

Per concludere il 1° passo, dobbiamo verificare che $f \in L^q$ (e non solo $f \in L^1$), e che la relazione sopra scritta vale per ogni $g \in L^p$ (e non solo $g \in L^\infty$).

Se $p > 1$, definiamo

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| \le n \\ 0 & \text{se } |f(x)| > n, \end{cases} \qquad g_n(x) = \operatorname{sgn} f(x) \cdot |f_n(x)|^{\frac{q}{p}}.$$

Allora $f_n \in L^\infty$, $g_n \in L^\infty$; inoltre $\|g_n\|_p = (\|f_n\|_q)^{\frac{q}{p}}$, e

$$\|f_n\|_q^q = \int_X g_n f \, d\mu = F g_n \le \|F\|_{(L^p)^*} \|g_n\|_p = \|F\|_{(L^p)^*} (\|f_n\|_q)^{\frac{q}{p}},$$

da cui $\|f_n\|_q \le \|F\|_{(L^p)^*}$. Dal teorema di B. Levi si deduce allora $\|f\|_q \le \|F\|_{(L^p)^*}$.
Se invece $p = 1$ e $q = \infty$, consideriamo per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ l'insieme $E_k = \{x \in X : |f(x)| > \|F\|_{(L^1)^*} + \frac{1}{k}\}$, e poniamo $g_k = \operatorname{sgn} f \cdot \chi_{E_k}$; allora $g_k \in L^1 \cap L^\infty$ e $\|g_k\|_1 = \mu(E_k)$. Quindi

$$\begin{aligned} \left(\|F\|_{(L^1)^*} + \frac{1}{k}\right) \mu(E_k) &\le \int_{E_k} |f| \, d\mu = \int_X g_k f \, d\mu = F g_k \le \\ &\le \|F\|_{(L^1)^*} \|g_k\|_1 = \|F\|_{(L^1)^*} \mu(E_k), \end{aligned}$$

il che implica $\mu(E_k) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$: dunque $|f(x)| \le \|F\|_{(L^1)^*}$ q.o. e pertanto $\|f\|_\infty \le \|F\|_{(L^1)^*}$.
Sia ora $g \in L^p$. Poniamo

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } |g(x)| \le n \\ 0 & \text{se } |g(x)| > n, \end{cases}$$

ed osserviamo che $g_n \in L^\infty$, $g_n \to g$ in L^p (per convergenza dominata) e $g_n f \to g f$ in L^1 (per la disuguaglianza di Hölder). Quindi otteniamo

$$F g = \lim_{n\to\infty} F g_n = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n f \, d\mu = \int_X g f \, d\mu \quad \forall g \in L^p.$$

Ciò conclude la dimostrazione del 1° passo.

2° passo Supponiamo ora μ σ-finita e sia $F \in (L^p)^*$ un funzionale positivo. Come si è osservato nel corso della dimostrazione del teorema 4.5.8, dal fatto che μ è σ-finita segue che esiste una funzione $w \in L^1(\mu)$ tale che $0 < w(x) < 1$ per ogni $x \in X$. Definiamo

$$\nu(E) = \int_E w \, d\mu, \qquad E \in \mathcal{F};$$

ν è una misura finita su $\mathcal{F}$. L'applicazione $g \mapsto g w^{\frac{1}{p}}$ è un'isometria di $L^p(\nu)$ in $L^p(\mu)$: infatti

$$\|g w^{\frac{1}{p}}\|_{L^p(\mu)}^p = \int_X |g|^p w \, d\mu = \int_X |g|^p \, d\nu = \|g\|_{L^p(\nu)}^p.$$

Di conseguenza, definendo $\overline{F}\psi = F(\psi w^{\frac{1}{p}})$ per ogni $\psi \in L^p(\nu)$, $\overline{F}$ appartiene a $(L^p(\nu))^*$ ed è un funzionale positivo. Dunque, per il 1° passo esiste $h \in L^q(\nu)$, q.o. non negativa, tale che

$$\overline{F}\psi = \int_X \psi h \, d\nu \qquad \forall \psi \in L^p(\nu).$$

Definiamo $f = hw^{\frac{1}{q}}$ (nel caso $q = \infty$, prenderemo $f = h$ e l'argomento che segue funziona ugualmente): per quanto sopra osservato, risulta $f \in L^q(\mu)$ e $\|f\|_{L^q(\mu)} = \|h\|_{L^q(\nu)}$; inoltre, per ogni $g \in L^p(\mu)$ si ha

$$Fg = \overline{F}(gw^{-\frac{1}{p}}) = \int_X gw^{-\frac{1}{p}}\, h\, d\nu = \int_X gw^{-\frac{1}{p}}\, fw^{-\frac{1}{q}}\, w\, d\mu = \int_X gf\, d\mu.$$

Ciò prova il 2^{o} passo.

3^{o} passo Dimostriamo la seguente

funzposit **Proposizione 9.2.2** *Sia $Y = C(X)$ (ove X è uno spazio metrico compatto) oppure $Y = L^p(X)$, $1 \le p \le \infty$ (ove X è uno spazio misurato). Allora ogni elemento $F \in Y^*$ si può scrivere nella forma $F = G - H$ ove $G, H \in Y^*$ e G, H sono funzionali positivi.*

Dimostrazione Fissato $F \in Y^*$, definiamo il funzionale G ponendo per ogni $\varphi \in Y$

$$G\varphi = \begin{cases} \sup\{Fg : 0 \le g \le \varphi\} & \text{se } \varphi \ge 0 \\ G\varphi^+ - G\varphi^- & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

ove $\varphi^+ = \max\{\varphi, 0\}$, $\varphi^- = -\min\{\varphi, 0\}$ (e le disuguaglianze sono da intendersi q.o. nel caso che sia $Y = L^p(X)$); definiamo poi il funzionale H in modo che valga la tesi:

$$H\varphi = G\varphi - F\varphi.$$

Si tratta ora di provare che G e H sono funzionali lineari, continui e positivi. Procederemo in varie tappe.

(1) Se $\varphi \in Y$ e $\varphi \ge 0$, allora $G\varphi \ge 0$ e $H\varphi \ge 0$; quindi G e H sono funzionali positivi.

Infatti per definizione si ha $G\varphi \ge F(0) = 0$, e $G\varphi \ge F\varphi$.

(2) Se $\varphi_1, \varphi_2 \in Y$ e $\varphi_1, \varphi_2 \ge 0$, allora $G(\varphi_1 + \varphi_2) = G\varphi_1 + G\varphi_2$.

Infatti, se $0 \le g_1 \le \varphi_1$ e $0 \le g_2 \le \varphi_2$, allora $0 \le g_1 + g_2 \le \varphi_1 + \varphi_2$ e quindi $G(\varphi_1 + \varphi_2) \ge F(g_1 + g_2) = Fg_1 + Fg_2$; per l'arbitrarietà di g_1 e g_2 si deduce $G(\varphi_1 + \varphi_2) \ge G\varphi_1 + G\varphi_2$. D'altra parte, se $0 \le g \le \varphi_1 + \varphi_2$, ponendo

$$g_1(x) = \min\{g(x), \varphi_1(x)\}, \qquad g_2(x) = g(x) - g_1(x),$$

si ha $0 \le g_1 \le \varphi_1$ e $g_2 = g - g_1 = \max\{g - \varphi_1, 0\}$, da cui $0 \le g_2 \le \varphi_2$. Ne segue

$$G\varphi_1 + G\varphi_2 \ge Fg_1 + Fg_2 = F(g_1 + g_2) = Fg,$$

e pertanto, per l'arbitrarietà di g, $G\varphi_1 + G\varphi_2 \ge G(\varphi_1 + \varphi_2)$.

(3) Se $\varphi \in Y$ e $\varphi = \psi - \gamma$, con $\psi, \gamma \ge 0$, allora $G\varphi = G\psi - G\gamma$; in altre parole, il valore di $G\varphi$ è indipendente dal modo in cui scriviamo φ come differenza di funzioni non negative.

Ricordiamo che per definizione $G\varphi = G\varphi^+ - G\varphi^-$, ove $\varphi^+ = \max\{\varphi, 0\}$, $\varphi^- = -\min\{\varphi, 0\}$; quindi se $\varphi = \psi - \gamma$ si ha $\varphi^+ + \gamma = \psi + \varphi^-$, e dunque dalla proprietà (2)

si deduce $G\varphi^+ + G\gamma = G\psi + G\varphi^-$, da cui la tesi.

(4) $G(\varphi_1 + \varphi_2) = G\varphi_1 + G\varphi_2$ per ogni $\varphi_1, \varphi_2 \in Y$.

Infatti $\varphi_1 + \varphi_2 = (\varphi_1^+ + \varphi_2^+) - (\varphi_1^- + \varphi_2^-)$, da cui la tesi per (3) e (2).

(5) Se $\varphi \in Y$ e $\varphi \geq 0$, allora $G(c\varphi) = c\, G\varphi$ per ogni $c > 0$.

Infatti, per definizione di G,

$$G(c\varphi) = \sup\{Fg : 0 \leq g \leq c\varphi\} = c \sup\left\{F\left(\frac{g}{c}\right) : 0 \leq \frac{g}{c} \leq \varphi\right\} = c\, G\varphi.$$

(6) Se $\varphi \in Y$, allora $G(c\varphi) = c\, G\varphi$ per ogni $c > 0$.

Infatti, dalla definizione e da (5) si deduce

$$G(c\varphi) = G(c\varphi^+) - G(c\varphi^-) = c\, G\varphi^+ - c\, G\varphi^- = c\, G\varphi.$$

(7) Se $\varphi \in Y$, allora $G(c\varphi) = c\, G\varphi$ per ogni $c \leq 0$.

Infatti, se $c = 0$ il risultato è ovvio; se $c < 0$ si ha da (3) e (5)

$$\begin{aligned} G(c\varphi) &= G(|c|\varphi^- - |c|\varphi^+) = G(|c|\varphi^-) - G(|c|\varphi^+) = \\ &= |c|G\varphi^- - |c|G\varphi^+ = c\,G\varphi^+ - c\,G\varphi^- = c\,G\varphi. \end{aligned}$$

Abbiamo così provato la linearità di G, e dunque, per differenza, anche quella di H. Rimane da verificare che G e H sono elementi di Y^*: in effetti si ha per ogni $\varphi \in Y$

$$\begin{aligned} |G\varphi| &\leq G\varphi^+ + G\varphi^- = G(|\varphi|) = \sup\{Fg : 0 \leq g \leq |\varphi|\} \leq \\ &\leq \|F\|_{Y^*} \sup\{\|g\|_Y : 0 \leq g \leq |\varphi|\} = \|F\|_{Y^*}\|\varphi\|_Y. \end{aligned}$$

Ciò prova che G (e quindi anche H) è un operatore limitato. La proposizione è dimostrata. □

La dimostrazione del teorema di Riesz-Fischer si conclude subito: se $F \in (L^p)^*$, si scrive $F = G - H$ con G, H funzionali positivi di $(L^p)^*$, e per il 2^{o} passo esistono due funzioni $\varphi, \psi \in L^q$, entrambe q.o. non negative, tali che

$$Gg = \int_X g\varphi\, d\mu, \quad Hg = \int_X g\psi\, d\mu \qquad \forall g \in L^p.$$

Quindi, posto $f = \varphi - \psi$, si ha $f \in L^q$ e

$$Fg = \int_X gf\, d\mu \qquad \forall g \in L^p.$$

Ciò prova il teorema. □

falsoRiesz **Osservazioni 9.2.3 (1)** Se la misura μ non è σ-finita, il teorema di Riesz-Fischer non è vero per $p = 1$, come mostrano gli esercizi 7.3.7, 7.3.8 e 9.2.2; invece per $p \in]1, \infty[$ il teorema vale ancora (esercizio 9.2.5).

(2) Come si vedrà in seguito, per $p = \infty$ il teorema di Riesz-Fischer è falso, ossia l'inclusione $L^1 \subset (L^\infty)^*$, che vale in virtù dell'esempio 7.3.6 (3), è propria (vedere anche l'esercizio 9.2.4).

(3) Il teorema di Riesz-Fischer si estende al caso degli spazi L^p di funzioni complesse, nel senso che per ogni $F \in (L^p)^*$, $1 \le p < \infty$, esiste un'unica $f \in L^q$ tale che

$$Fg = \int_X g\overline{f}\, d\mu \qquad \forall g \in L^p$$

(vedere l'esercizio 9.2.1).

Esercizi 9.2

RFcomplesso 1. Si deduca il caso complesso del teorema di Riesz-Fischer dal caso reale.

nodual3 2. Siano $X = [0,1]$, $\mathcal{F} = \{E \subseteq [0,1] : E$, oppure E^c, è numerabile$\}$, $\nu =$ misura "cardinalità". Si provi che la funzione $xf(x)$ appartiene a L^1 per ogni $f \in L^1$, e che, posto $Fg = \int_0^1 xg(x)\, d\nu$, si ha $F \in (L^1)^*$, ma non esiste alcuna $f \in L^\infty$ per cui si abbia $Fg = \int_0^1 fg\, d\nu$ per ogni $g \in L^1$.

RFsigma 3. Sia μ una misura σ-finita, e sia $p \in [1,\infty]$. Se f è una funzione misurabile tale che $fg \in L^1$ per ogni $g \in L^q$, ove $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si provi che $f \in L^p$.

dualLp 4. Sia $X = \{a,b\}$, e poniamo $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\{a\}) = 1$, $\mu(\{b\}) = \mu(X) = \infty$. Caratterizzare gli spazi $L^p(X,\mu)$ e i loro duali.

RFnonsigma 5. Si provi che se $1 < p < \infty$ il teorema di Riesz-Fischer vale anche per misure non σ-finite.
[**Traccia:** sia Σ la famiglia degli insiemi misurabili che sono σ-finiti, ossia sono unione numerabile di insiemi misurabili di misura finita. Fissato $F \in (L^p)^*$, per ogni $E \in \Sigma$ si mostri che esiste un'unica funzione $f_E \in L^q$, nulla fuori di E, tale che $Fg = \int_X gf_E\, d\mu$ per ogni $g \in L^p$; si provi anche che se $E, E' \in \Sigma$ ed $E \subseteq E'$ si ha $f_E = f_{E'}$ q.o. in E. Posto poi $\lambda(E) = \int_X |f_E|^q\, d\mu$ per ogni $E \in \Sigma$, si provi che λ è una funzione crescente rispetto all'inclusione e limitata superiormente. Scelta una successione $\{E_n\} \subseteq \Sigma$ tale che $\lambda(E_n) \to m = \sup_\Sigma \lambda(E)$, si provi che $H = \bigcup_{n=0}^\infty E_n$ è un elemento di Σ per cui $\lambda(H) = m$. Se ne deduca che, posto $f = f_H$, si ha $f = f_E$ q.o. in E per ogni $E \in \Sigma$, e che se $g \in L^q$, posto $N = \{x \in X : g(x) \ne 0\}$, risulta $N \in \Sigma$ e $Fg = \int_X gf_{N\cup H}\, d\mu = \int_X gf\, d\mu$. Si verifichi infine che $\|F\|_{(L^p)^*} = \|f\|_q$.]

CarduC 6. Sia $F \in (C[a,b])^*$ un funzionale positivo. Si provi che esiste un'unica funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente, continua a sinistra, con $f(a) = 0$ e tale che

$$Fg = \int_a^b g\, d\mu_f \qquad \forall g \in C[a,b],$$

ove μ_f è la misura di Lebesgue-Stieltjes associata a f.
[**Traccia:** per l'unicità, si ragioni per assurdo e si approssimi $\chi_{[a,t[}$ dal basso con funzioni continue. Per l'esistenza, per ogni $t \in]a,b]$ si definisca, per n sufficientemente grande,

$$h_{t,n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \le x \le t - \frac{1}{n} \\ n(t-x) & \text{se } t - \frac{1}{n} \le x \le t \\ 0 & \text{se } t \le x \le b. \end{cases}$$

Si verifichi che esiste $f(t) = \lim_{n\to\infty} Fh_{t,n}$ per ogni $t \in]a,b]$; posto $f(t) = 0$ per ogni $t \le a$ e $f(t) = F\chi_{[a,b]} = \|F\|$ per ogni $t > b$, si verifichi che f è crescente, che $f(a) = 0$ e che f è continua a sinistra, utilizzando il fatto che $\|h_{t,n} - h_{t-1/k,n}\|_\infty = \frac{n}{k}$. È dunque ben definita la misura μ_f. Fissata $g \in C[a,b]$ e, dato $\varepsilon > 0$, preso $\delta > 0$ tale che $|g(x) - g(x')| < \varepsilon$ per $|x - x'| < \delta$, si scelga una partizione $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ con $t_k - t_{k-1} < \delta$, si definisca $\varphi_n \in C[a,b]$ (per $n > \frac{1}{\delta}$) nel modo seguente:

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{m} g(t_k)[h_{t_k,n} - h_{t_{k-1},n}]\,.$$

Si dimostri che $\|g - \varphi_n\|_\infty \to 0$ per $n \to \infty$, e che $\left|F\varphi_n - \int_a^b g\, d\mu_f\right| \to 0$ per $n \to \infty \ldots$]

Cduale

7. Si caratterizzi il duale di $C[a,b]$.
[**Traccia:** fare uso dell'esercizio 9.2.6 e della proposizione 9.2.2.]

Soluzioni degli esercizi del capitolo 9

sol09

Esercizi del paragrafo 9.1

Esercizio 9.1.1 Sia $p > 1$ e sia $\alpha|f(x)|^p = \beta|g(x)|^q$ q.o. in X, con $\alpha, \beta > 0$ (se almeno uno fra α e β è nullo, la tesi è ovvia). Dunque, posto $c = \frac{\beta}{\alpha}$, si ha $|f(x)|^p = c|g(x)|^q$ q.o. in X. Allora risulta

$$\int_X |fg|\, d\mu = c^{\frac{1}{p}} \int_X |g|^{\frac{q}{p}+1}\, d\mu = c^{\frac{1}{p}} \int_X |g|^q\, d\mu,$$

$$\|f\|_p \|g\|_q = c^{\frac{1}{p}} \left(\int_x |g|^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = c^{\frac{1}{p}} \|g\|_q^q,$$

e la tesi è provata.
Viceversa, se $\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q$, allora

$$\int_X \frac{|f(x)(g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q}\, d\mu = 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p}\int_X \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}\, d\mu + \frac{1}{q}\int_X \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}\, d\mu,$$

cioè

$$\int_X \left[\frac{|f(x)(g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} - \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} - \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}\right] d\mu = 0.$$

L'integrando è non positivo, dato che $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ per ogni $a, b > 0$. Quindi

$$\frac{|f(x)(g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} = \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} \quad \text{q.o. in } X.$$

Ponendo

$$e^{\frac{t}{p}} = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \qquad e^{\frac{s}{q}} = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q},$$

abbiamo ottenuto

$$e^{\frac{t}{p}+\frac{s}{q}} = \frac{1}{p}\,e^t + \frac{1}{q}\,e^s,$$

e per la stretta convessità dell'esponenziale, essendo $\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \in]0,1[$, si conclude che $t = s$, vale a dire $|f(x)|^p = \frac{\|f\|_p^p}{\|g\|_q^q}\,|g(x)|^q$ q.o in X.

Sia adesso $p = 1$. Ponendo $\frac{1}{\infty} = 0$, se vale $|g(x)| = c|f(x)|^{1/\infty} = c$ q.o in X, allora $\int_X |fg|\,d\mu = c\int_X |f|\,d\mu = \|f\|_1\|g\|_\infty$. Viceversa, se $\|fg\|_1 = \|f\|_1\|g\|_\infty$, allora, essendo l'integrando $|fg| - |f|\|g\|_\infty$ non positivo, deve essere $|g(x)| = \|g\|_\infty$ q.o. in X, cioè $|g(x)| = c$ q.o. in X.

Esercizio 9.1.2 Se $fg \ge 0$ q.o in X, allora nei punti dove $f \ge 0$ deve essere $g \ge 0$ q.o, mentre nei punti dove $f \le 0$ si deve avere $g \le 0$ q.o.; pertanto

$$\begin{aligned}\int_X |f+g|\,d\mu &= \int_{\{f\ge 0\}} (f+g)\,d\mu - \int_{\{f\le 0\}} (f+g)\,d\mu = \\ &= \int_{\{f\ge 0\}} f\,d\mu + \int_{\{f\ge 0\}} g\,d\mu - \int_{\{f\le 0\}} f\,dx - \int_{\{f\le 0\}} g\,d\mu = \int_X |f|\,dx + \int_X |g|\,d\mu.\end{aligned}$$

Viceversa, se $\|f+g\|_1 = \|f\|_1 + \|g\|_1$, allora $|f+g| = |f| + |g|$ q.o. in X. Ne segue, quadrando i due membri,

$$|f|^2 + |g|^2 + 2fg = |f|^2 + |g|^2 + 2|fg| \quad \text{q.o. in } X,$$

da cui $fg = |fg| \ge 0$ q.o in X.

Esercizio 9.1.3 Sia $p \in]1,\infty[$ e sia $\gamma f(x) = \delta g(x)$ q.o. in X con $\gamma, \delta > 0$ (se almeno uno dei due è nullo, la tesi è ovvia). Allora

$$\|f+g\|_p = \left(1 + \frac{\delta}{\gamma}\right)\|g\|_p = \|g\|_p + \|f\|_p\,.$$

Viceversa, se $\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$, allora per la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\int_X |f+g|^p\,d\mu \le \int_X |f||f+g|^{p-1}\,d\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1}\,d\mu \le (\|f\|_p + \|g\|_p)\,\|f+g\|_p^{p-1} = \|f+g\|_p^p\,.$$

Ne segue che le disuguaglianze sono uguaglianze, in particolare, la prima uguaglianza implica $|f+g| = |f| + |g|$, mentre la seconda ci dice che

$$\begin{aligned}|f|f+g|^{p-1}\|_1 &= \|f\|_p\|f+g\|_q^{p-1} = \|f\|_p\||f+g|^{p-1}\|_q\,,\\ |g|f+g|^{p-1}\|_1 &= \|g\|_p\|f+g\|_q^{p-1} = \|g\|_p\||f+g|^{p-1}\|_q\,.\end{aligned}$$

Utilizzando l'esercizio 9.1.1 si deduce che esistono $\alpha, \beta, \alpha', \beta' > 0$ tali che

$$\alpha|f(x)|^p = \beta|f(x)+g(x)|^{(p-1)q} = \beta|f(x)+g(x)|^p, \quad \alpha'|g(x)|^p = \beta'|f(x)+g(x)|^p \qquad \text{q.o. in } X\,.$$

Risulta perciò

$$|f| = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}|f+g| = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}(|f|+|g|), \quad |g| = \left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{p}}|f+g| = \left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{p}}(|f|+|g|),$$

che implica $|f| = \left(\frac{\beta\alpha'}{\alpha\beta'}\right)^{\frac{1}{p}} |g|$. Se fosse $f = c\,g$ con $c < 0$, avremmo

$$||f| + |g| = (|c| + 1)|g|, \quad ||f| + |g| = |f + g| = |c + 1||g|,$$

da cui, supposto $g \neq 0$ (altrimenti la tesi è banale),

$$|c| + 1 = |c + 1|.$$

Quadrando i due membri si ricava subito $|c| = c$, assurdo. Dunque $c > 0$.

Esercizio 9.1.4 Proviamo che $B_r \subset L^1(a, b)$: infatti, se $f \in B_r$ si ha dalla disuguaglianza di Hölder (proposizione 9.1.2)

$$\int_a^b |f|\,dx \leq \left[\int_a^b |f|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{b-a} \leq r\sqrt{b-a}.$$

Proviamo che B_r è chiuso in $L^1(a, b)$: infatti se $\{f_n\} \subset B_r$ e $f_n \to f$ in $L^1(a, b)$, allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ tale che $f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.o., e quindi, per il lemma di Fatou,

$$\int_a^b |f|^2\,dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_a^b |f_{n_k}|^2\,dx \leq r^2;$$

dunque $f \in B_r$.
Proviamo che B_r non ha punti interni: infatti se $g \in B_r$, ponendo $g_n = g + \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{x-a}}$ si ricava $\{g_n\} \subset L^1(a, b)$ e $g_n \to g$ in $L^1(a, b)$, però $g_n \notin L^2(a, b)$, poiché se così fosse avremmo $\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{x-a}} = g_n - g \in L^2(a, b)$, cosa che non è.
Infine, $L^2(a, b) \subset L^1(a, b)$ propriamente, dato che le g_n sopra definite appartengono a $L^1(a, b)$ ma non a $L^2(a, b)$.

Esercizio 9.1.5 Siano $\mu(X) < \infty$ e $p > r$: allora $\frac{p}{r} > 1$ e gli esponenti $\frac{p}{r}$ e $\frac{p}{p-r}$ sono coniugati. Se $f \in L^p$ si ha dalla disuguaglianza di Hölder

$$\int_X |f|^r\,d\mu \leq \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_X 1^{\frac{p}{p-r}}\,d\mu\right)^{\frac{p-r}{p}} = \|f\|_p^r (\mu(X))^{\frac{p-r}{p}}.$$

Quindi

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p\, \mu(X)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}.$$

Se $\mu(X) = \infty$ il risultato è falso: ad esempio, la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^{1/r}}$ appartiene a $L^p(0, \infty)$ ma non a $L^r(0, \infty)$.

Esercizio 9.1.6 Si ha

$$L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu) = \left\{f : N \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{N}} |f(n)|^p\,d\nu < \infty\right\} = \left\{\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|^p < \infty\right\} = \ell^p.$$

Proviamo le varie inclusioni. Sia $x \in \ell^1$ e sia $p > 1$: allora per la subadditività della funzione $t \mapsto t^{1/p}$ si ha

$$\|x\|_p = \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \|x\|_1.$$

Similmente, se $x \in \ell^p$,

$$\|x\|_r^p = \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^r\right]^{\frac{p}{r}} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p = \|x\|_p^p,$$

da cui $\|x\|_r \le \|x\|_p$ per ogni $x \in \ell^p$ e $r > p$. Infine, se $x \in \ell^\infty$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$|x_k| \le \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^r\right]^{\frac{1}{r}} = \|x\|_r\,,$$

da cui $\|x\|_\infty \le \|x\|_r$ per ogni $x \in \ell^\infty$ e $r < \infty$.
Le norme delle inclusioni valgono sempre 1, perché scegliendo $x = e_1 = (1, 0, 0, ...)$ si ha per ogni $p \in]1, \infty[$

$$\|e_1\|_1 = \|e_1\|_p = \|e_1\|_\infty = 1.$$

Esercizio 9.1.7 Sia $0 < \lambda < p$. Scelto $r = \frac{p}{\lambda}$, il coniugato di r è $\frac{p}{p-\lambda}$ e

$$|a_n|^\lambda |a_{n+1}|^{p-\lambda} \le \frac{\lambda}{p}|a_n|^p + \frac{p-\lambda}{p}|a_{n+1}|^p,$$

da cui

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^\lambda |a_{n+1}|^{p-\lambda} \le \frac{\lambda}{p}\|a\|_p^p + \frac{p-\lambda}{p}\left[\|a\|_p^p - |a_0|^p\right] \le \|a\|_p^p\,.$$

La disuguaglianza è stretta non appena $a_0 \neq 0$; ma se $a_0 = 0$, applicando il ragionamento precedente alla serie $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^\lambda |a_{n+1}|^{p-\lambda}$ si trova

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^\lambda |a_{n+1}|^{p-\lambda} \le \frac{\lambda}{p}\|a\|_p^p + \frac{p-\lambda}{p}\left[\|a\|_p^p - |a_1|^p\right] \le \|a\|_p^p\,,$$

e la disuguaglianza è stretta se $a_1 \neq 0$. Itarando il ragionamento, si ottiene che la disuguaglianza è sempre stretta se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $a_h = 0$ per $0 \le h < k$ ma $a_k \neq 0$; in definitiva, essa è stretta per ogni $a \neq 0$.

Esercizio 9.1.8 La funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^{1/2}(1 + |\log x|)}\,, \qquad x > 0,$$

appartiene a $L^2(0, \infty)$ perché

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\,\frac{1}{(1 + |\log x|)^2}\,dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{(1 + |t|)^2} < \infty.$$

Tuttavia $f \notin L^p(0, \infty)$ per $p \neq 2$, poiché l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^{p/2}}\,\frac{1}{(1 + |\log x|)^p}\,dx$$

diverge in 0 per $p > 2$ e diverge a $+\infty$ per $1 \le p < 2$.
La funzione $|f|^{2/p}$ appartiene dunque a $L^p(0, \infty)$ ma non appartiene a $L^q(0, \infty)$ per $q \neq p$.

Esercizio 9.1.9 La funzione $g(x) = \frac{1}{\log \frac{1}{x}}$ appartiene a $L^p(0, 1)$ per ogni $p \in [1, \infty[$, in quanto, se $\varepsilon \in]0, 1[$,

$$\int_0^1 g(x)^p\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(\log \frac{1}{x}\right)^p}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\varepsilon}\,\frac{(1-x)^\varepsilon}{|\log t|^p}\,dt,$$

e la funzione $x \mapsto \frac{(1-x)^\varepsilon}{|\log t|^p}$ è infinitesima per $x \to 1^-$. Tuttavia $g \notin L^\infty(0, 1)$ perché $g(x) \to \infty$ per $x \to 0^+$.
La funzione $h(x) = \frac{1}{x^{1/p}}$ appartiene a $L^r(0, 1)$ per ogni $r \in [1, p[$, poiché $\int_0^1 x^{-\frac{r}{p}}\,dx < \infty$ essendo $\frac{r}{p} < 1$, ma non sta in $L^p(0, 1)$ perché $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \infty$.
Infine, se $f, g \in \bigcap_{1\le p<\infty} L^p(0, 1)$, allora per ogni $p \in [1, \infty[$ si ha, per la disuguaglianza di Hölder,

$\|fg\|_p \le \|f\|_{2p}\,\|g\|_{2p} < \infty$.

Esercizio 9.1.10 Dato che la misura è σ-finita, si ha $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, con $X_n \subset X_{n+1}$ e $\mu(X_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Risulta

$$\int_X |f|^p\,d\mu = \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n} |f|^p\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X_n} |f|^p\,d\mu.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\int_{X\setminus X_{n_\varepsilon}} |f|^p\,d\mu = \int_X |f|^p\,d\mu - \int_{X_{n_\varepsilon}} |f|^p\,d\mu < \varepsilon;$$

dato che

$$\int_{X\setminus X_{n_\varepsilon}} |f|^p\,d\mu = \lim_{k\,\to\infty} \int_{X_k\setminus X_{n_\varepsilon}} |f|^p\,d\mu, \qquad \lim_{k\to\infty} \mu(X_k \setminus X_{n_\varepsilon}) = \mu(X \setminus X_{n_\varepsilon}) = \infty,$$

esiste $k_\varepsilon > n_\varepsilon$ tale che

$$\mu(X_{k_\varepsilon} \setminus X_{n_\varepsilon}) > \frac{1}{\varepsilon}\,, \qquad \int_{X_{k_\varepsilon}\setminus X_{n_\varepsilon}} |f|^p\,d\mu < \varepsilon.$$

Dunque l'insieme richiesto è, ad esempio, $X_{k_\varepsilon} \setminus X_{n_\varepsilon}$.

Esercizio 9.1.11 Sia $a \le y < x \le b$. Allora

$$|F(x) - F(y)| = \left|\int_y^x f(t)\,dt\right| \le \|f\|_{L^p(y,x)} (x-y)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Quindi

$$\frac{|F(x) - F(y)|}{|x-y|^{1-\frac{1}{p}}} \le \|f\|_{L^p(y,x)}\,,$$

da cui, per assoluta continuità dell'integrale (proposizione 4.5.6),

$$\lim_{r\to 0^+} \sup_{|x-y|<r} \frac{|F(x) - F(y)|}{|x-y|^{1-\frac{1}{p}}} \le \lim_{r\to 0^+} \sup_{|x-y|<r} \|f\|_{L^p(y,x)} = 0.$$

Esercizio 9.1.12 Supponiamo, per fissare le idee, $x < 0$. Si ha

$$\limsup_{x\to 0^-} |x|^{-\frac{1}{q}} \left|\int_0^x f(t)\,dt\right| \le \limsup_{x\to 0^-} |x|^{-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p(x,0)} |x|^{\frac{1}{q}} = \lim_{x\to 0^-} \|f\|_{L^p(x,0)} = 0.$$

Discorso identico per $x > 0$. Supponiamo analogamente, per fissare le idee, $x \to -\infty$. Fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo $M > 0$ tale che $\left[\int_{\{|x|\ge M\}} |f(t)|^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$; allora

$$\begin{aligned}
\limsup_{x\to-\infty} |x|^{-\frac{1}{q}} \left|\int_x^0 f(t)\,dt\right| &= \limsup_{x\to-\infty} |x|^{-\frac{1}{q}} \left|\int_x^{-M} f(t)\,dt + \int_{-M}^0 f(t)\,dt\right| \le \\
&\le \limsup_{x\to-\infty} \left[\frac{|M+x|^{\frac{1}{q}}}{|x|^{\frac{1}{q}}}\,\varepsilon + |x|^{-\frac{1}{q}} M^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p(-M,0)}\right] \le \varepsilon + 0,
\end{aligned}$$

con ε arbitrario. Per $x \to +\infty$ il discorso è uguale.

Esercizio 9.1.13 Supponiamo dapprima che $f \in L^\infty$. Allora si ha $f \in L^p$ per ogni $p \in [1,\infty]$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $E \in \mathcal{F}$ tale che $\mu(E) > 0$ e $|f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon$ per ogni $x \in E$. Quindi

$$\|f\|_p \ge \left[\int_E |f(x)|^p\,d\mu\right]^{\frac{1}{p}} \ge (\|f\|_\infty - \varepsilon)\mu(E)^{\frac{1}{p}},$$

da cui

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

D'altra parte,

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \mu(X)^{\frac{1}{p}},$$

e per $p \to \infty$ si ottiene la tesi nel caso $f \in L^\infty$, visto che ε è arbitrario.
Se invece $f \notin L^\infty$, dobbiamo provare che $\|f\|_p \to \infty$ per $p \to \infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esiste $E_n \in \mathcal{F}$ tale che $\mu(E_n) > 0$ e $|f(x)| > n$ per ogni $x \in E_n$. Risulta allora

$$\|f\|_p \geq \left[\int_{E_n} |f(x)|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}} \geq n\, \mu(E_n)^{\frac{1}{p}},$$

e per $p \to \infty$ si ricava

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geq n,$$

con $n \in \mathbb{N}^+$ arbitrario.

Esercizio 9.1.14 Ovviamente si ha, sia che $f \in L^\infty$, sia che $f \notin L^\infty$,

$$\frac{\int_X |f|^{n+1}\, d\mu}{\int_X |f|^n \, d\mu} \leq \|f\|_\infty,$$

da cui

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\int_X |f|^{n+1}\, d\mu}{\int_X |f|^n \, d\mu} \leq \|f\|_\infty.$$

D'altra parte, se $f \in L^\infty$, fissato $\varepsilon > 0$ e scelto $E_\varepsilon \in \mathcal{F}$ tale che $\mu(E_\varepsilon) > 0$ e $|f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$ per ogni $x \in E_\varepsilon$, si può scrivere, grazie alla disuguaglianza di Hölder,

$$\int_X |f|^n \, d\mu \leq \left(\int_X |f|^{n+1}\, d\mu\right)^{\frac{n}{n+1}} \mu(X)^{\frac{1}{n+1}},$$

da cui, dividendo per $\int_X |f|^{n+1}\, d\mu$ e poi rovesciando la disuguaglianza,

$$\frac{\int_X |f|^{n+1}\, d\mu}{\int_X |f|^n \, d\mu} \geq \frac{\left(\int_X |f|^{n+1}\, d\mu\right)^{\frac{1}{n+1}}}{\mu(X)^{\frac{1}{n+1}}} \geq \frac{\left(\int_{E_\varepsilon} |f|^{n+1}\, d\mu\right)^{\frac{1}{n+1}}}{\mu(X)^{\frac{1}{n+1}}} \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)\frac{\mu(E_\varepsilon)^{\frac{1}{n+1}}}{\mu(X)^{\frac{1}{n+1}}}\,.$$

Ne segue

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\int_X |f|^{n+1}\, d\mu}{\int_X |f|^n \, d\mu} \geq \|f\|_\infty - \varepsilon,$$

con $\varepsilon > 0$ arbitrario. Se invece $f \notin L^\infty$, per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ esiste $E_k \in \mathcal{F}$ tale che $\mu(E_k) > 0$ e $|f(x)| > k$ per ogni $x \in E_k$. Dunque, ragionando come in precedenza,

$$\frac{\int_X |f|^{n+1}\, d\mu}{\int_X |f|^n \, d\mu} \geq \frac{\left(\int_{E_k} |f|^{n+1}\, d\mu\right)^{\frac{1}{n+1}}}{\mu(X)^{\frac{1}{n+1}}} \geq k\, \frac{\mu(E_k)^{\frac{1}{n+1}}}{\mu(X)^{\frac{1}{n+1}}},$$

da cui

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\int_X |f|^{n+1}\, d\mu}{\int_X |f|^n \, d\mu} \geq k,$$

con $k \in \mathbb{N}^+$ arbitrario.

Esercizio 9.1.15 (i) Se $r = \infty$, allora

$$\|f\|_s^s \leq \|f\|_p^p \|f\|_\infty^{s-p},$$

da cui

$$\|f\|_s \le \|f\|_p^{p/s} \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{s}} = \|f\|_p^\lambda \|f\|_\infty^{1-\lambda}.$$

Se $r < \infty$, poniamo $s = (1-\delta)p + \delta r$, da cui $\delta = \frac{s-p}{r-p}$ e $1-\delta = \frac{r-s}{r-p}$. Allora, usando la disuguaglianza di Hölder con esponenti $\frac{1}{1-\delta}$, $\frac{1}{\delta}$,

$$\|f\|_s = \left(\int_X |f|^{(1-\delta)p+\delta r}\, d\mu \right)^{\frac{1}{s}} \le \left(\int_X |f|^p\, d\mu \right)^{\frac{1-\delta}{s}} \left(\int_X |f|^r\, d\mu \right)^{\frac{\delta}{s}} = \|f\|_p^{(1-\delta)\frac{p}{s}} \|f\|_r^{\delta\frac{r}{s}}.$$

D'altronde, essendo $\frac{1}{s} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$, si ha $\lambda = \frac{p}{s}\,\frac{r-s}{r-p} = (1-\delta)\frac{p}{s}$ e $1-\lambda = \frac{r}{s}\,\frac{s-p}{r-p} = \delta\frac{r}{s}$; pertanto

$$\|f\|_s \le \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}.$$

(ii) Da (i), usando la disuguaglianza $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ per $a, b > 0$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si ricava (con $p = \frac{1}{\lambda}$ e $q = \frac{1}{1-\lambda}$)

$$\|f\|_s \le \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda} = \varepsilon^{-(1-\lambda)} \|f\|_p^\lambda\, \varepsilon^{1-\lambda} \|f\|_r^{1-\lambda} \le \lambda\varepsilon^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}} \|f\|_p + (1-\lambda)\,\varepsilon \|f\|_r \le \varepsilon^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}} \|f\|_p + \varepsilon\|f\|_r,$$

ove

$$\frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{s}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}\,\frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{s}}{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} = \eta.$$

Esercizio 9.1.16 Sia $p < r$. Per il teorema di Severini-Egorov (teorema 3.4.2), per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $E_\varepsilon \in \mathcal{F}$ tale che $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$ e $f_n \to f$ uniformemente in E_ε^c: quindi, avremo $|f_n - f| < \sigma$ in E_ε^c se $n \ge n_\sigma$. Ne segue, per $n \ge n_\varepsilon \vee n_\sigma$,

$$\begin{aligned} \int_X |f_n - f|^p\, d\mu &= \int_{E_\varepsilon^c} |f_n - f|^p\, d\mu + \int_{E_\varepsilon} |f_n - f|^p\, d\mu \le \\ &\le \sigma^p\, \mu(X) + \|f_n - f\|^p_{L^r(E_\varepsilon)}\, \mu(E_\varepsilon)^{1-\frac{p}{r}} \le \sigma^p\, \mu(X) + (2K)^p \varepsilon^{1-\frac{p}{r}}, \end{aligned}$$

ove K è un maggiorante delle norme $\|f_n\|_r$, $n \in \mathbb{N}$. Pertanto, essendo ε e σ arbitrari,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p\, d\mu = 0.$$

Se $p = r$ il risultato è falso. Ad esempio, per $x \in [0,1]$ sia $f_n(x) = (n+1)^{1/p}\, x^{n/p}$: allora $f_n \to 0$ q.o. in $[0,1]$, $\|f_n\|_p = \left[\int_0^1 (n+1)\, x^n\, dx\right]^{1/p} = 1$; quindi $\{f_n\}$ è limitata in L^p, converge q.o. a 0 ma non converge in L^p a 0.
Se $\mu(X) = \infty$, ugualmente, la tesi è falsa. Ad esempio, sia

$$f_n(x) = \frac{n}{n+1}\,\frac{1}{x^{1/r}(\log x)^{2/r}}, \qquad x \in [e, \infty[\,.$$

Risulta $f_n(x) \to f(x) = \frac{1}{x^{1/r}(\log x)^{2/r}}$ puntualmente in $[e,\infty[$; inoltre

$$\|f_n\|_r^r = \left(\frac{n}{n+1}\right)^r \int_e^\infty \frac{1}{x(\log x)^2}\, dx < \infty,$$

però

$$\|f_n\|_p^p = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \int_e^\infty \frac{1}{x^{\frac{p}{r}} (\log x)^{\frac{2p}{r}}}\, dx = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \int_e^\infty \frac{1}{x^{\frac{p}{r}+\varepsilon}}\,\frac{x^\varepsilon}{(\log x)^{\frac{2p}{r}}}\, dx.$$

Ora, scegliendo $0 < \varepsilon < 1 - \frac{p}{r}$ e ricordando che per $x \to \infty$ si ha $\frac{1}{\log x} \to 0$ mentre $\frac{x^\delta}{\log x} \ge K > 0$ per ogni $\delta > 0$ e $x \ge e$, ricaviamo

$$\|f_n\|_p^p \ge \left(\frac{n}{n+1}\right)^p K \int_e^\infty \frac{1}{x^{\frac{p}{r}+\varepsilon}}\, dx = \infty.$$

Quindi f_n e f non appartengono a L^p.

Esercizio 9.1.17 Siano $\varepsilon > 0$ e $g \in L^1(X)$. Per assoluta continuità dell'integrale (proposizione 4.5.6), esiste $\delta > 0$ tale che $\int_E |g|\,d\mu < \varepsilon$ per ogni $E \in \mathcal{F}$ con $\mu(E) < \delta$, e possiamo supporre $\delta < \varepsilon$. Inoltre esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(\{x \in X:\ |f_n(x)| > \delta\}) < \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$. Allora

$$\begin{aligned}\int_X \sqrt{|f_n\, g|}\,d\mu &= \int_{\{x\in X:\ |f_n(x)|>\delta\}} \sqrt{|f_n\, g|}\,d\mu + \int_{\{x\in X:\ |f_n(x)|\leq\delta\}} \sqrt{|f_n\, g|}\,d\mu \leq \\ &\leq \|f_n\|_{L^1(\{x\in X:\ |f_n(x)|>\delta\})}\, \|g\|_{L^1(\{x\in X:\ |f_n(x)|>\delta\})} + \sqrt{\delta}\,\mu(X)^{\frac{1}{2}}\,\|g\|_{L^1(X)} \leq \\ &\leq K\varepsilon + C\sqrt{\varepsilon},\end{aligned}$$

ove $K = \sup_n \|f_n\|_1$ e $C > 0$ è un'opportuna costante. Ne segue, essendo ε arbitrario,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X \sqrt{|f_n\, g|}\,d\mu = 0$$

che è la tesi.

Esercizio 9.1.18 Anzitutto osserviamo che, per il lemma di Fatou, $f \in L^p$ ed esiste $M > 0$ tale che

$$\int_X |f|^p\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_n|^p\,d\mu \leq M^p.$$

Ciò premesso, sia $g \in L^q$. L'insieme che conta, ossia $X_0 = \{x \in X:\ g(x) \neq 0\}$, è σ-finito, dato che

$$X_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_k\,, \quad \mu(X_k) < \infty, \quad \text{ove } X_k = \left\{x \in X:\ |g(x)| > \frac{1}{k}\right\}.$$

D'altra parte, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}^+$ tale che $\|g\|_{L^q(X_\nu^c)} < \varepsilon$. Possiamo allora scrivere

$$\left|\int_X (f_n - f)g\,d\mu\right| = \left|\int_{X_0} (f_n - f)g\,d\mu\right| \leq \left|\int_{X_\nu} (f_n - f)g\,d\mu\right| + \left|\int_{X_\nu^c} (f_n - f)g\,d\mu\right|.$$

Il secondo addendo all'ultimo membro, in virtù della disuguaglianza di Hölder, si naggiora con $2M\varepsilon$; quanto al primo, che è l'integrale su un insieme di misura finita, notiamo che dal teorema di Severini-Egorov (teorema 3.4.2) segue che esiste $B \in \mathcal{F}$, $B \subset X_\nu$, tale che $\|g\|_{L^q(B)} < \varepsilon$ e $f_n \to f$ uniformemente in $X_\nu \setminus B$. Quindi, scrivendo

$$\left|\int_{X_\nu} (f_n - f)g\,d\mu\right| \leq \left|\int_B (f_n - f)g\,d\mu\right| + \left|\int_{X_\nu\setminus B} (f_n - f)g\,d\mu\right|,$$

si ricava, per $n \geq \nu$,

$$\left|\int_{X_\nu} (f_n - f)g\,d\mu\right| \leq 2M\,\varepsilon + \|f_n - f\|_{L^p(X_\nu\setminus B)}\|g\|_{L^q(X)}\,.$$

Pertanto, dato che $f_n \to f$ uniformemente nell'insieme (di misura finita) $X_\nu \setminus B$,

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\int_{X_\nu} (f_n - f)g\,d\mu\right| \leq 2M\,\varepsilon + \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(X_\nu\setminus B)}\|g\|_{L^q(X)} = 2M\,\varepsilon.$$

Tirando le somme,

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\int_{X_\nu} (f_n - f)g\,d\mu\right| \leq 2M\varepsilon + 2M\varepsilon,$$

con ε arbitrario.
Se $p = 1$ la tesi è falsa. Ad esempio, siano $X = [0,1]$, $\mu = m$, $f_n(x) = (n+1)x^n$. Allora $f_n \to f \equiv 0$ q.o., $\|f_n\|_1 = 1$, ma scelta $g(x) \equiv 1 \in L^\infty$ si ha

$$0 = \int_0^1 fg\,dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n g\,dx = 1.$$

Esercizio 9.1.19 Anzitutto, $f \in L^p$ poiché, per il lemma di Fatou,

$$\int_X |f|^p \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_n|^p \, d\mu \le \int_X |g|^p \, d\mu < \infty.$$

Poi, $|f_n - f|^p \in L^1$, $f_n - f \to 0$ puntualmente q.o., e inoltre $|f_n(x) - f(x)|^p \le 2^p |g(x)|^p$ q.o in X, con $|g|^p \in L^1$. Quindi, per il teorema di Lebesgue, $f_n \to f$ in L^p.

Esercizio 9.1.20 Posto $g_n = |f_n - f|^p$ e $h_n = 2^{p-1}\left[|f_n|^p + |f|^p\right]$, le funzioni g_n e h_n verificano le ipotesi dell'esercizio 4.3.9; ne segue $\int_X g_n \, d\mu \to 0$, che è la tesi. Se manca l'ipotesi $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, la tesi è falsa. Ad esempio, in $([0,1], \mathcal{M}, m)$ poniamo $f_n(x) = (n+1)^{1/p} x^{n/p}$: allora $\|f_n\|_p = 1$, $f_n(x) \to 0$ puntualmente, ma $\|f_n\|_P$ non tende a 0.

Esercizio 9.1.21 Poniamo $g_n = \left||f_n|^\lambda - |f|^\lambda\right|^{p/\lambda}$. Poiché $f_n \to f$ in L^p, esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ tale che $|f_{n_k}|^p \to |f|^p$ q.o. con convergenza dominata (osservazione 9.1.6). Dunque $g_{n_k} \to 0$ puntualmente q.o. e $g_{n_k} \le c_\lambda \left(|f_{n_k}|^p + |f|^p\right)$, cosicché, per l'esercizio 4.3.9, $\int_X g_{n_k} \, d\mu \to 0$. Per l'intera successione $\{g_n\}$ si ha ancora $\int_X g_n \, d\mu \to 0$: altrimenti si troverebbe una sottosuccessione $\{g_{n_h}\} \subseteq \{g_n\}$ tale che $\left|\int_X g_{n_h} \, d\mu\right| \ge \varepsilon_0 > 0$ per ogni $h \in \mathbb{N}$, e da qui per il ragionamento precedente avremmo una ulteriore sottosuccessione $\{g_{n_{h_j}}\}$ per la quale troveremmo $\varepsilon_0 \le \int_X g_{n_{h_j}} \, d\mu \to 0$, assurdo.

Esercizio 9.1.22 Per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ quando $|x - y| < \delta$. Se esistesse $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vi è $x_n > n$ per cui risulta $f|(x_n)| \ge \varepsilon_0$, scelto $\varepsilon = \varepsilon_0/2$ avremmo $|f(y) - f(x_n)| < \varepsilon$ per $|y - x_n| < \delta$; quindi, per tali y, $|f(y)| \ge |f(x_n)| - |f(y) - f(x_n)| \ge \varepsilon_0 - \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}$. Perciò

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \ |f(x)| \ge \frac{\varepsilon_0}{2}\right\} \supseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]x_n - \delta, x_n + \delta[\,,$$

da cui

$$m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \ |f(x)| \ge \frac{\varepsilon_0}{2}\right\}\right) \ge \sum_{n\in\mathbb{N}} 2\delta = \infty,$$

contraddicendo il fatto che $f \in L^p$.

Esercizio 9.1.23 Se $f \in L^p$, $1 \le p < \infty$, in virtù dell'osservazione 3.1.8, esiste una successione $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}$ tale che $\varphi_n \to f$ q.o. in X e $|\varphi_n| \le |f|$; ne segue $|\varphi_n - f|^p \le 2^p |f|^p$ e dunque, per convergenza dominata, $\varphi_n \to f$ in L^p. Se $f \in L^\infty$, esiste $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}$ tale che $\varphi_n \to f$ in L^∞. Pertanto $\mathcal{S}$ è denso in L^p, $1 \le p \le \infty$.
Ancora dall'osservazione 3.1.8 segue che se $f \in L^p$ esiste $\{\psi_n\} \subset \mathcal{S}_0$ tale che $\psi_n \to f$ q.o., con convergenza dominata. Perciò, come prima, $|\psi_n - f|^p \le 2^p |f|^p$, da cui $\psi_n \to f$ in L^p. Dunque $\mathcal{S}_0$ è denso in L^p, $1 \le p < \infty$.

Esercizio 9.1.24 Per l'esercizio 9.1.23, $\mathcal{S}_0$ è denso in L^p: quindi basta approssimare con funzioni continue in norma $\|\cdot\|_p$ un qualunque elemento $\varphi \in \mathcal{S}_0$. Sia dunque $\varphi \in \mathcal{S}_0$ con supporto contenuto in $[-M, M]$. Se $\varphi = \chi_E$, con la stessa procedura usata nella dimostrazione della proposizione 4.7.3, dato $\varepsilon > 0$ si costruisce $g \in C_c(\mathbb{R})$ tale che $\|g - \chi_E\|_p \le \varepsilon$. Nel caso generale $\varphi = \sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{E_i}$, si costruisce $g = \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i$, con $g_i \in C_c(\mathbb{R})$ tale che $\|g_i - \chi_{E_i}\|_p \le \frac{\varepsilon}{m|\lambda_i|}$; dunque $\|g - \varphi\|_p \le \sum_{i=1}^m |\lambda_i| \|g_i - \chi_{E_i}\|_p \le \varepsilon$, e dunque $C_c(\mathbb{R})$ è denso in L^p.
Adesso, data la stessa generica $\varphi \in \mathcal{S}_0$ di prima, sia $g \in C_c(\mathbb{R})$ tale che $\|\varphi - g\|_p < \varepsilon$. Per la densità di $C_c^\infty(\,]-M, M[\,)$ in $C_c(\,]-M, M[\,)$, esiste $h \in C_c^\infty(\,]-M, M[\,)$ tale che $\|g - h\|_\infty < \varepsilon$; ne segue

$$\|\varphi - h\|_p \le \|\varphi - g\|_p + \|g - h\|_p \le \varepsilon + (2M)^{\frac{1}{p}} \varepsilon,$$

cosicché $C_c^\infty(\mathbb{R})$ è denso in L^p.

Esercizio 9.1.25 Per l'esercizio 9.1.23, basta approssimare una fissata $\varphi \in \mathcal{S}_0$ con supporto contenuto in $]-M, M[$. Fissato $\varepsilon > 0$, per l'esercizio 9.1.24 esiste $g \in C_c(\,]-M, M[\,)$ tale che $\|\varphi - g\|_p < \varepsilon$. Siccome g è uniformemente continua, esiste $\delta > 0$ tale che $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ se $|x - y| < \delta$. Siano

$I_1, \dots, I_k$ intervalli adiacenti tali che $\ell(Ij) < \delta$ e $\bigcup_{j=1}^k I_j \supseteq]-M, M[$. Detto x_j il punto medio di I_j, sia

$$\psi = \sum_{j=1}^{k} g(x_j)\chi_{I_j}\,.$$

La funzione ψ è costante a tratti, nulla fuori di $[-M-\delta, M+\delta]$, e se $x \in I_j$ si ha $|\psi(x)-g(x)| = |g(x_j)-g(x)| < \varepsilon$, quindi $\|\psi - g\|_\infty < \varepsilon$. Ne segue $\|\psi - g\|_p \le (2M)^{1/p}\,\varepsilon$, e quindi $\|\psi - \varphi\|_p \le \varepsilon + (2M)^{1/p}\,\varepsilon$. La tesi è provata.

Esercizio 9.1.26 Siano $f \in L^p$ e $\lambda > 0$. Per l'esercizio 9.1.24, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $g \in C_c(\mathbb{R})$ tale che $g = 0$ per $|x| \ge M$ e $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Allora

$$\int_{\mathbb{R}} |f(\lambda x) - g(\lambda x)|^p\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} |f(t) - g(t)|^p\,dt < \frac{\varepsilon^p}{\lambda}\,.$$

Inoltre, essendo $|\lambda x - x| \le |\lambda - 1|M$ per ogni $x \in [-M, M]$, in virtù dell'uniforme continuità di g, esiste $\delta > 0$ tale che, se $|\lambda - 1| < \frac{\delta}{M}$, si ha $|g(\lambda x) - g(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in [-M, M]$. Quindi, se $|\lambda - 1| < \frac{\delta}{M}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |g(\lambda x) - g(x)|^p\,dx = \int_{-M}^{M} |g(\lambda x) - g(x)|^p\,dx \le \varepsilon^p.$$

Perciò

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} |f(\lambda x) - f(x)|^p\,dx \le \\
&\quad \le c_p\left[\int_{\mathbb{R}} |f(\lambda x) - g(\lambda x)|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}} |g(\lambda x) - g(x)|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}} |g(x) - f(x)|^p\,dx\right] \le \\
&\quad \le c_p\left(\frac{\varepsilon^p}{\lambda} + \varepsilon^p + \varepsilon^p\right).
\end{aligned}$$

Sia ora $h \in \mathbb{R}$. Con la stessa g di prima, si ha, per $|h| < \delta$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p\,dx \le \\
&\quad \le c_p\left[\int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - g(x+h)|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}} |g(x+h) - g(x)|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}} |g(x) - f(x)|^p\,dx\right] \le \\
&\quad \le c_p\left(2\|f - g\|_p^p + 2M\varepsilon^p\right) \le 2c_p(1+M)\varepsilon^p.
\end{aligned}$$

Esercizio 9.1.27 Le funzioni costanti a tratti della forma

$$\sum_{i=1}^{k} r_i\,\chi_{[p_i, q_i]}\,,$$

ove $k \in \mathbb{N}^+$, $r_i \in \mathbb{Q}$, $p_i, q_i \in \mathbb{Q}$ con $p_0 < q_0 \le p_1 < q_1 \le \ldots \le p_i < q_i \le \ldots \le p_{k-1} < q_{k-1} \le p_k < q_k$, formano un insieme numerabile che è denso in $L^p(\mathbb{R})$ grazie all'esercizio 9.1.25.

Esercizio 9.1.28 Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se $g \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, e se q è l'esponente coniugato di p, si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f \star g(x)|^p\,dx &\le \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|\,dy\right]^p dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^{\frac{1}{q}}|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|\,dy\right]^p dx \le \\
&\le \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,dy\right]^{\frac{p}{q}}\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|g(y)|^p\,dydx = \\
&= \|f\|_1^{p/q}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,dx\,|g(y)|^p\,dy = \|f\|_1^{p/q+1}\int_{\mathbb{R}} |g(y)|^p\,dy = \|f\|_1^p\,\|g\|_p^p.
\end{aligned}$$

Se $g \in L^\infty$,

$$\begin{aligned} |f \star g(x) - f \star g(x')| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x'-y)|\,|g(y)|\,dy \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x'-y)|\,\|g\|_\infty\,dy = \int_{\mathbb{R}} |f(x-x'+z) - f(z)|\,dz\,\|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, se $|x - x'| < \delta$, questa quantità è minore di ε, grazie alla continuità delle traslazioni in L^1 (esercizio 9.1.26).

Esercizio 9.1.29 Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Allora, detta $B(0,\varepsilon)$ la palla di centro 0 e raggio ε, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f \star \varphi_\varepsilon(x) - f(x)|^p\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy - f(x) \right|^p dx \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{B(0,\varepsilon)} |f(x-y) - f(x)| \varphi_\varepsilon(y)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\,dy \right]^p dx \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{B(0,\varepsilon)} |f(x-y) - f(x)|^p \varphi_\varepsilon(y)\,dy \right] \left[\int_{B(0,\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(y)\,dy \right]^{\frac{p}{q}} dx \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{B(0,\varepsilon)} |f(x-y) - f(x))|^p\,dydx = \int_{B(0,\varepsilon)} \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p^p\,dy. \end{aligned}$$

In virtù della continuità delle traslazioni in L^p (esercizio 9.1.26), la quantità all'ultimo membro per convergenza dominata tende a 0 quando $\varepsilon \to 0^+$. Pertanto

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \|f \star \varphi_\varepsilon - f\|_p = 0.$$

Esercizio 9.1.30 Non è possibile: se $f \in L^p$ e $\mu(X) = \infty$, allora fissato $n \in \mathbb{N}^+$ l'insieme $E_n = \{x \in X : |f(x)| > n\}$ ha misura finita, essendo $\mu(E_n) \leq n^{-p}\|f\|_p^p$, e su E_n^c la f è limitata da n.

Esercizio 9.1.31 Una funzione di $L^p(\mathbb{R})$, illimitata sul complementare di ogni compatto, è ad esempio la seguente:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} n^{1/p}\,\chi_{[n,n+2^{-n}]}\,.$$

Infatti

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+2^{-n}} n\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n\,2^{-n} < \infty,$$

e f, qualunque sia $M > 0$, al di fuori di $[-M, M]$ assume per ogni $n > M$ i valori $n^{1/p}$ in insiemi di misura positiva.
Per esibire una funzione di $L^p(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$, illimitata sul complementare di ogni compatto, si può modificare la f precedente, unendo i punti del suo grafico $(n, 0)$ e $\left(n + \frac{1}{4}\,2^{-n}, n^{1/p}\right)$ con un tratto di esponenziale crescente, ed i punti $\left(n + \frac{3}{4}\,2^{-n}, n^{1/p}\right)$ e $(n + 2^{-n}, 0)$ con un tratto di esponenziale decrescente. Precisamente, si considera $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$, ove

$$g_n(x) = \begin{cases} n^{1/p} \exp\left(1 - \dfrac{1}{1 - \left(\frac{x-n-\frac{1}{4}\,2^{-n}}{\frac{1}{4}\,2^{-n}}\right)^2}\right) & \text{su} \quad \left[n, n + \frac{1}{4}\,2^{-n}\right] \\ n^{1/p} & \text{su} \quad \left[n + \frac{1}{4}\,2^{-n}, n + \frac{3}{4}\,2^{-n}\right] \\ n^{1/p} \exp\left(1 - \dfrac{1}{1 - \left(\frac{x-n-\frac{3}{4}\,2^{-n}}{\frac{1}{4}\,2^{-n}}\right)^2}\right) & \text{su} \quad \left[n + \frac{3}{4}\,2^{-n}, n + 2^{-n}\right] \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Allora, per le proprietà delle funzioni esponenziali utilizzate, si ha $g \in C^\infty(\mathbb{R})$; poi, essendo $0 \le g \le f$, risulta $g \in L^p(\mathbb{R})$; infine, poiché

$$g\left(n + \frac{1}{2}\,2^{-n}\right) = g_n\left(n + \frac{1}{2}\,2^{-n}\right) = n^{1/p},$$

la g, come la f, è illimitata sul complementare di ogni compatto.

Esercizio 9.1.32 Supponiamo che $f_n \to f$ in $L^p(X)$. Sia $\varepsilon > 0$: esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $\|f_n - f_m\|_p^p < \varepsilon$ per ogni $n, m \ge N$. Ne segue che, fissato $\delta > 0$, si ha

$$\varepsilon > \int_X |f_n - f_m|^p \, d\mu \ge \int_{\{x \in X:\ |f_n(x) - f_m(x)| > \delta\}} |f_n - f_m|^p \, d\mu \ge \delta^p \mu(\{x \in X :\ |f_n(x) - f_m(x)| > \delta\}),$$

e dunque $\{f_n\}$ è fondamentale in misura, ossia vala (i).
Inoltre, per l'assoluta continuità dell'integrale di $|f|^p$, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, se $A \in \mathcal{F}$ e $\mu(A) < \delta$, risulta $\int_A |f|^p \, d\mu < \varepsilon$; quindi, essendo $\|f_n - f\|_p^p \le \varepsilon$ per $n \ge N$,

$$\int_A |f_n|^p \, d\mu \le 2^{p-1}\left[\int_A |f_n - f|^p \, d\mu + \int_A |f|^p \, d\mu\right] < 2^p\,\varepsilon \qquad \forall n \ge N.$$

D'altronde, se $n = 0, 1, \dots, N-1$, sempre per assoluta continuità dell'integrale esistono $\delta_0, \dots, \delta_{N-1} \in \mathbb{N}$ tali che $\int_A |f_n|^p \, d\mu < \varepsilon$ per ogni $A \in \mathcal{F}$ con $\mu(A) < \delta_n$. Ne segue che se $A \in \mathcal{F}$ e $\mu(A) < \delta \wedge \delta_0 \wedge \ldots \wedge \delta_{N-1}$ si ha

$$\int_A |f_n|^p \, d\mu < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

ossia vale (ii).
Infine, essendo l'unione Z dei supporti di f e delle f_n un insieme σ-finito (esercizio 4.6.5), si ha $Z = \bigcup_{h=1}^\infty Z_h$, con $Z_h \in \mathcal{F}$, $Z_h \subseteq Z_{h+1}$ e $\mu(Z_h) < \infty$; inoltre, per convergenza monotona,

$$\lim_{h\to\infty} \int_{Z_h} |f|^p \, d\mu = \int_X |f|^p \, d\mu, \quad \text{ossia} \quad \lim_{h\to\infty} \int_{Z\setminus Z_h} |f|^p \, d\mu = 0.$$

In particolare, dato $\varepsilon > 0$, esiste $h_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ tale che $\int_{Z\setminus Z_h} |f|^p < \varepsilon$ per ogni $h \ge h_\varepsilon$, da cui

$$\int_{Z\setminus Z_h} |f_n|^p \, d\mu \le 2^{p-1}\left[\int_X |f_n - f|^p \, d\mu + \int_{Z\setminus Z_h} |f|^p \, d\mu\right] < 2^p\,\varepsilon \qquad \forall n \ge N,\ \forall h \ge h_\varepsilon\,.$$

D'altra parte, se $n = 0, 1, \dots, N-1$ applicando a $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$ il ragionamento fatto per f, esiste $h_n \in \mathbb{N}^+$ tale che $\int_{Z\setminus Z_h} |f_n|^p \, d\mu < \varepsilon$ per $h \ge h_n$; pertanto, se $h \ge h_0 = h_\varepsilon \vee h_1 \vee \ldots \vee h_{N-1}$ si ha

$$\int_{Z\setminus Z_h} |f_n|^p \, d\mu < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall h \ge h_0\,.$$

Dunque, scelto $Y = Z_{h_0}$, vale (iii).

Viceversa, supponiamo vere (i), (ii), (iii). Fissiamo una qualunque sottosuccessione $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$. Anzitutto, poiché, per (i), $\{f_{n_k}\}$ è fondamentale in misura, per la proposizione 3.5.2(iv) esiste f misurabile su X ed esiste una ulteriore sottosuccessione $\{f_{n_{k_h}}\} \subseteq \{f_{n_k}\}$ tale che $f_{n_{k_h}} \to f$ q.o. in X e $f_{n_{k_h}} \to f$ in misura. In particolare, per il lemma di Fatou le condizioni (ii) e (iii) valgono anche per f. Sull'insieme Y della condizione (iii) applichiamo il teorema di Severini-Egorov (teorema 3.4.2): fissato $\varepsilon > 0$, e scelto $\delta > 0$ tale che valga (ii), esiste un insieme $E \in \mathcal{F}$ con $\mu(E) < \delta$, tale che $f_{n_{k_h}} \to f$ uniformemente in $Y \setminus E$. Possiamo allora scrivere, per h sufficientemente grande,

$$\int_X |f_{n_{k_h}} - f|^p \, d\mu = \int_{X\setminus Y} |f_{n_{k_h}} - f|^p \, d\mu + \int_{Y\setminus E} |f_{n_{k_h}} - f|^p \, d\mu + \int_E |f_{n_{k_h}} - f|^p \, d\mu < 2^p\,\varepsilon + \varepsilon\,\mu(Y) + 2^p\,\varepsilon.$$

Dunque $f_{n_{k_h}} \to f$ in $L^p(X)$. Data l'arbitrarietà della sottosuccessione iniziale $\{f_{n_k}\}$, un facile ragionamento per assurdo porta a concludere che l'intera successione $\{f_n\}$ converge a f in $L^p(X)$.

Esercizio 9.1.33 (i) Si ha

$$f \star g(\lambda) = \int_0^\infty f(\lambda t) g(t)\, \frac{dt}{t} = \int_0^\infty g\left(\frac{s}{\lambda}\right) f(s)\, \frac{ds}{s} = g \star f\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

(ii) Risulta, detto q l'esponente coniugato di p,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |f \star g(\lambda)|^p\, \frac{d\lambda}{\lambda} &\leq \int_0^\infty \left[\int_0^\infty |f(\lambda t)||g(t)| \frac{dt}{t}\right]^p \frac{d\lambda}{\lambda} = \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty |f(\lambda t)|^{\frac{1}{q}} |f(\lambda t)|^{\frac{1}{p}} |g(t)| \frac{dt}{t}\right]^p \frac{d\lambda}{\lambda} \leq \\
&\leq \int_0^\infty \left[\int_0^\infty |f(\lambda t)|\, \frac{dt}{t}\right]^{\frac{p}{q}} \left[\int_0^\infty |f(\lambda t)||g(t)|^p\, \frac{dt}{t}\right] \frac{d\lambda}{\lambda} = \\
&= \|f\|_{L^1(\mu)}^{\frac{p}{q}} \int_0^\infty |f(r)|\, \frac{dr}{r} \int_0^\infty |g(t)|^p\, \frac{dt}{t} = \\
&= \|f\|_{L^1(\mu)}^{\frac{p}{q}+1} \|g\|_{L^p(\mu)}^p = \|f\|_{L^1(\mu)}^p \|g\|_{L^p(\mu)}^p .
\end{aligned}$$

Esercizio 9.1.34 (i) Se $f \in L^p(\mathbb{R})$, si ha

$$\|T_h f\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x-h)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq 2\|f\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

quindi $\|T_h\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))} \leq 2$.
(ii) Sia $1 \leq p < \infty$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, l'integrando $|f(x+h) - f(x-h)|^p$ tende a 0 puntualmente, ed è maggiorato dalla funzione $g_h(x) = 2^{p-1}[|f(x+h)|^p + |f(x-h)|^p]$, che converge puntualmente e in L^p a $2^p|f(x)|^p$. Dall'esercizio 4.3.9 segue che $\|T_h f\|_p \to 0$ per $h \to 0$; per densità (esercizio 9.1.24), la stessa proprietà vale per ogni $f \in L^p(\mathbb{R})$.
Se $p = \infty$ la tesi è falsa e l'esempio contrario è dato dalla funzione $f(x) = \chi_{[0,h]}$: risulta infatti

$$T_h f(x) = \chi_{[0,h]}(x+h) - \chi_{[0,h]}(x-h) = \chi_{[-h,0]}(x) - \chi_{[h,2h]}(x),$$

da cui $\|T_h f\|_\infty = 1$ per ogni $h \neq 0$.

Esercizio 9.1.35 Sia $p > 1$. Per $x \in \ell^p$ si ha, posto $q = \frac{p}{p-1}$,

$$\begin{aligned}
\|Kx\|_{\ell^p}^p &= \sum_{n=0}^\infty \left|\sum_{k=0}^n a_{n-k} x_k\right|^p \leq \sum_{n=0}^\infty \left[\sum_{k=0}^n |a_{n-k}|^{\frac{1}{p}} |a_{n-k}|^{\frac{1}{q}} |x_k|\right]^p \leq \\
&\leq \sum_{n=0}^\infty \left[\sum_{k=0}^n |a_{n-k}|\right]^{\frac{p}{q}} \left[\sum_{k=0}^n |a_{n-k}||x_k|^p\right] \leq \\
&\leq \|a\|_{\ell^1}^{\frac{p}{q}} \sum_{k=0}^\infty \sum_{n=k}^\infty |a_{n-k}||x_k|^p = \|a\|_{\ell^1}^{\frac{p}{q}+1} \|x\|_{\ell^p}^p = \|a\|_{\ell^1}^p \|x\|_{\ell^p}^p .
\end{aligned}$$

Se $p = 1$, il conto è più semplice: per $x \in \ell^1$ si ha

$$\|Kx\|_{\ell^1} \leq \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n |a_{n-k}||x_k| = \sum_{k=0}^\infty |x_k| \sum_{n=k}^\infty |a_{n-k}| = \|x\|_{\ell^1} \|a\|_{\ell^1} .$$

In ogni caso dunque $\|K\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} \leq \|a\|_{\ell^1}$.

Esercizio 9.1.36 (a) Risulta $T \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))$ se e solo se $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$. Infatti, è evidente che se $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$, allora

$$\|Tf\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |\varphi f|^p \, dx \le \|\varphi\|_\infty^p \|f\|_p^p \,.$$

Viceversa, se $T \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))$ e se si avesse $\varphi \notin L^\infty(\mathbb{R})$, allora gli insiemi $E_n = \{x \in \mathbb{R} : \ |\varphi(x)| > n\}$ avrebbero misura positiva per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Dunque

$$n^p \int_{E_n} |f|^p \, dx \le \int_{E_n} |\varphi f|^p \, dx \le \int_{\mathbb{R}} |\varphi f|^p \, dx = \|Tf\|_p^p \le \|T\|^p \|f\|_p^p \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}).$$

Scelta $f = m(E_n)^{-\frac{1}{p}} \chi_{E_n}$, essendo $\|f\|_p = 1$ dalla relazione precedente ricaviamo $n^p \le \|T\|^p$, il che è assurdo per n abbastanza grande. Pertanto $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$.

(b) T è continuo ed iniettivo se e solo se $\varphi \in L^\infty$ e $\varphi \neq 0$ q.o. in $\mathbb{R}$. Infatti in questa ipotesi, posto $F_n = \left\{x \in \mathbb{R} : |\varphi(x)| > \frac{1}{n}\right\}$, si ha per ogni $f \in L^p(\mathbb{R})$

$$\|Tf\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |\varphi f|^p \, dx \ge \int_{F_n} |\varphi f|^p \, dx \ge \frac{1}{n^p} \int_{F_n} |f|^p \, dx;$$

dunque, se $Tf = 0$ allora $f = 0$ su E_n per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, ossia $f = 0$ in ogni punto in cui $\varphi(x) \neq 0$, ossia $f = 0$ q.o. in $\mathbb{R}$. Pertanto T è iniettivo.
Viceversa, se T è continuo ed iniettivo, allora intanto $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$; inoltre, se φ fosse nulla in un insieme E con $m(E) > 0$, scelto un sottoinsieme $F \subseteq E$ di misura positiva e finita, scegliendo $f = \chi_F$ avremmo $f \in L^p(\mathbb{R})$, $f \neq 0$ e $Tf = 0$, violando l'iniettività.

(c) T è continuo con inverso continuo se e solo se $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ ed esiste $\delta > 0$ tale che $|\varphi| > \delta$ q.o. in $\mathbb{R}$. Infatti, in questa ipotesi, se $Tg = f$ si ha

$$\|f\|_p^p = \|Tg\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |\varphi g\|^p \, dx \ge \delta^p \int_{\mathbb{R}} |g|^p \, dx = \delta^p \|g\|_p^p \,,$$

da cui segue che $g = T^{-1} f \in L^p(\mathbb{R})$ e che $\|T^{-1}\| \le \delta^{-1}$. Viceversa, se T è continuo ed ha inverso continuo, allora intanto $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$; se poi, posto $G_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \ |\varphi(x)| < \frac{1}{n}\right\}$, fosse $m(G_n) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, allora, scegliendo $g = m(G_n)^{-\frac{1}{p}} \chi_{G_n}$, troveremmo

$$\|Tg\|_p^p = \int_{G_n} |\varphi g|^p \, dx \le \frac{1}{n^p} \|g\|_p^p \,,$$

da cui, posto $f = Tg$,

$$\frac{\|T^{-1} f\|_p}{\|f\|_p} = \frac{\|g\|_p}{\|Tg\|_p} \ge n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

il che è assurdo. Ne segue che esiste $\delta > 0$ tale che $|\varphi| \ge \delta$ q.o. in $\mathbb{R}$.

Esercizio 9.1.37 (i) In $L^p(0,2)$, con $0 < p < 1$, poniamo $A_1 = [0,1]$, $A_2 = [1,2]$. R isulta

$$\|\chi_{A_1} + \chi A_2\|_p = [m(A_1) + m(A_2)]^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}},$$

mentre

$$\|\chi_{A_1}\|_p + \|\chi_{A_2}\|_p = m(A_1)^{\frac{1}{p}} + m(A_2)^{\frac{1}{p}} = 1 + 1 = 2.$$

Ne segue $\|\chi_{A_1}\|_p + \|\chi_{A_2}\|_p < \|\chi_{A_1} + \chi A_2\|_p$.

(ii) Le proprietà $d(f,g) \ge 0$, $d(f,g) = 0$ se e solo se $f = g$, $d(f,g) = d(g,f)$ sono ovvie. Vediamo la disuguaglianza triangolare: poiché $p < 1$ si ha

$$d(f,h) = \int_X |f - h|^p \, d\mu \le \int_X |f - g|^p \, d\mu + \int_X |g - h|^p \, d\mu = d(f,g) + d(g,h).$$

Sia ora $\{f_n\}$ una successione di Cauchy: fissato $\varepsilon > 0$, esiste ν tale che $d(f_n, f_m) < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq \nu$. Allora si può costruire una sottosuccessione $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ tale che $d(f_{n_{k+1}}, f_{n_k}) < 2^{-k}$. Perciò la serie $\sum_{k=0}^{\infty} d(f_{n_{k+1}}, f_{n_k})$ converge. Definiamo

$$g = f_{n_0} + \sum_{k=0}^{\infty} [f_{n_{k+1}} - f_{n_k}];$$

questa funzione appartiene a $L^p(X)$, in quanto, essendo $p < 1$,

$$|g|^p \leq |f_{n_0}|^p + \sum_{k=0}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|^p,$$

da cui, integrando su X,

$$d(g, 0) \leq d(f_{n_0}, 0) + \sum_{k=0}^{\infty} d(f_{n_{k+1}}, f_{n_k}) \leq d(f_{n_0}, 0) + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} < \infty.$$

Inoltre $f_{n_h} = f_{n_0} + \sum_{k=0}^{h-1} [f_{n_{k+1}} - f_{n_k}] \to g$ puntualmente per $h \to \infty$, ed anche, in virtù del lemma di Fatou,

$$d(f_n, g) = \int_X |f_n - g|^p \, d\mu \leq \liminf_{h \to \infty} \int_X |f_n - f_{n_h}|^p \, d\mu < \varepsilon \qquad \text{per } n, n_h \geq \nu.$$

Dunque $\{f_n\}$ converge a g e lo spazio $L^p(X)$ è completo.

Esercizio 9.1.38 Verifichiamo che $\varphi \circ f$ è misurabile: se $f \in \mathcal{S}$, $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{E_i}$, allora $\varphi \circ f = \sum_{i=1}^{k} \varphi(\alpha_i) \chi_{E_i} \in \mathcal{S}$, cosicché $\varphi \circ f$ è misurabile. Se f è misurabile, scelta una successione $\{g_n\} \subset \mathcal{S}$ tale che $g_n \to f$ puntualmente q.o., si ricava che $\varphi \circ g_n \to \varphi \circ f$ q.o., e pertanto $\varphi \circ f$ è misurabile. Proviamo la disuguaglianza. Poiché φ è convessa, i sui rapporti incrementali sono crescenti. Poniamo

$$\beta_t = \inf_{t \leq \tau < s < b} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(s)}{\tau - s}, \qquad \gamma_t = \sup_{a < s < \tau \leq t} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(s)}{\tau - s},$$

ed osserviamo che per $t' < t$ si ha $\gamma_{t'} \leq \gamma_t$, $\beta_{t'} \leq \beta_t$ e $\gamma_t \leq \beta_t$. Scelto $t = \int_X f \, d\mu$, si ha

$$\frac{\varphi(f(x)) - \varphi(t)}{f(x) - t} \begin{cases} \geq \beta_t & \text{se} \quad f(x) > t, \\ \leq \gamma_t & \text{se} \quad f(x) < t, \end{cases}$$

cosicché

$$\varphi(f(x)) - \varphi(t) \geq \beta_t (f(x) - t) \quad \text{se } f(x) > t,$$
$$\varphi(f(x)) - \varphi(t) \geq \gamma_t (f(x) - t) \quad \text{se } f(x) \leq t.$$

Integrando su X si trova, essendo $\mu(X) = 1$ e $\int_X (f(x) - t) \, d\mu = 0$,

$$\begin{aligned} \int_X \varphi(f(x)) \, d\mu &= \int_{\{x \in X:\ f(x) > t\}} \varphi(f(x)) \, d\mu + \int_{\{x \in X;\ f(x) \leq t\}} \varphi(f(x)) \, d\mu \geq \\ &\geq \varphi(t) + \beta_t \int_{\{x \in X;\ f(x) > t\}} (f(x) - t) \, d\mu + \gamma_t \int_{\{x \in X;\ f(x) \leq t\}} (f(x) - t) \, d\mu \geq \\ &= \varphi\left(\int_X f \, d\mu \right) + (\beta_t - \gamma_t) \int_{\{x \in X;\ f(x) > t\}} (f(x) - t) \, d\mu \geq \varphi\left(\int_X f \, d\mu \right), \end{aligned}$$

e la tesi è provata.

Esercizio 9.1.39 Pur essendo l'esponenziale una funzione convessa, non possiamo utilizzare l'esercizio

9.1.38 perché $\log f$ potrebbe assumere il valore $+\infty$, cosa che in tale esercizio è esclusa per ipotesi. La tesi è banale se $\|f\|_1 = 0$. Altrimenti, dalla disuguaglianza $\log t < t-1$ per ogni $t > 0$ segue

$$\int_X \log \frac{f(x)}{\|f\|_1}\, d\mu \le \int_X \left[\frac{f(x)}{\|f\|_1} - 1\right] d\mu = 1 - 1 = 0,$$

cioè

$$\int_X \log f(x)\, d\mu \le \log \|f\|_1 = \log \int_X f\, d\mu,$$

da cui la tesi.
Se poi fosse $\exp \int_X \log f(x)\, d\mu = \int_X f\, d\mu$, allora

$$\int_X \left(\log \frac{f(x)}{\|f\|_1} - \left[\frac{f(x)}{\|f\|_1} - 1\right]\right) d\mu = 0$$

con integrando non positivo: dunque esso deve essere q.o. nullo, ossia

$$\log \frac{f(x)}{\|f\|_1} = \frac{f(x)}{\|f\|_1} - 1 \quad \text{q.o.;}$$

pertanto $\frac{f(x)}{\|f\|_1} = 1$ q.o. ovvero, in altre parole, f è q.o.costante.

Esercizio 9.1.40 Supponiamo che $f \in AC[0,1]$ e che $f' \in L^p(0,1)$. Per ogni partizione $\pi = \{x_i\}_{1\le i\le k}$ si ha

$$t_p(f,\pi) = \sum_{i=1}^k \frac{|f(x_i) - f(x_{i-1})|^p}{(x_i - x_{i-1})^{p-1}} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^{p-1}} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t)\, dt \right|^p ;$$

utilizzando la disuguaglianza di Hölder si ricava

$$t_p(f,\pi) \le \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f'(t)|^p\, dt = \int_0^1 |f'(t)|^p\, dt.$$

Pertanto, $T_p(f)^{\frac{1}{p}} \le \|f'\|_{L^p(0,1)}$.
Viceversa, supponiamo che $T_p(f) < \infty$. Proviamo che $f \in AC[0,1]$: dato $\varepsilon > 0$, sia $\{\,]x_i, y_i[\,\}_{1\le i\le k}$ una famiglia di intervalli disgiunti contenuti in $[0,1]$, con $\sum_{i=1}^k (y_i - x_i) < \delta$. Indichiamo con π la partizione di $[0,1]$ con nodi t_j dati da tutti i punti $x_i\,, y_i\,,\ i = 1,\dots,k$. Utilizzando ancora la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k |f(y_i) - f(x_i)| &= \sum_{i=1}^k \frac{|f(y_i) - f(x_i)|}{(y_i - x_i)^{\frac{p-1}{p}}} (y_i - x_i)^{\frac{p-1}{p}} \le \left[\sum_{i=1}^k \frac{|f(y_i) - f(x_i)|^p}{(y_i - x_i)^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^k (y_i - x_i)\right]^{\frac{p-1}{p}} \\ &\le t_p(f,\pi)^{\frac{1}{p}}\, \delta^{\frac{p-1}{p}} \le T_p(f)^{\frac{1}{p}}\, \delta^{\frac{p-1}{p}} < \varepsilon\end{aligned}$$

pur di scegliere $\delta < \varepsilon^{\frac{p}{p-1}} T_p(f)^{-\frac{1}{p-1}}$.
Proviamo ora che $f' \in L^p(0,1)$. Sia $A = \{x \in [0,1] :\ \exists f'(x)\}$: allora $m(A) = 1$. Definiamo per $n \in \mathbb{N}^+$

$$g_n(x) = \frac{f(x_i^{(n)}) - f(x_{i-1}^{(n)})}{x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}} \qquad \forall x \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}[\,, \quad 0 \le i \le n,$$

ove $x_i^{(n)} = \frac{i}{n}$. Risulta $g_n(x) \to f'(x)$ per ogni $x \in A \setminus \{\frac{i}{n}\}_{0\le i\le n,\ n\in\mathbb{N}^+}$, ossia q.o. in $[0,1]$: infatti, per $x \in]x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}[$, $0 \le i \le n$, si ha

$$\begin{aligned} g_n(x) - f'(x) &= \frac{f(x_i^{(n)}) - f(x)}{x_i^{(n)} - x} \frac{x_i^{(n)} - x}{x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}} + \frac{f(x) - f(x_{i-1}^{(n)})}{x - x_{i-1}^{(n)}} \frac{x - x_{i-1}^{(n)}}{x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}} - f'(x) = \\ &= \left[\frac{f(x_i^{(n)}) - f(x)}{x_i^{(n)} - x} - f'(x)\right] \frac{x_i^{(n)} - x}{x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}} + \left[\frac{f(x) - f(x_{i-1}^{(n)})}{x - x_{i-1}^{(n)}} - f'(x)\right] \frac{x - x_{i-1}^{(n)}}{x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}}\,, \end{aligned}$$

da cui, per $n \to \infty$,

$$|g_n(x) - f'(x)| \le \left| \frac{f(x_i^{(n)}) - f(x)}{x_i^{(n)} - x} - f'(x) \right| + \left| \frac{f(x) - f(x_{i-1}^{(n)})}{x - x_{i-1}^{(n)}} - f'(x) \right| \to 0.$$

D'altra parte, per il lemma di Fatou,

$$\int_0^1 |f'(t)|^p \, dt \le \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 |g_n(t)|^p \, dt = \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}^{(n)}}^{x_i^{(n)}} \frac{|f(x_i^{(n)}) - f(x_{i-1}^{(n)})|^p}{(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})^p} \, dt \le T_p(f) < \infty.$$

In particolare, se valgono le due condizioni, si ha $\|f'\|_{L^p(0,1)} = T_p(f)^{\frac{1}{p}}$.

Esercizio 9.1.41 Anzitutto, usando il teorema di Tonelli e la disuguaglianza di Hölder, si ha per ogni $\psi \in L^q(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} K(x,y) \, dy \right] \psi(x) \, dx \right| &\le \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |K(x,y)||\psi(x)| \, dxdy \le \\ &\le \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |K(x,y)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\psi(x)|^q \, dx \right]^{\frac{1}{q}} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \|K(\cdot,y)\|_p \, dy \, \|\psi\|_q \, . \end{aligned}$$

In particolare, scegliendo come ψ la funzione $x \mapsto \left| \int_{\mathbb{R}^N} K(x,y) \, dy \right|^{p-2} \int_{\mathbb{R}^N} K(x,y) \, dy$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} K(x,y) \, dy \right|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} K(x,y) \, dy \right]^2 \left| \int_{\mathbb{R}^N} K(x,y) \, dy \right|^{p-2} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x,y) \, dy \right) \psi(x) \, dx \le \\ &\le \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |K(x,y)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} dy \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\psi(x)|^q \, dx \right]^{\frac{1}{q}} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |K(x,y)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} K(x,z) \, dz \right|^{(p-1)q} dx \right]^{\frac{1}{q}} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |K(x,y)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} dy \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} K(x,z) \, dz \right|^p dx \right]^{\frac{1}{q}} ; \end{aligned}$$

semplificando fra primo e ultimo membro, si deduce

$$\left[\int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} K(x,y) \, dy \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \le \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |K(x,y)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} dy,$$

che è la tesi.

Esercizio 9.1.42 Risulta

$$\left[\int_0^\infty |F(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_0^\infty \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_0^\infty \left| \int_0^1 f(sx) \, ds \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Definiamo

$$K(s,x) = f(sx) \, \chi_{[0,\infty[\times [0,1]}(s,x), \qquad s,x \in \mathbb{R}.$$

Andiamo ad applicare la disuguaglianza integrale di Minkowski:

$$\begin{aligned}\left[\int_0^\infty \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} &= \left[\int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} K(s,x)\,ds\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \le \\ &\le \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |K(s,x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} ds = \int_0^1 \left[\int_0^\infty |f(sx)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} ds = \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^\infty |f(t)|^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}} s^{-\frac{1}{p}}\,ds = \frac{p}{p-1}\,\|f\|_p\,.\end{aligned}$$

Ciò prova la disuguaglianza di Hardy.
Proviamo che $\frac{p}{p-1}$ è la migliore costante. Poniamo $f_n(x) = x^{-\frac{1}{p}}\,\chi_{[1,n]}(x)$, $0 < x < \infty$. Si ha allora

$$\int_0^\infty |f_n(x)|^p\,dx = \int_1^n \frac{dx}{x} = \log n.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|\frac{1}{x}\int_0^x f_n(t)\,dt\right|^p dx &= \int_0^1 0\,dx + \int_1^n \left|\frac{1}{x}\int_1^x f_n(t)\,dt\right|^p dx + \int_n^\infty \left|\frac{1}{x}\int_1^n f_n(t)\,dt\right|^p dx = \\ &= \int_1^n \left[\frac{1}{x}\int_0^x t^{-\frac{1}{p}}\,dt\right|^p dx + \int_n^\infty \left|\frac{1}{x}\int_1^n t^{-\frac{1}{p}}\,dt\right|^p dx = \\ &= \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left[\int_1^n \frac{dx}{x} + \int_n^\infty \frac{dx}{x^p}\left(n^{1-\frac{1}{p}} - 1\right)^p\right] = \\ &= \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left[\log n + \frac{1}{p-1}\,\frac{1}{n^{p-1}}\left(n^{1-\frac{1}{p}} - 1\right)^p\right] = \\ &= \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left[\log n + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}}\right)^p\right].\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|f_n\|_p^p}\int_0^\infty \left|\frac{1}{x}\int_0^x f_n(t)\,dt\right|^p dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left[1 + \frac{1}{p-1}\,\frac{1}{\log n}\left(1 - \frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}}\right)^p\right] = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p.$$

Tenuto conto della disuguaglianza di Hardy già dimostrata, la tesi è provata.

Esercizio 9.1.43 Definiamo

$$f(x) = |a_n| \quad \text{su} \quad [n-1, n[\quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

cosicché

$$\int_0^\infty |f(x)|^p\,dx = \sum_{n=1}^\infty |a_n|^p.$$

Poi, posto $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$, risulta per $x \in [n-1, n[$

$$F(x) = \frac{1}{x}\left[\int_0^{n-1} f(t)\,dt + \int_{n-1}^x f(t)\,dt\right] = \frac{1}{x}\left[\sum_{k=1}^{n-1}|a_k| + |a_n|(x-n+1)\right].$$

D'altra parte, si ha

$$\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n-1}|a_k| + \frac{1}{x}|a_n|(x-n+1) \ge \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k|\,:$$

infatti questa disuguaglianza equivale a

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n-1}|a_k| + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{n}\right)|a_n| \ge \frac{n-x}{x}|a_n|,$$

che è vera, come si verifica facilmente, grazie alla decrescenza di $\{|a_n|\}$. Dunque

$$F(x) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k| \qquad \forall x \in [n-1, n[\,.$$

Risulta allora, grazie alla disuguaglianza di Hardy (esercizio 9.1.42),

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right]^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}|F(x)|^p\,dx = \int_0^{\infty}|F(x)|^p\,dx = \int_0^{\infty}\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right|^p dx \leq \\ &\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^{\infty}|f(x)|^p\,dx = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p.\end{aligned}$$

Esercizio 9.1.44 (i) Se $p=\infty$, e se $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$|Tf(x)| = \left|\int_x^{x+1} f(t)\,dt\right| \leq \int_x^{x+1}|f(t)|\,dt \leq \|f\|_1\,,$$

da cui $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_1$ per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$. Notiamo, inoltre, che con $f = \chi_{[0,1]}$ si ha $\|f\|_1$ e

$$\|Tf\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}\int_x^{x+1}\chi_{[0,1]}\,dt = 1 = \|f\|_1\,.$$

da cui $\|T\| = 1$.
Se $p = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}}|Tf(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}}\int_x^{x+1}|f(t)|\,dt = \int_{\mathbb{R}}\int_{t-1}^{t}dx\,|f(t)|\,dt = \|f\|_1,$$

da cui $\|Tf\|_1 \leq \|f\|_1$. Si noti che, scelta $f = \chi_{[-1,1]}$, si ha $\|f\|_1 = 2$ e

$$\|Tf\|_1 = \int_{\mathbb{R}}\int_x^{x+1}\chi_{[-1,1]}(t)\,dtdx = \int_{\mathbb{R}}\int_{t-1}^{t}dx\,\chi_{[-1,1]}(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}}\chi_{[-1,1]}(t)\,dt = 2 = \|f\|_1;$$

dunque $\|T\| = 1$.
Infine, se $1 < p < \infty$, per l'esercizio 9.1.15 si ha, detto q l'esponente coniugato di p,

$$\|Tf\|_p \leq \|Tf\|_1^{1/p}\|Tf\|_\infty^{1/q} \leq \|f\|_1^{1/p+1/q} = \|f\|_1\,.$$

(ii)(a) Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e sia $\varepsilon > 0$: per l'assoluta continuità dell'integrale, esiste $\delta > 0$ tale che se $m(E) < \delta$ risulta $\int_E |f|\,dt < \varepsilon$. Allora, se $x, x' \in \mathbb{R}$ e $|x - x'| < \delta$, si ha

$$|Tf(x) - Tf(x')| = \left|\int_x^{x'} f(t)\,dt - \int_{x+1}^{x'+1} f(t)\,dt\right| < 2\varepsilon.$$

(ii)(b) Fissati $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ed $\varepsilon > 0$, per l'assoluta continuità della funzione $x \mapsto \int_a^x |f(t)|\,dt$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni famiglia finita di sottointervalli $[x_i, y_i]$ disgiunti e contenuti in $[a, b]$, con $\sum_{i=1}^k |x_i - y_i| < \delta$, si ha $\sum_{i=1}^k \int_{x_i}^{y_i} |f(t)|\,dt < \varepsilon$. Pertanto,

$$\sum_{i=1}^{k}|Tf(x_i) - Tf(y_i)| = \sum_{i=1}^{k}\left|\int_{x_i}^{y_i} f(t)\,dt - \int_{x_i+1}^{y_i+1} f(t)\,dt\right| \leq \sum_{i=1}^{k}\left[\int_{x_i}^{y_i}|f(t)|\,dt + \int_{x_i+1}^{y_i+1}|f(t)|\,dt\right] < 2\varepsilon.$$

(ii) (c) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}|F(x)| \leq \lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}|f(t)|\,dt \leq \lim_{x\to+\infty}\int_x^{\infty}|f(t)|\,dt = 0,$$

e la stessa cosa vale evidentemente per $x \to -\infty$.

Esercizio 9.1.45 (i) Per definizione, se $\vartheta \geq \alpha$ si ha, per ogni insieme misurabile E di misura non superiore a 1, $m_n(E)^\vartheta \leq m_n(E)^\alpha$, e dunque $X_\vartheta \subseteq X_\alpha$.
(ii) Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 < p < \infty$, per la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\int_E |f|\, dm_N \leq \left[\int_E |f|^p\, dm_N\right]^{\frac{1}{p}}\, m_N(E)^{1-\frac{1}{p}}.$$

(iii) Se $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, allora ovviamente

$$\int_E |f|\, dm_N \leq \|f\|_\infty\, m_N(E),$$

quindi $f \in X_1$. Viceversa, sia $f \in X_1$: allora sappiamo che, per ogni insieme misurabile E di misura non superiore a 1,

$$\int_E |f|\, dm_N \leq C\, m_N(E).$$

Fissiamo un punto di Lebesgue x_0 per f (definizione 6.2.1). Per il teorema 6.2.2, in ogni palla B di $\mathbb{R}^N$ i punti di Lebesgue sono quasi tutti; quindi anche in $\mathbb{R}^N$ quasi ogni punto è di Lebesgue per f. Scegliendo $E = B(x_0, r)$ con r abbastanza piccolo, si ricava

$$\frac{1}{m_n(B(x_0,r))}\int_{B(x_0,r)} |f(x)|\, dx \leq C.$$

Per $r \to 0^+$, otteniamo $|f(x_0)| \leq C$ e dunque $|f(x)| \leq C$ q.o., in $\mathbb{R}^N$. Pertanto $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\|f\|_\infty \leq C$.

Esercizio 9.1.46 Se $f = 0$ oppure $g = 0$ le disuguaglianze sono ovvie. Inoltre, per simmetria, si può supporre $\|f\|_p \geq \|g\|_p > 0$. Per cominciare, sia $p \geq 2$: dobbiamo provare che

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq \big[\|f\|_p + \|g\|_p\big]^p + \big[\|f\|_p - \|g\|_p\big]^p.$$

Il secondo membro, che riscriviamo come

$$\Big([\|f\|_p + \|g\|_p]^{p-1} + [\|f\|_p - \|g\|_p]^{p-1}\Big)\,\|f\|_p + \Big([\|f\|_p + \|g\|_p]^{p-1} - [\|f\|_p - \|g\|_p]^{p-1}\Big)\,\|g\|_p\,,$$

raccogliendo il fattore $\|f\|_p$ diventa

$$\left(\left[1+\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right]^{p-1} + \left[1-\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right]^{p-1}\right)\|f\|_p^p + \frac{\|f\|_p^{p-1}}{\|g\|_p^{p-1}}\left(\left[1+\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right]^{p-1} - \left[1-\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right]^{p-1}\right)\|g\|_p^p =$$
$$= a\left(\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right)\|f\|_p^p + b\left(\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right)\|g\|_p^p\,,$$

ove

$$a(r) = (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}, \qquad b(r) = r^{1-p}\left[(1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1}\right], \qquad 0 \leq r \leq 1.$$

Per provare la tesi basta dunque dimostrare la stima puntuale

$$|f(x)+g(x)|^p + |f(x)-g(x)|^p \leq a\left(\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right)|f(x)|^p + b(\left(\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right)|g(x)|p \quad \text{q.o. in} X,$$

ovvero

$$|A+B|^p + |A-B|^p \leq a(r)|A|^p + b(r)|B|^p, \quad \forall r \in [0,1], \quad \forall A, B \in \mathbb{R}.$$

Distinguiamo due casi: $|A| \le |B|$, oppure $|A| \ge |B|$. Nel primo caso, posto $F(r) = a(r) - b(r)$, si verifica facilmente che $F(1) = 0$ e che

$$F'(r) = \frac{1}{p-1}\left(1 + \frac{1}{r^p}\right)\left[(1+r)^{p-2} - (1-r)^{p-2}\right] \ge 0 \quad \forall r \in [0,1[\,;$$

dunque F è crescente e negativa in $[0,1]$. Ne segue

$$0 \ge F(r)(|B|^p - |A|^p) = a(r)|B|^p + b(r)|A|^p - a(r)|A|^p - b(r)|B|^p,$$

ovvero

$$a(r)|A|^p + b(r)|B|^p \ge a(r)|B|^p + b(r)|A|^p.$$

Ciò significa che il secondo membro della disuguaglianza che dobbiamo dimostrare, nel quale, essendo $|A| \le |B|$, il coefficiente di $a(r)$ è non superiore a quello di $b(r)$, è più grande del termine che si ottiene quando, al contrario, il coefficiente di $a(r)$ supera quello di $b(r)$. Ne segue che, dimostrata la disuguaglianza nel caso contrario $|A| \ge |B|$, essa sarà provata a maggior ragione anche nell'altro caso. Sia dunque $|A| \ge |B|$, e poniamo $G(r) = a(r)|A|^p + b(r)|B|^p$: con conti un po' intricati ma facili, si trova

$$G'(r) = (p-1)\left(|A|^p - \frac{|B|^p}{r^p}\right)\left[(1+r)^{p-2} - (1-r)^{p-2}\right] \ge 0 \quad \iff \quad r \ge \frac{|B|}{|A|}.$$

Quindi, con altri facili conti,

$$G(r) \ge G\left(\frac{|B|}{|A|}\right) = (|A| + |B|)^p + (|A| - |B|)^p.$$

Basta ora mostrare che il primo membro della disuguaglianza coincide con $G\left(\frac{|B|}{|A|}\right)$. In effetti, analizzando con pazienza i quattro casi possibili $A \ge B \ge 0$, $A \le B \le 0$, $A \le 0 \le B \le |A|$ e $-|A| \le B \le 0 \le A$, si ottiene

$$G\left(\frac{|B|}{|A|}\right) = |A + B|^p + |A - B|^p,$$

da cui segue la disuguaglianza sopra scritta nel caso $p \ge 2$.
Supponiamo ora $1 < p \le 2$: la disuguaglianza da provare è quella opposta. In questo caso si ragiona analogamente, con tutte le disuguaglianze rovesciate. La funzione F risulta decrescente e positiva, per cui la dimostrazione si riduce nuovamente al caso $|A| \ge |B|$; si arriva alla tesi grazie al fatto che la funzione G stavolta nel punto $\frac{|B|}{|A|}$ ha un massimo.

Esercizi del paragrafo 9.2

Esercizio 9.2.1 Sia $F : L^p(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ un funzionale lineare complesso. Siano $m, n \in L^q(X, \mathbb{R})$ le funzioni che rappresentano rispettivamente, in virtù del teorema di Riesz-Fischer nel caso reale, i funzionali reali $\mathrm{Re}\, F|_{L^p(X,\mathbb{R})}$ e $-\mathrm{Im}\, F|_{L^p(X,\mathbb{R})}$. Sia $h = \alpha + i\beta \in L^p(X, \mathbb{C})$. Si ha, posto $p = m + i\,n \in L^q(X, \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}
Fh &= F(\alpha + i\beta) = F\alpha + iF\beta = (\mathrm{Re}\, F)\alpha + i\,(\mathrm{Im}\, F)\alpha + i\,(\mathrm{Re}\, F)\beta - (\mathrm{Im}\, F)\beta = \\
&= \int_X \alpha\, m\, d\mu + i\int_X \alpha\,(-n)\, d\mu + i\int_X \beta\, m\, d\mu - \int_X \beta\,(-n)\, d\mu = \\
&= \int_X \langle \alpha + i\beta, m\rangle_{\mathbb{C}}\, d\mu - i\int_X \langle \alpha + i\beta, n\rangle_{\mathbb{C}}\, d\mu = \int_X (\alpha + i\beta)(m - i\,n)\, d\mu = \\
&= \int_X \langle \alpha + i\beta, m + i\,n\rangle_{\mathbb{C}}\, d\mu = \int_X (h, p)_{\mathbb{C}}\, d\mu = \int_X h\,\overline{p}\, d\mu.
\end{aligned}$$

Questa relazione vale per ogni $h \in L^p(X, \mathbb{C})$: pertanto la funzione p rappresenta il funzionale complesso F.

Esercizio 9.2.2 Se $f \in L^1([0,1],\mathcal{F},\nu)$, allora per ogni $\alpha \geq 0$ l'insieme $\{x \in [0,1] :\ |f(x)| > \alpha\}$ è finito se $\alpha > 0$ ed è al più numerabile se $\alpha = 0$, essendo

$$\{x \in [0,1] :\ |f(x)| > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} \left\{x \in [0,1] :\ |f(x)| > \frac{1}{n}\right\}.$$

Consideriamo ora la funzione $x \mapsto xf(x)$: essa è $\mathcal{F}$-misurabile, in quanto l'insieme $\{x \in [0,1] : x|f(x)| > \alpha\}$ è incluso nell'insieme finito $\{x \in [0,1] :\ |f(x)| > \alpha\}$, e quindi appartiene a $\mathcal{F}$. Inoltre si ha a maggior ragione

$$\int_0^1 x|f(x)|\,d\nu \leq \int_0^1 |f(x)|\,d\nu = \|f\|_1 < \infty,$$

e dunque $x \mapsto xf(x) \in L^1(X,\nu)$.
Il funzionale

$$Fg = \int_0^1 x\,g(x)\,d\nu, \qquad g \in L^1(X,\mathcal{F},\nu),$$

verifica evidentemente $\|F\|_{(L^1)^*} \leq 1$. Però non esiste alcuna $f \in L^\infty(X,\mathcal{F},\nu)$ tale che $Fg = \int_X fg\,d\nu$ per ogni $g \in L^1(X,\mathcal{F},\nu)$: infatti, scegliendo $g = \chi_{\{x_0\}}$ con $x_0 \in [0,1]$, si ha $F\chi_{\{x_0\}} = x_0\,g(x_0) = x_0$. Quindi l'unica candidata possibile è $f(x) = x$, che tuttavia non è una funzione misurabile, dato che, posto $E = \{x \in [0,1[:\ x < \frac{1}{2}\} =]\frac{1}{2},1]$, né E, né E^c sono numerabili.

Esercizio 9.2.3 Dato che per ogni $g \in L^q$ si ha $fg \in L^1$, è ben definito l'operatore

$$Tg = \int_X fg\,d\mu, \qquad g \in L^q(X),$$

ed inoltre l'insieme $\{x \in X :\ |f(x)| = \infty\}$ ha misura nulla; modificando f e ponendola uguale a 0 in tale insieme, possiamo supporre che f sia finita ovunque in X. Poi, essendo X σ-finito, si ha $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} X_n$ con $X_n \subseteq X_{n+1}$ e $\mu(X_n) < \infty$. Pertanto, posto $E_n = \{x \in X_n :\ |f(x)| \leq n\}$, si ha $E_n \subseteq E_{n+1}$, $\mu(E_n) < \infty$ e $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} E_n$. Si noti che $f \in L^p(E_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Allora, ponendo anche

$$T_n g = \int_{E_n} fg\,d\mu, \qquad g \in L^q(E_n),$$

risulta per ogni $g \in L^q(X)$ con $\|g\|_q = 1$

$$|Tg| = \lim_{n\to\infty} \left|\int_{E_n} fg\,d\mu\right| = \lim_{n\to\infty} |T_n g|,$$

e dunque, scelto $\varepsilon = 1$, esiste $\nu \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$|Tg| \leq |T_\nu g| + 1 \leq \|T_\nu\| + 1.$$

Pertanto $\|T\| < \infty$, ossia $T : L^q(X) \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare limitato. In virtù del teorema di Riesz-Fischer (teorema 9.2.1), esiste $h \in L^p(X)$ tale che $Tg = \int_X fg\,d\mu = \int_X hg\,d\mu$ per ogni $g \in L^q(X)$. In particolare, prolungando a 0 su $X \setminus E_n$ le funzioni di $L^q(E_n)$, si deduce $\int_{E_n}(f-h)g\,d\mu = 0$ per ogni $g \in L^q(E_n)$. Ciò implica $f = h$ q.o. in E_n, visto che il funzionale su $L^q(E_n)$ rappresentato da $f - h \in L^p(E_n)$ è nullo; l'arbitrarietà di n ci fa concludere che $f = h$ q.o. in X. In particolare, $f \in L^p(X)$ e $\|f\|_p = \|h\|_p = \|T\|$.

Esercizio 9.2.4 Se $1 \leq p < \infty$, si ha $f \in L^p(X,\mu)$ se e solo se $f(b) = 0$; in tal caso $\|f\|_p = |f(a)|$. Dunque $L^p(X,\mu) \simeq \mathbb{C}$. Se $p = \infty$, si ha $f \in L^\infty(X,\mu)$ se e solo se $f(a), f(b) \in \mathbb{C}$ e in tal caso $\|f\|_\infty = \max\{|f(a)|,|f(b)|\}$. Quindi $L^\infty(X,\mu) \simeq \mathbb{C}^2$. Si ha poi, per $p \in [1,\infty[$, $T \in [L^p(X,\mu)]^*$ se e solo se $Tf = \alpha\,f(a)$ con $\alpha \in \mathbb{C}$, da cui ovviamente $|Tf| \leq K|f(a)|$ per ogni $f \in L^p(x,\mu)$. Ne segue, come è giusto, $[L^p(X,\mu)]^* \simeq \mathbb{C}$. Se invece $p = \infty$, allora $T \in [L^\infty(X,\mu)]^*$ se e solo se $Tf = \alpha\,f(a) + \beta\,f(b)$, da cui $|Tf| \leq K\max\{|f(a)|,|f(b)|\}$. Pertanto, come era da aspettarsi, $[L^\infty(X,\mu)]^* \simeq \mathbb{C}^2$.

Esercizio 9.2.5 Sia μ una misura infinita, non σ-finita. Sia Σ la famiglia dei sottoinsiemi di X che

sono σ-finiti: dunque $E \in \Sigma$ se e solo se $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ con $\mu(E_n) < \infty$ e $E_n \subseteq E_{n+1}$. In virtù del teorema di Riesz-Fischer (teorema 9.2.1), per ogni $E \in \Sigma$ il funzionale $F|_{L^p(E)}$ è rappresentato univocamente da una funzione $f_E \in L^q(E)$, nulla fuori di E, ossia risulta $Fg = \int_E g f_E \, d\mu$ per ogni $g \in L^p(E)$, o anche per ogni $g \in L^p(X)$, visto che $f \equiv 0$ su E^c. Se $E, E' \in \Sigma$, con $E \subseteq E'$, allora $f_E = f_{E'}$ q.o. in E: infatti per ogni $g \in L^p(E')$, nulla in $E' \setminus E$, si ha, essendo in particolare $g \in L^p(E)$,

$$Fg = \int_{E'} g f_{E'} \, d\mu = \int_E g f_{E'} \, d\mu = \int_E g f_E \, d\mu.$$

Dunque

$$\int_E g(f_E - f_{E'}) \, d\mu = 0 \qquad \forall g \in L^p(E).$$

Quindi $f_E - f_{E'} = 0$ q.o. in E, visto che il funzionale su $L^p(E)$ rappresentato da questa funzione di $L^q(E)$ è il funzionale nullo.
Sia ora $\lambda(E) = \int_X |f_E|^q \, d\mu$ per ogni $E \in \Sigma$: allora $\lambda(E) \le \lambda(E')$ se $E \subseteq E'$, poiché

$$\int_X |f_E|^q \, d\mu = \int_E |f_E|^q \, d\mu = \int_E |f_{E'}|^q \, d\mu \le \int_{E'} |f_{E'}|^q \, d\mu = \int_X |f_{E'}|^q \, d\mu.$$

Inoltre

$$\lambda(E) = \int_E |f_E|^q \, d\mu = \|F\|^q_{L^p(E)^*} = \left[\sup_{g\in L^p(E)} \frac{|Fg|}{\|g\|_p}\right]^q \le \left[\sup_{g\in L^p(X)} \frac{|Fg|}{\|g\|_p}\right]^q = \|F\|^q_{L^p(X)^*}.$$

Consideriamo adesso

$$m = \sup_{E\in\Sigma} \lambda(E) \le \|F\|^q_{L^p(X)^*}.$$

Questo estremo superiore è un massimo: infatti, sia $\{E_n\} \subseteq \Sigma$ tale che $\lambda(E_n) \to m$ per $n \to \infty$: posto $H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, si ha $H \in \Sigma$ in quanto

$$H = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\,, \quad \text{ove} \quad E_n = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_{nk}\,, \quad \mu(E_{nk}) < \infty.$$

Dato che $\lambda(H) \ge \lambda(E_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $\lambda(H) = m$. Per quanto visto, risulta allora $f_H = f_E$ q.o. in E, per ogni $E \in \Sigma$. Fissata $g \in L^p(X)$, posto $N = \{x \in X : \ g(x) \ne 0\}$, si ha $N \in \Sigma$ e, visto che $\lambda(H) = m$, si ha $\lambda(N \setminus H) = 0$; inoltre, dato che $g = 0$ fuori di N,

$$\begin{aligned} Fg &= \int_N g f_N \, d\mu = \int_{N\setminus H} g f_N \, d\mu + \int_{N\cap H} g f_N \, d\mu = \\ &= \int_{N\setminus H} g f_{N\setminus H} \, d\mu + \int_H g f_N \, d\mu = 0 + \int_H g f_H \, d\mu = \int_X g f_H \, d\mu. \end{aligned}$$

Vale dunque $Fg = \int_X g f_H \, d\mu$ per ogni $g \in L^p(X)$. Scelta infine $\overline{g} = |f_H|^{\frac{q}{p}} \operatorname{sgn} f$, si ha $F\overline{g} = \int_X |f_H|^q \, d\mu$ e $\|F\|_{L^p(X)^*} = \|f_H\|_q = \lambda(H)^{\frac{1}{q}} = m^{\frac{1}{q}}$.

Esercizio 9.2.6 Proviamo l'unicità. Se esistono due funzioni $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ crescenti, continue a sinistra, con $f_1(a) = f_2(a) = 0$, tali che $Fg = \int_a^b g \, d\mu_{f_1} = \int_a^b g \, d\mu_{f_2}$ per ogni $g \in C[a,b]$, fissiamo un arbitrario $t \in [a,b]$ e consideriamo una successione $\{\varphi_n\} \subset C[a,b]$ tale che $\varphi_n(x) \nearrow \chi_{[a,t]}(x)$ per ogni $x \in [a,b]$; allora $F\varphi_n = \int_a^b \varphi_n \, d\mu_{f_1} = \int_a^b \varphi_n \, d\mu_{f_2}$ e, per $n \to \infty$, $\int_a^t d\mu_{f_1} = \int_a^t d\mu_{f_2}$. Questa relazione vale per ogni $t \in [a,b]$, e dunque $\mu_{f_1} = \mu_{f_2}$ su tutti gli intevalli contenuti in $[a,b]$: di conseguenza $\mu_{f_1} \equiv \mu_{f_2}$.
Proviamo l'esistenza. Se $t \in]a,b]$ e n è abbastanza grande, poniamo

$$h_{t,n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad a \le x \le t - \frac{1}{n} \\ n(t-x) & \text{se} \quad t - \frac{1}{n} < x < t \\ 0 & \text{se} \quad t \le x \le b. \end{cases}$$

Essendo $h_{t,n+1} \geq h_{t,n}$, esiste il limite

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} F(h_{t,n}) \qquad \forall t \in]a,b].$$

Si noti che $F(h_{t,n}) \leq f(t)$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Estendiamo f ponendola uguale a 0 in $]-\infty, a]$ e uguale a $F(\chi_{[a,b]})$ in $]b,\infty[$. Allora f è crescente su $\mathbb{R}$ con $f(a) = 0$. Verifichiamo che f è continua a sinistra nel generico punto $t \in [a,b]$: fissato $\varepsilon > 0$, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ tale che $f(t) < F(h_{t,n_\varepsilon}) + \varepsilon$. Ne segue, per $k \in \mathbb{N}^+$, $k > n_\varepsilon$,

$$0 \leq f(t) - f\left(t - \frac{1}{k}\right) < F(h_{t,n_\varepsilon}) + \varepsilon - F(h_{t-1/k,n_\varepsilon}) = \varepsilon + F(h_{t,n_\varepsilon} - h_{t-1/k,n_\varepsilon});$$

osservato che (facile verifica)

$$\max_{x\in[a,b]} [h_{t,n_\varepsilon} - h_{t-1/k,n_\varepsilon}](x) = [h_{t,n_\varepsilon} - h_{t-1/k,n_\varepsilon}]\left(t - \frac{1}{k}\right) = \frac{n_\varepsilon}{k}\,,$$

si conclude che

$$0 \leq f(t) - f\left(t - \frac{1}{k}\right) \leq \varepsilon + \|F\|\|h_{t,n_\varepsilon} - h_{t-1/k,n_\varepsilon}\|_\infty = \varepsilon + \|F\|\,\frac{n_\varepsilon}{k}\,,$$

da cui per $k \to \infty$ si ricava, con ε arbitrario,

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \left[f(t) - f\left(t - \frac{1}{k}\right)\right] \leq \varepsilon.$$

Dunque f è continua a sinistra.
Sia ora μ_f la misura di Lebesgue-Stieltjes associata alla funzione f. Sia $g \in C[a,b]$ e, dato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che $|g(x) - g(x')| < \varepsilon$ quando $|x - x'| < \delta$. Fissata una suddivisione di $[a,b]$ mediante i punti $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$, con $t_j - t_{j-1} < \delta$, definiamo la funzione continua φ_n nel modo seguente:

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^{h} g(t_j)\left[h_{t_j,n} - h_{t_{j-1},n}\right].$$

Mostriamo che $\|g - \varphi_n\|_\infty < 2\varepsilon$. Osserviamo che, se $n > \frac{1}{\delta}$,

$$[h_{t_j,n} - h_{t_{j-1},n}](x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a \leq x \leq t_{j-1} - \frac{1}{n} \\ 1 + n(x - t_{j-1}) & \text{se} \quad t_{j-1} - \frac{1}{n} \leq x \leq t_{j-1} \\ 1 & \text{se} \quad t_{j-1} \leq t_j - \frac{1}{n} \\ -n(x - t_j) & \text{se} \quad t_j - \frac{1}{n} \leq t_j \\ 0 & \text{se} \quad t_j \leq x \leq b. \end{cases}$$

Dunque gli addendi di φ_n che non sono nulli in $[t_{j-1}, t_j]$ sono

$$g(t_j)[h_{t_j,n} - h_{t_{j-1},n}] + g(t_{j+1})[h_{t_{j+1},n} - h_{t_j,n}],$$

e valgono complessivamente $g(t_j)$ su $[t_{j-1}, t_j - \frac{1}{n}]$ e $g(t_j)[-n(x-t_j)] + g(t_{j+1})[1 - n(x-t_j)]$ su $[t_j - \frac{1}{n}, t_j]$. Dato che i due numeri $-n(x - t_j)]$ e $1 - n(x - t_j)$ hanno somma 1 e appartengono entrambi a $[0,1]$, si ottiene, per $x \in [t_{j-1}, t_j]$ e $n > \frac{1}{\delta}$,

$$\begin{aligned} |g(t) - \varphi_n(t)| &= |[-n(x - t_j)](g(t) - g(t_j)) + [1 - n(x - t_j)](g(t) - g(t_{j+1}))| \leq \\ &\leq |g(t) - g(t_j)| + |g(t) - g(t_{j+1})| \leq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

da cui $\|g-\varphi_n\|_\infty \le 2\varepsilon$ per $n > \frac{1}{\delta}$. Tiriamo le conclusioni:

$$\begin{aligned}\left|Fg - \int_a^b g\,d\mu_f\right| &\le |Fg - F\varphi_n| + \left|F\varphi_n - \int_a^b g\,d\mu_f\right| \le \\ &\le \|F\|\|g-\varphi_n\|_\infty + \left|\sum_{j=1}^m g(t_j)F(h_{t_j,n} - h_{t_{j-1},n}) - \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} g\,d\mu_f\right|;\end{aligned}$$

per $n \to \infty$ il primo addendo all'ultimo membro tende a 0; il secondo addendo converge a

$$\left|\sum_{j=1}^m g(t_j)(f(t_j) - f(t_{j-1})) - \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} g(t)\,d\mu_f\right|$$

e questo limite verifica

$$\left|\sum_{j=1}^m g(t_j)(f(t_j) - f(t_{j-1})) - \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} g(t)\,d\mu_f\right| = \left|\sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} (g(t_j) - g(t))\,d\mu_f\right| \le \varepsilon(f(b) - f(a)).$$

Quindi

$$\left|Fg - \int_a^b g\,d\mu_f\right| \le \varepsilon(f(b) - f(a)),$$

con ε arbitrario. Ciò prova che il funzionale F è rappresentato dalla misura μ_f.

Esercizio 9.2.7 Sia $T \in (C[a,b])^*$. Allora, in virtù della proposizione 9.2.2, si ha $T = G - H$, con $G, H \in (C[a,b])^*$ e $G \ge 0$, $H \ge 0$. Dall'esercizio 9.2.6 sappiamo che esistono due funzioni non negative $g, h \in C[a,b]$, tali che

$$Gf = \int_a^b f\,d\mu_g\,, \quad Hf = \int_a^b f\,d\mu_h \qquad \forall f \in C[a,b].$$

Perciò

$$Tf = \int_a^b f\,d\mu_g - \int_a^b f\,d\mu_h = \int_a^b f\,d\mu,$$

ove $\mu = \mu_g - \mu_h$ è una "misura con segno" di Lebesgue-Stieltjes finita, cioè una funzione $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ numerabilmente additiva, con $\mu(\emptyset) = 0$, definita su una σ-algebra $\mathcal{E}$ di sottoinsiemi di $[a,b]$, contenente tutti gli intervalli.

Capitolo 10

Operatori lineari

10

10.1 Estensione di funzionali lineari

HahnBan

Questo capitolo è dedicato allo studio di alcuni fra i principali teoremi dell'analisi funzionale: si tratta di importanti risultati relativi alla struttura ed alle proprietà degli operatori lineari fra spazi normati o di Banach, che trovano assai frequente utilizzazione nei più svariati campi dell'analisi e della matematica applicata.
Il primo enunciato di cui ci occupiamo riguarda la possibilità di estendere a tutto lo spazio funzionali lineari definiti su sottospazi, senza alterarne la norma. Premettiamo la seguente

omogsub **Definizione 10.1.1** *Sia X uno spazio normato, sia $p : X \to \mathbb{R}$. Il funzionale p è detto* positivamente omogeneo *(o, più semplicemente, benché impropriamente,* omogeneo*) se si ha*

$$p(\alpha x) = \alpha\, p(x) \qquad \forall x \in X, \quad \forall \alpha > 0.$$

Il funzionale p è detto subadditivo *se*

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in X.$$

omosubconv **Osservazioni 10.1.2 (1)** Se p è omogeneo, allora $p(0) = 0$, in quanto $p(0) = p(2 \cdot 0) = 2\, p(0)$; inoltre se $\alpha < 0$ si ha $p(\alpha x) = p((-\alpha)(-x)) = -\alpha\, p(-x)$per ogni $x \in X$.

(2) Se p è omogeneo e subadditivo, allora p è convesso: infatti per ogni $x, y \in X$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$ si ha

$$p(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq p(\lambda x) + p((1 - \lambda)y) = \lambda\, p(x) + (1 - \lambda)\, p(y).$$

Viceversa, se p è omogeneo e convesso, allora p è subadditivo: infatti per ogni $x, y \in X$ risulta

$$p(x + y) = p\left(2\frac{x + y}{2}\right) = 2\, p\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq 2\left[\frac{1}{2}\, p(x) + \frac{1}{2}\, p(y)\right] = p(x) + p(y).$$

I funzionali omogenei e subadditivi coincidono dunque con quelli omogenei e convessi. Si può dimostrare facilmente (esercizio 10.1.1) che essi coincidono anche con quelli subadditivi e convessi tali che $p(0) = 0$. Invece nessuna di queste tre proprietà, da sola,

implica le altre (esercizio 10.1.2).
Ad esempio, sono funzionali omogenei e convessi in uno spazio normato: la norma, ogni funzionale lineare, ed anche il valore assoluto di un funzionale lineare; un altro esempio importante è quello dei cosiddetti *funzionali di Minkowski* associati ai sottoinsiemi convessi di X (esercizio 10.1.3).
Il problema di estendere un funzionale lineare, definito su un sottospazio M propriamente contenuto in uno spazio normato X, senza alterarne la norma, è di facile soluzione se, ad esempio, $X = \mathbb{R}^N$ e $M = \mathbb{R}^k$ con $k < N$, ma non è altrettanto facile in generale, a meno che X non sia uno spazio di Hilbert (nel qual caso si rimanda all'esercizio 8.2.1). Il teorema che segue fornisce una risposta molto generale a questa questione.

HB **Teorema 10.1.3 (di Hahn-Banach)** *Sia X uno spazio normato reale, e sia $p : X \to \mathbb{R}$ un funzionale positivamente omogeneo e subadditivo. Siano inoltre M un sottospazio proprio di X e $f : M \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare tale che $fx \le p(x)$ per ogni $x \in M$. Allora esiste almeno un funzionale lineare $F : X \to \mathbb{R}$ tale che $F|_M = f$ e $Fx \le p(x)$ per ogni $x \in X$.*

Osserviamo che se si sceglie $p(x) = c\|x\|$, allora si ha $f \in M^*$ e $F \in X^*$, in quanto per ipotesi

$$|fx| = \max\{fx, f(-x)\} \le c\|x\| \qquad \forall x \in M,$$

e dal teorema segue

$$|Fx| = \max\{Fx, F(-x)\} \le c\|x\| \qquad \forall x \in X;$$

in particolare, prendendo $c = \|f\|_{M^*}$, otteniamo anche $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{M^*}$.
Notiamo inoltre che se X è uno spazio di Hilbert e $p(x) = \|f\|_{M^*}\|x\|_X$, allora in virtù del teorema di Riesz-Fréchèt l'estensione è unica ed è nulla su $M^\perp$ (esercizio 8.2.1).

Dimostrazione Per ipotesi, esiste $z \in X \setminus M$. Il primo passo della dimostrazione consiste nell'estendere f allo spazio $M_1 = [M, z]$ generato da M e da z, definendo l'estensione f_1 nel modo seguente:

$$f_1(x + tz) = fx + tc \qquad \forall x \in M,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

ove $c \in \mathbb{R}$ è una costante da fissare (se possibile!) in modo che risulti

$$fx + tc = f_1(x + tz) \le p(x + tz) \qquad \forall x \in M,\ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Dividendo per t ed usando l'omogeneità si ricavano le condizioni

$$f\left(\frac{x}{t}\right) + c \le p\left(\frac{x}{t} + z\right) \qquad \forall x \in M,\ \forall t > 0,$$

$$f\left(\frac{x}{t}\right) + c \ge -p\left(-\frac{x}{t} - z\right) \qquad \forall x \in M,\ \forall t < 0,$$

ossia, essendo M un sottospazio,

$$c \le p(y + z) - fy \quad \forall y \in M, \qquad c \ge -p(-y' - z) - fy' \quad \forall y' \in M.$$

D'altra parte, usando la subadditività di p si ha per ogni $y, y' \in M$:

$$fy - fy' = f(y - y') \leq p(y - y') = p((y + z) - (y' + z)) \leq p(y + z) + p(-y' - z),$$

cioè

$$-p(-y' - z) - fy' \leq p(y + z) - fy \qquad \forall y, y' \in M.$$

Dunque possiamo scegliere $c \in \mathbb{R}$ in modo che

$$\sup_{y' \in M} \{-p(-y' - z) - fy'\} \leq c \leq \inf_{y \in M} \{p(y + z) - fy\},$$

ed in generale ci sarà più di una scelta possibile per c.
Se nello spazio X vi è una successione $\{z_n\}$ tale che $X = [\{z_n\}]$ (è il caso, per esempio, di c_{00}), si può ripetere il procedimento sopra descritto, ottenendo estensioni successive su $M_1 = [M, z_1]$, su $M_2 = [M_1, z_2]$, ed induttivamente su $M_n = [M_{n-1}, z_n]$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$; dato che $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, resterà infine definita un'estensione F su X, la quale verificherà la tesi del teorema.
Ma in generale questo non accadrà, e quindi occorre seguire un'altra strada. Ricorriamo al lemma di Zorn (lemma 8.3.11): consideriamo le coppie (g, N) ove N è un sottospazio di X contenente M e $g : N \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare tale che $g|_M = f$ e $gx \leq p(x)$ per ogni $x \in N$; l'insieme P a cui applicare il lemma di Zorn sarà costituito da tutte queste coppie, ordinate nel modo seguente:

$$(g, N) \leq (g', N') \qquad \Longleftrightarrow \qquad N \subseteq N' \text{ e } g'|_N = g.$$

Si noti che P non è vuoto perché $(f, M) \in P$, ed è chiaro che $\leq$ è una relazione d'ordine su P. Sia $Q \subseteq P$ un insieme totalmente ordinato: sarà $Q = \{(g_i, N_i)\}_{i \in I}$, ove I è un qualunque insieme di indici. Definiamo

$$N = \bigcup_{i \in I} N_i\,, \qquad gx = g_i x \text{ se } x \in N_i;$$

una facile verifica mostra che $(g, N) \in P$ e che $(g_i, N_i) \leq (g, N)$ per ogni $i \in I$, ossia (g, N) è un maggiorante per Q. Per il lemma di Zorn, esiste allora un elemento $(F, N_0) \in P$ che è massimale per P; questo implica $N_0 = X$, altrimenti la procedura esposta all'inizio della dimostrazione permetterebbe di ottenere un'estensione propria di F, contraddicendo la massimalità di (F, N_0). Ciò mostra che F è l'estensione di f richiesta. □

HBcomplesso **Osservazione 10.1.4** Il teorema di Hahn-Banach vale anche negli spazi normati complessi, modificando opportunamente l'enunciato ed anche la definizione di funzionale omogeneo: si veda l'esercizio 10.1.6.

Il teorema di Hahn-Banach ha alcune importanti conseguenze.

separapunti **Corollario 10.1.5** *Se X è uno spazio normato con $X \neq \{0\}$, e $x_0 \in X \setminus \{0\}$, allora esiste $F \in X^*$ tale che $\|F\|_{X^*} = 1$ e $Fx_0 = \|x_0\|_X$.*

Dimostrazione Scegliamo $p(x) = \|x\|_X$, e sul sottospazio 1-dimensionale $M = [\{x_0\}]$ poniamo

$$f(tx_0) = t\|x_0\|_X \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ovviamente f è lineare e si ha

$$f(tx_0) = t\|x_0\|_X \leq |t|\|x_0\|_X = \|tx_0\|_X = p(tx_0) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Per il teorema di Hahn-Banach esiste un funzionale lineare $F : X \to \mathbb{R}$ tale che

$$F(tx_0) = t\|x_0\|_X \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad Fx \leq \|x\|_X \quad \forall x \in X;$$

in particolare $Fx_0 = \|x_0\|_X$ e

$$|Fx| = \max\{Fx, F(-x)\} \leq \|x\|_X \qquad \forall x \in X,$$

e ciò prova che $\|F\|_{X^*} = 1$. □

In particolare il corollario precedente mostra che se $X \neq \{0\}$ allora $X^* \neq \{0\}$, come preannunciato nell'esercizio 7.3.9.

ensnonnulla **Corollario 10.1.6** *Sia X uno spazio normato e sia M un sottospazio proprio di X. Se $x_0 \in X \setminus M$ e se $d(x_0, M) = \delta > 0$, allora esiste $F \in X^*$ tale che*

$$\|F\|_{X^*} = 1, \qquad F|_M = 0, \qquad Fx_0 \geq \delta.$$

Dimostrazione Scegliamo $p(x) = \|x\|_X$, e sul sottospazio $M' = [M, x_0]$ poniamo

$$f(x + tx_0) = t\delta \qquad \forall x \in M,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ovviamente f è lineare, f è nullo su M e, per definizione di δ,

$$f(x + tx_0) = t\delta \leq |t| \left\| \frac{x}{t} + x_0 \right\|_X = \|x + tx_0\|_X = p(x + tx_0) \quad \forall x \in M,\ \forall t \neq 0.$$

Il teorema di Hahn-Banach fornisce allora un'estensione lineare G di f a tutto X, tale che

$$Gx_0 = \delta, \qquad |Gx| = \max\{Gx, G(-x)\} \leq \|x\|_X \quad \forall x \in X;$$

dato che $\|G\|_{X^*} \leq 1$, il funzionale $F = G/\|G\|_{X^*}$ è quello cercato. □

Linftystar **Corollario 10.1.7** *L'inclusione $L^1 \subseteq (L^\infty)^*$ è in generale stretta.*

Dimostrazione Ricordiamo che l'inclusione è valida in virtù dell'esempio 7.3.6 (3). Consideriamo lo spazio misurato $([0,1], \mathcal{M}, m)$. Supponiamo, per assurdo, che ogni funzionale $F \in (L^\infty(0,1))^*$ si rappresenti nella forma

$$Fg = \int_0^1 g(t)h(t)\,dt \qquad \forall g \in L^\infty(0,1)$$

per un'opportuna funzione $h \in L^1(0,1)$. Consideriamo il funzionale lineare f da $C[0,1]$ in $\mathbb{R}$ definito da $fg = g(0)$: ovviamente si ha $|fg| \le \|g\|_\infty$ per ogni $g \in C[0,1]$; quindi per il teorema di Hahn-Banach esiste $F \in (L^\infty(0,1))^*$ tale che

$$Fg \le \|g\|_\infty \quad \forall g \in L^\infty(0,1), \qquad F|_{C[0,1]} = f.$$

Detta h la funzione di $L^1(0,1)$ che rappresenta F, si ha allora

$$1 = f(e^{-nt}) = F(e^{-nt}) = \int_0^1 e^{-nt} h(t)\, dt \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

ma ciò è assurdo in quanto, per convergenza dominata, l'ultimo membro tende a 0 per $n \to \infty$. $\square$

c0ellinfty **Esempio 10.1.8** Sia T un elemento di $(\ell^\infty)^*$: dunque T è lineare ed esiste $C \ge 0$ tale che

$$|Tu| \le C\|u\|_\infty \qquad \forall u \in \ell^\infty.$$

In particolare, naturalmente,

$$|Tu| \le C\|u\|_\infty \qquad \forall u \in c_0\,.$$

ossia la restrizione $T_0 = T|_{c_0}$ appartiene a c_0^* e $\|T_0\|_{c_0^*} \le C$. Per l'esercizio 7.3.24, si ha $c_0^* \simeq \ell^1$, ossia esiste $y \in \ell^1$ tale che

$$T_0 u = \sum_{n=1}^\infty u_n\, y_n \qquad \forall u \in c_0\,,$$

ove, per l'esattezza, $y_n = Te_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, essendo e_n l'n-simo elemento della base canonica.
L'operatore $T_0 : c_0 \to \mathbb{R}$ ha dunque due estensioni a ℓ^∞: una è T, l'altra è l'operatore $\overline{T} : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ definito da

$$\overline{T} u = \sum_{n=1}^\infty u_n\, y_n \qquad \forall u \in \ell^\infty.$$

Non è detto che sia $T = \overline{T}$: scegliamo, ad esempio, l'operatore lineare S, definito nello spazio c delle successioni reali convergenti da

$$Su = \lim_{n\to\infty} u_n \qquad \forall u \in c.$$

Utilizzando il teorema di Hahn-Banach, sia $\overline{S}$ una estensione lineare e continua di S allo spazio ℓ^∞. Per l'operatore S, la restrizione S_0 allo spazio c_0 è l'operatore nullo su c_0:

$$S_0 u = \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \qquad \forall u \in c_0.$$

Quindi l'operatore $S_0 = 0 : c_0 \to \mathbb{R}$ ha due estensioni distinte a ℓ^∞: una è l'operatore identicamente nullo 0, l'altra è l'operatore $\overline{S}$, che ovviamente almeno su $c \setminus c_0$ è non nullo.
In conclusione, non può esistere un isomorfismo fra $(\ell^\infty)^*$ e $\ell^1 \simeq c_0^*$, perché un tale operatore $j : (\ell^\infty)^* \to c_0^*$ non potrebbe essere iniettivo: si avrebbe $j(\overline{S}) = j(0) = 0$ con $\overline{S} \ne 0$.

Esercizi 10.1

scpo1

1. Sia X uno spazio normato e sia $p : X \to \mathbb{R}$ un funzionale subadditivo e convesso con $p(0) = 0$; si provi che p è positivamente omogeneo.

scpo2

2. Si provi che:

   (i) se $X = \mathbb{R}$ e $p(x) = \sqrt{|x|}$, p è subadditivo ma non positivamente omogeneo né convesso;

   (ii) se $X = \mathbb{R}^2$ e $p(x, y) = x^2 + y^2$, p è convesso ma non positivamente omogeneo né subadditivo;

   (iii) se $X = \mathbb{R}^2$ e $p(x, y) = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$, p è positivamente omogeneo ma non subadditivo né convesso.

fzMin

3. (*Funzionale di Minkowski*) Sia X uno spazio normato e sia $K \subseteq X$ un insieme convesso che abbia 0 come punto interno. Poniamo

$$p_K(x) = \inf \left\{ r > 0 : \frac{x}{r} \in K \right\} \qquad \forall x \in X.$$

   Si verifichi che l'insieme di cui $p_K(x)$ è l'estremo inferiore non è vuoto, e si provi che:

   (i) p_K è un funzionale positivamente omogeneo e subadditivo;

   (ii) esiste $M > 0$ tale che $p_K(x) \le M\|x\|_X$ per ogni $x \in X$;

   (iii) $p_K(x) \le 1$ per ogni $x \in K$.

   [**Traccia:** per la subadditività, siano $r, s > 0$ tali che x/r e y/s stiano in K e $r < p_K(x) + \varepsilon$, $s < p_K(y) + \varepsilon$; allora usando la convessità di K si mostri che $\frac{x+y}{r+s} \in K$ e se ne deduca che $p_K(x + y) \le p_K(x) + p_K(y) + 2\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$.]

tantiMinko

4. Si determini il funzionale di Minkowski relativo ai seguenti insiemi convessi K:

   (i) X spazio normato, $K = X$;

   (ii) X spazio normato, $K = \{x \in X : \|x\| \le R\}$;

   (iii) $X = \ell^2$, $K = \{x \in \ell^2 : |x_j| \le 1\}$, con $j \in \mathbb{N}$ fissato;

   (iv) $X = \mathbb{R}^2$, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by \le c\}$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e $c > 0$ fissati.

Minkospec

5. Sia $X = (c_{00}, \|\cdot\|_2)$, e sia $K = \{x \in c_{00} : |x_n| < 2^{-n}\ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Si verifichi che K ha parte interna vuota, ma che malgrado ciò il funzionale di Minkowski di K è ben definito.

HBC

6. Sia X uno spazio normato su $\mathbb{C}$, e sia $p : X \to \mathbb{R}$ un funzionale subadditivo e tale che $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$ per ogni $x \in X$ ed $\alpha \in \mathbb{C}$. Siano poi M un sottospazio proprio di X e $f : M \to \mathbb{C}$ un funzionale lineare tale che $|fx| \le p(x)$ per ogni $x \in M$. Provare che esiste $F : X \to \mathbb{C}$ lineare, tale che $F|_M = f$ e $|Fx| \le p(x)$ per ogni $x \in X$.

[**Traccia:** utilizzando il teorema 10.1.3 si costruisca un'estensione reale G del funzionale reale $\mathrm{Re} f$; poi, definito $Fx = Gx - i\,G(ix)$, si verifichi che F estende f e che deve essere $|Fx| \le p(x)$.]

essep

7. Sia X uno spazio normato e sia $K \subset X$ un convesso contenente 0. Si provi che per ogni $x_0 \in X \setminus K$ esiste $F \in X^*$ tale che $Fx \le Fx_0$ per ogni $x \in K$.
[**Traccia:** sia $f : [\{x_0\}] \to \mathbb{R}$ definita da $f(tx_0) = t$; si verifichi che $fx \le p_K(x)$ per ogni $x \in [\{x_0\}]$, si applichi il teorema di Hahn-Banach e si provi che l'estensione F verifica la tesi.]

essep2

8. Sia X uno spazio normato e siano K, M sottoinsiemi convessi di X, non vuoti e disgiunti. Si provi che esiste $F : X \to \mathbb{R}$ lineare e non nullo che *separa* K e M, ossia verifica
$$\sup_{x\in K} Fx \le \inf_{y\in M} Fy.$$
[**Traccia:** posto $H = K - M = \{x = y - z : y \in K,\ z \in M\}$, si verifichi che H è un convesso che non contiene 0, e si applichi l'esercizio 10.1.7.]

seinco

9. Siano K, M convessi dello spazio normato X, non vuoti e disgiunti. Se K è chiuso e M è compatto, si provi che esiste $F \in X^*$ che separa K e M strettamente, ossia
$$\sup_{x\in K} Fx < \inf_{y\in M} Fy.$$
[**Traccia:** si provi che K e $M_\varepsilon = M + B(0,\varepsilon)$ sono convessi non vuoti, e sono disgiunti per ε sufficientemente piccolo; si scelga, grazie all'esercizio 10.1.8, un funzionale $F \in X^* \setminus \{0\}$ che li separa, e si deduca che $\sup_K F \le \inf_M F - \varepsilon\|F\|_{X^*}$.]

sspdenso

10. Sia M un sottospazio di uno spazio normato X. Si provi che M è denso in X se e solo se per ogni $F \in X^*$ vale l'implicazione
$$F|_M = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad F = 0.$$

quasiort

11. Sia M un sottospazio chiuso e proprio dello spazio normato X. Si provi che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon \in X \setminus M$ tale che $\|x_\varepsilon\| = 1$ e $\|x - x_\varepsilon\| > 1 - \varepsilon$ per ogni $x \in M$.

E00clE

12. Sia X uno spazio normato e sia E un sottoinsieme non vuoto di X. Poniamo
$$E^0 = \{F \in X^* :\ Fx = 0\ \ \forall x \in E\}, \quad E^{00} = \{x \in X :\ \ Fx = 0\ \forall F \in E^0\}.$$
Si provi che E^{00} coincide con $\overline{[E]}$, il minimo sottospazio chiuso che contiene E.

kerfun

13. Siano $g, f_1, \dots, f_n$ funzionali lineari e continui sullo spazio normato X. Si provi che risulta
$$\bigcap_{k=1}^{n} \ker f_k \subseteq \ker g$$
se e solo se g è combinazione lineare degli f_k.
[**Traccia:** per la necessità si consideri l'operatore $T : X \to \mathbb{R}^n$ definito da $Tx = (f_1 x, \dots, f_n x)$, e sia poi $h : R(T) \to \mathbb{R}$ data da $h(Tx) = gx$; si verifichi che h è ben definita e continua, e poi si applichi il teorema di Hahn-Banach.]

minnoreq

14. Sia X uno spazio di Banach complesso e siano $a, b \in X \setminus \{0\}$. Si verifichi che i seguenti fatti sono equivalenti:

    (i) $\|a\|_X \leq \|a + tb\|_X$ per ogni $t \in \mathbb{C}$;

    (ii) Esiste $f \in X^*$ tale che $\|f\|_{X^*} = 1$, $f(a) = \|a\|_X$, $f(b) = 0$.

    Se in particolare X è uno spazio di Hilbert, si provi che ciascuna delle (i) e (ii) è equivalente a

    (iii) $(a, b)_X = 0$.

limBa

15. Consideriamo il sottospazio $M \subset \ell^\infty$ costituito dalle successioni della forma

$$\{y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2, \ldots\},, \qquad y \in \ell^\infty,$$

    e sia M_0 la chiusura di M in ℓ^∞.

    (i) Si mostri che la successione $z = \{1, 1, 1, \ldots\}$ non appartiene a M_0 e si calcoli $\delta = d(z, M_0)$.

    (ii) Si costruisca un funzionale lineare e continuo $T : \ell^\infty \to \mathbb{R}$, detto *limite di Banach*, tale che $T|_{M_0} = 0$, $Tz = 1$, $\|T\|_{(\ell^\infty)^*} = 1$.

    (iii) Si provi che:

    (a) $Tx = T(\tau x)$ per ogni $x \in \ell^\infty$, ove $\tau : \ell^\infty \to \ell^\infty$ è l'operatore di "shift" definito da $(\tau x)_n = x_{n+1}$;

    (b) T è un funzionale positivo, cioè $(Tx)_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ se $x_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$;

    (c) risulta

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq Tx \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \qquad \forall x \in \ell^\infty;$$

    (d) si ha

$$Tx = \lim_{n\to\infty} x_n$$

    se questo limite esiste.

estmufinadd

16. Sia X un insieme non vuoto, sia $\mathcal{F}$ un'algebra di sottoinsiemi di X e sia $\mu_0 : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ una funzione di insieme non negativa, finitamente additiva, tale che $\mu_0(X) < \infty$. Si provi che μ_0 si può estendere ad una funzione di insieme μ, non negativa, finitamente additiva, definita su $\mathcal{P}(X)$.
    [**Traccia:** sia L lo spazio normato delle funzioni reali limitate definite su X, munito della norma $\|f\|_L = \sup_{x\in X} |f(x)|$. Detto M il sottospazio di L costituito dalle funzioni semplici $\varphi = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}$ con $A_1, \ldots, A_m$ elementi disgiunti di $\mathcal{F}$, e posto $g : M \to \mathbb{R}$, $g(\varphi) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu_0(A_i)$, si applichi il teorema di Hahn-Banach a g; denotando con G l'estensione, si ponga $\mu(A) = G(\chi_A)$ per ogni $A \subseteq X$...]

10.2 Uniforme limitatezza di operatori

BanSte

Un altro fondamentale risultato dell'analisi funzionale permette di trasformare una stima puntuale per un'arbitraria famiglia di operatori lineari e limitati in una stima uniforme. Più precisamente, vale il seguente enunciato:

BS **Teorema 10.2.1 (di Banach-Steinhaus)** *Sia X uno spazio di Banach e sia Y uno spazio normato; sia inoltre $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una qualsiasi famiglia di elementi di $\mathcal{L}(X,Y)$. Se risulta*

$$\sup_{\alpha\in A}\|T_\alpha x\|_Y<\infty \qquad \forall x\in X,$$

allora

$$\sup_{\alpha\in A}\|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)}<\infty;$$

se invece esiste $z\in X$ tale che $\sup_{\alpha\in A}\|T_\alpha z\|_Y=\infty$, allora

$$\sup_{\alpha\in A}\|T_\alpha x\|_Y=+\infty \qquad \forall x\in D,$$

ove D è un sottoinsieme denso in X.

Dimostrazione È necessario fare uso di un importante risultato di topologia generale: il teorema di Baire.

baire **Teorema 10.2.2 (di Baire)** *Sia (Z,d) uno spazio metrico completo. Se $\{V_n\}$ è una successione di aperti densi in Z, allora la loro intersezione è un insieme denso in Z (in particolare è non vuota).*

Dimostrazione Sia W un aperto non vuoto di Z. Poiché V_1 è denso in Z, l'aperto $W\cap V_1$ contiene una palla chiusa $\overline{B(x_1,r_1)}$ con $r_1<1$; poiché V_2 è denso in Z, l'aperto $B(x_1,r_1)\cap V_2$ contiene una palla chiusa $\overline{B(x_2,r_2)}$ con $r_2<\frac{1}{2}$, e procedendo induttivamente si ottiene che per ogni $n\in\mathbb{N}^+$ l'aperto $B(x_n,r_n)\cap V_{n+1}$ contiene una palla chiusa $\overline{B(x_{n+1},r_{n+1})}$ con $r_{n+1}<\frac{1}{n+1}$. Si ha allora

$$d(x_i,x_j)\le r_n<\frac{1}{n} \qquad \forall i,j\ge n,$$

da cui, per la completezza di Z, esiste $x\in Z$ tale che $x_n\to x$; si ha anzi $d(x_n,x)\le r_n$ per ogni $n\in\mathbb{N}^+$. Pertanto

$$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{B(x_n,r_n)}\subseteq W\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n\right).$$

Dunque l'insieme $\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n$ interseca un generico aperto $W\subset Z$: ciò prova che esso è denso in Z. □

Veniamo alla dimostrazione del teorema di Banach-Steinhaus. Poniamo

$$\varphi(x)=\sup_{\alpha\in A}\|T_\alpha x\|_Y, \qquad V_n=\{x\in X:\varphi(x)>n\}.$$

Ciascun V_n è aperto in X: infatti se $x \in V_n$, allora per definizione di $\varphi(x)$ esiste $\alpha \in A$ tale che $\|T_\alpha x\|_Y > n$; quindi per la continuità di T_α esiste una palla $B(x,\delta)$ tale che $\|T_\alpha z\|_Y > n$ per ogni $z \in B(x,\delta)$, da cui a maggior ragione $\varphi(z) > n$ per ogni $z \in B(x,\delta)$: ciò mostra che $B(x,\delta) \subseteq V_n$ e dunque V_n è aperto.
Adesso i casi sono due: risulta $\varphi(x) < \infty$ per ogni $x \in X$, oppure al contrario esiste $z \in X$ tale che $\varphi(z) = +\infty$. Nel primo caso, non tutti gli aperti V_n possono essere densi in X, altrimenti per il teorema di Baire dedurremmo che l'insieme

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{x \in X : \varphi(x) = +\infty\}$$

sarebbe non vuoto. Dunque almeno uno fra i V_n non è denso in X, ossia esistono $n_0 \in \mathbb{N}^+$, $x_0 \in X$ e $r > 0$ per i quali

$$\|x - x_0\|_X \leq r \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(x) \leq n_0;$$

di conseguenza se $\|x'\|_X \leq r$ si ha, essendo $\varphi(x' + x_0) \leq n_0$ e $\varphi(x_0) \leq n_0$,

$$\|T_\alpha x'\|_Y = \|T_\alpha(x' + x_0) - T_\alpha x_0\|_Y \leq 2n_0 \qquad \forall \alpha \in A,$$

da cui, se $\|x\|_X \leq 1$,

$$\|T_\alpha x\|_Y = \frac{1}{r}\|T_\alpha(rx)\|_Y \leq \frac{2n_0}{r} \qquad \forall \alpha \in A.$$

In definitiva, nel caso in cui $\varphi(x) < \infty$ per ogni $x \in X$ abbiamo ricavato che

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty.$$

Nel caso contrario, in cui esiste $z \in X$ per cui $\varphi(z) = +\infty$, avremo a maggior ragione

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \geq \frac{\varphi(z)}{\|z\|_X} = +\infty;$$

quindi ciascuno degli aperti V_n deve essere denso in X (altrimenti, per l'argomentazione precedente, dedurremmo che $\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty$). Ma allora per il teorema di Baire l'insieme $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ è addirittura denso in X e si ha $\varphi(x) = +\infty$ per ogni $x \in D$. Ciò conclude la dimostrazione del teorema di Banach-Steinhaus. $\square$

Osservazione 10.2.3 Se ci accontentiamo di provare solo il primo enunciato del teorema di Banach-Steinhaus, vi è una dimostrazione elementare che non fa uso del teorema di Baire. Supponiamo, per assurdo, che sia

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = +\infty;$$

allora esiste una successione $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}^+} \subseteq \{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tale che

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} > 4^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Poniamo $x_0 = 0$ e costruiamo induttivamente una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ nel modo seguente: nota x_{n-1}, scegliamo, in virtùù dell'esercizio 7.3.16, $x_n \in B(x_{n-1}, 3^{-n})$ tale che

$$\|T_n x_n\|_Y > \frac{2}{3} \cdot 3^{-n} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} .$$

È facile verificare che $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in X, dato che per $m > n$ si ha

$$\|x_m - x_n\|_X \leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\|_X \leq \sum_{k=n}^{m-1} 3^{-k-1} = \frac{3}{2}(3^{-n-1} - 3^{-m-1}) < \frac{1}{2} \cdot 3^{-n}.$$

Detto x il limite della successione $\{x_n\}$, si ha $\|x - x_n\|_X \leq \frac{1}{2} \cdot 3^{-n}$; pertanto

$$\|T_n x\|_Y \geq \|T_n x_n\|_Y - \|T_n(x - x_n)\|_Y > \left[\frac{2}{3} \cdot 3^{-n} - \frac{1}{2} \cdot 3^{-n}\right] \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} > \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\right)^n .$$

Ciò mostra che

$$\sup_{\alpha\in A} \|T_\alpha x\|_Y = +\infty,$$

il che contraddice l'ipotesi.

Vediamo un'applicazione del teorema precedente alla convergenza puntuale delle serie di Fourier di funzioni continue. Introduciamo lo spazio di Banach

$$C_{\#}[-\pi, \pi] = \{f \in C[-\pi, \pi] : f(-\pi) = f(\pi)\},$$

munito della norma $\|\cdot\|_\infty$. Se f è una funzione di tale spazio, in particolare $f \in L^2(-\pi, \pi)$ e quindi la sua serie di Fourier, relativa al sistema trigonometrico, converge a f nella norma $\|\cdot\|_2$. Possiamo scrivere le somme parziali della serie di Fourier di f nel modo seguente:

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k \, e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x - t) \, dt,$$

ove il *nucleo di Dirichlet* D_n è definito da

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}, \qquad t \in \mathbb{R};$$

moltiplicando $D_n(t)$ per $e^{\pm it/2}$ e sottraendo le relazioni ottenute, si vede subito che

$$D_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin (n+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} & \text{se } t \neq 0 \\ 2n + 1 & \text{se } t = 0; \end{cases}$$

in particolare, D_n è una funzione reale. Quindi, fissato $x \in [-\pi, \pi]$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ il funzionale

$$T_n f = S_n f(x) \qquad \forall f \in C_{\#}[-\pi, \pi]$$

è lineare e continuo con

$$\|T_n\|_{(C_\#[-\pi,\pi])^*} \le \frac{\|D_n\|_1}{2\pi} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

ed anzi vale l'uguaglianza, come si vede prendendo una successione $\{g_j\} \subset C_\#[-\pi,\pi]$ tale che $0 \le g_j \le 1$ e $\lim_{j\to\infty} g_j(t) = \operatorname{sgn} D_n(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si osservi che

$$\|T_n\|_{(C_\#[-\pi,\pi])^*} = \frac{\|D_n\|_1}{2\pi} \ge \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right| \frac{dt}{t} = \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} |\sin s| \,\frac{ds}{s}\,,$$

e poiché la funzione $s \mapsto \frac{|\sin s|}{s}$ non è sommabile in $[0,\infty[$, si conclude che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{(C_\#[-\pi,\pi])^*} = +\infty.$$

Per il teorema di Banach-Steinhaus si deduce che esiste un insieme D, intersezione di aperti densi in $C_\#[-\pi,\pi]$ e dunque esso stesso denso in $C_\#[-\pi,\pi]$, tale che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n f(x)| = +\infty \qquad \forall f \in D.$$

In definitiva, c'è un insieme denso di funzioni continue la cui serie di Fourier non converge puntualmente nel punto x, che era stato fissato arbitrariamente in $[-\pi,\pi]$. Un raffinamento di questo risultato è descritto nell'esercizio 10.2.9.

Esercizi 10.2

Tnlimconv

1. Sia $\{T_n\} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$, con X spazio di Banach e Y spazio normato. Supponiamo che per ogni $x \in X$ la successione $\{T_n x\}$ converga in Y. Si provi che:

   (i) la successione $\{\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\}$ è limitata;

   (ii) $x \mapsto \lim_{n\to\infty} T_n x$ è un elemento T di $\mathcal{L}(X,Y)$;

   (iii) si ha $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.

Blimi

2. Sia X uno spazio normato e sia B un sottoinsieme di X^*. Se per ogni $x \in X$ l'insieme $\{Tx : T \in B\}$ è limitato in $\mathbb{R}$, si provi che B è limitato in X^*.

T(B)limi

3. Sia X uno spazio di Banach e sia B un sottoinsieme di X. Se per ogni $T \in X^*$ l'insieme $T(B)$ è limitato in $\mathbb{R}$, si provi che B è limitato in X.
   [**Traccia:** per ogni $x \in B$ si consideri il funzionale $J_x : X^* \to \mathbb{R}$ definito da $J_x(T) = Tx$; si provi che esso ha norma uguale a $\|x\|_X \dots$]

BSno

4. Si consideri lo spazio $(c_{00}, \|\cdot\|_1)$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $T_k : c_{00} \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da $T_k x = k x_k$. Si provi che T_k è lineare e continuo, che

   $$\sup_{k\in\mathbb{N}} |T_k x| < +\infty \qquad \forall x \in c_{00}\,,$$

   ma che $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|T_k\| = +\infty$. Giustificare il risultato.

Tseriexk

5. Sia $\{x_n\}$ una successione reale. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo

$$T_k : c_0 \to \mathbb{R}, \qquad T_k a = \sum_{h=0}^{k} x_h a_h \quad \forall a = \{a_n\} \in c_0.$$

(i) Provare che $\|T_k\|_{c_0^*} = \sum_{h=0}^{k} |x_h|$.

(ii) Supponiamo che per ogni $a \in c_0$ la successione reale $\{T_k a\}_{k\in\mathbb{N}}$ abbia limite finito; si provi allora che il funzionale

$$T : c_0 \to \mathbb{R}, \qquad Ta = \lim_{k\to\infty} T_k a$$

è lineare e continuo, con

$$\|T\|_{c_0^*} = \sum_{h=0}^{\infty} |x_h|,$$

e che $T_k \to T$ in c_0^*.

dualitaell1

6. Sia $a = \{a_n\}$ una successione reale.

(i) Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ è convergente per ogni successione $b = \{b_n\} \in \ell^1$, si provi che $a \in \ell^\infty$;

(ii) se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ è convergente per ogni successione $b = \{b_n\} \in c_0$, si provi che $a \in \ell^1$.

ifalimitati

7. Sia $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$, con X spazio di Banach e Y spazio normato. Se risulta

$$\sup_{\alpha\in A} |\varphi(T_\alpha x)| < +\infty \qquad \forall x \in X,\ \forall \varphi \in Y^*,$$

si provi che $\sup_{\alpha\in A} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty$.

fbilcont

8. Sia X uno spazio di Banach e siano Y, Z spazi normati. Sia $B : X \times Y \to Z$ una forma bilineare tale che per ogni $f \in Z^*$ e $y \in Y$ l'applicazione lineare $x \mapsto f(B(x, y))$ sia continua. Si provi che esiste $K \geq 0$ tale che $\|B(x, y)\|_Z \leq K\|x\|_X\|y\|_Y$ per ogni $(x, y) \in X \times Y$.

nocosF

9. Si provi che esiste un insieme D denso in $C_\#[-\pi, \pi]$, tale che per ogni $f \in D$ l'insieme

$$\left\{ x \in [-\pi, \pi] : \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n f(x)| = +\infty \right\}$$

è denso in $[-\pi, \pi]$.

baire2

10. Sia (Z, d) uno spazio metrico completo. Se $\{K_n\}$ è una successione di chiusi la cui unione è Z, si provi che almeno uno fra i K_n ha parte interna non vuota.

f'=g

11. Sia $\{f_n\} \subset C^1[a,b]$ tale che $f_n(x) \to f(x)$ e $f_n'(x) \to g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$. Se $g \in C[a,b]$ e se $f \in C^1[a,b]$, si provi che $f' = g$.
[**Traccia:** fissato $[c,d] \subseteq [a,b]$, e posto

$$A_n = \{x \in [c,d] : \ |f_k'(x) - g(x)| \leq 1 \ \ \forall k \geq n\},$$

si utilizzi il teorema di Baire per provare che esiste un intervallo $[s,t] \subseteq [c,d]$ tale che le f_n' siano equilimitate in $[s,t]$; poi si applichi il teorema di Lebesgue in $[s,t]$ e si deduca la tesi ragionando per assurdo.]

10.3 Applicazioni aperte

applap

Gli operatori lineari fra spazi di Banach godono di una importante proprietà topologica, assai utile nelle applicazioni. Essa è espressa dal seguente enunciato:

AA

Teorema 10.3.1 (dell'applicazione aperta) *Siano X ed Y spazi di Banach. Se $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ è un operatore surgettivo, allora T è un'* applicazione aperta*, ossia per ogni aperto $A \subseteq X$ l'insieme $T(A)$ è aperto in Y.*

Osserviamo che se T non è lineare il teorema non vale: ad esempio se $X = Y = \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x^3 - x$ è continua e surgettiva, ma non lineare, e trasforma l'aperto $]-\infty, 0[$ nell'insieme $]-\infty, \frac{2}{3\sqrt{3}}]$ che non è aperto.

Dimostrazione Siano U, V le palle unitarie in X e Y rispettivamente: la tesi del teorema equivale a dire che esiste $\delta > 0$ tale che $\delta V \subseteq T(U)$ (ove $\delta V = \{\delta y : y \in V\}$ è la palla di centro 0 e raggio δ in Y). Infatti, se vale questa condizione ed A è un aperto di X, fissato $y_0 \in T(A)$ (dunque $y_0 = Tx_0$ con $x_0 \in A$) e scelto $r > 0$ in modo che $x_0 + rU = B(x_0, r) \subseteq A$, si ha

$$B(y_0, r\delta) = y_0 + r\delta V \subseteq Tx_0 + T(rU) = T(B(x_0, r)) \subseteq T(A),$$

e quindi $T(A)$ è aperto; viceversa, se T è un'applicazione aperta allora $T(U)$ è aperto in Y e quindi contiene una palla δV centrata nel proprio punto $T(0) = 0$.
Dimostriamo dunque che esiste $\delta > 0$ per cui $\delta V \subseteq T(U)$. Proveremo la tesi in tre passi.

1° passo $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{T(kU)}$.

Infatti, essendo T surgettivo, ogni $y \in Y$ è immagine di qualche $x \in X$; sarà $\|x\|_X < k$ per qualche $k \in \mathbb{N}^+$, da cui $y \in T(kU) \subseteq \overline{T(kU)}$.

2° passo Esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $y \in Y$ ed $\varepsilon > 0$ esiste un $x \in X$ che verifica $\|x\|_X < \frac{1}{\delta}\|y\|_Y$ e $\|y - Tx\|_Y < \varepsilon$.

Anzitutto, per il teorema di Baire e l'esercizio 10.2.10, almeno uno fra gli insiemi $\overline{T(kU)}$ ha parte interna non vuota; quindi esistono $k \in \mathbb{N}^+$ ed un aperto W di Y tali che $W \subseteq \overline{T(kU)}$. Dunque, scelto $y_0 \in W$, esiste $\eta > 0$ tale che $B(y_0, \eta) \subseteq W$, da cui

$$\eta V = B(0, \eta) \subseteq \overline{T(kU)} - y_0 \subseteq \overline{T(2kU)}.$$

D'ora in poi k, W ed η sono fissati. Dalla relazione precedente segue che

$$y \in B(0, 2\|y\|_Y) = 2\|y\|_Y V \subseteq \overline{T\left(\frac{4k}{\eta}\|y\|_Y U\right)} \qquad \forall y \in Y;$$

dunque, per ogni $y \in Y$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in \frac{4k}{\eta}\|y\|_Y U$ tale che $\|y - Tx\|_Y < \varepsilon$: questa è esattamente la tesi del 2^{o} passo con $\delta = \frac{\eta}{4k}$.

3^{o} passo Proviamo la tesi del teorema.

Applicheremo il 2^{o} passo iterativamente. Sia $\delta = \frac{\eta}{4k}$. Fissati $\varepsilon > 0$ e $y \in \delta V$, per il 2^{o} passo esiste $x_1 \in X$ tale che

$$\|x_1\|_X < \frac{1}{\delta}\|y\|_Y < 1, \qquad \|y - Tx_1\|_Y < \frac{\delta\varepsilon}{2}.$$

Analogamente, in corrispondenza di $y - Tx_1$ esiste $x_2 \in X$ tale che

$$\|x_2\|_X < \frac{1}{\delta}\|y - Tx_1\|_Y < 2^{-1}\varepsilon, \qquad \|y - Tx_1 - Tx_2\|_Y < 2^{-2}\delta\varepsilon,$$

e procedendo induttivamente, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esiste $x_{n+1} \in X$ tale che

$$\|x_{n+1}\|_X < \frac{1}{\delta}\left\|y - \sum_{k=1}^{n} Tx_k\right\|_Y < 2^{-n}\varepsilon, \qquad \left\|y - \sum_{k=1}^{n+1} Tx_k\right\|_Y < 2^{-(n+1)}\delta\varepsilon.$$

Poniamo ora $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$; poiché X è completo, la successione $\{s_n\}$, che è di Cauchy in X, converge ad un elemento $x \in X$ per il quale risulta

$$\|x\|_X \leq \|x_1\|_X + \sum_{k=2}^{\infty} \|x_k\|_X < 1 + \varepsilon;$$

inoltre, per continuità, $Ts_n \to Tx$ in y. D'altra parte si ha, per costruzione, $Ts_n \to y$, e dunque $y = Tx \in T((1+\varepsilon)U)$; ne segue, per l'arbitrarietà di y, $\delta V \subseteq T((1+\varepsilon)U)$, ossia

$$T(U) \supseteq \frac{\delta}{1+\varepsilon} V \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

In definitiva

$$T(U) \supseteq \bigcup_{\varepsilon > 0} \frac{\delta}{1+\varepsilon} V = \delta V.$$

Ciò prova la tesi. □

isom **Corollario 10.3.2** *Siano X, Y spazi di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se T è bigettivo, allora T è un isomorfismo, ossia $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.*

Dimostrazione Ovviamente T^{-1} è lineare; inoltre per il teorema dell'applicazione aperta T trasforma aperti in aperti e dunque la controimmagine di un aperto mediante T^{-1} è un aperto. Pertanto T^{-1} è continua e quindi $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. Notiamo in particolare che si ha

$$\|x\|_X \leq c\|Tx\|_Y \qquad \forall x \in X,$$

ove $c = \|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$. □

GC **Corollario 10.3.3 (teorema del grafico chiuso)** *Siano X ed Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ lineare. Se T è un operatore* chiuso*, ossia il grafico G_T di T è un sottoinsieme chiuso dello spazio prodotto $X \times Y$, allora $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

Osserviamo che se T è non lineare il risultato è falso: la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, data da $f(x) = \frac{1}{x}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, ha grafico chiuso pur essendo discontinua.

Dimostrazione Dall'esercizio 7.3.10 segue che lo spazio $X \times Y$ è di Banach con la norma $\|(x, y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$; poiché G_T è chiuso in $X \times Y$, $(G_T, \|\cdot\|_{X\times Y})$ è uno spazio di Banach. L'applicazione $\Gamma : G_T \to X$ definita da

$$\Gamma(x, Tx) = x \qquad \forall (x, Tx) \in G_T$$

è ben definita, lineare e, ovviamente, continua con norma non superiore a 1. Inoltre Γ è bigettiva; quindi, per il corollario precedente, Γ è un isomorfismo ed in particolare esiste $c > 0$ tale che

$$\|(x, Tx)\|_{X\times Y} \leq c\|x\|_X \qquad \forall x \in X,$$

da cui $c \geq 1$ e $\|Tx\|_Y \leq (c - 1)\|x\|_X$ per ogni $x \in X$, cioè la tesi. □

opchiusi **Osservazioni 10.3.4 (1)** Un operatore lineare T, definito su un sottospazio M di uno spazio normato X, a valori in uno spazio normato Y, è chiuso se e solo se vale l'implicazione seguente:

$$\{x_n\} \subseteq M, \quad x_n \to x \text{ in } X, \quad Tx_n \to y \text{ in } Y \quad \Longrightarrow \quad x \in M \quad \text{e} \quad Tx = y.$$

Infatti ciò significa esattamente che G_T è chiuso in $X \times Y$.

(2) Come vedremo nell'esempio successivo, il teorema del grafico chiuso è falso in generale se X non è completo, oppure se X è completo ma T è definito su un sottospazio proprio e non chiuso di X (le due cose sono equivalenti, dato che ogni spazio normato non completo è sottospazio non chiuso dello spazio di Banach costituito dal suo completamento).

Nelle applicazioni, ad esempio nel campo delle equazioni differenziali, si incontrano spesso operatori chiusi non continui; l'esempio principale è il seguente.

d/dt **Esempio 10.3.5** Consideriamo l'operatore *derivata prima*:

$$A : C^1[a, b] \to C[a, b], \qquad Af = f' \quad \forall f \in C^1[a, b].$$

Rispetto alle norme naturali di $C^1[a, b]$ e di $C[a, b]$, l'operatore derivata è lineare e continuo con norma uguale a 1: infatti ovviamente

$$\|Af\|_\infty = \|f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|_{C^1[a,b]},$$

e d'altra parte prendendo le funzioni $f_\varepsilon(x) = \varepsilon \sin \frac{x-a}{\varepsilon}$, con $0 < \varepsilon < \frac{2}{\pi}(b - a)$, si ottiene subito

$$\|Af_\varepsilon\|_\infty = 1, \qquad \|f_\varepsilon\|_{C^1[a,b]} = \varepsilon + 1$$

e dunque

$$\|A\|_{\mathcal{L}(C^1[a,b],C[a,b])} \geq \frac{1}{1 + \varepsilon} \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Notiamo che A è surgettivo: ogni $g \in C[a,b]$ è la derivata delle funzioni $c + \int_a^x g(t)dt$, che sono tutte in $C^1[a,b]$. Quindi A è un'applicazione aperta. La restrizione di A al sottospazio

$$M = \{f \in C^1[a,b] : f(x_0) = 0\} \qquad (x_0 \text{ punto fissato di } [a,b]),$$

è anche iniettiva, perché ogni $g \in C[a,b]$ ha come unica controimmagine in M la soluzione del problema di Cauchy $f' = g, f(x_0) = 0$; quindi $A|_M$ è un isomorfismo. In effetti si ha

$$(A|_M)^{-1} g(x) = \int_{x_0}^x g(t)dt,$$

ed è immediato verificare che

$$\|(A|_M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(C[a,b],C^1[a,b])} = 1 + \max\{b - x_0, x_0 - a\}.$$

Cambiamo punto di vista, mettendo su $C^1[a,b]$ la norma $\|\cdot\|_\infty$: allora $C^1[a,b]$ diventa un sottospazio non chiuso di $C[a,b]$, ovvero uno spazio normato non completo. L'operatore A agisce allora nello spazio $C[a,b]$: il suo *dominio*, definito da

$$D(A) = \{f \in C[a,b] : Af = f' \in C[a,b]\},$$

è il sottospazio $C^1[a,b]$ di $C[a,b]$. In questo modo A non è più continuo, perché scegliendo $f_n(x) = (x-a)^n$ si trova subito

$$\|f_n'\|_\infty = n(b-a)^{n-1}, \qquad \|f_n\|_\infty = (b-a)^n,$$

e dunque

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|f_n'\|_\infty}{\|f_n\|_\infty} = +\infty.$$

Tuttavia A è un operatore chiuso: infatti se $\{(f_n, f_n')\}$ è una successione del grafico G_A che converge nella norma dello spazio prodotto ad un elemento (f,g) (ossia $f_n \to f$ uniformemente in $[a,b]$ e $f_n' \to g$ uniformemente in $[a,b]$), passando al limite nella relazione

$$f_n(x) - f_n(x') = \int_{x'}^x f_n'(t)dt \qquad \forall x, x' \in [a,b]$$

si trova subito che

$$f(x) - f(x') = \int_{x'}^x g(t)dt \qquad \forall x, x' \in [a,b],$$

da cui è facile dedurre, dividendo per $x - x'$ e facendo tendere x' ad x, che f è derivabile e $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$: dunque $f \in C^1[a,b]$ e $Af = g$, ovvero $(f,g) \in G_A$. Quindi G_A è chiuso.

Esercizi 10.3

oprest

1. Sia X uno spazio normato e sia M un sottospazio di X. Si consideri l'operatore di restrizione $r : X^* \to M^*$, definito da

$$r(F) = F|_M \qquad \forall F \in X^*.$$

(i) Si verifichi che $r \in \mathcal{L}(X^*, M^*)$ e se ne calcoli la norma.

(ii) L'operatore r è iniettivo? è surgettivo?

(iii) Si provi che r è un'applicazione aperta.

stimaaa

2. Siano X, Y spazi di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ un operatore surgettivo. Si provi che esiste un numero $c > 0$ dotato della seguente proprietà:

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X : \quad Tx = y \quad \text{e} \quad \|x\|_X \le c\|y\|_Y \,.$$

ranker1

3. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$. Si provi che i seguenti fatti sono equivalenti:

(i) $R(T)$ è chiuso in H;

(ii) $R(T^*)$ è chiuso in H (si ricordi l'esercizio 8.2.4);

(iii) $R(T) = (\ker T^*)^\perp$;

(iv) $R(T^*) = (\ker T)^\perp$;

(v) esiste $c > 0$ tale che $\|x\| \le c\|Tx\|$ per ogni $x \in (\ker T)^\perp$;

(vi) esiste $c' > 0$ tale che $\|y\| \le c'\|T^*y\|$ per ogni $y \in (\ker T^*)^\perp$.

M+Nchiuso

4. Sia X uno spazio di Banach e siano M, N sottospazi chiusi di X tali che $M \cap N = \{0\}$. Posto $Z = \{x = a + b : a \in M,\ b \in N\}$, si provi che Z è chiuso in X se e solo se esiste $c > 0$ tale che

$$\|a\|_X \le c\|a + b\|_X \qquad \forall a \in M, \quad \forall b \in N.$$

[**Traccia:** supponendo Z chiuso si dimostri che $P : Z \to M$, definito da $P(a+b) = a$, è un operatore chiuso.]

Tf=tf(t)

5. Sia $M = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : t \mapsto tf(t) \in L^1(\mathbb{R})\}$, e sia $T : M \to \mathbb{R}$ definito da $Tf(t) = tf(t),\ t \in \mathbb{R}$. Si provi che M è denso in $L^1(\mathbb{R})$ e che T è chiuso ma non continuo.

Tcontchiu

6. Sia X uno spazio normato, sia M un sottospazio di X e sia $T : M \to X$ un operatore lineare.

(i) Se M è chiuso in X e T è continuo, si provi che T è chiuso. Cosa può succedere se M non è chiuso?

(ii) Se X è completo, M è chiuso in X e T è chiuso, si provi che T è continuo. Cosa può succedere se M non è chiuso?

(iii) Se T è chiuso, è vero che T trasforma insiemi chiusi in insiemi chiusi?

derpri

7. Si provi che l'operatore derivata prima $A = \frac{d}{dt} : AC[a,b] \to L^1(a,b)$ è continuo rispetto alle norme naturali di questi spazi, e se ne calcoli la norma; si provi poi che esso è chiuso, ma non continuo, se lo si definisce come operatore nello spazio $L^1(a,b)$ con dominio $D(A) = AC[a,b]$.

opautoa

8. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T : H \to H$ un operatore lineare autoaggiunto (vedere l'esercizio 8.2.5). Si provi che $T \in \mathcal{L}(H)$.
[**Traccia:** si mostri che T è un operatore chiuso.]

Mdimfin

9. Sia M un sottospazio di $C[a,b]$ chiuso rispetto alla topologia indotta dalla norma $\|\cdot\|_2$; si provi che M ha dimensione finita.
[**Traccia:** si verifichi che $(M, \|\cdot\|_\infty)$ e $(M, \|\cdot\|_2)$ sono spazi di Banach e si deduca che esiste $c > 0$ tale che $\|u\|_\infty \le c\|u\|_2$ per ogni $u \in M$; poi, se $\{e_n\}$ è un sistema ortonormale completo in M, si fissi $y \in [a,b]$ e si definisca $v(x) = \sum_{n=0}^{N} \overline{e_n(y)} e_n(x)$: si verifichi che $v \in M$ e si ricavi la maggiorazione $\sum_{n=0}^{N} |e_n(y)|^2 \le c^2$. Infine si integri rispetto a y su $[a,b]$.]

coeFouL1

10. Per ogni $f \in L^1(-\pi,\pi)$ si definiscano i coefficienti di Fourier rispetto al sistema trigonometrico:
$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

(i) Si provi che $\gamma_k \to 0$ per $|k| \to \infty$.

(ii) Posto
$$c_0(\mathbb{Z}) = \{x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} : \lim_{|k|\to\infty} x_k = 0\},$$
si verifichi che l'applicazione $Tf = \{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ è lineare e continua da $L^1(-\pi,\pi)$ in $c_0(\mathbb{Z})$ con norma uguale a $\frac{1}{2\pi}$.

(iii) Si provi che T è iniettiva, ma non surgettiva.

10.4 Operatore aggiunto

aggiunto

Questo paragrafo è dedicato all'importante nozione di "aggiunto" di un operatore lineare, nozione già incontrata, in un caso particolare, negli esercizi 8.2.5 e successivi. Dati due spazi normati complessi X, Y, considereremo operatori lineari $A : D(A) \subseteq X \to Y$, ove $D(A)$, il *dominio* di A, è un opportuno sottospazio di X: abbiamo già incontrato questa situazione nell'esempio 10.3.5.
Sia dunque $A : D(A) \subseteq X \to Y$ un operatore lineare. Poniamo
$$M = \{\varphi \in Y^* : \varphi \circ A : D(A) \to \mathbb{C} \text{ è continuo nella norma di } X\};$$
ovviamente M è un sottospazio di Y^*. Fissato $\varphi \in M$, per il teorema di Hahn-Banach esiste un funzionale $\Phi \in Y^*$ tale che $\Phi|_{D(A)} = \varphi \circ A$. Tale funzionale non è in generale unico; se però $D(A)$ è denso in X, allora l'estensione da $\varphi \circ A$ a Φ è unica.
Supporremo allora che $D(A)$ sia denso in X.

opagg **Definizione 10.4.1** *Siano X e Y spazi normati e sia $A : D(A) \subseteq X \to Y$ un operatore lineare con dominio denso. L'operatore lineare $A^* : D(A^*) \to X^*$ dato da*

$$D(A^*) = M, \qquad A^*\varphi = \Phi \quad \forall \varphi \in M,$$

ove M e Φ sono definiti come sopra, si chiama operatore aggiunto *di A; esso è caratterizzato dalla relazione*

$$(A^*\varphi)x = \varphi(Ax) \qquad \forall x \in D(A), \quad \forall \varphi \in D(A^*).$$

Un caso importante è quello in cui $D(A) = X$ e A è continuo: in questo caso si ha

aa* **Proposizione 10.4.2** *Siano X, Y spazi normati. Se $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, allora risulta $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ e*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)}.$$

Dimostrazione Se $A = 0$ la tesi è ovvia: supponiamo dunque $A \neq 0$. Anzitutto

$$\|A^*\varphi\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X = 1} |\varphi(Ax)| \leq \|\varphi\|_{Y^*}\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)},$$

da cui $\|A^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$. D'altra parte, sia $x \in X$ tale che $Ax \neq 0$: posto $y = \frac{Ax}{\|Ax\|_Y}$, per il teorema di Hahn-Banach (più precisamente per il corollario 10.1.5) esiste $\varphi \in Y^*$ tale che $\|\varphi\|_{Y^*} = 1$ e $\varphi y = \|y\|_Y = 1$. Dunque $\varphi(Ax) = \|Ax\|_Y$ e pertanto

$$\|Ax\|_Y = \varphi(Ax) = A^*\varphi(x) \leq \|A^*\varphi\|_{X^*}\|x\|_X \leq \|A^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)}\|x\|_X,$$

da cui $\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \|A^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)}$. □

Le principali proprietà degli aggiunti sono elencate nell'enunciato che segue.

propra* **Proposizione 10.4.3** *Siano X, Y, Z spazi normati. Valgono i fatti seguenti:*

(i) *Se $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$, allora $(A + B)^* = A^* + B^*$.*

(ii) *Se $\alpha \in \mathbb{C}$ e $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, allora $(\alpha A)^* = \alpha A^*$.*

(iii) *Se $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$ e $B \in \mathcal{L}(X, Y)$, allora $(AB)^* = B^*A^* \in \mathcal{L}(Z^*, X^*)$.*

(iv) *Se $A \in \mathcal{L}(X)$ ed esiste $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, allora esiste anche $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*)$ e si ha $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

Dimostrazione Le verifiche sono tutte facili; in particolare, per (iv) si osservi che risulta $(AA^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^* = I : X^* \to X^*$, e si applichi (iii). □

a*hilb **Osservazione 10.4.4** Se $X = Y = H$, con H spazio di Hilbert, la nozione di operatore aggiunto va precisata, in accordo con quanto esposto negli esercizi 8.2.4 e 8.2.5. Indichiamo con $j : H \to H^*$ l'isomorfismo canonico fornito dal teorema di Riesz-Fréchèt, tale che

$$\varphi x = (x, j^{-1}\varphi)_H \qquad \forall x \in H, \quad \forall \varphi \in H^*.$$

Se $A \in \mathcal{L}(H)$, per la proposizione 10.4.2 si ha $A^* \in \mathcal{L}(H^*)$ e risulta

$$(x, j^{-1}(A^*\varphi))_H = A^*\varphi(x) = \varphi(Ax) = (Ax, j^{-1}\varphi)_H \qquad \forall x \in H, \quad \forall \varphi \in H^*,$$

ossia, posto $y = j^{-1}\varphi$,

$$(x, (j^{-1}A^*j)y)_H = (Ax, y)_H \qquad \forall x, y \in H.$$

Nel caso di operatori $A \in \mathcal{L}(H)$ è consuetudine identificare l'operatore aggiunto $A^* \in \mathcal{L}(H^*)$ con l'operatore $j^{-1}A^*j \in \mathcal{L}(H)$. Nel seguito indicheremo senz'altro con A^*, nel caso Hilbertiano, l'operatore $j^{-1}A^*j$; quindi A^* sarà un elemento di $\mathcal{L}(H)$ e sarà caratterizzato dalla relazione

$$(x, A^*y)_H = (Ax, y)_H \qquad \forall x, y \in H.$$

È necessario però osservare che, con questa identificazione, l'applicazione di $\mathcal{L}(H)$ in sé, definita da $A \mapsto A^*$, è *antilineare*, ossia risulta

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \quad (\alpha A)^* = \overline{\alpha}A^* \qquad \forall A, B \in \mathcal{L}(H), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

in contrasto con la proposizione 10.4.3: questo fatto è conseguenza dell'antilinearità dell'isomorfismo canonico j (osservazione 8.2.2).

autoagg **Definizione 10.4.5** *Sia H uno spazio di Hilbert. Un operatore $A : D(A) \subseteq H \to H$, con dominio $D(A)$ denso in H, si dice* autoaggiunto *se si ha $D(A^*) = D(A)$ e $A^* = A$ (nel senso dell'osservazione 10.4.4), ossia se*

$$(Ax, y)_H = (x, Ay)_H \qquad \forall x \in D(A), \quad \forall y \in D(A^*) = D(A).$$

dopoaagg **Esempi 10.4.6 (1)** Sia $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ un operatore lineare: allora, scelte su $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$ le basi canoniche, A si rappresenta con una matrice $\{a_{ij}\}$ $m \times n$. L'aggiunto A^* si rappresenta con la matrice trasposta coniugata $\{\overline{a_{ji}}\}$. Infatti

$$z = Ax \qquad \Longleftrightarrow \qquad z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

da cui, posto $b_{ji} = \overline{a_{ij}}$,

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{m} z_i\overline{y_i} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\overline{y_i} = \sum_{j=1}^{n} x_j\overline{\sum_{i=1}^{m} \overline{a_{ij}}y_i} = \sum_{j=1}^{n} x_j\overline{\sum_{i=1}^{m} b_{ji}y_i} = (x, A^*y).$$

In particolare, A è autoaggiunto se e solo se $m = n$ e la matrice $\{a_{ij}\}$ è reale e simmetrica.

(2) Sia $H = L^2(a, b)$, sia $K \in L^2(\,]a, b[\times]a, b[\,)$ e consideriamo l'*operatore integrale* $A : H \to H$ definito (si veda l'esempio 9.1.8) da

$$Af(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)\,dy, \quad x \in]a, b[\,, \qquad \forall f \in H.$$

Allora si verifica facilmente che $A \in \mathcal{L}(H)$ e che

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|K\|_{L^2(\,]a,b[\,\times\,]a,b[\,)}.$$

Inoltre, utilizzando il teorema di Fubini,

$$\begin{aligned}(Af,g)_H &= \int_a^b \left[\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy\right]\overline{g(x)}\,dx = \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b K(x,y)\overline{g(x)}\,dx\right] f(y)\,dy = \\ &= \int_a^b f(y)\left[\overline{\int_a^b \overline{K(x,y)}g(x)\,dx}\right] dy = (f,A^*g)_H,\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$A^*g(y) = \int_a^b \overline{K(x,y)}g(x)\,dx, \quad y \in\,]a,b[\,, \qquad \forall g \in H.$$

In particolare, A è autoaggiunto se e solo se $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$.

unblinop **Osservazione 10.4.7** Tramite il lemma di Zorn è possibile costruire in ogni spazio di Banach X un operatore lineare non continuo, con dominio uguale a X. Per semplicità, ci limitiamo al caso di $X = \ell^2$ e consideriamo un fissato operatore lineare non limitato $A : D(A) \subset \ell^2 \to \ell^2$: per esempio, poniamo $(Ax)_n = nx_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in D(A)$, ove

$$D(A) = \left\{x \in \ell^2 : \ \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2|x_n|^2 < \infty\right\}.$$

Dato che $Ae_n = n\,e_n$ per ogni elemento e_n della base, è chiaro che A non è limitato. Sia adesso $\mathcal{E}$ l'insieme di tutte le estensioni di A, ossia di tutti gli operatori lineari $A' : D(A') \subseteq \ell^2 \to \ell^2$ tali che $D(A') \supseteq D(A)$ e $A'x = Ax$ per $x \in D(A)$. L'insieme $\mathcal{E}$ è non vuoto, poiché $A \in \mathcal{E}$, ed è parzialmente ordinato rispetto all'inclusione dei dominî. Inoltre, ogni catena totalmente ordinata in $\mathcal{E}$ ha un elemento massimale, definito sull'unione dei dominî degli elementi della catena. Quindi, per il lemma di Zorn esiste in $\mathcal{E}$ un elemento massimale A^m. Se fosse $\ell^2 \setminus D(A^m) \neq \emptyset$, scelto $v \in D(A^m)^c$ potremmo definire un'estensione A' di A^m su $D(A') = \{x + tv : \ x \in D(A^m),\ t \in \mathbb{C}\}$, ponendo ad esempio $A'(x + tv) = A^m x$ per ogni $x + tv \in D(A')$. Ma ciò contraddice la massimalità di A^m, e pertanto $D(A^m) = \ell^2$.

Esercizi 10.4

agg1 1. Determinare A^*, essendo $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ definito da $(Ax)_n = x_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

calcolA* 2. Fissata $\alpha \in \ell^\infty$, sia $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ definito da $(Ax)_n = \alpha_n x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Determinare A^* e verificare che:

   (i) $AA^* = A^*A$;

(ii) A è autoaggiunto se e solo se $\alpha_n \in \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(iii) $AA^* = A^*A = I$ se e solo se $|a_n| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

calcolB* 3. Dato l'operatore $B \in \mathcal{L}(\ell^2)$, definito da $(Bx)_0 = 0$ e $(Bx)_n = x_{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, si determini B^* e si verifichi che $B^*B = I$ mentre $BB^* \neq I$.

permutind 4. Sia $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ un'applicazione bigettiva e si consideri l'operatore $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ definito da $(Ax)_n = x_{i(n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si provi che $A^*A = AA^*$. L'operatore A è autoaggiunto?

autoachiu 5. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A : D(A) \subseteq H \to H$ lineare e autoaggiunto con dominio denso in H. Si provi che A è un operatore chiuso (corollario 10.3.3), e che se $D(A) = H$ allora A è continuo.

agg2 6. Siano X, Y spazi di Banach e sia $A : D(A) \subseteq X \to Y$ lineare e iniettivo, con dominio $D(A)$ denso in X e immagine $R(A)$ densa in Y. Si provi che $(A^*)^{-1}$ esiste e coincide con $(A^{-1})^*$. Si provi anche che A^{-1} è continuo se e solo se $(A^*)^{-1}$ è continuo.

aggchiuso 7. Siano X, Y spazi di Banach e sia $A : D(A) \subseteq X \to Y$ un operatore lineare con dominio denso. Si provi che $A^* : D(A^*) \subseteq Y^* \to X^*$ è chiuso.

aggcompos 8. Siano H, U spazi di Hilbert, e siano $S : D(S) \subseteq H \to U$, $T : D(T) \subseteq U \to H$ due operatori lineari, con $D(S)$ denso in H e $D(T)$ denso in U. Si provi che:

(i) $D(T^*S^*) \subseteq D((ST)^*)$ e $T^*S^*x = (ST)^*x$ per ogni $x \in D(T^*S^*)$;

(i)i se $S \in \mathcal{L}(H, U)$, allora $D(T^*S^*) = D((ST)^*)$ e $T^*S^*y = (ST)^*y$ per ogni $y \in D((ST)^*)$.

[**Traccia:** per (i), si consideri il prodotto scalare $(Tz, S^*x)_H$ quando $z \in D(T)$ e $x \in D(T^*S^*)$, e lo si manipoli opportunamente; per (ii), si faccia lo stesso quando $z \in D(ST)$ e $x \in D((ST)^*)$...]

norA<norK 9. Sia $K(x, y) = 1 + \frac{1}{2}e^{2\pi i(x-y)}$, $x, y \in [0, 1]$, e sia A l'operatore dell'esempio 10.4.6 (2) in $L^2(0, 1)$. Si provi che

$$\|A\|_{\mathcal{L}(L^2(0,1))} < \|K\|_{L^2(\,]0,1[\,\times\,]0,1[\,)}\,.$$

[**Traccia:** per valutare $\|Af\|_{L^2(0,1)}$ si utilizzi l'uguaglianza di Bessel per il sistema $\{e^{2\pi ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$.]

aggtraFou 10. Si calcoli l'aggiunto della trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^N)$.

T*inv 11. Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$ tale che T sia surgettivo. Si provi che $R(T^*)$ è chiuso, che T^* è invertibile e che $(T^*)^{-1} \in \mathcal{L}(R(T^*), X)$.

isombig 12. Siano X, Y spazi di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ un'isometria bigettiva; si provi che $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ è un'isometria bigettiva.

iAautoa 13. Sia H uno spazio di Hilbert complesso e sia $A \in \mathcal{L}(H)$. Supponiamo che il gruppo $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}}$, definito nell'esercizio 7.3.20, verifichi $e^{tA^*} = e^{-tA}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si provi che allora iA è autoaggiunto in H.

10.5 Riflessività

rifle

Introduciamo ora una nozione, quella di riflessività, che pur essendo di natura algebrica, condiziona fortemente la geometria dello spazio: infatti, fra tutti gli spazi di Banach, quelli riflessivi sono i più vicini, per ricchezza di proprietà, agli spazi di Hilbert.
Sia dunque X uno spazio di Banach, sia X^* il suo duale, e sia $X^{**} = (X^*)^*$ il duale del duale, o *biduale* di X. Vi è una immersione naturale di X nel suo biduale X^{**}, che indichiamo con J e che è così definita: ad ogni $x \in X$ associamo il funzionale $J_x \in X^{**}$ che agisce su X^* nel modo seguente:

$$J_x(T) = Tx \qquad \forall T \in X^*.$$

L'applicazione $J : X \to X^{**}$ è chiaramente lineare, perché per ogni $x, x' \in X$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (oppure $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$) si ha

$$J_{\lambda x+\mu x'}(T) = T(\lambda x + \mu x') = \lambda Tx + \mu Tx' = \lambda J_x(T) + \mu J_{x'}(T) \quad \forall T \in X^*.$$

Inoltre J è continua, poiché per ogni $x \in X$ risulta

$$|J_x(T)| = |Tx| \le \|T\|_{X^*}\|x\|_X \qquad \forall T \in X^*,$$

da cui $\|J_x\|_{X^{**}} \le \|x\|_X$; ma scegliendo, grazie al corollario 10.1.5, un elemento $T_0 \in X^*$ tale che $\|T_0\|_{X^*} = 1$ e $T_0 x = \|x\|_X$, si trova

$$|J_x(T_0)| = |T_0 x| = \|x\|_X = \|T_0\|_{X^*}\|x\|_X,$$

e dunque

$$\|J_x\|_{X^{**}} = \|x\|_X \qquad \forall x \in X.$$

Pertanto l'applicazione J è un'isometria fra X e la sua immagine $J(X) \subseteq X^{**}$. Essa si chiama *immersione canonica* di X in X^{**}. L'immagine $J(X)$ è un sottospazio chiuso di X^{**} (esercizio 10.5.1), in generale strettamente contenuto in X^{**}.

rif **Definizione 10.5.1** *Diciamo che lo spazio di Banach X è* riflessivo *se risulta $J(X) = X^{**}$, ossia l'immersione canonica J è surgettiva.*

Nelle proposizioni che seguono illustriamo alcune proprietà degli spazi riflessivi.

rifX* **Proposizione 10.5.2** *Sia X uno spazio di Banach; allora X è riflessivo se e solo se X^* è riflessivo.*

Dimostrazione Sia X^* riflessivo. Se, per assurdo, esistesse $\alpha \in X^{**} \setminus J(X)$, osservando che $J(X)$ è chiuso, per il corollario 10.1.5 potremmo trovare un elemento $\Lambda \in X^{***}$ tale

che $\Lambda|_{J(X)} = 0$ e $\Lambda(\alpha) \neq 0$. Per la riflessività di X^*, si avrebbe $\Lambda = J^*_F$ con $F \in X^*$ (ove J^* è l'immersione canonica di X^* in X^{***}); tale F verificherebbe per ogni $y \in X$

$$Fy = J_y F = J^*_F J_y = \Lambda J_y = 0,$$

ossia avremmo $F = 0$, il che però è assurdo essendo $J^*_F = \Lambda \neq 0$.
Sia ora X riflessivo. Allora ogni $\alpha \in X^{**}$ è della forma $\alpha = J_x$ con $x \in X$, da cui $J^*_F(\alpha) = \alpha(F) = J_x(F) = Fx$ per ogni $F \in X^*$; quindi, dato $\Lambda \in X^{***}$, l'operatore $\Lambda \circ J$ è un elemento di X^* e risulta per ogni $\beta = J_y \in X^{**}$

$$\Lambda\beta = \Lambda(J_y) = (\Lambda \circ J)y = J_y(\Lambda \circ J) = \beta(\Lambda \circ J) = J^*_{\Lambda\circ J}\beta,$$

ossia $\Lambda = J^*_{\Lambda\circ J} \in J^*(X^*)$. Ciò prova che X^* è riflessivo. □

rifsottosp **Proposizione 10.5.3** *Sia M un sottospazio chiuso dello spazio di Banach X; se X è riflessivo, allora M è riflessivo.*

Dimostrazione Ovviamente, $(M, \|\cdot\|_X)$ è uno spazio di Banach. Se $\alpha \in M^{**}$, detta F_r la restrizione a M di un arbitrario funzionale $F \in X^*$, si vede subito che $F \mapsto \alpha(F_r)$ è un elemento $\beta \in X^{**}$. Sia x l'elemento di X tale che $J_x = \beta$; supponendo per assurdo che $x \notin M$, per il corollario 10.1.5 troveremmo un funzionale $G \in X^*$ tale che $Gx \neq 0$ e $G_r = 0$. Ma allora avremmo

$$0 = \alpha(G_r) = \beta G = J_x(G) = Gx \neq 0,$$

e ciò è impossibile. Dunque si ha $x \in M$. Per ogni $F \in M^*$, detta J^M l'immersione canonica di M in M^{**} e detta $\overline{F}$ una qualunque estensione di F a tutto X, si ha allora

$$\alpha(F) = \alpha(\overline{F}_r) = \beta(\overline{F}) = J_x(\overline{F}) = \overline{F}x = \overline{F}_r x = Fx = J^M_x F,$$

ossia $\alpha = J^M_x$. Ciò mostra che M è riflessivo. □

findimrif **Proposizione 10.5.4** *Se lo spazio di Banach X ha dimensione finita, allora X è riflessivo.*

Dimostrazione Sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base per X, sia $\{f^1, \ldots, f^n\}$ la *base duale* di X^* (cioè quella tale che $f^i(e_j) = \delta_{ij}$), e sia $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ la base di X^{**} tale che $\alpha_k(f^i) = \delta_{ki}$. Si ha allora per ogni $F = \sum_{h=1}^n c_h f^h \in X^*$

$$J_{e_i}(F) = F(e_i) = \sum_{h=1}^n c_h f^h(e_i) = c_i, \qquad \alpha_i(F) = \sum_{h=1}^n c_h \alpha_i(f^h) = c_i.$$

Dunque $\alpha_i = J_{e_i}$ e di conseguenza se $\alpha = \sum_{h=1}^n b_h \alpha_h$ è un elemento di X^{**}, posto $x = \sum_{h=1}^n b_h e_h$ si ha $\alpha = J_x$. Pertanto X è riflessivo. □

Vediamo qualche esempio.

tantirifle **Esempi 10.5.5 (1)** Ogni spazio di Hilbert H è riflessivo. Infatti, sia $\alpha \in H^{**}$ e consideriamo l'isomorfismo antilineare $j : H \to H^*$ fornito dal teorema di Riesz-Fréchèt, che ad ogni $z \in H$ associa il funzionale $j_z \in H^*$ definito da $j_z(x) = (x, z)_H$ per ogni $x \in H$; allora il funzionale $x \mapsto \overline{\alpha \circ j}(x)$ è lineare, dunque è un elemento di H^*, e sarà pertanto della forma $\overline{\alpha \circ j} = j_u$ per uno ed un solo $u \in H$, che dipenderà da α. Quindi si ha

$$\overline{\alpha(j_x)} = \overline{\alpha \circ j}(x) = j_u(x) = (x, u)_H \qquad \forall x \in H.$$

Sia adesso T un arbitrario elemento di H^*, quindi $T = j_z$ con $z \in H$: si ha, per definizione di immersione canonica J,

$$\alpha(T) = \alpha(j_z) = \overline{(z, u)_H} = (u, z)_H = j_z(u) = Tu = J_u(T),$$

e pertanto $\alpha = J_u$. Ciò prova che $J : H \to H^{**}$ è surgettiva.

(2) Se $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è uno spazio misurato σ-finito, allora $L^p(X, \mathbb{C})$ è riflessivo per ogni $p \in]1, \infty[$. Per provare questo fatto, detto $q \in]1, \infty[$ l'esponente coniugato di p, è utile introdurre l'isometria bigettiva lineare $i_q : L^q \to (L^p)^*$ indotta dal teorema di Riesz-Fischer nel caso complesso, a norma dell'esercizio 9.2.1: essa è definita dalla relazione

$$[i_q f](g) = \int_X g\,\overline{f}\,d\mu \qquad \forall g \in L^p.$$

Si noti che tale isometria è antilineare, esattamente come l'isometria fra uno spazio di Hilbert e il suo duale, utilizzata nell'esempio precedente. Sia dunque $\alpha \in (L^p)^{**}$: proveremo che esiste una funzione $a \in L^p$ (necessariamente unica, essendo l'immersione canonica J un'isometria) tale che $J_a = \alpha$. Dimostreremo che la funzione a è precisamente data da $a = i_p^{-1}(\alpha \circ i_q)$. Si noti che $\alpha \circ i_q$ è un elemento di $(L^q)^*$ in virtù della relazione

$$|\alpha(i_q f)| \leq \|\alpha\|_{(L^p)^{**}} \|i_q f\|_{(L^p)^*} = \|\alpha\|_{(L^p)^{**}} \|f\|_q \quad \forall f \in L^q;$$

dunque, come è giusto, $a = i_p^{-1}(\alpha \circ i_q)$ è un elemento di L^p. Sia $F \in (L^p)^*$ e sia f l'unico elemento di L^q per cui $F = i_q f$: si ha allora, dalle definizioni di i_p ed i_q,

$$J_a(F) = F(a) = \int_X f\,\overline{a}\,d\mu = (i_p a)(f) = (\alpha \circ i_q)(f) = \alpha(F).$$

Pertanto $\alpha = J_a$ e ciò prova che $J : L^p \to (L^p)^{**}$ è surgettivo, ossia L^p è riflessivo. Si noti che, indicando con J^p e J^q le immersioni canoniche di L^p ed L^q (ove naturalmente $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) nei rispettivi biduali, si ha

$$J^p_f(i_q g) = (i_q g)(f) = \int_X f\,\overline{g}\,d\mu = \overline{\int_X g\,\overline{f}\,d\mu} = \overline{(i_p f)(g)} = \overline{J^q_g(i_p f)} \quad \forall f \in L^p, \quad \forall g \in L^q.$$

(3) Lo spazio L^1 (limitandoci al caso di funzioni reali) non è riflessivo in generale. Ad esempio, sappiamo dal teorema di Riesz-Fischer che il duale di $L^1(a, b)$ è isomorfo ed isometrico a $L^\infty(a, b)$ mediante l'applicazione i_∞ che ad ogni $f \in L^\infty(a, b)$ associa il

funzionale $[i_\infty f](g) = \int_a^b g(t)f(t)\,dt$ per ogni $g \in L^1(a,b)$; quindi, detta $J^1 : L^1(a,b) \to (L^1(a,b))^{**}$ l'immersione canonica, l'immagine di J^1 in $(L^1(a,b))^{**}$ è

$$J^1(L^1(a,b)) = \Big\{ \alpha \in (L^1(a,b))^{**} : \\ \exists h \in L^1(a,b) : \alpha(i_\infty f) = \int_a^b f(t)\,h(t)\,dt \ \ \forall f \in L^\infty(a,b) \Big\}.$$

Ma se consideriamo una qualunque estensione $\overline{\Lambda}$ a $L^\infty(a,b)$ del funzionale

$$\Lambda f = f(a) \qquad \forall f \in C[a,b],$$

allora $\overline{\Lambda} \circ i_\infty^{-1}$ è un elemento di $(L^1(a,b))^{**}$ che non può stare in $J^1(L^1(a,b))$: infatti in tal caso otterremmo, per ogni $F = i_\infty f \in (L^1(a,b))^*$, ossia per ogni $f \in L^\infty(a,b)$,

$$\overline{\Lambda} \circ i_\infty^{-1}(F) = \overline{\Lambda} f = \int_a^b f(t)\,h(t)\,dt$$

per un'opportuna $h \in L^1(a,b)$, il che, come sappiamo dal corollario 10.1.7, è impossibile.

Come vedremo nei prossimi paragrafi, gli spazi riflessivi sono importanti perché in essi gli insiemi limitati e chiusi sono "debolmente compatti" in un senso che preciseremo (teorema 10.7.6): questo consente di ottenere, in svariati problemi applicativi, risultati di esistenza di soluzioni (ma non sempre di unicità).

Esercizi 10.5

imJch 1. Sia X uno spazio di Banach; si provi che $J(X)$ è un sottospazio chiuso di X^{**}.

A*limAlim 2. Siano X e Y spazi di Banach e sia $A : D(A) \subseteq X \to Y$ un operatore lineare con dominio denso. Si provi che se $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$, allora $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Linftynorif 3. Si provi che $L^\infty(a,b)$ e $L^\infty(\mathbb{R})$ non sono riflessivi.

linftynorif 4. Si provi che ℓ^1 e ℓ^∞ non sono riflessivi.

diacom 5. Siano X, Y spazi di Banach, sia $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dette J, J' le immersioni canoniche di X in X^{**} e di Y in Y^{**} rispettivamente, si verifichi che $T^{**} \circ J = J' \circ T$, ove $T^{**} = (T^*)^* : X^{**} \to Y^{**}$ è l'aggiunto dell'operatore $T^* : Y^* \to X^*$, a sua volta aggiunto di T.

carattR(T*) 6. Siano X, Y spazi di Banach con X riflessivo. Se $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, si provi che

$$\overline{R(T^*)} = \{F \in X^* : F|_{\ker T} = 0\}.$$

[**Traccia:** per provare l'inclusione $\supseteq$, si ragioni per assurdo: se $F|_{\ker T} = 0$ e $F \notin \overline{R(T^*)}$, si trovi $\alpha \in X^{**}$ tale che $\alpha(F) > 0$ e $\alpha|_{\overline{R(T^*)}} = 0$; se $x \in X$ è tale che $J_x = \alpha$, si deduca che $G(Tx) = 0$ per ogni $G \in Y^*$ e si ricavi l'assurdo.]

ranker 7. Siano X, Y spazi di Banach. Se $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $R(T)$ è chiuso in Y, si provi che

$$R(T^*) = \{F \in X^* : F|_{\ker T} = 0\}.$$

[**Traccia:** per provare l'inclusione $\supseteq$, si osservi che se $F \in X^* \setminus \{0\}$ e $F|_{\ker T} = 0$, allora ha senso definire $G(y) = F(x)$ per ogni $y \in R(T)$, ove $x \in T^{-1}(\{y\})$ è scelto ad arbitrio. Si verifichi che G è bigettiva e si usi l'esercizio 10.3.2 per provare che G^{-1} è continua. Si deduca poi che $G \in Y^*$ e $F = T^*G$.]

surgrif 8. Siano X, Y spazi di Banach; se X è riflessivo ed esiste un operatore $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ surgettivo, si provi che anche Y è riflessivo.
[**Traccia:** per l'esercizio 10.4.11 si ha $\ker T^* = \{0\}$ e $R(T^*)$ chiuso; se ne deduca, per l'esercizio 10.5.7, che $R(T^{**}) = \{\alpha \in X^{**} : \alpha|_{\ker T^*} = 0\} = X^{**}$, e quindi che T^{**} è surgettivo. Dall'esercizio 10.5.5 si ricavi che Y è riflessivo.]

spsep 9. Si provi che uno spazio normato X è separabile se e solo se si ha $X = \overline{[\{x_n\}]}$, ove $\{x_n\}$ è un'opportuna successione di elementi di X.

sepsep 10. Sia X uno spazio di Banach. Si provi che:

(i) se X^* è separabile, allora anche X è separabile, ma che il viceversa è falso;

(ii) se X è separabile e riflessivo, allora anche X^* è separabile e riflessivo.

[**Traccia:** per (i), se $X^* = \overline{\{F_n\}}$, si scelga $x_n \in X$ tale che $\|x_n\|_X = 1$ e $F_n(x_n) \geq \frac{1}{2}\|F_n\|_{X^*}$; posto $M = \overline{[\{x_n\}]}$, si dimostri che $M = X$ ragionando per assurdo: se esistesse $x_0 \in X \setminus M$, utilizzando il corollario 10.1.6 si costruisca un elemento $F \in X^*$ "lontano" da tutti gli F_n e si deduca il risultato. Per (ii), si provi che se $X = \overline{[\{x_n\}]}$ allora $X^{**} = \overline{[\{J_{x_n}\}]}$, e quindi X^{**} è separabile.]

prorif 11. Se X e Y sono spazi riflessivi, si provi che $X \times Y$ è riflessivo.
[**Traccia:** si utilizzi l'esercizio 7.3.10.]

kerJ*=0 12. Sia X uno spazio di Banach. Si provi che X è riflessivo se e solo se risulta $\ker J^* = \{0\}$, ove $J^* : X^{***} \to X^*$ è l'aggiunto dell'immersione canonica $J : X \to X^{**}$.

starmenouno 13. Sia X uno spazio di Banach riflessivo e sia $A \in \mathcal{L}(X)$. Si provi che se esiste $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*)$, allora esiste $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ e $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

maxpalla 14. Si provi che se X è uno spazio di Banach riflessivo, ogni funzionale $F \in X^*$ assume massimo sulla palla unitaria chiusa di X.

c0rifno 15. Si provi che c_0 non è riflessivo.
[**Traccia:** si utilizzino gli esercizi 7.3.12 e 10.5.14.]

Cnonrif 16. Si provi che $M = \{f \in C[a,b] : f(a) = 0\}$ non è riflessivo, e se ne deduca che $C[a,b]$ non è riflessivo.
[**Traccia:** si consideri il funzionale

$$Fg = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, g\left(a + \frac{b-a}{n+1}\right), \qquad f \in M,$$

e si utilizzi l'esercizio 10.5.14.]

10.6 Convergenze deboli e topologie deboli

convdeb

Negli spazi normati vi è un altro tipo di convergenza, più debole di quella rispetto alla norma e dunque più facile da ottenere, che è molto utile nelle applicazioni.

deb **Definizione 10.6.1** *Sia X uno spazio normato e sia $\{x_n\}$ una successione contenuta in X. Diciamo che $\{x_n\}$* converge debolmente *ad un elemento $x \in X$ se si ha $Fx_n \to Fx$ in $\mathbb{R}$ per ogni funzionale $F \in X^*$; in tal caso scriviamo $x_n \rightharpoonup x$.*

Osserviamo che la convergenza debole, ovviamente, è più debole della convergenza rispetto alla norma: infatti se $x_n \to x$ in X, allora

$$|Fx_n - Fx| \leq \|F\|_{X^*}\|x_n - x\|_X \to 0 \qquad \forall F \in X^*,$$

e quindi $x_n \rightharpoonup x$ in X.
Altrettanto ovviamente, se $x_n \rightharpoonup x$ in X non è detto che $x_n \to x$. Ad esempio, ogni sistema ortonormale numerabile $\{e_n\}$ in uno spazio di Hilbert H converge debolmente all'elemento $0 \in H$: per verificarlo, ricordando il teorema di Riesz-Fréchèt, basta osservare che

$$\lim_{n\to\infty} (e_n, z)_H = 0 \qquad \forall z \in H$$

in virtù della disuguaglianza di Bessel (proposizione 8.3.6). D'altra parte non può essere $e_n \to 0$ dato che $\|e_n\|_H = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Si può facilmente verificare (esercizio 10.6.20) che se X ha dimensione finita allora la convergenza debole è equivalente a quella forte (cioè a quella rispetto alla norma di X). Si noti che questa asserzione non si può invertire, come mostra l'esercizio 10.6.21.
La seguente proprietà della convergenza debole è di uso assai frequente.

convdeblim **Proposizione 10.6.2** *Sia X uno spazio normato. Se $x_n \rightharpoonup x$ in X, allora $\{x_n\}$ è limitata in X e*

$$\|x\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X.$$

Dimostrazione Sia $J : X \to X^{**}$ l'immersione canonica. Per ipotesi si ha

$$\lim_{n\to\infty} J_{x_n}(F) = \lim_{n\to\infty} Fx_n = Fx \qquad \forall F \in X^*;$$

quindi

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |J_{x_n}(F)| < \infty \qquad \forall F \in X^*.$$

Per il teorema di Banach-Steinhaus, applicato agli spazi X^* e $\mathbb{C}$, si ottiene

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|J_{x_n}\|_{X^{**}} < \infty,$$

e ricordando che J è un'isometria, otteniamo la limitatezza in X della successione $\{x_n\}$. Inoltre, per ogni $F \in X^*$ si ha

$$|Fx| = \lim_{n\to\infty} |Fx_n| \le \liminf_{n\to\infty} \|F\|_{X^*}\|x_n\|_X,$$

da cui

$$\|x\|_X = \|J_x\|_{X^{**}} = \sup_{F\in X^*\setminus\{0\}} \frac{|Fx|}{\|F\|_{X^*}} \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X\,. \quad \square$$

Nello spazio duale X^* vi è un altro tipo di convergenza, ancora più debole.

deb* **Definizione 10.6.3** *Sia X uno spazio normato e sia $\{F_n\}$ una successione contenuta in X^*. Diciamo che F_n* converge debolmente* *in X^* (e leggiamo "debolmente star") ad un elemento $F \in X^*$ se si ha $F_n x \to Fx$ in $\mathbb{C}$ per ogni $x \in X$. In tal caso scriviamo $F_n \overset{*}{\rightharpoonup} F$.*

La convergenza debole* è dunque semplicemente la convergenza puntuale per funzionali lineari definiti su X. Si noti che in X^* si hanno entrambi i tipi di convergenza debole:

$$F_n \rightharpoonup F \text{ in } X^* \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha(F_n) \to \alpha(F) \quad \forall \alpha \in X^{**},$$

$$F_n \overset{*}{\rightharpoonup} F \text{ in } X^* \quad \Longleftrightarrow \quad F_n x \to Fx \quad \forall x \in X.$$

Per successioni di operatori tra spazi normati i vari tipi di convergenza hanno denominazioni lievemente diverse:

convL(X,Y) **Definizione 10.6.4** *Siano X, Y spazi di Banach. Diciamo che una successione $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$:*

(i) *converge uniformemente ad $A \in \mathcal{L}(X)$ se $\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0$;*

(ii) *converge fortemente ad A se $\|(A_n - A)x\|_X \to 0$ per ogni $x \in X$;*

(iii) *converge debolmente ad A se $(A_n - A)x \rightharpoonup 0$ per ogni $x \in X$.*

Negli esercizi 10.6.6 e 10.6.7 si descrivono alcune proprietà di tali convergenze e si forniscono alcuni esempi.
È facile verificare che la convergenza debole in X^* implica la convergenza debole* in X^*, mentre il viceversa è falso in generale, come vedremo nel prossimo esempio; le due convergenze deboli in X^* coincidono nel caso che X sia uno spazio di Banach riflessivo.

esecd **Esempi 10.6.5 (1)** La successione $\{e_n\}$ (ove $e_n = \{0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots\}$ con 1 al posto n-simo) converge debolmente* a 0 in ℓ^∞, che, ricordiamo, è isomorfo a $(\ell^1)^*$. Infatti, detto $i : \ell^\infty \to (\ell^1)^*$ tale isomorfismo, per ogni $x \in \ell^1$ si ha

$$[i(e_n)]x = \sum_{k=0}^{\infty} (e_n)_k\, x_k = x_n \to 0 \qquad \text{per} \quad n \to \infty.$$

Inoltre, $e_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ in ℓ^1, che è lo spazio duale di c_0: infatti, detto $j : l^1 \to (c_0)^*$ il corrispondente isomorfismo, si ha

$$[j(e_n)]\, x = \sum_{n=0}^{\infty} (e_n)_k\, x_k = x_n \to 0 \qquad \forall x \in c_0\,.$$

D'altra parte $e_n \not\to 0$ in ℓ^1 perché, scelto l'elemento $\mathbf{1} = \{1, 1, 1, \ldots\} \in \ell^\infty$, risulta

$$[i(\mathbf{1})]\, e_n = (e_n)_n = 1 \not\to 0.$$

(2) Più in generale, come abbiamo visto, dato un qualunque sistema ortonormale numerabile $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in uno spazio con prodotto scalare H, la successione $\{e_n\}$ converge debolmente a 0 grazie alla disuguaglianza di Bessel (proposizione 8.3.6).

La convergenza debole di una successione è la convergenza di essa rispetto a una particolare topologia: la "topologia debole", i cui intorni sono insiemi limitati solo in un numero finito di direzioni.

topdeb **Definizione 10.6.6** *Sia X uno spazio normato. La* topologia debole w *su X è la topologia meno fine tra quelle che rendono continui tutti i funzionali $\varphi \in X^*$.*

Dunque, gli insiemi della famiglia $\{\varphi^{-1}(A) :\ \varphi \in X^*,\ A \subseteq \mathbb{C}$ aperto$\}$ sono aperti in w, e lo stesso vale per la classe $\mathcal{B}$ di tutte le intersezioni finite di elementi di tale famiglia. La classe $\mathcal{B}$ costituisce una base di aperti per la topologia w (esercizio 10.6.1); gli aperti di w sono dunque unioni di elementi di $\mathcal{B}$. È facile verificare (esercizio 10.6.2) che la famiglia di insiemi

$$U_{\varphi_1,\ldots,\varphi_N,\varepsilon} = \{z \in X :\ |\varphi_i z| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, N\},$$

al variare di $N \in \mathbb{N}^+$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_N \in X^*$, $\varepsilon > 0$, è un sistema fondamentale di intorni di $0 \in X$ nella topologia w. È poi evidente, dato che X è uno spazio vettoriale, che gli intorni di un punto qualunque $x_0 \in X$ sono

$$\{z \in X :\ |\varphi_i z - \varphi x_0| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, N\} = x_0 + U_{\varphi_1,\ldots,\varphi_N,\varepsilon}\,.$$

Inoltre, una successione $\{x_n\} \subset X$ converge a x nella topologia w se e solo se $x_n \rightharpoonup x$ in X (esercizio 10.6.3).
La topologia debole w si denota anche con la scrittura $\sigma(X, X^*)$. Le sue principali proprietà son espresse dalla proposizione seguente.

propw **Proposizione 10.6.7** *Sia w la topologia debole sullo spazio normato X. Allora:*

(i) *(X, w) è uno spazio topologico di Hausdorff;*

(ii) *se* $\dim X = \infty$*, lo spazio topologico (X, w) non è metrizzabile.*

Dimostrazione (i) Se $x, x' \in X$ con $x \neq x'$, per il teorema di Hahn-Banach esiste $\varphi \in X^*$ tale che $\varphi x \neq \varphi x'$. Scelto $\varepsilon > 0$ tale che $2\varepsilon < |\varphi x - \varphi x'|$, se esistesse $z \in (x + U_{\varphi,\varepsilon}) \cap (x' + U_{\varphi,\varepsilon})$, avremmo $|\varphi(z-x)| < \varepsilon$ e $|\varphi(z-x')| < \varepsilon$, da cui $|\varphi(x-x')| < 2\varepsilon$; assurdo. Dunque gli intorni $x + U_{\varphi,\varepsilon}$ e $x' + U_{\varphi,\varepsilon}$ sono disgiunti.

(ii) Supponiamo che la topologia debole w sia indotta da una distanza d: allora per ogni $r > 0$ l'insieme $B_r(0) = \{x \in X : \ d(x, 0) < r\}$ sarebbe aperto in w; quindi, scelto $r = \frac{1}{n}$, esisterebbe $U_n = U_{\varphi_1,\dots,\varphi_{k_n},\varepsilon_n} \subseteq B_{1/n}(0)$. Sia $x_n \in \left[\bigcap_{i=1}^{k_n} \ker \varphi_i\right] \setminus \{0\}$: tale punto x_n esiste, altrimenti l'applicazione $Lx = (\varphi_1 x, \dots, \varphi_{k_n} x) : X \to \mathbb{C}^{k_n}$ sarebbe iniettiva, il che è assurdo dato che $\dim X = \infty$. Per linearità possiamo supporre che la successione $\{x_n\} \subseteq X$ verifichi $\|x_n\|_X > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Ma essendo $x_n \in \left[\bigcap_{i=1}^{k_n} \ker \varphi_i\right] \subseteq U_n \subseteq B_{1/n}(0)$, si ha $d(x_n, 0) < \frac{1}{n}$, e poiché w è indotta da d, si ottiene $x_n \to 0$ in w, ossia, per quanto osservato poco fa, $x_n \rightharpoonup 0$ in X. Dalla proposizione 10.6.2 segue allora che $\{x_n\}$ è limitata, il che contraddice la condizione $\|x_n\|_X > n$. $\square$

Osservazione 10.6.8 Nello spazio di Banach ℓ^1 la convergenza debole equivale a quella forte (esercizio 10.6.21). Tuttavia la topologia debole e la topologia indotta dalla norma sono distinte, poiché la prima non è metrizzabile per la proposizione precedente, mentre la seconda ovviamente lo è.

Anche la convergenza debole* di una successione negli spazi duali è equivalente alla convergenza di essa in una certa topologia: la "topologia debole*".

topdeb*

Definizione 10.6.9 *Sia X^* il duale dello spazio normato X. La* topologia debole* *w^* su X^* è la topologia che ha come sistema fondamentale di intorni di 0 gli insiemi*

$$U_{x_1,\dots,x_N,\varepsilon} = \{\varphi \in X^* : \ |\varphi x_i| < \varepsilon, \ i = 1, \dots, N\},$$

al variare di $N \in \mathbb{N}^+$, $x_1, \dots, x_N \in X^*$, $\varepsilon > 0$. Tale topologia si denota anche col simbolo $\sigma(X^*, X)$.

In particolare, su X^* possiamo considerare, oltre alla topologia indotta dalla norma ed alla topologia debole* $\sigma(X^*, X)$, anche la topologia debole definita in precedenza, ossia $\sigma(X^*, X^{**})$. Si noti che gli intorni di 0 nella topologia debole di X^* sono della forma

$$U_{\alpha_1,\dots,\alpha_N,\varepsilon} = \{\varphi \in X^* : \ |\alpha_i \varphi| < \varepsilon, \ i = 1, \dots, N\}.$$

Dato che l'immersione canonica $J : X \to X^{**}$ non è in generale surgettiva, gli intorni di $\sigma(X^*, X)$ sono intorni di $\sigma(X^*, X^{**})$, ma non vale il viceversa: dunque, in X^* la topologia debole* è meno fine della topologia debole. Se in particolare X è uno spazio di Banach riflessivo, allora le due topologie coincidono. Inoltre, una successione $\{\varphi_n\} \subset X^*$ converge nella topologia debole* se e solo se $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ in X^* (esercizio 10.6.3).

proppw*

Proposizione 10.6.10 *Sia w^* la topologia debole* sul duale X^* di uno spazio normato X. Allora:*

i) *w^* è la meno fine topologia su X^* che rende continui tutti i funzionali $J_x \in J(X)$;*

(ii) *(X^*, w^*) è uno spazio topologico di Hausdorff;*

(iii) *se $\dim X^* = \infty$, lo spazio topologico (X^*, w^*) non è metrizzabile.*

Dimostrazione (i) Sia $x \in X$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora risulta

$$|J_x F| = |Fx| < \varepsilon \qquad \forall F \in U_{x,\varepsilon}\,,$$

e pertanto J_x è continuo rispetto alla topologia w^*. Se poi τ è un'altra topologia che rende continui tutti i funzionali J_x, sia

$$U_{x_1,\dots,x_N,\varepsilon} = \{F \in X^* :\ |Fx_i| < \varepsilon,\ i = 1, \dots, N\}$$

un intorno di 0 nella topologia w^*. Dato che i funzionali $J_{x_1}, \dots, J_{x_n}$ sono continui rispetto a τ, esiste un intorno V nella topologia τ tale che

$$|J_{x_i} F| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, N, \qquad \forall F \in V,$$

e dunque $V \subseteq U_{x_1,\dots,x_N,\varepsilon}$. Ciò mostra che $U_{x_1,\dots,x_N,\varepsilon}$ è un intorno di 0 nella topologia τ, e pertanto τ è più fine di w.

(ii)-(iii) Basta ripetere, con le dovute modifiche, la dimostrazione della proposizione 10.6.7 (i)-(ii). □

Le convergenze e le topologie deboli sono importanti perché forniscono buoni teoremi di compattezza. Esamineremo alcuni risultati di questo tipo nel prossimo paragrafo.

Esercizi 10.6

basew

1. Sia X uno spazio normato. Si provi che la famiglia $\mathcal{B}$ delle intersezioni finite di insiemi della forma $\varphi^{-1}(A)$, con $\varphi \in X^*$ e $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto, è una base per la topologia debole w su X.

sfdi

2. Sia X uno spazio normato e sia $x \in X$. Si verifichi che la famiglia $\mathcal{U}_x$, i cui elementi sono gli insiemi

$$U_{\varphi_1,\dots,\varphi_N,\varepsilon} = \{z \in X :\ |\varphi_i(z - x)| < \varepsilon,\ 1 \le i \le N\}$$

al variare di $N \in \mathbb{N}^+$, $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in X^*$, $\varepsilon > 0$, è un sistema fondamentale di intorni di x per la topologia debole.

dew

3. Sia X uno spazio normato. Si verifichi che:

(i) se $\{x_n\} \subset X$, si ha $x_n \to x$ in $\sigma(X, X^*)$ se e solo se $x_n \rightharpoonup x$ in X;

(ii) se $\{\varphi_n\} \subset X^*$, si ha $\varphi_n \to \varphi$ in $\sigma(X^*, X)$ se e solo se $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ in X^*.

Badeco

4. Sia X uno spazio di Banach. Si provi che:

(i) X^* è debolmente* completo, ossia ogni successione di Cauchy rispetto alla convergenza debole* contenuta in X^* converge debolmente* ad un elemento di X^*;

(ii) se X è riflessivo, allora X è debolmente completo, cioè ogni successione di Cauchy rispetto alla convergenza debole contenuta in X converge debolmente ad un elemento di X.

c0decono 5. Si provi che lo spazio c_0 non è debolmente completo.

convop 6. Sia X uno spazio normato. Sia $\sigma : \mathcal{L}(X) \times \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$ la composizione $\sigma(A, B) = A \circ B$. Si provi che:

(i) $A \mapsto \sigma(A, B)$ e $B \mapsto \sigma(A, B)$ sono continue rispetto alla convergenza uniforme, forte e debole;

(ii) $(A, B) \mapsto \sigma(A, B)$ è continua rispetto alla convergenza uniforme;

(iii) Se A varia in un limitato di $\mathcal{L}(X)$, $(A, B) \mapsto \sigma(A, B)$ è continua rispetto alla convergenza forte, ma in generale non lo è;

(iv) $(A, B) \mapsto \sigma(A, B)$ non è continua (nemmeno sui limitati di $\mathcal{L}(X) \times \mathcal{L}(X)$) rispetto alla convergenza debole.

esconvop 7. Per $x \in \ell^2$ si definisca:

$$(Cx)_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 1 \\ x_{k-1} & \text{se } k > 1, \end{cases} \qquad C_n x = C^n x;$$

$$(U_n x)_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \le n \\ x_k & \text{se } k > n, \end{cases} \qquad (V_n x)_k = \begin{cases} k\, x_k & \text{se } k \le n \\ x_k & \text{se } k > n. \end{cases}$$

Si provi che:

(i) $U_n \to 0$ fortemente, ma non uniformemente;

(ii) V_n converge fortemente nello spazio c_{00}, ma l'operatore limite non è limitato su c_{00};

(iii) $C_n \to 0$ debolmente, ma non uniformemente né fortemente.

wLp 8. Sia $1 < p < \infty$. Se $\{f_n\} \subseteq L^p$, si provi che $f_n \rightharpoonup f$ in L^p se e solo se:

(i) $\{f_n\}$ è limitata in L^p,

(ii) $\int_E f_n \, d\mu \to \int_E f \, d\mu$ per ogni insieme misurabile E con $\mu(E) < \infty$.

L'enunciato è ancora vero per $p = \infty$?

wL1 9. Sia $\{f_n\} \subseteq L^1$. Se $f_n \rightharpoonup f$ in L^1, si provi che valgono (i) e (ii) del precedente esercizio, ma che il viceversa è falso se $\mu(X) = \infty$.

convchsw 10. Sia X uno spazio normato e sia M un sottoinsieme convesso di X. Si provi che M è chiuso in X se e solo se è debolmente chiuso.
[**Traccia:** si utilizzi l'esercizio 10.1.9.]

wlim1 11. Dimostrare che il limite debole, o debole*, è unico (se esiste).

w*lim 12. Si provi che se X è uno spazio di Banach e se $F_n \overset{*}{\rightharpoonup} F$ in X^*, allora $\{F_n\}$ è limitata in X^* e

$$\|F\|_{X^*} \leq \liminf_{n\to\infty} \|F_n\|_{X^*} \ .$$

proprw 13. Sia X uno spazio normato. Si provi che:

(i) se $x_n \rightharpoonup x$ in X e $F_n \to F$ in X^*, allora $F_n x_n \to Fx$ in $\mathbb{R}$;

(ii) se $x_n \to x$ in X e $F_n \overset{*}{\rightharpoonup} F$ in X^*, allora $F_n x_n \to Fx$ in $\mathbb{R}$;

(iii) se $x_n \rightharpoonup x$ in X e $F_n \overset{*}{\rightharpoonup} F$ oppure $F_n \rightharpoonup F$ in X^*, allora non è detto che si abbia $F_n x_n \to Fx$ in $\mathbb{R}$.

wlimcont 14. Siano X, Y spazi normati e sia $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Si provi che se $x_n \rightharpoonup x$ in X allora $Tx_n \rightharpoonup Tx$ in Y.

cdsccd 15. Sia X uno spazio normato e sia $K \subseteq X$. Si provi che la chiusura debole sequenziale di K è contenuta nella chiusura debole di K.

wnowseq 16. Sia $1 \leq p \leq \infty$. Si provi che l'insieme $E = \{e_m + me_n\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ non ha alcuna sottosuccessione che converga debolmente a 0 in ℓ^p; se ne deduca che la chiusura debole sequenziale di E in ℓ^p è strettamente contenuta nella chiusura debole di E in ℓ^p.

chwdebseq 17. Sia H uno spazio di Hilbert di dimensione infinita. Posto

$$S = \{x \in H : \ \|x\|_H = 1\}, \qquad B = \{x \in H : \ \|x\|_H \leq 1\},$$

si provi che la chiusura debole sequenziale di S coincide con B.

mapcontw* 18. Per $t \in [a,b]$ poniamo $F_t(g) = g(t)$ per ogni $g \in C[a,b]$. Si provi che $t \mapsto F_t$ è un'applicazione continua da $[a,b]$ in $((C[a,b])^*, w^*)$.

asoLinftyw* 19. Si provi che $C[a,b]$ è denso in $(L^\infty(a,b), w^*)$.

ws 20. Si provi che se X ha dimensione finita, allora la topologia debole equivale a quella indotta dalla norma.

wsl1 21. Si provi che in ℓ^1 la convergenza debole è equivalente alla convergenza forte.
[**Traccia:** per assurdo sia $\{x^{(n)}\} \subset \ell^1$ tale che $x^{(n)} \rightharpoonup 0$ ma $\|x^{(n)}\|_1 \geq \varepsilon$; si osservi che $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Definiamo induttivamente: $n_0 = 0$, $m_0 = 0$ e poi, noti n_{h-1} e m_{h-1}, $n_h = \min\{n > n_{h-1} : \sum_{k=0}^{m_{h-1}} |x_k^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{5}\}$, $m_h = \min\{m > m_{h-1} : \sum_{i=m+1}^{\infty} |x_i^{(n_h)}| < \frac{\varepsilon}{5}\}$. Posto $z = \{z_k\}$, ove $z_k = \operatorname{sgn} x_k^{(n_h)}$ se $m_{h-1} < k \leq m_h$, si ha $z \in \ell^\infty$; si mostri che $|\sum_{i=0}^{\infty} z_i\, x_i^{(n_h)}| \geq \frac{\varepsilon}{5}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$, e si deduca l'assurdo.]

sin_w_p 22. Si provi che per ogni $[a,b] \subset \mathbb{R}$ si ha $\sin nx \rightharpoonup 0$ in $L^p(a,b)$ per ogni $p \in [1,\infty[$, e $\sin nx \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ in $L^\infty(a,b)$.

proprwLp 23. Sia $1 < p < \infty$. Dimostrare con esempi che:

(i) $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p \quad \not\Longrightarrow \quad f_n \to f$ q.o.;

(ii) $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p \quad \not\Longrightarrow \quad f_n \to f$ in misura;

(iii) $f_n, f \in L^p$ e $f_n \to f$ q.o. $\quad \not\Longrightarrow \quad f_n \rightharpoonup f$ in L^p;

(iv) $f_n, f \in L^p$ e $f_n \to f$ in misura $\quad \not\Longrightarrow \quad f_n \rightharpoonup f \in L^p$;

(v) $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p \quad \not\Longrightarrow \quad |f_n| \rightharpoonup |f|$ in L^p;

(vi) $|f_n| \rightharpoonup |f|$ in $L^p \quad \not\Longrightarrow \quad f_n \rightharpoonup f$ in L^p;

w*manow 24. Si fornisca un esempio di una successione $\{f_n\} \subset L^\infty$ tale che $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in L^∞ ma $f_n \not\overset{*}{\rightharpoonup} f$ in L^∞.

weak_punt 25. Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato σ-finito. Se $f_n \rightharpoonup f$ in L^p, $1 \le p < \infty$, oppure $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in L^∞, si provi che

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) \le f(x) \le \limsup_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{q.o. in } X.$$

[**Traccia:** posto $M(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$, si osservi che per provare che $f \le M$ q.o. basta mostrare che $f \le M$ q.o. in E, ove E è un arbitrario insieme misurabile di misura finita. Si utilizzi l'esercizio 10.6.8 e si deduca la relazione precedente mostrando che $\int_F f\,d\mu \le \int_F M\,d\mu$ per ogni insieme misurabile F contenuto in $Q = \{x \in X : |M(x)| < \infty\}$, od in $Q_+ = \{x \in X : M(x) = +\infty\}$, od in $Q_- = \{x \in X : M(x) = -\infty\}$. Per l'altra disuguaglianza, si consideri $-f$.]

T*surg 26. Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$ tale che T^* sia surgettivo. Si provi che $R(T)$ è chiuso, che T è invertibile e che $T^{-1} \in \mathcal{L}(R(T), X)$.
[**Traccia:** si imiti la dimostrazione dell'esercizio 10.4.11.]

contochiave 27. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(H)$ una successione di operatori tali che $T_n x \rightharpoonup Cx$ per ogni $x \in H$, ove $C \in \mathcal{L}(H)$; supponiamo inoltre che

$$(T_n^* T_n x, x)_H \ge (T_{n+1}^* T_{n+1} x, x)_H \qquad \forall x \in H, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si provi che:

(i) $T_n^* T_n x \rightharpoonup Bx$ per ogni $x \in H$, ove $B \in \mathcal{L}(H)$ è un operatore autoaggiunto;

(ii) di più, $T_n^* T_n x \to Bx$ per ogni $x \in H$;

(iii) si ha l'inclusione $\ker B \subseteq \ker C$;

(iv) risulta in generale $(C^*Cx, x)_H < (Bx, x)_H$ per qualche $x \in H$.

[**Traccia:** per (ii) si applichi a $T_n^* T_n - B$ l'esercizio 8.2.9, scegliendo $y = T_n^* T_n x - Bx$; per (iv) si scelga $H = \ell^2$, e $T_n x = (x, y)_2\,(v + e_n)$, ove $v = \{2^{-k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e y è un fissato elemento di ℓ^2...]

teoBaSa 28. *(Teorema di Banach-Saks)* Sia H uno spazio di Hilbert e sia $\{x_n\}$ una successione contenuta in H. Se $x_n \rightharpoonup x$ in H, si provi che esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ tale che $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x_{n_k} \to x$ in H per $k \to \infty$.

10.7 Compattezza

compatt

Come si sa, in uno spazio metrico completo (X, d) un insieme K è compatto se e solo se è chiuso e totalmente limitato; ricordiamo che K è *totalmente limitato* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una ε*-rete*, cioè una famiglia finita $\{x_1, \dots, x_N\}$ di punti di K tali che $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B(x_j, \varepsilon)$, ove $B(x_j, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, x_j) < \varepsilon\}$. Se lo spazio X è immerso in $\mathbb{R}^n$ o in $\mathbb{C}^n$ per qualche n, allora la nozione di totale limitatezza equivale a quella di limitatezza; altrimenti, come nel caso degli spazi di Banach di dimensione infinita, gli insiemi limitati e chiusi non saranno compatti. Ad esempio, gli spazi ℓ^p hanno dimensione infinita e l'insieme $K = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dove al solito $(e_n)_k = \delta_{nk}$, è limitato, chiuso ma non compatto (vedere gli esercizi 10.7.2 e 10.7.3).
Esistono svariati criteri di compattezza per sottoinsiemi di spazi di Banach. Ne esamineremo solamente alcuni fra i principali.

ascarz

Teorema 10.7.1 (di Ascoli-Arzelà) *Sia X uno spazio metrico separabile e sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni $X \to \mathbb{R}$. Se:*

(i) $\mathcal{F}$ *è* equicontinua*, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$d(x, y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F},$$

(ii) $\mathcal{F}$ *è* puntualmente equilimitata*, ossia per ogni $x \in X$ esiste $M_x \geq 0$ tale che*

$$|f(x)| \leq M_x \qquad \forall f \in \mathcal{F},$$

allora da ogni successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ si può estrarre una sottosuccessione che converge uniformemente in ogni sottoinsieme compatto di X.

Dimostrazione Poiché X è separabile, esiste un insieme numerabile $E = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denso in X. Poniamo $S_0 = \mathbb{N}$; poiché, per (ii), $\{f_n(x_0)\}_{n\in S_0}$ è limitato in $\mathbb{R}$, esiste $S_1 \subseteq S_0$ tale che la sottosuccessione $\{f_n(x_0)\}_{n\in S_1}$ è convergente. Per induzione, costruito $S_k \subseteq S_{k-1}$ tale che $\{f_n(x_j)\}_{n\in S_k}$ è convergente per ogni $j = 0, 1, \dots, k-1$, poiché $\{f_n(x_k)\}_{n\in S_k}$ è limitato in $\mathbb{R}$ esiste $S_{k+1} \subseteq S_k$ tale che la sottosuccessione $\{f_n(x_k)\}_{n\in S_{k+1}}$ è convergente (al pari delle sottosuccessioni $\{f_n(x_j)\}_{n\in S_{k+1}}$, $j = 0, 1, \dots, k-1$). Resta così definita un'infinita sequenza di sottosuccessioni, ognuna inclusa nella precedente, delle quali la $(k+1)$-sima è tale che $\{f_n(x_j)\}_{n\in S_{k+1}}$ converge in $\mathbb{R}$ per ogni $j = 0, 1, \dots, k$. Adesso indichiamo con r_k il k-simo elemento dell'insieme S_k (che è ordinato secondo l'ordinamento naturale di $\mathbb{N}$); ponendo $S = \{r_0, r_1, \dots, r_k, \dots\}$, si ha $S \subseteq \mathbb{N}$ ed inoltre, per ogni $k \in \mathbb{N}$, al più i primi k termini di S, da r_0 a r_{k-1}, *non* appartengono a S_k. Di conseguenza, la sottosuccessione "diagonale" $\{f_n\}_{n\in S}$ è tale che $\{f_n(x_k)\}_{n\in S}$ converge in $\mathbb{R}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, ovvero

$$\exists \lim_{n\in S,\ n\to\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in E.$$

Adesso, fissato un compatto $K \subseteq X$, proveremo che $\{f_n(x)\}_{n\in S}$ converge in $\mathbb{R}$ per ogni $x \in K$. Fissiamo $\varepsilon > 0$, e scegliamo $\delta > 0$ in modo che valga la (i). Poiché K è compatto,

esso può essere ricoperto da una famiglia finita di palle $B(y_1, \frac{\delta}{2}), \dots, B(y_N, \frac{\delta}{2})$; dato che E è denso in X, in ciascuna palla $B(y_i, \frac{\delta}{2})$ cadrà un punto $x_{k_i} \in E$. Quindi, per (i), avremo

$$|f_n(x_{k_i}) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in B\left(y_i\,, \frac{\delta}{2}\right), \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

e dunque se $x \in K$, scelto i in modo che $x \in B(y_i, \frac{\delta}{2})$, e ricordando che $\{f_n(x_{k_i})\}_{n\in S}$ è convergente, otteniamo per ogni $n, m \in S$ sufficientemente grandi:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f_n(x_{k_i})| + |f_n(x_{k_i}) - f_m(x_{k_i})| + |f_m(x_{k_i}) - f_m(x)| < 3\varepsilon.$$

Ciò prova che $\{f_n\}_{n\in S}$ è una successione di Cauchy rispetto alla convergenza uniforme in K, ove K è un arbitrario compatto contenuto in X. La tesi è provata. □

Negli spazi L^p vi è un criterio di compattezza per certi versi analogo.

teoFC **Teorema 10.7.2 (di Fréchèt-Kolmogorov)** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia K un sottoinsieme di $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Se $m_N(\Omega) < \infty$, l'insieme K è relativamente compatto in $L^p(\Omega)$ se e solo se, prolungate a 0 fuori di Ω tutte le funzioni di K, valgono le proprietà seguenti:*

(i) *K è limitato,*

(ii) $\lim\limits_{h\to 0} \sup\limits_{f\in K} \int_\Omega |f(x+h) - f(x)|^p\, dx = 0.$

Se invece $m_N(\Omega) = +\infty$, l'insieme K è relativamente compatto in $L^p(\Omega)$ se e solo se oltre alle condizioni **(i)** *e* **(ii)**, *risulta*

(iii) $\lim\limits_{R\to\infty} \sup\limits_{f\in K} \int_{\Omega\setminus B(0,R)} |f(x)|^p\, dx = 0.$

Dimostrazione ($\Longrightarrow$) Per ipotesi, dato $\varepsilon > 0$, esiste una ε-rete per K: quindi esistono $f_1, \dots, f_{m_\varepsilon} \in K$ tali che

$$\min_{1\le k\le m_\varepsilon} \|f - f_k\|_p < \varepsilon \qquad \forall f \in K.$$

In particolare, ciò implica che K è limitato in $L^p(\Omega)$, ossia vale (i). Inoltre, se $m_N(\Omega) = +\infty$, esiste $R_\varepsilon > 0$ tale che

$$\int_{\Omega\setminus B(0,R)} |f_k(x)|^p\, dx < \varepsilon, \quad k = 1, \dots, m_\varepsilon, \qquad \forall R > R_\varepsilon,$$

da cui, per ogni $f \in K$ e per ogni $R > R_\varepsilon$,

$$\left[\int_{\Omega\setminus B(0,R)} |f(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \le \inf_{1\le k\le m_\varepsilon} \left[\|f - f_k\|_p + \left[\int_{\Omega\setminus B(0,R)} |f_k(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}}\right] < 2\varepsilon.$$

Ciò prova (iii).
Proviamo infine (ii). Per $1 \le k \le m_\varepsilon$ sia $g_k \in C_c(\Omega)$ tale che $\|f_k - g_k\|_p < \varepsilon$ (esercizio

9.1.24). Prolungate le g_k a 0 fuori di Ω, ed indicato con $H_\varepsilon \subset \Omega$ un compatto la cui parte interna contenga l'unione dei supporti delle g_k, esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|g_k(x+h) - g_k(x)| \le \frac{\varepsilon}{m_N(H_\varepsilon)^{\frac{1}{p}}}, \quad 1 \le k \le m_\varepsilon, \quad |h| < \delta_\varepsilon.$$

Allora per ogni $f \in K$ si ha per $|h| < \delta_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
&\|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|_p \le \\
&\quad = \inf_{1\le k\le m_\varepsilon} \Big[\|f(\cdot+h) - f_k(\cdot+h)\|_p + \|f_k(\cdot+h) - g_k(\cdot+h)\|_p + \\
&\quad + \|g_k(\cdot+h) - g_k(\cdot)\|_p + \|g_k - f_k\|_p + \|f_k - f\|_p\Big] \le \\
&\quad \le 2\|f_k - f\|_p + 2\|f_k - g_k\|_p + \max_{1\le k\le m_\varepsilon} \|g_k(\cdot+h) - g_k(\cdot)\|_p < 5\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ciò prova (ii) e conclude la prima parte della dimostrazione.

($\Longleftarrow$) Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione contenuta in K: proveremo che essa ha una sottosuccessione convergente in $L^p(\Omega)$. Supponiamo $m_N(\Omega) = \infty$: fissato $\varepsilon > 0$, per (iii) esiste $R_\varepsilon > 0$ tale che

$$\int_{\Omega\setminus B(0,R)} |f_n(x)|^p\,dx < \varepsilon^p \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall R \ge R_\varepsilon.$$

In base a (ii), esiste una funzione $\omega(t)$, definita in un opportuno intervallo $[0, t_0]$, crescente e continua, con $\omega(0) = 0$, tale che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left[\int_\Omega |f_n(x+h) - f_n(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \le \omega(|h|) \quad \forall |h| \in [0, t_0].$$

Infine, sia $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $\varphi \ge 0$, $\int_{B(0,1)} \varphi(x)\,dx = 1$ e con supporto contenuto in $\overline{B(0,1)}$; sia poi $\varphi_\vartheta = \vartheta^{-N}\varphi\left(\frac{x}{\vartheta}\right)$ la corrispondente mollificatrice (esercizio 5.4.7) di parametro ϑ. Scegliamo $\vartheta = \delta_\varepsilon$, ove δ_ε è scelto in modo che risulti $\omega(\delta_\varepsilon) < \varepsilon$, e scriviamo per brevità φ_ε in luogo di $\varphi_{\delta_\varepsilon}$. Posto

$$K_\varepsilon = \{f \star \varphi_\varepsilon : f \in K\},$$

l'insieme K_ε è contenuto in $C(\overline{\Omega \cap B(0, R_\varepsilon)})$. Vogliamo applicare a K_ε il teorema di Ascoli-Arzelà (teorema 10.7.1). Notiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ si ha, in virtù di (i) e del fatto che $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = 1$,

$$\begin{aligned}
|f \star \varphi_\varepsilon(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)^{1/p}\,\varphi_\varepsilon(y)^{1/q}\,dy\right| \le \\
&\le \left[\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p \varphi_\varepsilon(y)\,dy\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(y)\,dy\right]^{\frac{1}{q}} \le \\
&\le \|f\|_p \|\varphi_\varepsilon\|_\infty^{1/p} \le M\|\varphi_\varepsilon\|_\infty^{1/p} \qquad \forall f \in K,
\end{aligned}$$

ove il numero $M = \sup_{f\in K} \|f\|_p$ è finito in virtù di (i). Inoltre, grazie a (ii), per $|x - x'| \le t_0$ si ha

$$\begin{aligned}
|f \star \varphi_\varepsilon(x) - f \star \varphi_\varepsilon(x')| &\le \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y) - f(x'-y)|\varphi_\varepsilon(y)\,dy \le \\
&\le \left[\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y) - f(x'-y)|^p \varphi_\varepsilon(y)\,dy\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(y)\,dy\right]^{\frac{1}{q}} \le \\
&\le \|f(\cdot + x' - x) - f(\cdot)\|_p \, \|\varphi_\varepsilon\|_\infty^{1/p} \le \omega(|x'-x|)\|\varphi_\varepsilon\|_\infty^{1/p} \qquad \forall f \in K.
\end{aligned}$$

Pertanto K_ε è una famiglia equilimitata ed equicontinua in $C(\overline{\Omega \cap B(0,R_\varepsilon)})$. Dunque il teorema di Ascoli-Arzelà (teorema 10.7.1) è applicabile e pertanto la successione $\{f_n \star \varphi_\varepsilon\} \subseteq K_\varepsilon$ ha una sottosuccessione $\{f_{n_k} \star \varphi_\varepsilon\}$ uniformemente convergente in $C(\overline{\Omega \cap B(0,R_\varepsilon)})$. In particolare, fissato $\eta_\varepsilon > 0$ tale che $\eta_\varepsilon \cdot m_N(\Omega \cap B(0,R_\varepsilon))^{1-\frac{1}{p}} < \varepsilon$, esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\|f_{n_k} \star \varphi_\varepsilon - f_{n_h} \star \varphi_\varepsilon\|_\infty < \eta_\varepsilon$ per ogni $k, h \ge \nu_\varepsilon$, e dunque

$$\begin{aligned}
\|f_{n_k} \star \varphi_\varepsilon - f_{n_h} \star \varphi_\varepsilon\|_p &\le m_N(\Omega \cap B(0,R_\varepsilon))^{1-\frac{1}{p}} \|f_{n_k} \star \varphi_\varepsilon - f_{n_h} \star \varphi_\varepsilon\|_\infty < \\
&< m_N(\Omega \cap B(0,R_\varepsilon))^{1-\frac{1}{p}} \eta_\varepsilon < \varepsilon \quad \forall k, h \ge \nu_\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Adesso osserviamo che risulta

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_n \star \varphi_\varepsilon\|_p &= \left[\int_\Omega \left|\int_{\mathbb{R}^N} [f_n(x) - f_n(x-y)]\varphi_\varepsilon(y)\,dy\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \le \\
&\le \left[\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x) - f_n(x-y)|^p \varphi_\varepsilon(y)\,dy\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(y)\,dy\right]^{\frac{1}{q}} = \\
&= \left[\int_{B(0,\delta_\varepsilon)} \|f_n(\cdot) - f_n(\cdot - y)\|_p^p \varphi_\varepsilon(y)\,dy\right]^{\frac{1}{p}} \le \\
&\le \omega(\delta_\varepsilon) < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Quindi, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\|f_{n_k} - f_{n_h}\|_p &\le \\
&\le \|f_{n_k} - f_{n_k} \star \varphi_\varepsilon\|_p + \|f_{n_k} \star \varphi_\varepsilon - f_{n_h} \star \varphi_\varepsilon\|_p + \|f_{n_h} \star \varphi_\varepsilon - f_{n_h}\|_p < \\
&< 3\varepsilon \qquad \forall k, h \ge \nu_\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Ciò prova che la sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ converge in $L^p(\Omega)$. La tesi è provata. □

Vediamo adesso alcuni criteri di compattezza sequenziale (cioè per successioni) in spazi di Banach.

w*comp **Corollario 10.7.3** *Sia X uno spazio di Banach separabile e sia $\{F_n\}$ una successione limitata in X^*. Allora esiste una sottosuccessione $\{F_{n_k}\}$ di $\{F_n\}$ che converge debolmente* in X^* ad un elemento $F \in X^*$.*

Dimostrazione Posto $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|F_n\|_{X^*}$, si ha

$$\begin{aligned}
|F_n x| &\le M\|x\|_X \qquad \forall x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\
|F_n x - F_n y| &\le M\|x - y\|_X \qquad \forall x, y \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N};
\end{aligned}$$

quindi la famiglia $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifica le ipotesi del teorema di Ascoli-Arzelà. Dunque, essendo $\{x\}$ un compatto di X per ogni $x \in X$, per un'opportuna sottosuccessione $\{F_{n_k}\} \subseteq \{F_n\}$ si avrà

$$\exists \lim_{k\to\infty} F_{n_k}(x) \qquad \forall x \in X.$$

È chiaro che il limite così definito è un funzionale lineare F tale che $|Fx| \leq M\|x\|_X$ per ogni $x \in X$; ne segue la tesi. □

wcomp **Corollario 10.7.4** *Sia X uno spazio di Banach riflessivo e sia $\{x_n\}$ una successione limitata in X. Allora esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ che converge debolmente in X ad un elemento $x \in X$.*

Dimostrazione Il sottospazio $M = \overline{[\{x_n\}]}$ è separabile (esercizio 10.5.9) e riflessivo, essendo un sottospazio chiuso dello spazio riflessivo X (proposizione 10.5.3). Poiché $\{J_{x_n}\}$ è una successione limitata in M^{**}, per il corollario 10.7.3 c'è una sottosuccessione $\{J_{x_{n_k}}\}$ di $\{J_{x_n}\}$ che converge debolmente* ad un elemento $\alpha \in M^{**}$. Per la riflessività di M sarà $\alpha = J_x$ per un certo $x \in M$: quindi $J_{x_{n_k}} \overset{*}{\rightharpoonup} J_x$ in M^{**}, ovvero $Fx_{n_k} \to Fx$ per ogni $F \in M^*$. Dato che ogni funzionale lineare continuo su X è anche continuo su M, si ha in particolare $x_{n_k} \rightharpoonup x$ in X. Ciò prova la tesi. □

Il corollario 10.7.3 esprime il fatto che i limitati di X^* sono debolmente* compatti per successioni; ora dimostriamo, per uno spazio normato qualunque, che essi sono w^*-compatti, il che costituisce un risultato più forte, dal momento che la chiusura debole sequenziale di un insieme K è inclusa nella chiusura debole di K (esercizio 10.7.15); l'inclusione è in generale propria, come mostra l'esercizio 10.6.16)

BA **Teorema 10.7.5 (di Banach-Alaoglu)** *Sia X uno spazio normato e sia B^* la palla unitaria chiusa di X^*. Allora B^* è compatta nella topologia debole* $\sigma(X^*, X)$.*

Dimostrazione Per ogni $x \in X$ denotiamo con I_x l'intervallo reale $[-\|x\|_X, \|x\|_X]$. Consideriamo il prodotto cartesiano

$$P = \prod_{x\in X} I_x\,,$$

munito della topologia prodotto τ. Allora P, essendo prodotto di compatti, è τ-compatto; denotando i suoi elementi con $\{f(x)\}_{x\in X}$, possiamo descrivere tale insieme nel modo seguente:

$$P = \{f : X \to \mathbb{R} :\ |f(x)| \leq \|x\|_X\ \forall x \in X\}.$$

Poiché $B^* \subseteq P \cap X^*$, B^* eredita due topologie indotte, una da (X^*, w^*) e una da (P, τ). Proveremo che:

(a) B^* è chiuso in (P, τ),

(b) w^* coincide con τ su B^*.

Da (a) seguirà che B^* è τ-compatto, e da (b) dedurremo che B^* è w^*-compatto, ossia la tesi.
Proviamo dapprima (b). Siano $n \in \mathbb{N}^+$, $x_1, \ldots, x_n \in X$, $\delta_1, \ldots, \delta_n > 0$ e $g_0 \in B^*$: consideriamo i due insiemi

$$W_1 = \{g \in X^* : \ |gx_i - g_0 x_i| < \delta_i \,, \ i = 1, \ldots, n\},$$

$$W_2 = \{f \in P : \ |f(x_i) - g_0 x_i| < \delta_i \,, \ i = 1, \ldots, n\};$$

W_1 e W_2 sono generici intorni di g_0 nelle topologie w^* e τ rispettivamente. Dato che, banalmente, $W_1 \cap B^* = W_2 \cap B^*$, la proprietà (b) è provata.
Dimostriamo (a). Sia f_0 un elemento della chiusura di B^* in (P, τ): proveremo che $f_0 : X \to \mathbb{C}$ è lineare. Dati $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ed $\varepsilon > 0$, l'insieme

$$\begin{aligned} U \ = \ \{f \in P : |f(x) - f_0(x)| < \varepsilon, \ |f(y) - f_0(y)| < \varepsilon, \\ |f(\alpha x + \beta y) - f_0(\alpha x + \beta y)| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

è intorno di f_0 in (P, τ). Poiché f_0 è τ-aderente a B^*, esiste $f \in B^* \cap U$. Usando la linearità di f, ne segue

$$\begin{aligned} &|f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y)| = \\ &\quad = |(f_0 - f)(\alpha x + \beta y) - \alpha(f_0 - f)(x) - \beta(f_0 - f)(y)| < \\ &\quad < (1 + |\alpha| + |\beta|)\varepsilon, \end{aligned}$$

e per l'arbitrarietà di ε otteniamo che f_0 è lineare.
Resta da far vedere che $f_0 \in B^*$: fissati $\varepsilon > 0$ e $x \in X$ con $\|x\|_X = 1$, sia

$$V = \{g \in P : \ |g(x) - f_0 x| < \varepsilon\}.$$

Dato che V è un τ-intorno di f_0, esiste $g \in B^* \cap V$; dunque si ha

$$|f_0 x| \leq |f_0 x - gx| + |gx| < \varepsilon + \|x\|_X \leq \varepsilon + 1,$$

e per l'arbitrarietà di ε, ricaviamo

$$|f_0 x| \leq 1 \qquad \forall x \in X \text{ con } \|x\|_X = 1.$$

Si conclude che $f_0 \in B^*$, e ciò prova (a). $\square$

Il corollario 10.7.4 esprime il fatto che i limitati di uno spazio riflessivo sono debolmente compatti per successioni. Il teorema che segue mostra che essi sono w-compatti.

ES **Teorema 10.7.6 (di Eberlein-Šmulian)** *Sia X uno spazio di Banach riflessivo, e sia B la palla unitaria chiusa di X. Allora B è compatta nella topologia debole w.*

Dimostrazione Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento w-aperto di B: per ogni $i \in I$ e per ogni $x \in U_i$ esiste un w-intorno V di x, della forma

$$V = \{y \in X : \ |\varphi_j(x - y)| < \varepsilon, \ j = 1, \ldots, k_i\},$$

che è contenuto in U_i. Applichiamo l'immersione canonica $J : X \to X^{**}$, che per ipotesi è un'isometria bigettiva: otteniamo che per ogni $i \in I$ e per ogni $J_x \in J(U_i)$ l'insieme

$$J(V) = \{J_y \in X^{**} : \ |J_x\varphi_j - J_y\varphi_j| < \varepsilon, \ j = 1, \dots, k_i\}$$

è contenuto in $J(U_i)$. Ma $J(V)$ è un intorno di J_x nella topologia debole* su X^{**}, e dunque $\{J(U_i)\}_{i\in I}$ è un ricoprimento w^*-aperto di $J(B)$, cioè della palla unitaria chiusa di X^{**}. Per il teorema di Banach-Alaoglu (teorema 10.7.5), $J(B)$ è w^*-compatta in X^{**}, quindi esiste un sottoricoprimento finito $\{J(U_{i_h})\}_{1\le h\le m}$ di $J(B)$. Di conseguenza, $\{U_{i_h}\}_{1\le h\le m}$ è un sottoricoprimento finito di B, estratto dal ricoprimento w-aperto originale $\{U_i\}_{i\in I}$. Pertanto B è w-compatta. □

ndebrelcomp **Corollario 10.7.7** *Sia X uno spazio normato. Allora:*

(i) *i limitati di X^* sono debolmente* relativamente compatti;*

(ii) *se X è uno spazio di Banach riflessivo, allora i limitati di X sono debolmente relativamente compatti.*

Dimostrazione Basta osservare che ogni limitato è incluso in una palla chiusa, ed applicare i due teoremi precedenti. □

Come vedremo, la (ii) del corollario 10.7.7 si può invertire. A questo scopo ci è utile il seguente

Goldstine **Lemma 10.7.8 (di Goldstine)** *Sia X uno spazio di Banach e sia B la palla unitaria chiusa di X. Detta $J : X \to X^{**}$ l'immersione canonica, l'insieme $J(B)$ è $\sigma(X^{**}, X^*)$-denso nella palla unitaria chiusa B^{**} di X^{**}.*

Dimostrazione Sia, per assurdo, $\alpha \in B^{**} \setminus \overline{J(B)}^{w^*}$, ove $\overline{J(B)}^{w^*}$ è la chiusura di $J(B)$ rispetto a $\sigma(X^{**}, X^*)$. Esiste allora, per il teorema di Hahn-Banach, un funzionale $f \in X^{***}$, dunque $\sigma(X^{**}, X^*)$-continuo, tale che

$$f\alpha \neq 0, \qquad f\beta = 0 \quad \forall \beta \in \overline{J(B)}^{w^*}.$$

Dimostriamo che esiste $\varphi \in X^*$ tale che $f = J^*_\varphi$, essendo J^* l'immersione canonica di X^* in X^{***}, ovvero, in altri termini, che

$$f\gamma = \gamma\varphi \qquad \forall \gamma \in X^{**}.$$

Poiché $f(J_x) = 0$ per ogni $x \in B$, ciò implicherà $0 = fJ_x = J_x\varphi = \varphi x$ per ogni $x \in B$, e quindi per linearità dedurremo $\varphi = 0$; ma questo è assurdo, essendo $\alpha\varphi = f\alpha \neq 0$.
Per provare l'asserzione osserviamo che f è $\sigma(X^{**}, X^*)$-continuo, e dunque esiste un intorno di $0 \in X^{**}$ della forma $U = \{\gamma \in X^{**} : |\gamma\varphi_i| < \varepsilon, \ i = 1, \dots, m\}$ tale che $|f\gamma| < 1$ per ogni $\gamma \in U$. Adesso, se $\beta \in \bigcap_{i=1}^m \ker J^*_{\varphi_i}$, ossia $\beta\varphi_i = 0$ per $i = 1, \dots, m$, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $k|f\beta| = |f(k\beta)| < 1$, da cui $f\beta = 0$: ciò mostra che $\bigcap_{i=1}^m \ker J^*_{\varphi_i} \subseteq \ker f$. Ne segue, per l'esercizio 10.1.13, che esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ tali che $f = \sum_{i=1}^m \lambda_i J^*_{\varphi_i}$. Dunque, posto $\varphi = \sum_{i=1}^m \lambda_i\varphi_i$, abbiamo provato che $f = J^*_\varphi$, ossia l'asserzione sopra scritta. Ciò conclude la dimostrazione del lemma. □

Il risultato che segue fornisce una caratterizzazione della riflessività.

Kakutani **Teorema 10.7.9 (di Kakutani)** *Sia X uno spazio di Banach. Allora X è riflessivo se e solo se la palla unitaria chiusa B di X è w-compatta.*

Dimostrazione Se X è riflessivo, per il corollario 10.7.7 la palla B è debolmente compatta.
Viceversa, supponiamo che B sia debolmente compatta. Cominciamo con l'osservare che $J : (X, w) \to (X^{**}, w^*)$ è continua. Infatti, sia $x_0 \in X$ e fissiamo un intorno V di J_{x_0} in X^{**}, il quale è della forma $V = J_{x_0} + V_{\varphi_1,\dots,\varphi_N,\varepsilon}$. Allora, scelto l'intorno U di x_0 in X definito da $U = x_0 + U_{\varphi_1,\dots,\varphi_N,\varepsilon}$, per definizione si ha $J_x \in V$ per ogni $x \in U$, il che prova la continuità di J. Dunque, $J(B)$, immagine continua del w-compatto B, è w^*-compatto in X^{**}. Ma, per il lemma di Goldstine (lemma 10.7.8), l'insieme w^*-chiuso $J(B)$ è w^*-denso nella palla unitaria chiusa B^{**} di X^{**}: quindi deve essere $J(B) = B^{**}$, e per omogenerità si deduce $J(X) = X^{**}$. Pertanto X è riflessivo. □

La topologia debole su uno spazio normato non è metrizzabile in generale, come abbiamo visto (proposizione 10.6.7); però vale il seguente risultato che caratterizza gli spazi separabili.

llametrizz **Teorema 10.7.10** *Sia X uno spazio normato e sia B^* la palla unitaria chiusa di X^*. Allora X è separabile se e solo se la topologia indotta su B^* dalla topologia debole* di X^* è metrizzabile.*

Dimostrazione ($\Longrightarrow$) Sia X separabile: fissata una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ densa nella palla unitaria B di X, poniamo

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}|fx_n - gx_n|, \qquad f, g \in B^*.$$

È chiaro che d è una distanza su B^* e che è invariante per traslazioni. Quindi per provare la tesi sarà sufficiente mostrare che:

(a) ogni palla $Q_\varepsilon = \{f \in B^* : d(f,0) < \varepsilon\}$ contiene $B^* \cap U$, ove U è un opportuno intorno di 0 in $\sigma(X^*, X)$;

(b) ogni intorno U di 0 in $\sigma(X^*, X)$ contiene una palla Q_ε, con ε opportuno.

Proviamo (a): fissato un arbitrario $\varepsilon > 0$, sia $N \in \mathbb{N}$ tale che $2^{-N} < \frac{\varepsilon}{4}$. Scegliamo

$$U = \left\{ f \in X^* : \ |fx_k| < \frac{\varepsilon}{4}, \ k = 0, \dots, N-1 \right\};$$

allora se $f \in B^* \cap U$ si ha

$$d(f,0) = \sum_{n=0}^{N-1} 2^{-n}|fx_n| + \sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n}|fx_n| < \frac{\varepsilon}{4}\sum_{n=0}^{N-1} 2^{-n} + \sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n}\|f\|_{X^*} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

cioè $f \in Q_\varepsilon$. Quindi $B^* \cap U \subseteq Q_\varepsilon$.
Proviamo (b): fissati $\delta > 0$ e $y_1, \dots, y_m \in X \setminus \{0\}$, poniamo

$$U = \{f \in X^* : \ |fy_i| < \delta, \ i = 1, \dots, m\}$$

e cerchiamo Q_ε tale che $Q_\varepsilon \subseteq U$. Poiché $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è densa in B, esistono $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ tali che

$$\left\| \frac{y_i}{\|y_i\|_X} - x_{n_i} \right\|_X < \frac{\delta}{2K} \quad \text{per} \;\; i = 1, \dots, m, \quad \text{ove} \;\; K = \max_{1\le i\le m} \|y_i\|_X \; .$$

Siano $N = \max_{1\le i\le m}\{n_i\}$ ed $\varepsilon = \frac{2^{-N}\delta}{2K}$; si ha per ogni $f \in Q_\varepsilon$ e per ogni $i = 1, \dots, m$

$$2^{-n_i}|fx_{n_i}| \le d(f,0) < \varepsilon,$$

da cui

$$|fx_{n_i}| < 2^{n_i}\varepsilon \le 2^N\varepsilon = \frac{\delta}{2K}\,.$$

Pertanto per ogni $i = 1, \dots, m$ si ha, ricordando che $\|f\|_{X^*} = 1$,

$$\frac{|fy_i|}{\|y_i\|_X} \le \left| f\left(\frac{y_i}{\|y_i\|_X} - x_{n_i} \right) \right| + |fx_{n_i}| < \frac{\delta}{2K} + \frac{\delta}{2K} = \frac{\delta}{K}$$

ed infine

$$|fy_i| < \frac{\delta}{K}\|y_i\|_X \le \delta, \quad i = 1, \dots, m.$$

Ciò prova che $f \in U$, ossia $Q_\varepsilon \subseteq U$.

($\Longleftarrow$) Supponiamo che (B^*, w^*) sia metrizzabile; allora 0 ha un sistema fondamentale di intorni numerabile $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, e si può supporre che tali U_n siano della forma

$$U_n = \{\varphi \in B^* : \; |\varphi x| < \varepsilon_n \;\forall x \in A_n\},$$

ove A_n è un sottoinsieme finito di X. Poniamo $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$: dato che A è numerabile, il sottospazio chiuso $X_0 \subseteq X$ generato da A è separabile. Supponiamo ora che esista $x \in X \setminus X_0$: per il coprollario 10.1.6, vi sarebbe un funzionale $\varphi \in X^*$, di norma unitaria, tale che $\varphi x \neq 0$ e $\varphi z = 0$ per ogni $z \in X_0$. Ciò significherebbe che $\varphi \in U_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e questo implicherebbe $\varphi \equiv 0$, contraddicendo il fatto che $\varphi x \neq 0$. Pertanto deve essere $X = X_0$ e dunque X è separabile. □

Un'analoga proprietà di metrizzabilità caratterizza la separabilità dei duali degli spazi di Banach.

lametrizz2 **Teorema 10.7.11** *Sia X uno spazio di Banach e sia B la palla unitaria chiusa di X. Allora X^* è separabile se e solo se la topologia indotta su B dalla topologia debole di X è metrizzabile.*

Dimostrazione ($\Longrightarrow$) Sia X^* separabile: allora, per l'esercizio 10.5.10, anche X è separabile; dunque, per il teorema 10.7.10, la palla unitaria B^* di X^*, munita della topologia debole*, è metrizzabile. Inoltre B^* è w^*-compatta in virtù del teorema di Banach-Alaoglu (teorema 10.7.5). Perciò, dato che gli spazi metrici compatti sono separabili, (B^*, w^*) è separabile. Sia adesso $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ una successione densa in (B^*, w^*), e definiamo la distanza

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|f_n(x-y)|, \qquad x, y \in B.$$

Proviamo che lo spazio metrico (B,d) coincide con lo spazio (B,w).
Sia $i:(B,w)\to(B,d)$ l'identità: essa è continua poiché, fissata arbitrariamente una palla $B(x_0,\delta)$ e scelto $N_\delta\in\mathbb{N}^+$ tale che $\sum_{n>N_\delta}2^{-n}<\frac{\delta}{2}$, per il w-intorno $V=\{x\in B: |f_n(x-x_0)|<\delta/2,\ 1\le n\le N_\delta\}$ risulta per ogni $x\in V$

$$d(x,x_0)\le\sum_{n=1}^{N_\delta}2^{-n}|f_n(x-x_0)|+\sum_{n>N_\delta}2^{-n}<\sum_{n\le N_\delta}2^{-n}\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}<\delta.$$

Perciò l'applicazione i è biunivoca e continua dallo spazio compatto (B,w) nello spazio di Hausdorff (B,d): dunque è un omeomorfismo, e in particolare $(B,d)=(B,w)$.
($\Longleftarrow$) Sia (B,w) metrizzabile: allora la topologia w ha come base d'intorni di 0 la famiglia numerabile $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con

$$U_n=\{x\in X:|\varphi x|<\varepsilon_n\ \forall\varphi\in A_n\},$$

ove $\varepsilon_n>0$ e A_n è un sottoinsieme finito di X^*. Il sottospazio chiuso $X'\subseteq X$, generato da tutti i funzionali appartenenti all'unione degli A_n, è separabile: vogliamo provare che $X'=X^*$, e che pertanto X^* è separabile.
Supponiamo per assurdo che esista $\varphi\in X^*\setminus X'$: allora

$$\delta=\inf_{\psi\in X'}\|\varphi-\psi\|_{X^*}>0.$$

Per il corollario 10.1.6, esiste $\alpha\in X^{**}$ tale che

$$\|\alpha\|_{X^{**}}=\frac{1}{\delta},\quad \alpha\varphi=1,\quad \alpha|_{X'}=0.$$

Consideriamo l'insieme $U=\{x\in B:|\varphi x|<\delta/2\}$, che è un w-intorno di $0\in B$: esiste allora $n\in\mathbb{N}$ tale che $V\supseteq U_n$. Gli insiemi

$$V_n=\{\beta\in X^{**}:|\beta\psi|<\varepsilon_n\ \forall\psi\in A_n\},\quad V=\{\beta\in X^{**}:|\beta\varphi|<\delta/2\}$$

sono $\sigma(X^{**},X^*)$-intorni di $0\in X^{**}$. Poiché $\delta\alpha\in B^{**}$, per il lemma di Goldstine (lemma 10.7.8) esiste $x_1\in B$ tale che $J_{x_1}-\delta\alpha\in V_n\cap V$, ossia

$$|J_{x_1}\psi-\delta\alpha\psi|<\varepsilon_n\quad\forall\psi\in A_n,\quad |J_{x_1}\varphi-\delta\alpha\varphi|<\frac{\delta}{2};$$

ciò significa $|\psi x_1|<\varepsilon_n$ per ogni $\psi\in A_n$ e $|\varphi x_1-\delta|<\delta/2$. Ma allora $|\varphi x_1|>\delta/2$: dunque si ha $x_1\in U_n\setminus V$, il che è assurdo essendo $U_n\subseteq V$. Ne segue $X'=X^*$ e dunque la tesi. □

Proviamo infine il seguente risultato, che va confrontato con quello dell'esercizio 10.6.16:

chseq **Teorema 10.7.12** *Sia X uno spazio normato con X^* separabile, e sia $M\subset X$ un insieme limitato. Allora la chiusura debole di M coincide con la chiusura debole sequenziale di M, cioè con l'insieme*

$$M^s=\{x\in X:\ \exists\{x_n\}\subseteq M:\ x_n\rightharpoonup x\}.$$

Dimostrazione È facile verificare che M^s è contenuto nella chiusura debole di M. Per provare l'inclusione opposta faremo uso del seguente

chseqnum **Lemma 10.7.13** *Sia X uno spazio normato, sia $M \subset X$ limitato e sia $u \in X$ un elemento della chiusura debole di M. Allora esiste un sottoinsieme al più numerabile $M_0 \subseteq M$ tale che u appartiene alla chiusura debole di M_0.*

Dimostrazione Sia B^* la palla unitaria chiusa di X^* e sia

$$B_n^* = B^* \times B^* \times \cdots \times B^* \quad (n \text{ volte}).$$

Per $m, n \in \mathbb{N}^+$ e $f = (f_1, \ldots, f_n) \in B_n^*$ consideriamo il w-intorno

$$U_{m,n,f}(u) = \left\{ v \in X : \ |f_j(v-u)| < \frac{1}{m} \ , \ j = 1, \ldots, n \right\}.$$

Per ipotesi, per ogni $m, n \in \mathbb{N}^+$ e $f \in B_n^*$ esiste $v \in M$ tale che $v \in U_{m,n,f}(u)$.
Riscriviamo questa affermazione in modo diverso: per ogni $m, n \in \mathbb{N}^+$ e $v \in M$ sia

$$W_{m,n,v} = \{ f \in B_n^* : \ v \in U_{m,n,f}(u) \};$$

allora possiamo dire che per ogni $m, n \in \mathbb{N}^+$ l'insieme B_n^* è ricoperto dalla famiglia $\{W_{m,n,v}\}_{v \in M}$.
Ora osserviamo che i $W_{m,n,v}$ sono aperti in B_n^* per la topologia indotta dalla topologia debole* di $(X^*)^n$; infatti se $f \in W_{m,n,v}$ l'insieme

$$\left\{ g \in B_n^* : \ |g_i(u-v) - f_i(u-v)| < \frac{1}{m} - \max_{1 \le j \le n} |f_j(u-v)|, \ i = 1, \ldots, n \right\}$$

è un intorno di f in tale topologia che è contenuto in $W_{m,n,v}$. Poiché, per il teorema di Banach-Alaoglu (teorema 10.7.5), B^* è debolmente* compatto in X^*, anche B_n^* è debolmente* compatto in $(X^*)^n$. Quindi esiste una sottofamiglia finita di $\{W_{m,n,v}\}_{v \in M}$ che è ancora un ricoprimento di B_n^*: in altre parole, esiste un sottoinsieme finito $S_{m,n} \subseteq M$ tale che

$$\forall f = (f_1, \ldots, f_n) \in B_n^* \quad \exists v \in S_{m,n} : \quad |f_j(v-u)| < \frac{1}{m} \text{ per } j = 1, \ldots, n.$$

Posto $M_0 = \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}^+} S_{m,n}$, l'insieme M_0 è numerabile; essendo contenuto in M, è anche limitato in X. Per definizione di M_0, per ogni $f \in B_n^*$ esiste $v \in M_0$ tale che $v \in U_{m,n,f}(u)$: dunque u appartiene alla chiusura debole di M_0. □

Riprendiamo la dimostrazione del teorema 10.7.12. Sia $u \in X$ un elemento della chiusura debole di M in X. Sia M_0 il sottoinsieme numerabile di M determinato dal lemma 10.7.13: dunque u appartiene alla chiusura debole di M_0 in X. Dato che M_0 è limitato, esiste una palla chiusa B_R di X, di raggio R opportuno, tale che $M_0 \subseteq B_R$. Essendo X^* separabile per ipotesi, per il teorema 10.7.11 la topologia debole su B_R è indotta da una distanza. Poiché negli spazi metrici la chiusura di un insieme coincide con la chiusura sequenziale, deduciamo che u appartiene alla chiusura debole sequenziale di M_0, da cui in particolare la tesi. □

Esercizi 10.7

convdebnof

1. Sia X uno spazio di Banach infinito-dimensionale e riflessivo. Si provi che esistono una successione $\{x_n\} \subset X$ ed un elemento $x \in X$ tali che $x_n \rightharpoonup x$ ma $x_n \not\to x$ in X.
   [**Traccia:** utilizzando l'esercizio 10.1.11, si costruisca induttivamente $\{x_n\} \subset X$ con $\|x_n\|_X = 1$, tale che $\|x_n - x_m\|_X \geq \frac{1}{2}$ per ogni $n > m$ ...]

nocppalla

2. Si provi che in ℓ^1, in ℓ^p $(1 < p < \infty)$ e in ℓ^∞ la palla unitaria chiusa non è compatta.

cuHi

3. Si provi che se $p \in [1, \infty[$, e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è una serie convergente di numeri positivi, allora l'insieme
   $$K = \{x \in \ell^p : |x_n| \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$
   è compatto in ℓ^p. Se $p = 2$ e $a_n = \frac{1}{n+1}$ l'insieme K è detto *cubo di Hilbert*.

llawcompno

4. Si provi che la palla unitaria B di c_0 non è compatta nella topologia w.

relcpC

5. Si provi che un sottoinsieme $K \subseteq C[a, b]$ è relativamente compatto se e solo se è limitato ed equicontinuo (secondo la definizione data nell'enunciato del teorema 10.7.1).

Scellprc

6. Sia $1 \leq p < \infty$ e sia S un sottoinsieme di ℓ^p. Si provi che S è relativamente compatto se e solo se valgono queste due condizioni:
   $$\text{(a) } S \text{ è limitato,} \qquad \text{(b) } \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in S} \sum_{j=n}^{\infty} |x_j|^p = 0.$$
   [**Traccia:** la necessità di (b) segue per assurdo: se esistesse $\{x^{(\nu)}\} \subseteq S$ tale che $\sum_{j=n}^{\infty} |x_j^{(\nu)}|^p \geq \varepsilon_0$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$, tale successione avrebbe un punto limite $x \in \ell^p$; si verifichi che $\sum_{j=n}^{\infty} |x_j|^p$ non può tendere a 0. Per la sufficienza, data $\{x^{(\nu)}\} \subseteq S$, si costruisca per diagonalizzazione una sottosuccessione $\{y^{(n)}\}$ tale che $\lim_{n\to\infty} y_j^{(n)} = y_j$ per ogni $j \in \mathbb{N}$, e si provi che $\{y^{(n)}\}$ è una successione di Cauchy in ℓ^p.]

cpcondebop

7. Sia H uno spazio di Hilbert separabile e sia $\mathcal{A}$ un sottoinsieme di $\mathcal{L}(H)$. Provare che $\mathcal{A}$ è compatto rispetto alla convergenza debole degli operatori se e solo se valgono (i) e (ii), ove
   (i) $\mathcal{A}$ è chiuso rispetto alla convergenza debole degli operatori,
   (ii) per ogni $x \in H$ l'insieme $\{Tx\}_{T\in\mathcal{A}}$ è compatto rispetto alla convergenza debole in H.

Peano

8. (*Teorema di Peano*) Sia G un aperto limitato di $\mathbb{R}^2$, e sia $f : \overline{G} \to \mathbb{R}$ continua. Si provi che per ogni $(x_0, y_0) \in G$ il problema di Cauchy
   $$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0$$

ha almeno una soluzione $y \in C^1(I)$, ove I è un opportuno intervallo di $\mathbb{R}$ centrato in x_0.
[**Traccia:** sia $M = \sup_{\overline{G}} |f|$, e per ogni $\varepsilon > 0$ sia $\sigma > 0$ tale che

$$|x - x'| < \sigma,\ |y - y'| < 2M\sigma \quad \Longrightarrow \quad |f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon.$$

Sia $\Delta \subseteq G$ l'unione dei due triangoli chiusi delimitati dalle due rette per (x_0, y_0) di coefficienti angolari $\pm M$ e dalle rette verticali $x = a$ e $x = b$ (con a, b opportuni e tali che $a < x_0 < b$). Si costruiscano le *spezzate di Eulero* nel modo seguente: si tracci da (x_0, y_0) la retta di coefficiente angolare $f(x_0, y_0)$, si fissi su di essa un altro punto (x_1, y_1), e si tracci da esso la retta di coefficiente angolare $f(x_1, y_1)$; fissato su questa un altro punto (x_2, y_2), si tracci da esso la retta di coefficiente angolare $f(x_2, y_2)$, e così via. Sia ora $\{\varphi_n\}$ una successione di funzioni i cui grafici siano spezzate di Eulero passanti per (x_0, y_0), con nodi $(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})$, tali che $\delta_n = \max_i (\xi_i^{(n)} - \xi_{i-1}^{(n)})$ tenda a 0 per $n \to \infty$. Si verifichi che $\{\varphi_n\}$ è un sottoinsieme limitato ed equicontinuo di $C[a,b]$ e sia $\{\psi_n\}$ una sottosuccessione di $\{\varphi_n\}$ uniformemente convergente in $[a,b]$ (esercizio 10.7.5). Detto φ il limite, sia $N \in \mathbb{N}$ tale che $\|\psi_n - \varphi\|_\infty < 2M\sigma$ e $\delta_n < \sigma$ per ogni $n > N$. Siano $|x - x'| < \sigma$, con (ad esempio) $x < x'$, e $n > N$; detti $(x_i^{(n)}, y_i^{(n)})$ i nodi della spezzata grafico di ψ_n, sarà $x_r^{(n)} \le x < x_{r+1}^{(n)} < \ldots < x_s^{(n)} < x' \le x_{s+1}^{(n)}$. Si verifichi che

$$\begin{aligned}
&\psi_n(x) - \psi_n(x') = \\
&\quad = [\psi_n(x) - \psi_n(x_{r+1}^{(n)})] + \sum_{i=r+1}^{s} [\psi_n(x_i^{(n)}) - \psi_n(x_{i+1}^{(n)})] + [\psi_n(x_{s+1}^{(n)}) - \psi_n(x')] = \\
&\quad = f(x_r^{(n)}, y_r^{(n)})(x - x_{r+1}^{(n)}) + \\
&\qquad + \sum_{i=r+1}^{s} f(x_i^{(n)}, y_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i+1}^{(n)}) + f(x_s^{(n)}, y_s^{(n)})(x_{s+1}^{(n)} - x');
\end{aligned}$$

essendo $\delta_n < \sigma$, si provi che risulta $|f(x_i^{(n)}, y_i^{(n)}) - f(x, \psi_n(x))| < \varepsilon$ per $x_r^{(n)} \le x \le x_{s+1}^{(n)}$, e si deduca che

$$\left| \frac{\psi_n(x) - \psi_n(x')}{x - x'} - f(x, \psi_n(x)) \right| < \varepsilon \quad \forall n > N, \quad \forall x' \in]x - \sigma, x + \sigma[\,.$$

Si concluda, passando al limite per $n \to \infty$ e per $x' \to x$, che φ risolve il problema di Cauchy.]

10.8 Uniforme convessità

unicon

Introduciamo qui una classe speciale di spazi normati: gli spazi *uniformemente convessi*. Questi spazi sono definiti mediante una condizione di natura puramente geometrica, che tuttavia, sorprendentemente, ha importanti implicazioni algebriche e topoogicche.

uc **Definizione 10.8.1** *Diciamo che uno spazio normato X è* uniformemente convesso *se, posto*

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\{2 - \|x+y\|_X : \ \|x\|_X \le 1, \ \|y\|_X \le 1, \ \|x-y\|_X \ge \varepsilon\}, \quad \varepsilon \in]0,2],$$

risulta $\delta_X(\varepsilon) > 0$ per ogni $\varepsilon \in]0,2]$. La quantità $\delta_X(\varepsilon)$ è detta modulo di convessità di X.

inf_var **Osservazione 10.8.2** Nella definizione 10.8.1 l'estremo inferiore $\delta_X(\varepsilon)$ può essere calcolato sui soli vettori $x, y \in X$ tali che $\|x\|_X \le 1$, $\|y\|_X \le 1$ e $\|x-y\|_X = \varepsilon$; si veda a questo proposito l'esercizio 10.8.1.

spiega **Osservazione 10.8.3** La definizione 10.8.1 non sembra molto intuitiva; possiamo riformularla in altri tre modi equivalenti (la facile dimostrazione è rimandata all'esercizio 10.8.2):
(1) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\|x-y\|_X < \varepsilon$ per ogni $x, y \in X$ tali che $\|x\|_X \le 1$, $\|y\|_X \le 1$ e $\|x+y\|_X > 2-\delta$;
(2) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\|x-y\|_X < \varepsilon$ per ogni $x, y \in X$ tali che $\|x\|_X = \|y\|_X = 1$ e $\|x+y\|_X > 2-\delta$;
(3) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_X \le 1-\delta$ per ogni $x, y \in X$ tali che $\|x\|_X = \|y\|_X = 1$ e $\|x-y\|_X \ge \varepsilon$.

Possiamo osservare che gli enunciati (1) e (2) esprimono l'idea che due punti, la cui somma abbia norma quasi uguale alla somma delle due norme, devono necessariamente essere molto vicini: dunque la palla unitaria è piuttosto "tonda". In effetti, negli spazi uniformemente convessi la palla unitaria è strettamente convessa, ossia risulta $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_X < 1$ per ogni $x, y \in X$ con $x \ne y$ e $\|x\|_X, \|y|_X \le 1$. Infatti, se fosse $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_X \ge 1$, avremmo $\|x+y\|_X \ge 2-\delta$ per ogni $\delta > 0$, da cui necessariamente, per l'enunciato (1) dell'osservazione 10.8.3, $\|x-y\|_X < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, ossia $x = y$, assurdo.

esuc **Esempi 10.8.4 (1)** Gli spazi con prodotto scalare sono uniformemente convessi. Infatti dall'identità del parallelogrammo segue, se $\|x\|_X, \|y\|_X \le 1$ e $\|x+y\|_X > 2-\delta$ con $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$,

$$\|x-y\|_X^2 = -\|x+y\|_X^2 + 2\|x\|_X^2 + 2\|y\|_X^2 < -(2-\delta)^2 + 4 = \delta(4-\delta) < \varepsilon.$$

Altre due proprietà che gli spazi uniformemente convessi condividono con gli spazi di Hilbert sono esposte negli esercizi 10.8.4 e 10.8.5.

(2) Gli spazi $L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ non sono uniformemente convessi in generale: ad esempio, se $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{M}$, $\mu = m$, posto $f = \chi_{[0,1]}$ e $g = \chi_{[1,2]}$, si ha $\|f\|_1 = \|g\|_1 = 1$ e $\|f+g\|_1 = \|f-g\|_1 = 2$.
(3) Gli spazi $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ non sono uniformemente convessi in generale: ad esempio, se $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{M}$, $\mu = m$, posto $f = \chi_{[0,2]}$ e $g = \chi_{[1,2]}$, si ha $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$ e $\|f+g\|_\infty = 2$, $\|f-g\|_\infty = 1$.
(4) Lo spazio $\mathbb{R}^2$, munito della norma $\|(x,y)\| = |x|+|y|$, non è uniformemente convesso: infatti, $(1,0)$ e $(0,1)$ verificano $\|(1,0)\| = \|(0,1)\| = 1$, $\|(1,0)+(0,1)\| = 2$, $\|(1,0)-(0,1)\| = 2$.

Vediamo alcune proprietà di cui godono gli spazi uniformemente convessi.

produc **Teorema 10.8.5** *Siano X, Y spazi di Banach uniformemente convessi. Allora il prodotto $X \times Y$, munito della norma $\|(x,y)\|_{X\times Y} = \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2}$, è uniformemente convesso.*

Dimostrazione Utilizzeremo l'enunciato (2) dell'osservazione 10.8.3. Poniamo per comodità $Z = X \times Y$. Siano $z_n = (x_n, y_n)$, $z'_n = (x'_n, y'_n) \in Z$ tali che $\|z_n + z'_n\|_Z \to 2$ per $n \to \infty$, e $\|z_n\|_Z = \|z'_n\|_Z = 1$: dobbiamo provare che $\|z_n - z'_n\|_Z \to 0$. Anzitutto, proviamo che

$$\|x_n\|_X - \|x'_n\|_X \to 0, \qquad \|y_n\|_Y - \|y'_n\|_Y \to 0.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\|z_n + z'_n\|_Z &= \sqrt{\|x_n + x'_n\|_X^2 + \|y_n + y'_n\|_Y^2} \leq \\
&\leq \sqrt{(\|x_n\|_X + \|x'_n\|_X)^2 + (\|y_n\|_Y + \|y'_n\|_Y)^2} \leq \\
&\leq \sqrt{\|x_n\|_X^2 + \|y_n\|_Y^2} + \sqrt{\|x'_n\|_X^2 + \|y'_n\|_Y^2} = \|z_n\|_Z^2 + \|z'_n\|_Z^2 = 2,
\end{aligned}$$

ove nel terzo passaggio si è utilizzata la disuguaglianza triangolare in $\mathbb{R}^2$. Da questa relazione segue che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{(\|x_n\|_X + \|x'_n\|_X)^2 + (\|y_n\|_Y + \|y'_n\|_Y)^2} = 2.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
4 &= \lim_{n\to\infty} (\|x_n\|_X + \|x'_n\|_X)^2 + (|y_n\|_Y + \|y'_n\|_Y)^2 = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\|x_n\|_X^2 + \|x'_n\|_X^2 + \|y_n\|_Y^2 + \|y'_n\|_Y^2 + 2\|x_n\|_X\|x'_n\|_X + 2\|y_n\|_Y\|y'_n\|_Y\right] = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\|z_n\|_Z^2 + \|z'_n\|_Z^2 + 2\|x_n\|_X\|x'_n\|_X + 2\|y_n\|_Y\|y'_n\|_Y\right] ,
\end{aligned}$$

da cui, essendo $\|z_n\|_Z = \|z'_n\|_Z = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \left[\|x_n\|_X\|x'_n\|_X + \|y_n\|_Y\|y'_n\|_Y\right] = 1;$$

ne segue

$$1 = \lim_{n\to\infty} \left[\|x_n\|_X\|x'_n\|_X + \|y_n\|_Y\|y'_n\|_Y\right] \leq \frac{1}{2}\left[\|x_n\|_X^2 + \|x'_n\|_X^2 + \|y_n\|_Y^2 + \|y'_n\|_Y^2\right] = 1,$$

ossia

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\|x_n\|_X\|x'_n\|_X - \frac{1}{2}\left[\|x_n\|_X^2 + \|x'_n\|_X^2\right]\right) + \right. \\
&\qquad \left. + \left(\|y_n\|_Y\|y'_n\|_Y - \frac{1}{2}\left[\|y_n\|_Y^2 + \|y'_n\|_Y^2\right]\right)\right] .
\end{aligned}$$

Dato che i due addendi sono non positivi, entrambi hanno limite nullo: pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[\|x_n\|_X - \|x'_n\|_X\right]^2 = \lim_{n\to\infty} \left[\|x_n\|_X\|x'_n\|_X - \frac{1}{2}\left(\|x_n\|_X^2 + \|x'_n\|_X^2\right)\right] = 0,$$

e similmente $\|y_n\|_Y - \|y'_n\|_Y \to 0$.
Ciò premesso, supponiamo per assurdo che $\|z_n - z'_n\|_Z$ non sia infinitesimo per $n \to \infty$. Allora, passando a sottosuccessioni possiamo supporre che

$$\|z_n - z'_n\|_Z \to \alpha > 0, \quad \|x_n\|_X \to \beta, \quad \|x'_n\|_X \to \beta, \quad \|y_n\|_Y \to \beta', \quad \|y'_n\|_Y \to \beta';$$

si trova allora, come si è visto precedentemente,

$$2 = \lim_{n\to\infty} \|z_n + z'_n\|_Z \leq \sqrt{(2\beta)^2 + (2\beta')^2} \leq 2,$$

da cui $\sqrt{\beta^2 + \beta'^2} = 1$. Visto che $\|z_n - z'_n\|_Z \to \alpha > 0$, possiamo anche supporre che $\|x_n - x'_n\|_X \to \vartheta > 0$, ed inoltre che $\beta > 0$ (altrimenti queste proprietà valgono per $\|y_n - y'_n\|_Y$ e per β', e il ragionamento che segue funziona ugualmente). Poniamo

$$v_n = \beta \frac{x_n}{\|x_n\|_X}, \qquad v'_n = \beta \frac{x'_n}{\|x'_n\|_X};$$

poiché $\|v_n - x_n\|_X \to 0$ e $\|v'_n - x'_n\|_X \to 0$, si ha

$$\|v_n - v'_n\|_X = \beta \left\| x_n \left[\frac{1}{\|x_n\|_X} - \frac{1}{\beta} \right] + \frac{x_n - x'_n}{\beta} + x'_n \left[\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\|x'_n\|_X} \right] \right\|_X,$$

da cui $\|v_n - v'_n\|_X \to \vartheta$; essendo X uniformemente convesso, a norma dell'enunciato (1) (applicato a $\frac{v_n}{\beta}$ e $\frac{v'_n}{\beta}$) deve aversi

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\beta} \|v_n + v'_n\|_X < 2,$$

ossia $\limsup_{n\to\infty} \|v_n + v'_n\|_X < 2\beta$. Di conseguenza, dalla relazione

$$\|x_n + x'_n\|_X = \frac{1}{\beta} \big\| v_n(\|x_n\|_X - \beta) + (v_n + v'_n)\beta - v'_n(\beta - \|x_n\|_X) \big\|_X$$

segue

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n + x'_n\|_X = \limsup_{n\to\infty} \|v_n + v'_n\|_X < 2\beta.$$

D'altra parte

$$\limsup_{n\to\infty} \|y_n + y'_n\|_Y \leq \lim_{n\to\infty} [\|y_n\|_Y + \|y'_n\|_Y] = 2\beta';$$

pertanto

$$2 = \lim_{n\to\infty} \|z_n + z'_n\|_Z = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\|x_n + x'_n\|_X^2 + \|y_n + y'_n\|_Y^2} < \sqrt{(2\beta)^2 + (2\beta')^2} = 2,$$

il che è assurdo. □

Il risultato più importante è il seguente:

MP **Teorema 10.8.6 (di Milman-Pettis)** *Sia X uno spazio di Banach uniformemente convesso; allora X è riflessivo.*

Dimostrazione Sia $\Lambda_0 \in X^{**}$: dobbiamo mostrare che $\Lambda_0 = J_z$ per un opportuno $z \in X$. Non è restrittivo supporre che $\|\Lambda_0\|_{X^{**}} = 1$. Dato che $J(X)$ è chiuso in X^{**} (esercizio 10.5.1), basta mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in X$ tale che $\|J_x - \Lambda_0\|_{X^{**}} \leq \varepsilon$. Sia $\delta > 0$ il numero legato a ε nella definizione di uniforme convessità, secondo l'enunciato (3) dell'osservazione 10.8.3. Sia $T \in X^*$ tale che $\|T\|_{X^*} = 1$ e $\Lambda_0 T \geq 1 - \frac{\delta}{2}$, e consideriamo l'intorno di Λ_0 in $\sigma(X^{**}, X^*)$ dato da

$$U = \left\{ \Lambda \in X^{**} : \ |\Lambda T - \Lambda_0 T| < \frac{\delta}{2} \right\}.$$

Detta B la palla unitaria chiusa di X, in virtù del lemma di Goldstine (lemma 10.7.8) l'insieme $J(B)$ è denso in B^{**} (la palla unitaria chiusa di X^{**}) rispetto alla topologia $\sigma(X^{**}, X^*)$; dunque esiste $x_0 \in X$ con $\|x_0\|_X \leq 1$ tale che $J_{x_0} \in U$. Proviamo che x_0 verifica $\|J_{x_0} - \Lambda_0\|_{X^{**}} \leq \varepsilon$. Se così non fosse, avremmo $\|J_{x_0} - \Lambda_0\|_{X^{**}} > \varepsilon$; usando nuovamente la densità di $J(B)$ in $\sigma(X^{**}, X^*)$, nonché la continuità di $J : X \to X^{**}$, esisterebbe $y \in B$ tale che $J_y \in U$ e $\|J_y - J_{x_0}\|_{X^{**}} = \|y - x_0\|_X > \varepsilon$. D'altra parte, essendo $J_{x_0}, J_y \in U$, si ha $|Tx_0 - \Lambda_0 T| < \frac{\delta}{2}$ e $|Ty - \Lambda_0 T| < \frac{\delta}{2}$; ne segue

$$\begin{aligned} \|x_0 + y\|_X &\geq T(x_0 + y) = (Tx_0 - \Lambda_0 T) + (Ty - \Lambda_0 T) + 2\Lambda_0 T \geq \\ &\geq 2\Lambda_0 T - |Tx_0 - \Lambda_0 T| - |Ty - \Lambda_0 T| \geq 2\Lambda_0 T - \delta \geq 2 - 2\delta. \end{aligned}$$

Dunque $\left\| \frac{x_0+y}{2} \right\|_X > 1 - \delta$, e questo è assurdo, essendo $\|y - x_0\|_X > \varepsilon$. □

Un altro interessante risultato relativo agli spazi uniformemente convessi riguarda la caratterizzazione dei loro duali. A questo scopo introduciamo la seguente

us **Definizione 10.8.7** *Diciamo che uno spazio di Banach Y è* uniformemente liscio *se, posto*

$$\rho_Y(\tau) = \sup\{\|x + y\|_Y + \|x - y\|_Y - 2 : \ x, y \in Y, \ \|x\|_Y \leq 1, \ \|y\|_Y \leq \tau\}, \quad \tau > 0,$$

risulta $\lim_{\tau \to 0^+} \frac{\rho_Y(\tau)}{\tau} = 0$. *La quantità $\rho_Y(\tau)$ è detta* modulo di liscezza di Y.

Si noti che $\rho_Y(\tau) \geq 0$ perché, almeno per $\|x\|_X = 1$, vale la disuguaglianza $2 = \|2x\|_Y = \|x + y + x - y\|_Y \leq \|x + y\|_Y + \|x - y\|_Y$.

uc*us **Teorema 10.8.8** *Sia X uno spazio di Banach e sia X^* il suo duale. Allora:*

(i) *si ha $\rho_{X^*}(\tau) = \sup\{\tau\,\varepsilon - \delta_X(\varepsilon) : \ 0 < \varepsilon \leq 2\}$, ove il numero $\delta_X(\varepsilon)$ è il modulo di convessità introdotto nella definizione 10.8.1;*

(ii) *X è uniformemente convesso se e solo se X^* è uniformemente liscio.*

Dimostrazione (i) Risulta

$$\begin{aligned} \rho_{X^*}(\tau) &= \sup\{\|F + G\|_{X^*} + \|F - G\|_{X^*} - 2 : \ \|F\|_{X^*} \leq 1, \ \|G\|_{X^*} \leq \tau\} = \\ &= \sup\{\|F + \tau H\|_{X^*} + \|F - \tau H\|_{X^*} - 2 : \ \|F\|_{X^*}, \|H\|_{X^*} \leq 1\} = \\ &= \sup\{Fu + \tau Hu + \ Fv - \tau Hv - 2 : \ \|F\|_{X^*}, \|H\|_{X^*} \leq 1, \ \|u\|_X, \|v\|_X \leq 1\} = \\ &= \sup\{\|u + v\|_X + \tau\|u - v\|_X - 2 : \ \|u\|_X, \|v\|_X \leq 1\} = \\ &= \sup\{\|u + v\|_X + \tau\,\varepsilon - 2 : \ \|u\|_X, \|v\|_X \leq 1, \ \|u - v\|_X = \varepsilon, \ 0 < \varepsilon \leq 2\} = \\ &= \sup\{\tau\,\varepsilon - (2 - \|u + v\|_X) : \ \|u\|_X, \|v\|_X \leq 1, \ \|u - v\|_X = \varepsilon, \ 0 < \varepsilon \leq 2\} = \\ &= \sup\{\tau\,\varepsilon - \delta_X(\varepsilon) : \ 0 < \varepsilon \leq 2\}. \end{aligned}$$

(ii) Se X^* è uniformemente liscio, allora per ogni $\varepsilon \in]0,2]$ esiste $\tau_\varepsilon > 0$ tale che $\frac{\rho_{X^*}(\tau)}{\tau} < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $\tau \in]0,\tau_\varepsilon[$. Dunque, per tali τ si ha $\tau\,\varepsilon - \delta_X(\varepsilon) < \frac{\tau\,\varepsilon}{2}$, ossia $\delta_X(\varepsilon) > \frac{\tau\,\varepsilon}{2}$ per ogni $\varepsilon \in]0,2]$. Ciò prova che X è uniformemente convesso.
Viceversa, se X è uniformemente convesso, allora $\delta_X(\varepsilon) > 0$ per ogni $\varepsilon \in]0,2]$. Dalla definizione di estremo superiore, per ogni $\vartheta > 0$ e per ogni $\tau > 0$ esiste $\varepsilon_\tau \in]0,2]$ tale che

$$\frac{\rho_{X^*}(\tau)}{\tau} \geq \varepsilon_\tau - \frac{\delta_X(\varepsilon_\tau)}{\tau} \geq \frac{\rho_{X^*}(\tau)}{\tau} - \vartheta.$$

Dunque

$$\tau\,\varepsilon_\tau \leq \rho_{X^*}(\tau) + \delta_X(\varepsilon_\tau) \leq \tau(\varepsilon_\tau + \vartheta) \leq (2+\vartheta)\tau.$$

In particolare, $\delta_X(\varepsilon_\tau) \leq (2+\vartheta)\tau$ e quindi ricaviamo $\delta_X(\varepsilon_\tau) \to 0$ per $\tau \to 0^+$. Ma, come conseguenza immediata delle definizione, $\varepsilon \mapsto \delta_X(\varepsilon)$ è una funzione crescente; pertanto, il fatto che $\delta_X(\varepsilon_\tau) \to 0$ implica $\varepsilon_\tau \to 0$: infatti, se fosse $\varepsilon_\tau \geq \beta > 0$ per ogni $\tau > 0$, dedurremmo $0 = \lim_{\tau\to 0} \delta_X(\varepsilon_\tau) \geq \delta_X(\beta)$, da cui $\delta_X(\beta) = 0$, in contraddizione con l'uniforme convessità di X. Si deduce allora che

$$\limsup_{\tau\to 0^+} \frac{\rho_{X^*}(\tau)}{\tau} \leq \lim_{\tau\to 0^+} (\varepsilon_\tau + \vartheta) = \vartheta,$$

e poiché $\vartheta > 0$ è arbitrario, si conclude che $\frac{\rho_{X^*}(\tau)}{\tau} \to 0$ per $\tau \to 0^+$: dunque X^* è uniformemente liscio. □

Gli spazi uniformemente lisci hanno un'altra fondamentale proprietà:

usrif **Teorema 10.8.9** *Se Y è uno spazio di Banach uniformemente liscio, allora Y è riflessivo.*

Dimostrazione Sia $\rho_Y(\tau)$ il modulo di liscezza di Y. Il nocciolo della dimostrazione sta nel fatto, di dimostrazione non difficile, che

$$\rho_Y(\tau) = \rho_{Y^{**}}(\tau) \qquad \forall \tau > 0$$

(esercizio 10.8.6). Ne ricaviamo subito che, essendo Y uniformemente liscio, anche Y^{**} lo è: dunque, per il teorema 10.8.8, Y^* è uniformemente convesso. Dal teorema di Milman-Pettis (teorema 10.8.6) segue allora che Y^* è riflessivo, ed infine dalla proposizione 10.5.2 otteniamo che Y è riflessivo. □

Concludiamo con un esempio basilare:

Lpuc **Teorema 10.8.10** *Gli spazi $L^p(X,\mathcal{F},\mu)$, $1 < p < \infty$, sono uniformemente convessi e uniformemente lisci.*

Dimostrazione Utilizzeremo l'enunciato (3) dell'osservazione 10.8.3. Siano $f, g \in L^p$ con $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ e $\|f-g\| \geq \varepsilon$. Se $p \geq 2$, dalla disuguaglianza dell'esercizio 9.1.46 segue $\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2^p$, da cui

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p \leq \left(1 - \frac{\|f-g\|_p^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definendo $\delta = 1-\left(1-\frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}}$, si ha dunque $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \leq 1-\delta$, e quindi L^p è uniformemente convesso per $p \geq 2$.
Se $p \leq 2$, dalla disuguaglianza dell'esercizio 9.1.46, applicata a $\frac{f+g}{2}$ e $\frac{f-g}{2}$, segue

$$2 \geq \left(\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p\right)^p + \left|\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p - \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p\right|^p .$$

Ora, se L^p $(p \leq 2)$ non fosse uniformemente convesso, in base alla definizione 10.8.1 esisterebbero $\{f_n\}, \{g_n\} \subset L^p$, con $\|f_n\|_p = \|g_n\|_p = 1$, $\|f_n - g_n\|_p = \varepsilon$ e $\|f_n + g_n\|_p \to 2$. Allora, utilizzando la stessa disuguaglianza applicata a f_n e g_n ,

$$\begin{aligned} 2 &\geq \left(\left\|\frac{f_n+g_n}{2}\right\|_p + \left\|\frac{f_n-g_n}{2}\right\|_p\right)^p + \left(\left\|\frac{f_n+g_n}{2}\right\|_p - \left\|\frac{f_n-g_n}{2}\right\|_p\right)^p = \\ &= \left(\left\|\frac{f_n+g_n}{2}\right\|_p + \frac{\varepsilon}{2}\right)^p + \left(\left\|\frac{f_n+g_n}{2}\right\|_p - \frac{\varepsilon}{2}\right)^p , \end{aligned}$$

e per $n \to \infty$

$$2 \geq \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^p + \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^p .$$

D'altronde, $\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^p + \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^p > 2$, perché la funzione $h(x) = (1+x)^p + (1-x)^p$ verifica $h(0) = 2$ e $h'(x) = p\left[(1+x)^{p-1} - (1-x)^{p-1}\right] > 0$ per ogni $x \in]0,1]$. Ne segue l'assurdo. Dunque L^p è uniformemente convesso.
Per provare che L^p è uniformemente liscio, basta osservare che, per il teorema di Riesz-Fischer (teorema 9.2.1), si ha $L^p = (L^{p'})^*$, con $p' = \frac{p}{p-1}$; essendo $L^{p'}$, come si è appena provato, uno spazio uniformemente convesso, ricaviamo che L^p è uniformemente liscio in virtù del teorema 10.8.8. □

Esercizi 10.8

inf_eps

1. Sia X uniformemente convesso. Posto

$$\eta(\varepsilon) = \inf\{2 - \|x+y\|_X : \ \|x\|_X = 1, \ \|y\|_X = 1, \ \|x-y\|_X = \varepsilon\},$$

si provi che $\eta(\varepsilon) = \delta_X(\varepsilon)$.
[**Traccia:** per provare che $\eta(\varepsilon) \leq \delta_X(\varepsilon)$, si deve mostrare che, dati $x, y \in X$ con $\|x\|_X \leq 1$, $\|y\|_X \leq 1$, $\|x-y\|_X \geq \varepsilon$, esistono $w, z \in X$ con $\|w\|_X = \|z\|_X = 1$ e $\|w-z\|_X = \varepsilon$ tali che $\|w+z\|_X \geq \|x+y\|_X$. È utile, come passo intermedio, mostrare dapprima che esistono $u, v \in X$ con $\|u\|_X = \|v\|_X = 1$ e $\|u-v\|_X \geq \varepsilon$, tali che $\|u+w\|_X \geq \|x+y\|_X$, e a questo scopo, supposto ad esempio $\|y\|_X \leq \|x\|_X \leq 1$, si scelgano u e v di norma unitaria, appartenenti al piano generato da x e y, tali che $u-v = x-y$, e si assuma inoltre che i tre punti y, u, v siano tutti nello stesso semipiano delimitato dalla retta per 0 e x. Si osservi che esiste $\lambda > 1$ tale che $\lambda\frac{x+y}{2}$ appartiene alla semiretta uscente da x con direzione $u-x$; quindi esiste $\beta > 0$ tale che $\lambda\frac{x+y}{2} = \beta u + (1-\beta)x$. Si ricavi allora che $\lambda\frac{u+v}{2} = (\beta+\lambda)u + (1-\beta-\lambda)x$; essendo $\beta+\lambda > \beta \wedge 1$, si deduca che $\|u+v\|_X \geq \|x+y\|_X$. Adesso si scelgano w, z

di norma unitaria, appartenenti all'arco di estremi u, v contenuto nel semipiano sopra indicato, e tali che $\|w - z\|_X = \varepsilon$; si concluda che $\|w + z\|_X \geq \|u + v\|_X$ e si tragga la conclusione cercata.]

defequi

2. Dimostrare che ciascuna delle tre condizioni dell'osservazione 10.8.3 è equivalente alla definizione 10.8.1.

producuc

3. Estendere il risultato del teorema 10.8.5 al caso di m fattori: se $X_1, \ldots, X_m$ sono spazi di Banach uniformemente convessi, allora il loro prodotto $X = \Pi_{i=1}^m X_i$, munito della norma $\|(x_1, \ldots, x_m)\|_X = \sqrt{\sum_{i=1}^m \|x_i\|_{X_i}^2}$, è uno spazio di Banach uniformemente convesso.

minnor

4. Sia X uno spazio di Banach uniformemente convesso. Si provi che ogni convesso chiuso di X ha un unico elemento di norma minima.

wns

5. Sia X uno spazio di Banach uniformemente convesso. Si provi che se $\{x_n\} \subset X$ è tale che $x_n \rightharpoonup x$ e $\|x_n\|_X \to \|x\|_X$, allora $x_n \to x$.

ml**

6. Sia Y uno spazio di Banach e sia $\rho(\tau)$ il modulo di liscezza di Y. Si provi che $\rho_Y(\tau) = \rho_{Y^{**}}(\tau)$ per ogni $\tau > 0$.
[**Traccia:** per provare che $\rho_Y(\tau) \geq \rho_{Y^{**}}(\tau)$, si utilizzi la w^*-densità di $J(B)$ in B^{**} fornita dal lemma di Goldstine.]

Soluzioni degli esercizi del capitolo 10

sol10

Esercizi del paragrafo 10.1

Esercizio 10.1.1 Sia $p : X \to \mathbb{R}$ subadditivo, convesso, con $p(0) = 0$; siano $x \in X$ e $\lambda \geq 0$. Osserviamo che per $\lambda = 0$ la tesi è banale.
Proviamo che $p(\lambda x) \leq \lambda p(x)$ per ogni $\lambda > 0$. Se $0 < \lambda \leq 1$, per convessità,

$$p(\lambda x) = p(\lambda x + (1 - \lambda)0) \leq \lambda p(x) + (1 - \lambda)p(0) = \lambda p(x).$$

Se $1 < \lambda \leq 2$, per subadditività e per quanto già provato,

$$p(\lambda x) = p(x + (\lambda - 1)x) \leq p(x) + p((\lambda - 1)x) \leq p(x) + (\lambda - 1)p(x) = \lambda p(x).$$

Per induzione, se sappiamo che $p(\lambda x) \leq \lambda p(x)$ per ogni $\lambda \in [0, n]$, allora per $\lambda \in]n, n + 1]$, come nel passo precedente,

$$p(\lambda x) = p(x + (\lambda - n)x) \leq p(x) + p((\lambda - n)x) \leq p(x) + (\lambda - n)p(x) = \lambda p(x),$$

e pertanto vale la prima disuguaglianza per ogni $\lambda > 0$. Proviamo la disuguaglianza opposta: se $\lambda > 0$, posto $\lambda x = y$ la relazione precedente implica

$$p(y) \leq \lambda\, p\left(\frac{1}{\lambda}\, y\right), \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{\lambda}\, p(y) \leq p\left(\frac{1}{\lambda}\, y\right);$$

sostituendo λ a $\frac{1}{\lambda}$ e x ad y si ricava $\lambda p(x) \leq p(\lambda x)$ per ogni $\lambda > 0$ e $x \in X$, e dunque vale la disuguaglianza contraria.

Esercizio 10.1.2 (i) Sia $X = \mathbb{R}$. Posto $p(x) = \sqrt{|x|}$, p è subadditivo: infatti

$$\sqrt{|x+y|} \le \sqrt{|x|+|y|} \le \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|},$$

come si vede elevando al quadrato i due membri dell'ultima disuguaglianza; tuttavia p non è convesso (è concavo su $[0,\infty[$ e su $]-\infty,0]$) né positivamente omogeneo, essendo $\sqrt{\lambda|x|} = \sqrt{\lambda}\sqrt{|x|}$ per $\lambda > 0$.
(ii) Sia $X = \mathbb{R}^2$. Posto $p(x,y) = x^2+y^2$, p è convesso (è la norma al quadrato), ma non è positivamente omogeneo ($p(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 p(x,y)$) né subadditivo, in quanto

$$p(x+u, y+v) = (x+u)^2 + (y+v)^2 \le x^2+y^2+u^2+v^2 = p(x,y)+p(u,v) \quad \iff \quad 2xu + 2yv \le 0;$$

quindi la tesi è falsa, ad esempio, con $(x,y) = (1,2)$ e $(u,v) = (2,1)$.
(iii) Sia $X = \mathbb{R}^2$. Posto $p(x,y) = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$, p è positivamente omogeneo, perché $(\sqrt{\lambda|x|} + \sqrt{\lambda|y|})^2 = (\sqrt{\lambda}(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}))^2 = \lambda(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|})^2$, ma non è convesso né subadditivo: infatti, scegliendo i punti $(x,2x)$ e $(2x,x)$ si ha, con facili calcoli,

$$p(x,2x) = p(2x,x) = (3+2\sqrt{2})|x|, \qquad p(x+2x, 2x+x) = p(3x,3x) = 3p(x,x) = 12|x|,$$

ed è chiaro che

$$2(3+2\sqrt{2}) < 12 \quad \iff \quad 4\sqrt{2} < 6 \quad \iff \quad 32 < 36.$$

Inoltre, se $\lambda \in]0,1[$ si ha

$$\begin{aligned} p(\lambda(x,2x) + (1-\lambda)(2x,x)) &= (\sqrt{|\lambda x + 2(1-\lambda)x|} + \sqrt{|2\lambda x + (1-\lambda)x|})^2 = \\ &= (\sqrt{|2x-\lambda x|} + \sqrt{|\lambda x + x|})^2 = |x|(3 + 2\sqrt{(2-\lambda)(\lambda+1)}) = \\ &= |x|(3 + 2\sqrt{2+\lambda-\lambda^2}), \end{aligned}$$

mentre, per quanto già calcolato sopra,

$$\lambda p(x,2x) + (1-\lambda)p(2x,x) = (3+2\sqrt{2})|x| :$$

dato che $\lambda - \lambda^2 > 0$, la disuguaglianza di convessità non vale.

Esercizio 10.1.3 Essendo K convesso con 0 interno a K, per ogni $x \in X$ l'insieme $\{r > 0 : \frac{x}{r} \in K\}$ non è vuoto, perché esiste $\delta > 0$ tale che $B(0,\delta) \subseteq K$, e dunque $\frac{x}{r} \in K$ per r abbastanza grande.
(i) Proviamo che p_K è subadditivo: se $r, s > 0$ e $\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \in K$ con $r < p_K(x) + \varepsilon$, $s < p_K(y) + \varepsilon$, allora $\frac{x+y}{r+s} \in K$, in quanto, per convessità,

$$\frac{x+y}{r+s} = \frac{r}{r+s}\,\frac{x}{r} + \frac{s}{r+s}\,\frac{y}{s} \in K.$$

Pertanto

$$p_K(x+y) \le r + s < p_K(x) + p_k(y) + 2\varepsilon,$$

e siccome ε è arbitrario, si ha la tesi.
Proviamo che p_K è positivamente omogeneo: ovviamente $p_K(0) = 0$, e se $\lambda > 0$

$$p_K(\lambda x) = \inf\left\{r > 0 : \ \frac{\lambda x}{r} \in K\right\} = \lambda \inf\left\{t > 0 : \ \frac{x}{t} \in K\right\} = \lambda\, p_K(x).$$

(ii) Se $M > 0$ è sufficientemente grande, si ha $\frac{x}{M\|x\|_X} \in K$ e quindi $p_K(x) \le M\|x\|_X$.
(iii) Se $x \in K$, allora $\frac{x}{r} \in K$ per $r = 1$, da cui $p_K(x) \le 1$.

Esercizio 10.1.4 (i) Se $K = X$, allora $\frac{x}{r} \in K = X$ per ogni $r > 0$, da cui $p_K(x) = 0$ per ogni $x \in X$.
(ii) Se $K = B(0,R)$, allora $\frac{x}{r} \in K$ se e solo se $\frac{\|x\|_X}{r} \le R$, ossia se e solo se $r \ge \frac{\|x\|_X}{R}$; perciò $p_K(x) = \frac{\|x\|_X}{R}$.

(iii) Se $X = \ell^2$ e $K_j = \{x \in \ell^2 : \ |x_j| \le 1\}$, allora $\frac{x}{r} \in K_j$ se e solo se $\frac{|x_j|}{r} \le 1$, vale a dire se e solo se $r \ge |x_j|$; dunque $p_{K_j}(x) = |x_j|$.

(iv) Se $X = \mathbb{R}^2$ e $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ ax + by \le c\}$, allora $\frac{(x,y)}{r} \in K$ se e solo se $ax + by \le cr$. Ne segue $r > 0$ se $c \le 0$ mentre $r \ge \frac{ax+by}{c}$ se $c > 0$. In definitiva

$$p_K(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } c \le 0 \\ \dfrac{ax+by}{c} & \text{se } c > 0. \end{cases}$$

Esercizio 10.1.5 L'insieme K ha parte interna vuota: infatti se $x \in K$ e se, per assurdo, $B(x,r) \subset K$ per qualche $r > 0$, scelto $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $y_k = x_k$ per $k \ne n$ e $y_n = x_n + \frac{r}{2}$ per $k = n$, si ha $y \in B(x,r)$ ma, scegliendo n tale che $2^{-n} < \frac{r}{4}$, si ricava per $k = n$

$$|y_n| = |y_n - x_n + x_n| \ge |y_n - x_n| - |x_n| = \frac{r}{2} - |x_n| > 2 \cdot 2^{-n} - 2^{-n} = 2^{-n},$$

e dunque $y \notin K$, assurdo.
Sia ora $x \in c_{00}$: allora $\frac{x}{r} \in K$ se e solo se $\frac{|x_n|}{r} < 2^{-n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ossia se e solo se $r > 2^n |x_n|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e questa relazione non è assurda essendo $x_n = 0$ definitivamente. Ne segue

$$p_K(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} 2^n |x_n| \qquad \forall x \in c_{00}\,.$$

Esercizio 10.1.6 Sia $f : M \to \mathbb{C}$ lineare, tale che $|fx| \le p(x)$ per ogni $x \in M$. Allora, in particolare, $|\mathrm{Re}\, fx| \le p(x)$ per ogni $x \in M$. Vedendo M e X come spazi reali, ed applicando il teorema di Hahn-Banach (teorema 10.1.3), esiste $G : X \to \mathbb{R}$ lineare, tale che $G|_M = \mathrm{Re}\, f$ e $|Gx| \le p(x)$ per ogni $x \in M$. A questo punto, posto $Fx = Gx - iG(ix)$ per ogni $x \in X$, si ha $F : X \to \mathbb{C}$ e, per ogni $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} F((\alpha+i\beta)x) &= G((\alpha+i\beta)x) - iG((i\alpha-\beta)x) = \alpha Gx + \beta G(ix) + i\beta Gx - i\alpha G(ix) = \\ &= \alpha[Gx - iG(ix)]] + i\beta[Gx - iG(ix)] = (\alpha+i\beta)Fx, \end{aligned}$$

quindi F è $\mathbb{C}$-lineare. Inoltre, essendo $f((\alpha+i\beta)x) = (\alpha+i\beta)fx$, risulta

$$[\mathrm{Re}\, f]((\alpha+i\beta)x) = \alpha[\mathrm{Re}\, f]x - \beta[\mathrm{Im}\, f]x$$
$$[\mathrm{Im}\, f]((\alpha+i\beta)x) = \beta[\mathrm{Re}\, f]x + \alpha[\mathrm{Im}\, f]x,$$

da cui, per $x \in M$,

$$Fx = Gx - iG(ix) = [\mathrm{Re}\, f]x - i[\mathrm{Re}\, f](ix) = [\mathrm{Re}\, f]x + i[\mathrm{Im}\, f]x = fx,$$

ossia $Fx = fx$ per $x \in M$.
Infine, sia $x \in X$. Scegliamo $\vartheta \in [0, 2\pi[$ tale che $Fx = \mathrm{Re}\, Fx = r\, e^{i\vartheta}$, ove $r = |Fx|$. Allora $F(e^{-i\vartheta}x) = e^{-i\vartheta}Fx = r$ cosicché, essendo $p(\gamma x) = |\gamma| p(x)$ per ogni $\gamma \in \mathbb{C}$ e ricordando che G è un funzionale reale,

$$r = F(e^{-i\vartheta}x) = |[\mathrm{Re}\, F](e^{-i\vartheta}x)| = |G(e^{-i\vartheta}x)| \le p(e^{-i\vartheta}x) = p(x).$$

Ciò prova che $|Fx| \le p(x)$ per ogni $x \in X$.

Esercizio 10.1.7 Sia $x_0 \in X \setminus K$. Definiamo $f : [\{x_0\}] \to \mathbb{R}$ ponendo $f(tx_0) = t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Allora, considerando il funzionale di Minkowski di K, si ha $fx \le p_K(x)$ per ogni $x \in [\{x_0\}]$: infatti, se $t > 0$

$$f(tx_0) = t, \qquad p_K(tx_0) = \inf\left\{ r > 0 : \ \frac{tx_0}{r} \in K \right\} \ge t,$$

in quanto $x_0 \notin K$; se invece $t \le 0$ si ha banalmente $f(tx_0) = t \le 0 \le p_K(tx_0)$. Per il teorema di Hahn-Banach (teorema 10.1.3) esiste $F \in X^*$ tale che $F(tx_0) = t = f(tx_0)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $Fx \le p_K(x)$ per

ogni $x \in X$. In particolare, se $x \in K$ si ha $Fx \le p_K(x) \le 1$ (grazie all'esercizio 10.1.3(iii)), mentre $Fx_0 = fx_0 = 1$.

Esercizio 10.1.8 Poniamo $H = K - M = \{x - z : \ x \in K, \ z \in M\}$. L'insieme H è convesso perché tali sono K e M, e $0 \notin H$ perché H e M sono disgiunti. Grazie all'esercizio 10.1,7, esiste $F \in X^*$ tale che

$$F(x - z) \le F0 = 0 \qquad \forall x \in K, \quad \forall z \in M.$$

Allora $Fx \le Fz$ per ogni $x \in K$ e $z \in M$, e dunque $\sup_K F \le \inf_M F$.

Esercizio 10.1.9 Poniamo $M_\varepsilon = M + \overline{B(0,\varepsilon)}$; poiché M è compatto, per ε sufficientemente piccolo i convessi K e M_ε sono disgiunti. Per l'esercizio 10.1.8, esiste $F \in X^*$ tale che $\sup_K F \le \inf_{M_\varepsilon} F$. D'altra parte,

$$\inf_{M_\varepsilon} F = \inf_{x \in M,\, u \in \overline{B(0,\varepsilon)}} F(x+u) = \inf_{x \in M} Fx + \inf_{u \in \overline{B(0,\varepsilon)}} Fu = \inf_M F - \varepsilon \|F\|_{X^*} :$$

infatti per ogni $\delta > 0$ esiste $u \in X$, con $\|u\|_X = 1$, tale che $Fu > \|F\|_{X^*} - \delta$, da cui $F(-u) < -\|F\|_{X^*} + \delta$; pertanto $\varepsilon u \in \overline{B(0,\varepsilon)}$ verifica $-\varepsilon\|F\|_{X^*} \le F(-\varepsilon u) < -\varepsilon\|F\|_{X^*} + \varepsilon\delta$, da cui $\inf_{\overline{B(0,\varepsilon)}} F = -\varepsilon\|F\|_{X^*}$. Si conclude così che $\sup_K F \le \inf_M F - \varepsilon\|F\|_{X^*} < \inf_M F$.

Esercizio 10.1.10 Sia M un sottospazio denso in X. Se $F|_M = 0$, allora fissato $x \in X$ sia $\{x_n\} \subset M$ una successione convergente a x. Poiché $Fx_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, per continuità si ha $Fx = 0$; quindi $F \equiv 0$. Viceversa, se vale l'implicazione $F|_M = 0 \implies F \equiv 0$, e se il sottospazio M non è denso, allora, scelto $x_0 \notin \overline{M}$, per il corollario 10.1.6 esiste $F \in X^*$ tale che $F|_M = 0$ ma $Fx_0 \neq 0$, violando l'implicazione sopra scritta.

Esercizio 10.1.11 Sia $y \notin M$. Allora, dato che M è chiuso, la distanza d di y da M è positiva. Fissato $\varepsilon \in]0,1[$, esiste $z_\varepsilon \in M$ tale che

$$d \le \|y - z_\varepsilon\|_X < \frac{d}{1-\varepsilon}\,.$$

Posto $x_\varepsilon = \frac{y - z_\varepsilon}{\|y - z_\varepsilon\|_X}$, si ha $x_\varepsilon \notin M$, $\|x_\varepsilon\|_X = 1$ e, per ogni $x \in M$,

$$\|x_\varepsilon - x\|_X = \left\| \frac{y - z_\varepsilon - x\|y - z_\varepsilon\|_X}{\|y - z_\varepsilon\|_X} \right\|_X \ge \frac{1-\varepsilon}{d} \|y - (z_\varepsilon + x\|y - z_\varepsilon\|_X)\|_X \ge \frac{1-\varepsilon}{d}\, d = 1 - \varepsilon.$$

Esercizio 10.1.12 Se $x \in \overline{[E]}$, esiste $\{x_n\} \subseteq [E]$ tale che $x_n \to x$. Poiché ciascun x_n è combinazione lineare finita di elementi di E, vale $Fx_n = 0$ per ogni $F \in E^0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$; quindi, per continuità, $Fx = 0$ per ogni $F \in E^0$. Ne segue $x \in E^{00}$.
Viceversa, sia $x \in E^{00}$; se fosse $x \notin \overline{[E]}$, per il corollario 10.1.6 esisterebbe $F \in X^*$ tale che $Fx = 1$ e $F|_{\overline{[E]}} = 0$. In particolare, $F|_E = 0$ e quindi $F \in E^0$. Allora, essendo $x \in E^{00}$, dovrebbe essere $1 = Fx = 0$, il che è assurdo. Dunque $x \in \overline{[E]}$.

Esercizio 10.1.13 Se g è combinazione lineare degli f_k, allora ovviamente $\bigcap_{k=1}^n \ker f_k \subseteq \ker g$. Viceversa, supponiamo che $\bigcap_{k=1}^n \ker f_k \subseteq \ker g$. Poniamo $Tx = (f_1 x, \dots, f_n x)$ e definiamo

$$h : R(T) \to \mathbb{C}, \qquad h(Tx) = gx \quad \forall x \in X.$$

Il funzionale h è ben definito grazie all'ipotesi: infatti, se $Tx = T\xi$, allora $x - \xi \in \bigcap_{k=1}^n \ker f_k$ e dunque $gx = g\xi$. Inoltre, h è continuo, essendo un funzionale lineare definito su uno spazio n-dimensionale. Per il teorema di Hahn-Banach, esiste $H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, lineare e continuo, tale che $H|_{R(T)} = h$ e $\|H\| = \|h\|$. Il funzionale H avrà la forma

$$Hx = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}, \qquad x \in \mathbb{C}^n,$$

ove $y \in \mathbb{C}^n$. Ne segue, per ogni $x \in \mathbb{C}^n$,

$$gx = h(Tx) = H(Tx) = \sum_{k=1}^n f_k x\, \overline{y_k} = \sum_{k=1}^n \overline{y_k}\, f_k x\,,$$

ossia g è combinazione lineare degli f_k.

Esercizio 10.1.14 **(i) $\Longrightarrow$ (ii)** Anzitutto, dall'ipotesi segue che a e b sono linearmente indipendenti: infatti, se $\lambda a + \mu b = 0$ e $\lambda \neq 0$, allora $|\lambda| \left\|a + \frac{\mu}{\lambda} b\right\|_X = 0$, da cui $\left\|a + \frac{\mu}{\lambda} b\right\|_X = 0 < \|a\|_X$, il che contraddice (i). Perciò $\lambda = 0$, il che implica $\mu b = 0$ cioè $\mu = 0$.
Poniamo $f(a) = \|a\|_X$ e $f(b) = 0$: f è definito su $[\{a, b\}]$ e risulta, grazie a (i),

$$|f(\lambda a + \mu b)| = |\lambda| \, \|a\|_X \leq |\lambda| \, \left\|a + \frac{\mu}{\lambda} b\right\|_X = \|\lambda a + \mu b\|_X \, ,$$

per cui il funzionale f ha norma 1 su $[\{a, b\}]$. Dal teorema di Hahn-Banach (teorema 10.1.3) segue (ii).
(ii) $\Longrightarrow$ (i) Se esistesse $t \in \mathbb{C}$ tale che $\|a\|_X > \|a + tb\|_X$ allora per il funzionale f definito in (ii) si avrebbe

$$f(a) = \|a\|_X > \|a + tb\|_X \geq |f(a + tb)| = |f(a)|,$$

assurdo.
Supponiamo che X sia uno spazio di Hilbert. Se vale (i), allora

$$\|a\|_X^2 \leq \|a + tb\|_X^2 = \|a\|_X^2 + 2\mathrm{Re}\,[t(a, b)_X] + |t|^2 \|b\|_X^2 \qquad \forall t \in \mathbb{C},$$

da cui $|t|^2 \|b\|_X^2 \geq -2\mathrm{Re}\,[t(a, b)_X]$ per ogni $t \in \mathbb{C}$; scelto $t = -\alpha \, \overline{(a, b)_X}$, con α reale positivo, si ricava $\|b\|_X^2 |(a, b)_X|^2 \alpha^2 > 2|(a, b)_X|^2 \, \alpha$. Dividendo per α e mandando $\alpha \to 0^+$ si ha l'assurdo a meno che non sia $(a, b)_X = 0$.
Viceversa, se vale (iii) allora si ha, essendo $(a, b)_X = 0$,

$$\|a\|_X^2 \leq \|a\|_X^2 + |t|^2 \|b\|_X^2 = \|a + tb\|_X^2 \, ,$$

cosicché vale (i).

Esercizio 10.1.15 **(i)** Sia $z = \{1, 1, 1, \ldots\}$. Osserviamo anzitutto che si ha $e_1 = \{1, 0, 0, 0, \ldots\} \in M$, in quanto $z \in \ell^\infty$ e $(e_1)_1 = 1 = z_1$, $(e_1)_i = 0 = z_{i+1} - z_i$ per ogni $i \geq 2$; inoltre $\|z - e_1\|_\infty = 1$, da cui $\delta \leq 1$. Se fosse $\delta < 1$, sarebbe $\|z - x\|_\infty < 1$ per un certo $x = (y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2, \ldots\} \in M$: dato che

$$\|z - x\|_\infty = \sup\{|y_1 - 1|, |y_2 - y_1 - 1|, |y_3 - y_2 - 1|, \ldots\},$$

avremmo

$$|y_1 - 1| < 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < y_1 < 2,$$
$$|y_2 - y_1 - 1| < 1 \quad \Longrightarrow \quad y_1 < y_2 < y_1 + 2,$$

e in particolare $y_1 < y_2$; se poi $y_{k-1} < y_k$, allora

$$|y_{k+1} - y_k - 1| < 1 \quad \Longrightarrow \quad y_k < y_{k+1} < y_k + 2,$$

e in particolare $y_k < y_{k+1}$. Pertanto, se $x \in M$ e $\|z - x\|_\infty < 1$, allora $x = \{y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2, \ldots\}$ con $\{y_k\}$ crescente. Detto L il limite delle y_k, si ha $L \in \mathbb{R}$ in quanto $y \in \ell^\infty$. Ma allora, passando al limite per $k \to \infty$ nella relazione $|y_{k+1} - y_k - 1| < 1$, si ottiene $|L - L - 1| = 1$, e pertanto $\|z - x\|_\infty = 1$: assurdo. Ciò prova che $\delta = 1$ e dunque, in particolare, $z \notin M_0$.
(ii) Per il corollario 10.1.6, esiste $T \in (\ell^\infty)^*$ tale che $T|_M = 0$, $\|T\|_{(\ell^\infty)^*} = 1$, $Tz = 1$.
(iii) (a) Se $x \in \ell^\infty$, si verifica facilmente che $\tau x - x + x_1 e_1 = \{x_2, x_3 - x_2, x_4 - x_3, \ldots\} \in M$, ed essendo $e_1 \in M$ si ricava per differenza $\tau x - x \in M$ (ed infatti

$$\tau x - x = \{x_2 - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_3, \ldots\} = \{x_2 - x_1, (x_3 - x_1) - (x_2 - x_1), (x_4 - x_1) - (x_3 - x_1), \ldots\}) :$$

quindi $T(\tau x) - Tx = 0$.
(iii) (b) Sia $x \in \ell^\infty$ con $x_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Supponiamo dapprima $0 \leq x_n \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$: allora $\|x - z\|_\infty \leq 1$, quindi

$$|Tx - 1| = |Tx - Tz| \leq \|T\|_{(\ell^\infty)^*} \|x - z\|_\infty = \|x - z\|_\infty \leq 1,$$

da cui $0 \le Tx \le 2$; in particolare $Tx \ge 0$. Se si ha solamente $x_n \ge 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, allora $\frac{x}{\|x\|_\infty}$ verifica $0 \le \frac{x_n}{\|x\|_\infty} \le 1$; dunque, per quanto appena visto, $T\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) = \frac{1}{\|x\|_\infty} Tx \ge 0$, ossia $Tx \ge 0$.

(iii) (c) Siano $\ell = \liminf_{n\to\infty} x_n$ e $L = \limsup_{n\to\infty} x_n$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$\ell - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon \qquad \forall n > \nu_\varepsilon\,.$$

Dato che $\tau^n x = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$, si ha $\tau^n x - (\ell - \varepsilon)\tau^n z \ge 0$ per ogni $n \ge \nu_\varepsilon$; inoltre, in virtù di (b),

$$T(\tau^n x - (\ell - \varepsilon)\tau^n z) \ge 0 \qquad \forall n \ge \nu_\varepsilon\,,$$

ovvero

$$Tx = T(\tau^n x) \ge T((\ell - \varepsilon)\tau^n z) = (\ell - \varepsilon)Tz = \ell - \varepsilon;$$

siccome ε è arbitrario, si conclude che $Tx \ge \ell$. In modo analogo, si ha $(L + \varepsilon)\tau^n z - \tau^n x \ge 0$ per ogni $n \ge \nu_\varepsilon$, da cui

$$Tx = T(\tau^n x) \le (L + \varepsilon)T(\tau^n z) = L + \varepsilon,$$

e per l'arbitrarietà di ε ricaviamo $Tx \le L$.

(iii) (d) Segue subito da (c) nel caso in cui la successione $x = \{x_n\}$ abbia limite.

Esercizio 10.1.16 Sia L l'insieme delle funzioni limitate da X in $\mathbb{R}$, con norma $\|f\|_L = \sup_{x\in X} |f(x)|$ per ogni $f \in L$. Sia

$$M = \left\{ \varphi = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A_j} : \ A_j \text{ disgiunti } \in \mathcal{F},\ m \in \mathbb{N}^+,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R} \right\}.$$

Definiamo $g : M \to \mathbb{R}$ ponendo

$$g\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A_j}\right) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu_0(A_j).$$

Questo funzionale g è lineare su M e vale $|g(\varphi)| \le \mu_0(X)\|\varphi\|_L$ per ogni $\varphi \in M$. Per il teorema di Hahn-Banach esiste $G : L \to \mathbb{R}$, lineare, tale che $G|_M = g$, $G(f) \le \mu_0(X)\|f\|_L$ per ogni $f \in L$. Poniamo $\mu(A) = G(\chi_A)$ per ogni $A \subseteq X$: dato che $\chi_A \in L$ per ogni $A \subseteq X$, G è ben definito e quindi anche μ lo è. Inoltre $\mu(\emptyset) = G(0) = 0$, e se $A_1, \ldots, A_m$ sono disgiunti si ha

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^m A_j\right) = G\left(\chi_{\bigcup_{j=1}^m A_j}\right) = G\left(\sum_{j=1}^m \chi_{A_j}\right) = \sum_{j=1}^m G\left(\chi_{A_j}\right) = \sum_{j=1}^m \mu(A_j);$$

quindi μ è finitamente additiva e, ovviamente, se $A \in \mathcal{F}$ si ha $\mu(A) = G(\chi_A) = g(\chi_A) = \mu_0(A)$.

Esercizi del paragrafo 10.2

Esercizio 10.2.1 (i) Poiché la successione $\{T_n x\}$ converge in Y, essa è limitata: dunque esiste $K_x > 0$ tale che $\|T_n x\|_Y \le K_x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poiché ciò vale per ogni $x \in X$, per il teorema di Banach-Steinhaus (teorema 10.2.1) esiste $M > 0$ tale che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le M.$$

(ii) Poniamo $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$. Chiaramente T è lineare; inoltre, per (i),

$$\|Tx\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_Y \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X \le M\|x\|_X \quad \forall x \in X,$$

dunque $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(iii) Risulta

$$\|Tx\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_Y \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X \,,$$

da cui la tesi.

Esercizio 10.2.2 Poiché per ogni $x \in X$ l'insieme $\{Tx : \ T \in B\}$ è limitato in $\mathbb{R}$, esiste $K_x > 0$ tale che $|Tx| \le K_x$ per ogni $T \in B$. Ne segue, per il teorema di Banach-Steinhaus (teorema 10.2.1), che esiste $K > 0$ tale che

$$\sup_{T\in B} \|T\|_{X^*} \le K;$$

dunque B è limitato in X^*.

Esercizio 10.2.3 Poiché per ogni $T \in X^*$ l'insieme $T(B)$ è limitato in $\mathbb{R}$, esiste $K_T > 0$ tale che $|Tx| \le K_T$ per ogni $x \in B$, ossia, per definizione di J_x, $|J_x(T)| \le K_T$ per ogni $x \in B$. Ne segue, per il teorema di Banach-Steinhaus (teorema 10.2.1), che esiste $K > 0$ tale che

$$\sup_{x\in B} \|J_x\|_{X^{**}} \le K.$$

D'altra parte, $|J_x(T)| = |Tx| \le \|T\|_{X^*}\|x\|_X$ per ogni $x \in X$ e $T \in X^*$, da cui $\|J_x\|_{X^{**}} \le \|x\|_X$; scelto, grazie al corollario 10.1.5, un funzionale $T_0 \in X^*$ tale che $\|T_0\|_{X^*} = 1$ e $T_0 x = \|x\|_X$, si ha

$$\|x\|_X = |T_0 x| = |J_x T_0| \le \|J_x\|_{X^{**}} \|T_0\|_{X^*} = \|J_x\|_{X^{**}},$$

e quindi $\|x\|_X = \|J_x\|_{X^{**}}$. Pertanto

$$\sup_{x\in B} \|x\|_X \le K,$$

ossia B è limitato in X.

Esercizio 10.2.4 Se $x \in c_{00}$, esiste $N_x \in \mathbb{N}$ tale che $x_k = 0$ per ogni $k > N_x$: dunque

$$|T_k x| = \begin{cases} k|x_k| & \text{se } k \le N_x \\ 0 & \text{se } k > N_x; \end{cases}$$

pertanto

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |T_k x| \le N_x \|x\|_1 \qquad \forall x \in c_{00} \,.$$

In particolare risulta $|T_k x| \le k\|x\|_1$, da cui $\|T_k\| \le k$. D'altra parte, scegliendo $x = e_k$ si ha $T_k e_k = k$, $\|e_k\|_1 = 1$,cioè $\|T_k\| = k$; quindi $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|T_k\| = \infty$. Il teorema di Banach-Steinhaus non è applicabile, perché $(c_{00}, \|\dot{\|}_1)$ non è uno spazio di Banach.

Esercizio 10.2.5 (i) Per ogni $a \in c_0$ si ha

$$|T_k a| \le \sum_{h=0}^{k} |x_h|\,|a_h| \le \|a\|_\infty \sum_{h=0}^{k} |x_h|;$$

se si sceglie $a_h = \operatorname{sgn} x_h$ per $h = 1, \dots, k$, e $a_h = 0$ per ogni $h > k$, si ottiene $\|a\|_\infty = 1$ e $T_k a = \sum_{h=0}^{k} |x_h| = \|T_k\|_{c_0^*}$.

(ii) Supponiamo che esista

$$\lim_{k\to\infty} T_k a = L_a \in \mathbb{R} \qquad \forall a \in c_0 \,.$$

Posto $Ta = L_a = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x_h$, si vede subito che T è lineare; inoltre

$$|Ta| = \lim_{k\to\infty} |T_k a| \le \liminf_{k\to\infty} \|T_k\|_{c_0^*} \|a\|_\infty = \sum_{h=0}^{\infty} |x_h| \|a\|_\infty \,,$$

da cui $T \in c_0^*$. Scegliendo a come in (i), si ottiene

$$Ta = \lim_{k\to\infty} T_k a = \lim_{k\to\infty} \sum_{h=0}^{k} |x_h| = \sum_{h=0}^{\infty} |x_h|,$$

ossia $\|T\|_{c_0^*} = \sum_{h=0}^{\infty} |x_h|$. La convergenza di tale serie, in particolare, è conseguenza dell'esistenza del limite finito delle $T_k a$ per ogni $a \in c_0$. In questo caso si ha anche

$$\|T_k - T\|_{c_0^*} = \sup_{a\in c_0} \frac{1}{\|a\|_\infty} \left| \sum_{h=k+1}^{\infty} a_h x_h \right| \le \sup_{a\in c_0} \frac{1}{\|a\|_\infty} \sum_{h=k+1}^{\infty} |x_h|\, \|a\|_\infty = \sum_{h=k+1}^{\infty} |x_h| \to 0 \quad \text{per} \quad k \to \infty.$$

Esercizio 10.2.6 (i) Sia

$$A_N(b) = \sum_{n=0}^{N} a_n b_n\,, \quad b \in \ell^1.$$

Per ipotesi, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge per ogni $b \in \ell^1$; quindi la successione delle somme parziali è limitata. Pertanto per ogni $b \in \ell^1$ esiste $K_b > 0$ tale che $|A_N(b)| \le K_b$ per ogni $N \in \mathbb{N}$. Dal teorema di Banach-Steinhaus segue che esiste $K > 0$ per cui $\|A_N\|_{(\ell^1)^*} \le K$ per ogni $N \in \mathbb{N}$. Ma risulta

$$\|A_N\|_{\ell^1)^*} \le \sup_{0\le n\le N} |a_n|,$$

e vale l'uguaglianza, come si vede scegliendo $b = \operatorname{sgn}(a_{k_N})\, e_{k_N}$, ove $|a_{k_N}| = \max_{0\le n\le N} |a_n|$. Quindi

$$\sup_{0\le n\le N} |a_n| \le K \quad \forall N \in \mathbb{N}, \qquad \text{ossia} \qquad a \in \ell^\infty.$$

(ii) Sia

$$B_N(b) = \sum_{n=0}^{N} a_n b_n\,, \quad b \in c_0\,.$$

Per ipotesi, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge per ogni $b \in c_0$; quindi, ragionando come in (i), esiste $K_b > 0$ tale che $|B_N(b)| \le K_b$ per ogni $N \in \mathbb{N}$. Dal teorema di Banach-Steinhaus segue che esiste $K > 0$ per cui $\|B_N\|_{c_0^*} \le K$ per ogni $N \in \mathbb{N}$. Ma risulta

$$\|B_N\|_{c_0^*} \le \sum_{n=0}^{N} |a_n|,$$

e vale l'uguaglianza, come si vede scegliendo $b_n = \operatorname{sgn}(a_n)$ per $n \le N$ e $b_n = 0$ per $n > N$. Quindi

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n| \le K \quad \forall N \in \mathbb{N}, \qquad \text{ossia} \qquad a \in \ell^1.$$

Esercizio 10.2.7 Per ipotesi, per ogni $\varphi \in Y^*$ e per ogni $x \in X$ esiste $K_{x,\varphi} > 0$ tale che

$$|\varphi(T_\alpha x)| \le K_{x,\varphi} \qquad \forall \alpha \in A, \quad \forall x \in X, \quad \forall \varphi \in Y^*.$$

Sia $G_\alpha : X \times Y^* \to \mathbb{R}$ l'operatore definito da $G_\alpha(x,\varphi) = \varphi(T_\alpha x)$; allora si ha

$$\sup_{\alpha\in A} |G_\alpha(x,\varphi)| \le K_{x,\varphi} \qquad \forall (x,\varphi) \in X \times Y^*;$$

dato che $X \times Y^*$ è completo, dal teorema di Banach-Steinhaus segue

$$\|G_\alpha\|_{(X\times Y^*)^*} \le K \qquad \forall \alpha \in A.$$

D'altronde risulta $|G_\alpha(x,\varphi)| \le \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|x\|_X\|\varphi\|_{Y^*}$; poi, scegliendo $x_\varepsilon \in X$ tale che $\|x_\varepsilon\|_X = 1$ e $\|T_\alpha x_\varepsilon\|_Y > \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} - \varepsilon$, nonché (grazie al corollario 10.1.5) $\varphi_\varepsilon \in Y^*$ tale che $\|\varphi_\varepsilon\|_{Y^*} = 1$ e $\varphi_\varepsilon(T_\alpha x_\varepsilon) = \|T_\alpha x_\varepsilon\|_Y$, si trova

$$|G_\alpha(x_\varepsilon,\varphi_\varepsilon)| = \|T_\alpha x_\varepsilon\|_X > \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} - \varepsilon.$$

Pertanto $\|G_\alpha\|_{(X\times Y^*)^*} = \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$, e dunque

$$\|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le K \qquad \forall \alpha \in A.$$

Esercizio 10.2.8 Per ipotesi valgono le relazioni seguenti:

$$(1)\quad |f(B(x,y))| \le K_{f,y}\|x\|_X \qquad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y, \quad \forall f \in Z^*,$$

$$(2)\quad |f(B(x,y))| \le \|f\|_{Z^*}\|B(x,y)\|_Z \qquad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y, \quad \forall f \in Z^*.$$

Da (1) segue che il funzionale $T_{f,y}(x) = f(B(x,y))$ è un elemento di X^*, e che

$$\sup_{\|y\|_Y=1}\sup_{\|f\|_{Z^*}=1} |T_{f,y}(x)| < \infty \qquad \forall x \in X,$$

da cui, per il teorema di Banach-Steinhaus applicato su X,

$$\sup_{\|y\|_Y=1}\sup_{\|f\|_{Z^*}=1} \|T_{f,y}\|_{X^*} < \infty,$$

ovvero

$$\sup_{\|y\|_Y=1}\sup_{\|f\|_{Z^*}=1}\sup_{\|x\|_X=1} |f(B(x,y))| < \infty.$$

D'altronde, da (2) segue

$$\sup_{\|f\|_{Z^*}=1} |f(B(x,y))| \le \|B(x,y)\|_Z\,,$$

e scegliendo $f \in Z^*$ tale che $\|f\|_{Z^*} = 1$ e $f(B(x,y)) = \|B(x,y)\|_Z$ (corollario 10.1.5), si trova

$$\|B(x,y)\|_Z = f(B(x,y)) \le \sup_{\|f\|_{Z^*}=1} |f(B(x,y))|;$$

perciò $\|B(x,y)\|_Z = \sup_{\|f\|_{Z^*}=1} |f(B(x,y))|$ e la condizione precedente ci dice che

$$\sup_{\|y\|_Y=1}\sup_{\|x|_X=1} \|B(x,y)\|_Z < \infty,$$

che è la tesi.

Esercizio 10.2.9 Ripercorriamo l'argomentazione svolta alla fine del paragrafo 10.2: per ogni fissato $x \in [-\pi,\pi]$, posto $T_n f = S_n f(x)$ per ogni $f \in C_\#[-\pi,\pi]$, risulta

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{C_\#[-\pi,\pi]^*} = \infty.$$

Quindi deve valere la seconda alternativa del teorema di Banach-Steinhaus (teorema 10.2.1): pertanto, per ogni $x \in [-\pi,\pi]$ esiste un insieme D_x, intersezione numerabile di aperti densi e dunque anch'esso denso in $C_\#[-\pi,\pi]$, tale che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n f| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n f(x)| = \infty.$$

Sia adesso $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [-\pi,\pi]$ una successione densa in $[-\pi,\pi]$. Ciascuno dei corrispondenti insiemi D_{x_k} è intersezione numerabile di certi aperti A_{km}, $m \in \mathbb{N}$, densi in $C_\#[-\pi,\pi]$; dunque l'insieme

$$D = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} D_{x_k} = \bigcap_{k\in n\mathbb{N}}\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_{km}$$

è a sua volta intersezione numerabile di aperti densi e pertanto è denso in $C_{\#}[-\pi,\pi]$ in virtù del teorema di Baire (teorema 10.2.2). Per definizione, le funzioni $f \in D$ verificano la condizione

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n f(x_k)| = \infty \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

e in definitiva, posto $E = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, si ottiene che vi è un denso D di funzioni continue e periodiche per il quale, per ogni $f \in D$, l'insieme

$$\left\{ x \in [-\pi,\pi] : \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n f(x)| = \infty \right\}$$

è denso in $[-\pi,\pi]$, dato che contiene E.

Esercizio 10.2.10 Supponiamo per assurdo che tutti i K_n abbiano parte interna vuota. Allora gli insiemi K_n^c sono aperti densi in X, la cui intersezione è vuota, e questo contraddice il teorema di Baire.

Esercizio 10.2.11 Fissiamo $[c,d] \subseteq [a,b]$. Gli insiemi $A_n = \{x \in [c,d] : \ |f_k'(x) - g(x)| \le 1 \ \forall k \ge n\}$ sono chiusi e la loro unione è $[c,d]$, poiché le f_n' convergono a g puntualmente. Dunque, per il teorema di Baire e l'esercizio 10.2.10, almeno uno fra gli A_n ha parte interna non vuota: perciò esistono $n \in \mathbb{N}$ ed un intervallo $[s,t] \subset [c,d]$, per i quali si ha $|f_n'(x)| \le |g(x)| + 1$ per ogni $x \in [s,t]$. Dalla relazione

$$f_n(x) - f_n(y) = \int_y^x f_n'(r)\, dr \qquad \forall x, y \in [s,t]$$

segue allora, per il teorema di Lebesgue,

$$f(x) - f(y) = \int_y^x g'(r)\, dr \qquad \forall x, y \in [s,t],$$

da cui segue $f' = g$ in $[s,t]$. Ora, se in un intervallo $J \subset [a,b]$ valesse $f' \neq g$, potremmo scegliere $[c,d] = J$ e, ripetendo il ragionamento precedente, dedurre che $f' = g$ in un sottointervallo J' di J, il che è assurdo. Pertanto l'insieme $\{x \in [a,b] : \ f'(x) \neq g(x)\}$ ha parte interna vuota; ma allora, per continuità di f' e g, tale insieme deve essere vuoto, ossia $f' = g$ in $[c,d]$.

Esercizi del paragrafo 10.3

Esercizio 10.3.1 (i) Si ha

$$\|r(F)\|_{M^*} = \|F|_M\|_{M^*} = \sup_{x\in M} \frac{|Fx|}{\|x\|_X} \le \sup_{x\in X} \frac{|Fx|}{\|x\|_X} = \|F\|_{X^*},$$

quindi $\|r\|_{\mathcal{L}(X^*,M^*)} \le 1$. D'altra parte, fissato $x_0 \in M$ e scelto $F \in X^*$ tale che $\|F\|_{X^*} = 1$ e $Fx_0 = \|x_0\|_X$ (corollario 10.1.5), si ha $\|r(F)\|_{M^*} \ge \frac{Fx_0}{\|x_0\|_X} = 1 = \|F\|_{X^*}$, da cui $\|r\|_{\mathcal{L}(X^*,M^*)} = 1$.

(ii) L'operatore r è iniettivo se e solo se $\overline{M} = X$. Infatti, in tal caso se $F \in X^*$ e $r(F) = 0$ allora $F|_M = 0$ e, per densità, $F = 0$. Viceversa, se r è iniettivo e se fosse $\overline{M} \subset X$, scelto $x_0 \in X \setminus \overline{M}$, per il corollario 10.1.5 esisterebbe $G \in X^*$ tale che $G|_M = 0$ e $G(x_0) = 1$; ma allora F e $F + G$ coinciderebbero su M mentre $(F+G)x_0 = Fx_0 + 1$, cosicché $r(F) = r(F+G)$ con $F \neq F + G$, il che è assurdo.
Inoltre r è surgettivo, perché se $f \in M^*$ esiste $c > 0$ tale che $|fx| \le c\|x\|_X$ per ogni $x \in M$; in virtù del teorema di Hahn-Banach esiste $F \in X^*$ tale che $F = f$ su M e $|Fx| \le c\|x\|_X$ per ogni $x \in M$, da cui $r(F) = f$.

(iii) Poiché r è continuo e surgettivo, per il teorema 10.3.1 r è un'applicazione aperta.

Esercizio 10.3.2 Per il teorema dell'applicazione aperta (teorema 10.3.1), detto $B = \{x \in X : \|x\|_X < 1\}$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $S_\varepsilon = \{y \in Y : \ \|y\|_Y < \varepsilon\} \subseteq T(B)$. Sia $y \in Y \setminus \{0\}$: posto $t = \frac{\varepsilon}{2\|y\|_Y}$ si ha $\|ty\|_Y = \frac{\varepsilon}{2}$ e dunque $ty \in S_\varepsilon$. Esiste allora $z \in X$ tale che $Tz = ty$, ossia $T\left(\frac{z}{t}\right) = y$, e si ha

$\left\|\frac{z}{t}\right\|_Y = \frac{1}{t}\|z\|_X < \frac{1}{t} = \frac{2}{\varepsilon}\|y\|_Y$; ciò prova che $x = \frac{z}{t}$ verifica $Tx = y$ e $\|x\|_X \le \frac{2}{\varepsilon}\|y\|_Y$. Se poi $y = 0$, allora $x = 0$ verifica questa stima. Pertanto $\frac{2}{\varepsilon}$ è il numero c cercato.

Esercizio 10.3.3 (i) $\iff$ (iii) Ovviamente (iii) implica (i). Viceversa, sia $R(T)$ chiuso in H e proviamo che $R(T) = (\ker T^*)^\perp$. Se $y = Tx \in R(T)$, allora per ogni $z \in \ker T^*$ si ha $(y,z)_H = (Tx,z)_H = (x,T^*z)_H = 0$, da cui $y \in (\ker T^*)^\perp$. Se poi fosse $R(T) \subset (\ker T^*)^\perp$, esisterebbe $w \in (\ker T^*)^\perp \cap R(T)^\perp$, $w \neq 0$, e allora per ogni $x \in H$ risulterebbe $0 = (w,Tx)_H = (T^*w,x)_H$, da cui $T^*w = 0$ e quindi $w \in (\ker T^*)^\perp \cap \ker T^* = \{0\}$, assurdo. Dunque $R(T) = (\ker T^*)^\perp$.

(ii) $\iff$ (iv) Dimostrazione analoga alla precedente, scambiando i ruoli di T e T^*.

(i) $\iff$ (v) Se vale (i), allora $T : (\ker T)^\perp \to R(T)$ è lineare, continuo e bigettivo fra due spazi completi: quindi, per il teorema dell'applicazione aperta (teorema 10.3.1), T è un isomorfismo; ne segue (v). Viceversa, se vale (v) e se $y_n = Tx_n \to y$ in H, si ha $\|x_n - x_m\|_H \le c\|y_n - y_m\|_H$: dunque esiste $x \in H$ tale che $x_n \to x$ in H e di conseguenza $Ty_n \to Tx$. Pertanto $y = Tx \in R(T)$ e dunque vale (i).

(ii) $\iff$ (vi) Dimostrazione analoga alla precedente, scambiando i ruoli di T e T^*.

(v) $\iff$ (vi) Se vale (v) ma non vale (vi), allora esiste $\{y_n\} \subset (\ker T^*)^\perp$ tale che $\|y_n\|_H = 1$ e $T^*y_n \to 0$. Dato che (v) $\iff$ (iii), si ha $\{y_n\} \subset R(T)$, cioè $y_n = Tx_n$ con $x_n \in H$. Allora, posto $w_n = x_n - P_{\ker T}\, x_n$, si ha $w_n \in (\ker T)^\perp$ e $Tw_n = y_n$. Da (v) segue $\|w_n\|_H \le c\|y_n\|_H = c$, e quindi

$$\begin{aligned} 1 &= \|y_n\|_H^2 = \|Tw_n\|_H^2 = (Tw_n, Tw_n)_H = (T^*Tw_n, w_n)_H = (T^*y_n, w_n)_H \le \\ &\le \|T^*y_n\|_H \|w_n\|_H \le c\|T^*y_n\|_H \to 0, \end{aligned}$$

il che è assurdo.
Viceversa, se vale (vi) e si nega (v), si procede analogamente, e utilizzando (vi) $\iff$ (iv) si trova la contraddizione.

Esercizio 10.3.4 Se esiste $c > 0$ tale che $\|a\|_X \le c\|a+b\|_X$ per ogni $a \in M$ e $b \in N$, allora l'insieme

$$Z = \{x = a + b :\ a \in M,\ b \in N\}$$

è chiuso: infatti, sia $\{a_n + b_n\} \subset Z$ una successione tale che $a_n + b_n \to z$ in X; allora, essendo $\|a_n - a_m\|_X \le c\|a_n + b_n - a_m - b_m\|_X$, la successione $\{a_n\}$ è di Cauchy e quindi, essendo X completo, essa converge in X ad un punto a, ed inoltre $a \in M$, visto che M è chiuso. Dunque $b_n \to z - a =: b \in N$, dato che N è chiuso. Pertanto $z = a + b \in Z$ e Z è chiuso.
Viceversa, se Z è chiuso, sia $P : Z \to M$ definito da $P(a+b) = a$. L'operatore P è chiuso, perché se $a_n + b_n \to z$ e $a_n \to a$, allora, come prima, $b_n = z_n - a_n \to z - a =: b \in N$, da cui $z = a + b \in Z$ e $P(z) = a$. Poiché Z e M sono spazi di Banach, P è continuo per il teorema del grafico chiuso (teorema 10.3.3): quindi esiste $c > 0$ tale che

$$\|a\|_X = \|P(a+b)\|_X \le c\|a+b\|_X \qquad \forall a \in M, \quad \forall b \in N.$$

Esercizio 10.3.5 Se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e $f = 0$ per $|x| > A$, allora $\int_{\mathbb{R}} |tf(t)|dt \le A\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt < \infty$; quindi $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subseteq M$, e pertanto M è denso in $L^1(\mathbb{R})$. L'operatore T, definito da $[Tf](t) = tf(t)$, con dominio M a valori in $L^1(\mathbb{R})$, è chiuso: infatti, se $\{f_n\} \subset M$, $f_n \to f$ in $L^1(\mathbb{R})$ e $Tf_n \to g$ in $L^(\mathbb{R})$, allora, passando ad una sottosuccessione di $\{f_n\}$ che converge q.o. si ottiene $tf(t) = g(t)$, vale a dire $f \in M$ e $Tf = g$. Però T non è continuo: infatti, posto $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$, si ha $\|f_n\|_1 = 1$ ma $\|Tf_n\|_1 = \frac{1}{n}\int_0^n t\,dt = \frac{n}{2}$. Quindi non esiste alcuna $c > 0$ per cui $\|Tf_n\|_1 \le c\|f_n\|_1$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

Esercizio 10.3.6 (i) Sia $T : M \to X$ continuo e supponiamo M chiuso. Se $\{x_n\} \subset M$, $x_n \to x$ e $Tx_n \to y$, allora $x \in M$ perché M è chiuso; inoltre $Tx = \lim_{n\to\infty} Tx_n = y$. Quindi T è chiuso. Se M non è chiuso, la tesi è falsa: consideriamo ad esempio $X = L^1(0,1)$, $M = C[0,1]$, $T = I_M$: qui M è denso in X e non è chiuso, e se $\{f_n\} \subset M$ converge in $L^1(0,1)$ ad una funzione f non continua, allora $Tf_n = f_n \to f$ in L^1 ma $f \notin M$: dunque il grafico di T non è chiuso.

(ii) Supponiamo che X sia uno spazio di Banach, che M sia chiuso e che T sia un operatore chiuso. Allora T è continuo, in virtù del teorema del grafico chiuso (corollario 10.3.3). Se M non è chiuso, la tesi è falsa: con $X = C[0,1]$, $M = C^1[0,1]$, $T = \frac{d}{dt}$, se $f_n(t) = t^n$ si ha $\|f_n\|_\infty = 1$ e $\|Tf_n\|_\infty = n$ per

ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi T non è continuo; tuttavia T è chiuso (se $f_n \to f$ e $f_n' \to g$ in $C[0,1]$, come si sa dall'Analisi 2 risulta $f \in C^1[0,1]$ e $f' = g$).

(iii) Se T è chiuso, non è detto che T trasformi insiemi chiusi in insiemi chiusi: infatti con $X = C[0,1]$, $M = C^1[0,1]$, $T = \frac{d}{dt}$, siano $f(t) = |t|$ e

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{n}}{2}\, t^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{n}} & \text{se} \quad |t| \le \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ |t| & \text{se} \quad \dfrac{1}{\sqrt{n}} \le |t|. \end{cases}$$

Allora $\|f_n - f\|_\infty \to 0$; posto $g_n(t) = \int_{-1}^t f_n(s)\, ds + 3n$, si ha $g_n' = f_n$ e $3n \le \|g_n\|_\infty \le 3n+2$. Dunque l'insieme $B = \{g_n\}$ è chiuso, essendo costituito da punti isolati, mentre $T(B)$ non è chiuso poiché non contiene il punto $f \in \overline{T(B)}$. D'altronde, come si sa da (ii), T è chiuso.

Esercizio 10.3.7 Dato che

$$\|Af\|_1 = \|f'\|_1 \le \|f'\|_1 + \|f\|_\infty = \|f\|_{AC}\,,$$

si ha $\|A\| \le 1$ e quindi $A : AC[a,b] \to L^1(a,b)$ è continuo; inoltre, con $f_n(x) = \sin\left(n\pi\, \frac{x-a}{b-a}\right)$ si ha $\|f_n\|_\infty = 1$, mentre

$$\|f_n'\|_1 = \frac{n\pi}{b-a} \int_a^b \left|\cos\left(n\pi\, \frac{x-a}{b-a}\right)\right| dx = \int_0^{n\pi} |\cos y|\, dy \ge \int_0^{n\pi} \cos^2 y\, dy = \frac{n\pi}{2},$$

da cui, grazie alla crescenza in $[0,\infty[$ della funzione $t \mapsto \frac{t}{t+1}$,

$$\|A\| \ge \frac{\|f_n'\|_1}{\|f_n\|_\infty + \|f_n'\|_1} \ge \frac{\frac{n\pi}{2}}{1 + \frac{n\pi}{2}} \to 1.$$

Dunque $\|A\| = 1$.

D'altra parte, l'operatore $A : D(A) = AC[0,1] \subset L^1(a,b) \to L^1(a,b)$ è chiuso: infatti, se $\{f_n\} \subset AC[a,b]$, e $f_n \to f$, $f_n' \to g$ in $L^1(a,b)$, allora per ogni $x, x_0 \in [a,b]$ si ha

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^x f_n'(t)\, dt;$$

passando ad una sottosuccessione delle f_n che converge quasi ovunque, per $n \to \infty$ ricaviamo, per q.o. $x, x_0 \in [a,b]$,

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x g(t)\, dt.$$

Fissato x_0, la funzione $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t)\, dt$ è in $AC[a,b]$, cioè $f \in D(A)$ e $Af = f' = g \in L^1(a,b)$. Quindi A è chiuso. Però A non è continuo: infatti, con $f_n(x) = (n+1)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n$, con facili calcoli si trova $\|f_n\|_1 = b-a$, $\|f_n'\|_1 = n+1$, cosicché

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|f_n'\|_1}{\|f_n\|_1} = \infty.$$

Esercizio 10.3.8 Sia T lineare da H in H autoaggiunto, e proviamo che T è chiuso. Sia $\{x_n\} \subset H$ tale che $x_n \to x$ e $Tx_n \to y$ in H. Per ogni $z \in H$ si ha

$$(x_n, Tz)_H \to (x, Tz)_H = (Tx, z)_H, \qquad (x_n, Tz)_H = (Tx_n, z)_H \to (y, z)_H;$$

dunque $(Tx, z)_H = (y, z)_H$ per ogni $z \in H$, ossia $y = Tx$. Pertanto T è chiuso, e per il teorema del grafico chiuso (corollario 10.3.3) si conclude che $T \in \mathcal{L}(H)$.

Esercizio 10.3.9 Il sottospazio M, che è chiuso rispetto alla norma $\|\cdot\|_2$, è anche chiuso rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$: infatti, se $\{f_n\} \subset M$, $f_n \to f$ in L^∞, allora $f_n \to f$ in L^2 e pertanto $f \in M$. Ne segue che l'applicazione identica $i : (M, \|\cdot\|_2) \to (M, \|\cdot\|_\infty)$ è lineare fra due spazi di Banach ed è chiusa: infatti se $f_n \to f$ in L^2 e $f_n \to g$ in L^∞, allora $f = g$. Dunque i è continua, grazie al teorema del grafico chiuso, ossia esiste $c > 0$ tale che

$$\|f\|_\infty \le c\|f\|_2 \qquad \forall f \in M.$$

Ciò premesso, supponiamo per assurdo che $\dim M = \infty$ e sia $\{e_n\}$ un sistema ortonormale completo in $(M, \|\cdot\|_2)$ (ad esempio un sottoinsieme del sistema trigonometrico, con variabile sottoposta ad opportuna omotetia). Sia $y \in [a,b]$ tale che $e_n(y) \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: nel caso del sistema trigonometrico, basta scegliere l'omotetico di un y tale che $\frac{y}{\pi}$ sia irrazionale, e quasi tutti gli $y \in [a,b]$ sono di questo tipo. Poniamo

$$\beta_n = \overline{e_n(y)}, \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{N} \beta_n\, e_n(x),$$

ove N è un fissato intero positivo. Allora $g \in M$ e quindi $\|g\|_\infty \le c\|g\|_2$. Ma

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \left|\sum_{n=1}^{N} \beta_n\, e_n(x)\right| \ge \left|\sum_{n=1}^{N} \beta_n\, e_n(y)\right| = \sum_{n=1}^{N} |e_n(y)|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\beta_n|^2, \qquad \|g\|_2 = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^2\right]^{\frac12},$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{N} |e_n(y)|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\beta_n|^2 \le \|g\|_\infty \le c\|g\|_2 = c\left[\sum_{n=1}^{N} |\beta_n|^2\right]^{\frac12},$$

ovvero, semplificando e quadrando,

$$\sum_{n=1}^{N} |e_n(y)|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\beta_n|^2 \le c^2 \qquad \text{per q.o. } y \in [a,b].$$

Integrando questa relazione fra a e b troviamo

$$N = \sum_{n=1}^{N} \int_a^b |e_n(y)|^2 dy \le c^2(b-a),$$

e poiché questo deve valere per ogni $N \in \mathbb{N}^+$, si arriva all'assurdo. Dunque M ha dimensione finita.

Esercizio 10.3.10 (i) Risulta per $|k| \to \infty$

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(t)\cos kt - if(t)\sin kt]\, dt \to 0$$

grazie al lemma di Riemann-Lebesgue (esercizio 4.7.8).

(ii) L'applicazione $T : L^1(-\pi,\pi) \to c_0(\mathbb{Z})$, $Tf = \{\gamma_k\}$, è lineare, ed è continua perché

$$\|Tf\|_\infty = \|\gamma\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\gamma_k| \le \frac{1}{2\pi}\|f\|_1,$$

da cui $\|T\| \le \frac{1}{2\pi}$. Con $f \equiv 1$ viene $\gamma_k = 0$ per $k \neq 0$ e $\gamma_0 = 1$: dunque $\|T1\|_\infty = \|\gamma\|_\infty = 1$ e $\|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dt = 2\pi$; pertanto $\|T\| = \frac{1}{2\pi}$.

(iii) Proviamo che l'operatore T è iniettivo. Sia $Tf = 0$, ossia f ha tutti i coefficienti γ_k nulli. Sia $g \in C^1[-\pi,\pi]$ periodica: allora $g(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k\, e^{ikt}$ uniformemente in $[-\pi,\pi]$ grazie all'esercizio 8.3.10. Fissato $\varepsilon > 0$, ne segue, per un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ opportuno,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\overline{g(t)} - \sum_{|k|\le N_\varepsilon} \overline{g_k} e^{-ikt}\right] dt + \sum_{|k|\le N_\varepsilon} \overline{g_k} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt.$$

A secondo membro, il primo addendo è in modulo minore di $\|f\|_1\,\varepsilon$, mentre il secondo addendo è nullo. Dunque, per l'arbitrarietà di ε,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt = 0 \qquad \forall g \in C^1[-\pi,\pi] \text{ periodica.}$$

Se al posto di g inseriamo funzioni periodiche $g_n \in C^1[-\pi,\pi]$, tali che $g_n \to \operatorname{sgn}(f)$ puntualmente, con $|g_n| \le 2$, per convergenza dominata ricaviamo

$$\int_{-pi}^{\pi} |f(t)|\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g_n(t)}\,dt = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Ne segue che T è iniettivo.
Proviamo che T non è surgettivo. Se lo fosse, per il teorema dell'applicazione aperta T sarebbe un isomorfismo, e quindi esisterebbe $c > 0$ tale che

$$\|f\|_1 \le c \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\gamma_k|.$$

Ma, scegliendo come f il nucleo di Dirichlet $D_n(t) = \sum_{|h|\le n} e^{iht}$, risulta $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|D_n\|_1 = \infty$, mentre, detti $\gamma_{k,n}$ i coefficienti di Fourier di D_n, si ottiene

$$\gamma_{k,n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|h|\le n} e^{iht-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt-ikt}dt = 1 \quad \text{per } |k| \le n,$$

mentre $\gamma_{k,n} = 0$ per $|k| > n$. Pertanto $\sup_{k\in\mathbb{Z}} |\gamma_{k,n}| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi per n grande la stima precedente è assurda.

Esercizi del paragrafo 10.4

Esercizio 10.4.1 Si ha

$$(Ax,y)_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (Ax)_n\,\overline{y_n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1}\,\overline{y_n} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\,\overline{y_{k-1}};$$

dunque $(x, A^*y)_{\ell^2} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\,\overline{y_{k-1}}$. Ne segue

$$(A^*x)_n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n = 0 \\ y_{n-1} & \text{se} \quad n \ge 1. \end{cases}$$

Esercizio 10.4.2 Calcoliamo A^*. Si ha

$$(x, A^*y)_{\ell^2} = (Ax,y)_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\,x_n\,\overline{y_n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\,\overline{\overline{\alpha_n}\,y_n},$$

da cui

$$(A^*x)_n = \overline{\alpha_n}\,y_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(i) Risulta per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$[(AA^*)x]_n = \alpha_n\,\overline{\alpha_n}\,x_n = |\alpha_n|^2\,x_n, \qquad [(A^*A)x]_n = \overline{\alpha_n}\,\alpha_n\,x_n = |\alpha_n|^2\,x_n.$$

Dunque $A^*A = AA^*$.
(ii) Si ha $A = A^*$ se e solo se $\alpha_n = \overline{\alpha_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ossia se e solo se $\alpha_n \in \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
(iii) Risulta $AA^* = A^*A = I$ se e solo se $|\alpha_n|^2 = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ossia $\alpha_n = e^{i\vartheta_n}$m con $\vartheta_n \in \mathbb{R}$ arbitrario, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 10.4.3 B è l'operatore A^* dell'esercizio 10.4.1: si ha quindi

$$[(B^*B)x]_n = (Bx)_{n+1} = x_n \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

cioè $B^*B = I$. Invece

$$[(BB^*)x]_n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n = 0 \\ (B^*x)_{n-1} & \text{se} \quad n \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n = 0 \\ x_n & \text{se} \quad n \geq 1; \end{cases}$$

dunque $B^*B = P_1$, ove P_1 è la proiezione ortogonale su e_1.

Esercizio 10.4.4 Sia $(Ax)_n = x_{i(n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \ell^2$: allora $(A^*y)_n = y_{i^{-1}(n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $y \in \ell^2$. Infatti

$$(Ax, y)_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x_{i(n)}\, \overline{y_n} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k\, \overline{y_{i^{-1}(k)}} = (x, A^*y)_{\ell^2}\,.$$

Allora

$$(A^*Ax)_n = (Ax)_{i^{-1}(n)} = x_{i(i^{-1}(n))} = x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \ell^2,$$

cioè $A^*A = I$; similmente $AA^* = I$.
Infine, risulta $A = A^*$ se e solo se $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è l'identità, e in tal caso $A = A^* = I$.

Esercizio 10.4.5 Sia $\{x_n\} \subset D(A)$ tale che $x_n \to x$ in X e $Ax_n \to y$ in X. Allora per ogni $z \in D(A)$ si ha $(Ax_n, z)_H = (x_n, Az)_H$ e quindi, per $n \to \infty$, $(y, z)_H = (x, Az)_H$. Poiché $D(A)$ è denso in H, ciò implica $x \in D(A^*) = D(A)$ e $Ax = y$. In particolare, se $D(A) = H$ allora A è un operatore chiuso fra due spazi di Hilbert e quindi è continuo per il teorema del grafico chiuso.

Esercizio 10.4.6 Sia $A : D(A) \subseteq X \to Y$ lineare e iniettivo, con $\overline{D(A)} = X$ e $\overline{R(A)} = Y$. Allora, dati $z, x \in R(A)$, sono ben definiti $A^{-1}z$ e $A^{-1}x$: infatti si ha $z = Ay$ e $x = Aw$ con $y, w \in D(A)$ unici, a causa dell'iniettività di A; dunque $A^{-1}z = y$ e $A^{-1}x = w$. Perciò $A^{-1} : R(A) \to D(A)$ esiste, con $D(A^{-1}) = R(A)$ e $R(A^{-1}) = D(A)$.
Consideriamo adesso A^*: esso è iniettivo, perché se $\psi \in D(A^*)$ e $A^*\psi = 0$ si ha per definizione $\psi(Ax) = 0$ per ogni $x \in D(A)$, e per densità $\psi(y) = 0$ per ogni $y \in Y$, cioè $\psi = 0$. Dunque esiste $(A^*)^{-1} : R(A^*) \subseteq X^* \to D(A^*) \subseteq Y^*$, così come esiste $(A^{-1})^* : D((A^{-1})^*) \subseteq X^* \to R((A^{-1})^*) \subseteq Y^*$.
Sia ora $\varphi \in R(A^*) = D((A^*)^{-1})$, $\varphi = A^*\psi$ con $\psi \in D(A^*)$. Allora per ogni $y \in R(A)$, $y = Ax$ con $x \in D(A)$, risulta

$$[(A^*)^{-1}\varphi]y = \psi(y) = \psi(Ax) = (A^*\psi)x = \varphi x = \varphi(A^{-1}y),$$

ed essendo $|\varphi(A^{-1}y)| = |\psi y| \leq \|\psi\|_{Y^*}\|y\|_Y$ per ogni $y \in D(A) = R(A^{-1})$, si deduce $\varphi \in D((A^{-1})^*)$ e, dall'uguaglianza precedente, $(A^{-1})^*\varphi y = (A^*)^{-1}\varphi y$ per ogni $y \in R(A^{-1})$, e quindi, per densità, per ogni $y \in Y$. Pertanto $R(A^*) = D((A^*)^{-1}) \subseteq D((A^{-1})^*)$ e $(A^{-1})^*\varphi = (A^*)^{-1}\varphi$ per ogni $\varphi \in D((A^*)^{-1})$.
D'altra parte, sia $\varphi \in D((A^{-1})^*)$: si ha

$$[(A^{-1})^*\varphi]Ax = \varphi(A^{-1}Ax) = \varphi x \qquad \forall x \in D(A).$$

Ponendo $\psi = \varphi \circ A^{-1}$, si ha $\psi(Ax) = \varphi x$ e $|\psi(Ax)| \leq \|\varphi\|_{X^*}\|x\|_X$ per ogni $x \in D(A)$; dunque $\psi \in D(A^*)$ e $A^*\psi = \varphi$. Ciò mostra che $\varphi \in R(A^*) = D((A^*)^{-1})$ e, per ogni $y \in R(A)$, $y = Ax$, si ha

$$[(A^*)^{-1}\varphi](y) = \psi(y) = \psi(Ax) = \varphi x = [(A^{-1})^*\varphi]Ax = [(A^{-1})^*\varphi]y.$$

Dunque $(A^*)^{-1}\varphi$ e $(A^{-1})^*\varphi$ coincidono su $R(A)$ e quindi su tutto Y. Ne segue $D((A^{-1})^*) \subseteq D((A^*)^{-1})$ e $(A^*)^{-1}\varphi = (A^{-1})^*\varphi$ per ogni $\varphi \in D((A^{-1})^*)$. In definitiva gli operatori $(A^{-1})^*$ e $(A^*)^{-1}$ coincidono sul loro comune dominio. In particolare,

$$A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (A^{-1})^* = (A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, Y^*).$$

Esercizio 10.4.7 Poiché $\overline{D(A)} = X$, A^* è univocamente definito. Proviamo cha $A^* : D(A^*) \subseteq Y^* \to X^*$ è chiuso. Sia $\{\varphi_n\} \subset D(A^*)$ tale che $\varphi_n \to \varphi$ in Y^* e $A^*\varphi_n \to \psi$ in X^*: allora per ogni $x \in D(A)$ si ha

$$\psi x = \lim_{n\to\infty} (A^*\varphi_n)x = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(Ax) = \varphi(Ax).$$

Ne segue $|\varphi(Ax)| \le \|\psi\|_{X^*}\|x\|_X$ per ogni $x \in D(A)$, da cui $\varphi \in D(A^*)$ e $A^*\varphi = \psi$. Pertanto A^* è chiuso.

Esercizio 10.4.8 (i) Siano $z \in D(T)$ e $x \in D(T^*S^*)$. Allora, poiché $S^*x \in D(T^*)$, si ha

$$(Tz, S^*x)_H = (z, T^*S^*x)_U,$$

da cui $|(Tz, S^*x)_H| \le \|z\|_U \|T^*S^*x\|_U$, quindi $Tz \in D(S)$ e pertanto si ha anche

$$(Tz, S^*x)_H = (STz, x)_U\,;$$

perciò

$$(STz, x)_U = (z, T^*S^*x)_U\,,$$

e dunque $x \in D((ST)^*)$ e

$$(ST)^*x = T^*S^*x \qquad \forall x \in D(T^*S^*);$$

ciò significa $D(T^*S^*) \subseteq D((ST)^*)$.

(ii) Poiché $S \in \mathcal{L}(H, U)$, si ha $S^* \in \mathcal{L}(U, H)$, cosicché $D(S^*) = U$. Allora per $z \in D(ST) = D(T)$ e $x \in D((ST)^*)$ si ha

$$(Tz, S^*x)_H = (STz, x)_U = (z, (ST)^*x)_U;$$

quindi, essendo $D(ST)$ denso in U e S^* limitato, si deduce $S^*x \in D(T^*)$ e di conseguenza $x \in D(T^*S^*)$, con

$$(z, T^*S^*x)_U = (z, (ST)^*x)_U \qquad \forall z \in D(ST).$$

Per densità si ottiene $T^*S^*x = (ST)^*x$ per ogni $x \in D((ST)^*)$. Ne segue, tenuto conto di (i), $D((ST)^*) = D(T^*S^*)$ e $T^*S^* = (ST)^*$.

Esercizio 10.4.9 Risulta

$$Af(x) = \int_0^1 \left[1 + \frac{1}{2}\, e^{2\pi\, i()x-y)}\right] f(y)\, dy \qquad \forall f \in L^2(0,1),$$

e

$$\|Af\|^2_{L^2(0,1)} = \int_0^1 |Af(x)|^2\, dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\left(Af, e^{2\pi\, ikx}\right)_{L^2(0,1)}\right|^2.$$

Poiché

$$\begin{aligned}
\left(Af, e^{2\pi\, ikx}\right)_{L^2(0,1)} &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[1 + \frac{1}{2}\, e^{2\pi\, i(x-y)}\right] f(y)\, dy\, e^{-2\pi\, ikx}\right] dx = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left[1 + \frac{1}{2}\, e^{2\pi\, i(x-y)}\right] e^{-2\pi\, ikx} dx\, f(y)\, dy = \int_0^1 \left[\delta_{0k} + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2\pi\, i(x-y-kx)} dx\right] f(y)\, dy = \\
&= \delta_{0k}\, f_0 + \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\int_0^1 e^{2\pi\, i(1-k)x} dx\right] e^{-2\pi\, iy} f(y)\, dy = \delta_{0k}\, f_0 + \frac{1}{2}\,\delta_{1k}\int_0^1 e^{-2\pi\, iy} f(y)\, dy = \\
&= \delta_{0k}\, f_0 + \frac{1}{2}\,\delta_{1k}\, f_1\,,
\end{aligned}$$

si ottiene $\|Af\|^2_{L^2(0,1)} = |f_0|^2 + \frac{1}{4}|f_1|^2$, e dunque $\|A\|_{\mathcal{L}(L^2(0,1))} = 1$. Invece, calcolando i vari integrali,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^1 \left|\frac{1}{2} + e^{2\pi\, i(x-y)}\right|^2 dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \left|\frac{1}{4} + e^{2\pi\, i(x-y)} + e^{4\pi\, i(x-y)}\right|^2 dxdy = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left|\frac{1}{4} + \cos 2\pi(x-y) + \cos 4\pi(x-y) + i\left(\sin 2\pi(x-y) + \sin 4\pi(x-y)\right)^2\right| = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{4} + \cos 2\pi(x-y) + \cos 4\pi(x-y)\right]^2 + \left[\sin 2\pi(x-y) + \sin 4\pi(x-y)\right]^2\right) dxdy = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{16} + 2 + \frac{5}{2}\cos 2\pi(x-y) + \frac{1}{2}\cos 4\pi(x-y)\right) dxdy = \frac{33}{16} - \frac{21}{32\,\pi^2} \simeq 1.8536 > 1.
\end{aligned}$$

Esercizio 10.4.10 Per ogni $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si ha

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}f, g)_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,\xi)_N} f(\xi)\, d\xi, g(x)\right)_{\mathbb{C}^N} dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \left(e^{-i(x,\xi)_N} f(\xi), g(x)\right)_{\mathbb{C}^N} d\xi dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \left(f(\xi), e^{i(x,\xi)_N} g(x)\right)_{\mathbb{C}^N} d\xi dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(f(\xi), \int_{\mathbb{R}^N} e^{i(\xi,x)_N} g(x)\, dx\right)_{\mathbb{C}^N} d\xi = (f, (2\pi)^N \mathcal{F}^{-1} g)_{L^2(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}$$

grazie alla formula di inversione (teorema 8.4.10). Il risultato si estende a $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ per densità. Dunque

$$\mathcal{F}^* = (2\pi)^N \mathcal{F}^{-1}.$$

Esercizio 10.4.11 Proviamo anzitutto che T^* è iniettivo: se $\varphi \in X^*$ e $T^*\varphi = 0$, allora $0 = (T^*\varphi)x = \varphi(Tx)$ per ogni $x \in X$; dato che T è surgettivo, si deduce che $\varphi y = 0$ per ogni $y \in Y$, ossia $\varphi = 0$.
Ciò premesso, mostriamo che $R(T^*)$ è chiuso. Sia $\{\varphi_n\} \subset R(T^*)$, $\varphi_n = T^*\psi_n$, tale che $\varphi_n \to \varphi$ in X^*. Le ψ_n sono univocamente determinate in virtù dell'iniettività di T^*. Allora, per ogni $y \in X$ e per ogni $x \in X$ tale che $Tx = y$,

$$\psi_n y = \psi_n Tx = T^*\psi_n x = \varphi_n x,$$

da cui

$$|\psi_n(Tx)| \le \|\varphi_n\|_{X^*}\|x\|_X\,.$$

D'altra parte, per l'esercizio 10.3.2, esiste $c > 0$ tale che per ogni $y \in Y$ vi è $x \in X$ per cui $Tx = y$ e $\|x\|_X \le c\|y\|_Y$. Dunque,scelto tale x si ha

$$|\psi_n y| = |\psi_n(Tx)| \le \|\varphi_n\|_{X^*}\|x\|_X \le c\|\varphi_n\|_{X^*}\|Tx\|_Y = c\|\varphi_n\|_{X^*}\|y\|_Y\,,$$

da cui si ricava $\|\psi_n\|_{X^*} \le c\|\varphi_n\|_{X^*}$. Perciò

$$\|\psi_n - \psi_m\|_{X^*} \le c\|\varphi_n - \varphi_m\|_{X^*}\,,$$

e siccome $\varphi_n \to \varphi$ in X^*, esiste $\psi \in X^*$ tale che $\psi_n \to \psi$ in X^*. Ne segue $\varphi_n = T^*\psi_n \to T^*\psi = \varphi$, ossia $\varphi \in R(T^*)$. Dunque $R(T^*)$ è chiuso.
Di conseguenza, $T^* : X^* \to R(T^*)$ è continuo e bigettivo fra due spazi di Banach; quindi T^* è invertibile con $(T^*)^{-1} \in \mathcal{L}(R(T^*), X)$.

Esercizio 10.4.12 Per ipotesi, per ogni $y \in Y$ esiste un unico $x \in X$ tale che $Tx = y$ e $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$. Fissiamo $\varphi \in X^*$: dobbiamo mostrare che vi è un unico $\psi \in Y^*$ tale che $T^*\psi = \varphi$ e $\|T^*\psi\|_{X^*} = \|\psi\|_{Y^*}$. Si ha in effetti per ogni $x \in X$, posto $y = Tx$ e scelto $\psi = (T^{-1})^*\varphi$,

$$\psi y = (T^{-1})^*\varphi]y = \varphi(T^{-1}y) = \varphi x;$$

dunque

$$(T^*\psi)x = \psi(Tx) = \psi y = \varphi x \qquad \forall x \in X.$$

Pertanto $\varphi = T^*\psi$, ossia T^* è surgettivo. Inoltre, essendo T un'isometria su X,

$$\|T^*\psi\|_{X^*} = \sup_{x\neq 0} \frac{|(T^*\psi)x|}{\|x\|_X} = \sup_{x\neq 0} \frac{|\psi(Tx)|}{\|Tx\|_Y} = \sup_{y\neq 0} \frac{|\psi y|}{\|y\|_Y} = \|\psi\|_{Y^*}\,,$$

cosicché T^* è anche iniettiva, ed è un'isometria bigettiva.

Esercizio 10.4.13 Per ipotesi, $e^{tA}e^{tA^*} = I_H$. Poiché $\frac{d}{dt}e^{tA} = A\,e^{tA}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, possiamo scrivere

$$0 = \frac{d}{dt} I_H = \frac{d}{dt} e^{tA}e^{tA^*} = A\,e^{tA}e^{tA^*} + e^{tA}e^{tA^*}A^* \qquad \forall t \in \mathbb{R};$$

scelto $t = 0$, si deduce $A + A^* = 0$. Ne segue $iA = -iA^* = (iA)^*$.

Esercizi del paragrafo 10.5

Esercizio 10.5.1 Sia $\{J_{x_n}\} \subset J(X)$ una successione tale che $J_{x_n} \to \alpha$ in X^{**}: dobbiamo provare che esiste $x \in X$ tale che $\alpha = J_x$. Poiché $\{J_{x_n}\}$ converge, essa è una successione di Cauchy in X^{**}; perciò, dato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|x_n - x_m\|_X = \|J_{x_n} - J_{x_m}\|_{X^{**}} < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq \nu_\varepsilon\,.$$

Dalla completezza di X segue che esiste $x \in X$ tale che $x_n \to x$ in X, e dunque $J_{x_n} \to J_x$. Ne segue $\alpha = J_x$.

Esercizio 10.5.2 Per ogni $x \in D(A)$ e per ogni $\varphi \in Y^*$ si ha $\varphi(Ax) = A^*\varphi(x)$. Dunque, per ogni $\varphi \in Y^*$,

$$|\varphi(Ax)| = |A^*\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{Y^*}\|A^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)}\|x\|_X\,,$$

da cui, per definizione di immersione canonica,

$$\|J_{Ax}\|_{Y^{**}} = \sup_{\varphi\in Y^*\setminus\{0\}} \frac{|\varphi(Ax)|}{\|\varphi\|_{Y^*}} \leq \|A^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)}\|x\|_X\,.$$

Dato che $J : Y \to Y^{**}$ è un'isometria, si ricava

$$\|Ax\|_Y = \|J_{Ax}\|_{Y^{**}} \leq \|A^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)}\|x\|_X \qquad \forall x \in D(A);$$

dunque, per densità, $D(A) = X$ e $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, con

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \|A^*\|_{\mathcal{L}(X^*,Y^*)}\,.$$

Esercizio 10.5.3 Se $L^\infty(a, b)$ fosse riflessivo, per la proposizione 10.5.2 tale sarebbe anche $L^1(a, b)$, visto che $(L^1)^* = L^\infty$ (teorema 9.2.1). Ma l'esempio 10.5.5 (3) prova il contrario. Stessa dimostrazione per $L^\infty(\mathbb{R})$.

Esercizio 10.5.4 Proviamo che ℓ^1 non è riflessivo. Se $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, essendo (per l'esercizio 7.3.25) $(\ell^1)^* = \ell^\infty$, si ha

$$J_x(z) = \langle z, x\rangle_{\ell^\infty,\ell^1} = \sum_{n=0}^{\infty} z_n x_n.$$

D'altra parte, consideriamo il funzionale "imite di Banach" introdotto nell'esercizio 10.1.15, che denotiamo con $T \in (\ell^\infty)^*$. Se ℓ^1 fosse riflessivo, esisterebbe $x \in \ell^1$ tale che

$$Tz = J_x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n x_n \qquad \forall z \in \ell^\infty.$$

Scegliendo

$$(z_N)_n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n \le N \\ 1 & \text{se} \quad n > N, \end{cases}$$

avremmo, per le proprietà di T,

$$1 = Tz_N = J_x z_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} x_n \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

e questo è assurdo dato che il resto $(N+1)$-esimo della serie $\sum x_n$ tende a 0 per $N \to \infty$. Dunque ℓ^1 non è riflessivo e nemmeno lo è ℓ^∞, grazie alla proposizione 10.5.2.

Esercizio 10.5.5 Siano $J : X \to X^{**}$ e $J' : Y \to Y^{**}$ le immersioni canoniche. Allora, se $\varphi \in Y^*$ risulta

$$\langle J'_{Tx}, \varphi \rangle_{Y^{**},.Y^*} = \langle \varphi, Tx \rangle_{Y^*,Y} = \langle T^*\varphi, x \rangle_{X^*,X} = \langle J_x, T^*\varphi \rangle_{X^{**},X^*} = \langle T^{**}J_x, \varphi \rangle_{Y^{**},Y^*}.$$

Dunque $J' \circ T = T^{**} \circ J$.

Esercizio 10.5.6 Se $F \in R(T^*)$, $F = T^*G$ con $G \in Y^*$, si ha $Fx = T^*Gx = G(Tx) = 0$ per ogni $x \in \ker T$. Se $F \in \overline{R(T^*)}$, scelta $\{F_n\} \subset R(T^*)$ tale che $F_n \to F$ in X^*, si ricava $Fx = \lim_{n\to\infty} F_n x = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$ per ogni $x \in \ker T$, per quanto visto sopra. Dunque vale l'inclusione $\subseteq$.
Viceversa, se per assurdo $F|_{\ker T} = 0$ e $F \notin \overline{R(T^*)}$, esiste, per il teorema di Hahn-Banach, un funzionale $\alpha \in X^{**}$ tale che $\alpha(F) = 1 = \|\alpha\|_{X^{**}}$ e $\alpha = 0$ su $\overline{R(T^*)}$. Essendo X riflessivo, si ha $\alpha = J_x$ con $x \in X$; ne segue

$$Fx = J_x(F) = \alpha(F) = 1, \qquad Gx = J_x(G) = \alpha(G) = 0 \quad \forall G \in \overline{R(T^*)}.$$

Dunque, scelto $G = T^*H$ con $H \in Y^*$, si ottiene $0 = Gx = T^*H(x) = H(Tx)$ per ogni $H \in Y^*$, da cui $Tx = 0$ì (altrimenti, se fosse $Tx \neq 0$, troveremmo $\psi \in Y^*$ tale che $\psi(Tx) \neq 0$, assurdo). Dunque $x \in \ker T$. Per ipotesi, allora, $Fx = 0$, contro la condizione $Fx = 1$.

Esercizio 10.5.7 Se $F \in R(T^*)$, allora $F = T^*G$ con $G \in Y^*$, e dunque $Fx = T^*Gx = G(Tx) = 0$ per ogni $x \in \ker T$.
Viceversa, sia $F \in X^* \setminus \{0\}$ tale che F sia nullo su $\ker T$. Definiamo $Gy = Fx$ per ogni $y \in R(T)$, ove x è un qualunque elemento di $T^{-1}(\{y\})$: ciò è lecito, perché se x' è un altro elemento di $T^{-1}(\{y\})$ si ha $x - x' \in \ker T$ e dunque $F(x - x') = 0$. Allora l'operatore $G : R(T) \to \mathbb{C}$ è lineare; visto che $F \neq 0$, esso è anche non nullo, per cui esiste $y \in R(T)$ tale che $Gy \neq 0$, e di conseguenza G è surgettivo su $\mathbb{C}$. Inoltre

$$|Gy| = |Fx| \le \|F\|_{X^*}\|x\|_X \qquad \forall x \in T^{-1}(\{y\}),$$

ovvero $G(Tx) = Fx$ e

$$|G(Tx)| \le \|F\|_{X^*}\|x\|_X \qquad \forall x \in X.$$

Se proviamo che $G \in Y^*$, ricaviamo subito $F = T^*G \in R(T^*)$. Poiché $G \circ T \in X^*$ è surgettiva e continua, dall'esercizio 10.3.2 segue che esiste $c > 0$ per cui

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists x \in X \quad \text{tale che} \quad G \circ Tx = z, \quad \|x\|_x \le c|z|,$$

ossia $\|x\|_X \le c|G(Tx)|$ per ogni $x \in X$, e pertanto $\|Tx\|_Y \le c\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}|G(Tx)|$ per ogni $x \in X$. Posto $y = Tx$, ricaviamo l'iniettività di G:

$$\|y\|_Y \le c\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}|Gy| \qquad \forall y \in R(T).$$

In definitiva G è un'applicazione lineare e bigettiva fra i due spazi di Banach $R(T)$ e $\mathbb{C}$, con G^{-1} continua grazie alla maggiorazione precedente; per il teorema dell'applicazione aperta, G^{-1} è un isomorfismo e in particolare G è continua, ossia $G \in Y^*$, da cui, come già osservato,$F = T^*G$.

Esercizio 10.5.8 Sapendo che X è riflessivo, e che esiste $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ surgettivo, dobbiamo provare che Y è riflessivo. Per l'esercizio 10.4.11, T^* è iniettivo e $R(T^*)$ è chiuso. Dall'esercizio 10.5.7 segue

$$R(T^{**}) = \{\alpha \in Y^{**} : \ \alpha|_{\ker T^*} = 0\},$$

dunque $R(T^{**}) = Y^{**}$, ossia T^{**} è surgettivo. Pertanto, in virtù dell'esercizio 10.5.5, l'immersione $J' : Y \to Y^{**}$ è surgettiva:

$$R(J') \supseteq R(J' \circ T) = R(T^{**} \circ J) = R(T^{**}) = Y^{**}.$$

Esercizio 10.5.9 Sia $X = \overline{[\{x_n\}]}$: ciò significa che le combinazioni lineari di elementi della successione $\{x_n\}$ sono dense in X, e dunqe anche le combinazioni lineari di elementi di $\{x_n\}$ a coefficienti in $\mathbb{Q}$ saranno dense in X. Perciò vi è un sottoinsieme numerabile D denso in X.
Viceversa, sia $D \subseteq X$ numerabile e denso: sarà dunque $D = \{x_n\}$. A maggior ragione allora l'insieme $[\{x_n\}] \supset D$ è denso in X; quindi $X = \overline{[\{x_n\}]}$.

Esercizio 10.5.10 (i) Dato che X^* è separabile, sarà $X^* = \overline{\{F_n\}}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in X$ con $\|x_n\|_X = 1$, tale che $F_n(x_n) > \frac{1}{2}\|F_n\|_{X^*}$. Sia $M = [\{x_n\}]$; proviamo che $\overline{M} = X$. Se, per assurdo, esistesse $x \in X \setminus \overline{M}$, per il corollario 10.1.6 troveremmo $F \in X^*$ tale che $Fx = 1 = \|F\|_{X^*}$, ma $Fx_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. D'altra parte, per densità esisterebbe $\{F_{h_k}\} \subseteq \{F_n\}$ tale che $\|F_{h_k} - F\|_{X^*} < \frac{1}{k}$, da cui seguirebbe

$$0 = Fx_{h_k} \geq F_{h_k}x_{h_k} - \|F - F_{h_k}\|_{X^*}\|x_{h_k}\|_X \geq \frac{1}{2}\|F_{h_k}\|_{X^*} - \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} > 0$$

non appena $k > 3$. Ciò è assurdo: quindi X è separabile.

(ii) Poiché X è separabile e riflessivo, dalla proposizione 10.5.2 segue intanto che X^* è riflessivo. Proviamo ora che X^{**} è separabile, mostrando che se $\{x_n\}$ è una successione densa in X, allora la successione $\{J_{x_n}\}$ è densa in X^{**}: infatti se $\alpha \in X^{**}$, ovvero (per riflessività) $\alpha = J_x$, scelta $x_{n_k} \to x$ in X, si ha $\|J_{x_{n_k}} - J_x\|_{X^{**}} = \|x_{n_k} - x\|_X \to 0$. Da (i), applicata a X^{**}, segue allora che anche X^* è separabile.

Esercizio 10.5.11 Dall'esercizio 7.3.10 segue che $(X \times Y)^* \simeq X^* \times Y^*$. Applicando questa proprietà a X^* e Y^* ricaviamo

$$(X \times Y)^{**} \simeq (X^* \times Y^*)^* \simeq X^{**} \times Y^{**}.$$

Dunque se X e Y sono riflessivi anche $X \times Y$ lo è, con

$$J_{(x,y)}(F, G) = (J_x F, J_y G) = (Fx, Gy) = (F, G)(x, y) \qquad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Esercizio 10.5.12 Sia $J^* : X^{***} \to X^*$ l'aggiunto dell'immersione canonica $J : X \to X^{**}$. Se X è riflessivo, la J è surgettiva. Proviamo che $\ker J^* = \{0\}$: se $\alpha \in X^{****}$ e $J^*\alpha = 0 = \alpha \circ J$, ciò significa che $\alpha(J_x) = 0$ per ogni $x \in X$, e per riflessività $\alpha(\gamma) = 0$ per ogni $\gamma \in X^{**}$: pertanto $\alpha = 0$.
Viceversa, sia $\ker J^* = \{0\}$ e proviamo che X è riflessivo, ossia J è surgettiva. Sia, per assurdo, $J(X) \subset X^{**}$, e fissiamo $\gamma \in X^{**} \setminus J(X)$: visto che $J(X)$ è chiuso (esercizio 10.5.1), per il corollario 10.1.6 esiste $\alpha \in X^{***}$ tale che $\alpha|_{J(X)} = 0$ ma $\alpha(\gamma) \neq 0$. Allora $(J^*\alpha)x = \alpha(J_x) = 0$ per ogni $x \in X$, ossia $J^*\alpha = 0$. Dall'ipotesi segue $\alpha = 0$, mentre $\alpha(\gamma) \neq 0$: ciò è assurdo.

Esercizio 10.5.13 Per ipotesi, A^* è bigettivo su X^*. Per l'esercizio 10.4.6 applicato ad A^*, esiste $(A^{**})^{-1} = [(A^*)^{-1}]^*$, e pertanto A^{**} è bigettivo su X^**. Poiché X è riflessivo, $X^{**} = J(X)$ e in particolare per ogni $x \in X$ esiste un unico $y \in X$ tale che

$$(A^{**})^{-1}J_x = J_y\,.$$

Ne segue che per ogni $T \in X^*$ si ha

$$Ty = J_y(T) = [(A^{**})^{-1}J_x](T) = [[(A^*)^{-1}]^*J_x](T) = J_x[(A^*)^{-1}T] = (A^*)^{-1}Tx,$$

che equivale a

$$T(Ay) = A^*Ty = Tx;$$

per l'arbitrarietà di T, ciò equivale a $Ay = x$. Dunque A è surgettivo, ed anche iniettivo: se $Ax = 0$, allora $J_{Ax} = 0$ e, per ogni $T \in X^*$, $0 = J_{Ax}(T) = T(Ax) = (A^*)Tx$, da cui applicando $(A^*)^{-1}$,

$Tx = 0$ per ogni $T \in X^*$, e infine $x = 0$. Per il teorema dell'applicazione aperta (teorema 10.3.1), esiste $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Dall'esercizio 10.4.6 segue la tesi.

Esercizio 10.5.14 Ovviamente risulta

$$\|F\|_{X^*} = \sup_{x \in B} |Fx|.$$

Per il teorema di Hanh-Banach (precisamente, per il corollario 10.1.5), esiste $G \in X^{**}$ tale che $\|G\|_{X^{**}} = 1$ e $G(F) = \|F\|_{X^*}$. Poiché X è riflessivo, esiste $x_0 \in X$ tale che $J_{x_0} = G$; ne segue $\|x_0\|_X = \|J_{x_0}\|_{X^{**}} = \|G\|_{X^{**}} = 1$, ossia $x_0 \in B$, e $Fx_0 = J_{x_0}F = G(F) = \|F\|_{X^*} = \sup_{x \in B} |Fx|$, ossia F assume massimo in B nel punto x_0.

Esercizio 10.5.15 Per l'esercizio 7.3.12, esiste $F \in c_0^*$ che non assume massimo sulla palla unitaria. Dunque, in virtù dell'esercizio 10.5.14, c_0 non può essere riflessivo.

Esercizio 10.5.16 Osserviamo anzitutto che, ovviamente, il sottospazio M è chiuso. Supponiamo per assurdo che M sia riflessivo e consideriamo il funzionale $F \in M^*$ definito da

$$Fg = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, g\left(a + \frac{b-a}{n+1}\right), \qquad g \in M.$$

Allora, in virtù dell'esercizio 10.5.14, il funzionale F assume massimo sulla palla unitaria. Ora, se $\|g\|_\infty = 1$, risulta $|Fg| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$, mentre scegliendo

$$g_m(x) = \begin{cases} m\,\frac{x-a}{b-a} & \text{se} \quad a \leq x \leq a + \frac{1}{m}\,(b-a) \\ 1 & \text{se} \quad a + \frac{1}{m}\,(b-a) \leq x \leq b, \end{cases}$$

si trova, essendo $g_m\left(a + \frac{1}{n}\,(b-a)\right) = 1$ per $n \leq m$,

$$Fg_m \geq \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!};$$

quindi $\sup_m Fg_m = e$, il che implica $\|F\| = e$. D'altronde, non può aversi $Fg = e = \max_M F$ in un punto $g \in M$, perché se $g \in M$ si ha $|g(x)| < \varepsilon$ in un intorno di a, e quindi per ν abbastanza grande risulta

$$e - Fg = \sum_{n=0}^{\nu} \frac{1}{n!}\left[1 - g\left(a + \frac{b-a}{n+1}\right)\right] + \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \frac{1-\varepsilon}{n!} > 0.$$

Ciò è assurdo, e dunque M non è riflessivo. Pertanto nemmeno $C[a,b]$ è riflessivo, altrimenti per la proposizione 10.5.3 anche M sarebbe riflessivo.

Esercizi del paragrafo 10.6

Esercizio 10.6.1 Dobbiamo anzitutto verificare due proprietà: (1) per ogni $x \in X$ esiste $D \in \mathcal{B}$ tale che $x \in D$; (2) per ogni $D_1, D_2 \in \mathcal{B}$ con intersezione non vuota, e per ogni $x \in D_1 \cap D_2$, esiste $D \in \mathcal{B}$ tale che $x \in D \subseteq D_1 \cap D_2$.
Proviamo (1): se $x \in X$, fissati $\varphi \in X^*$ e $\delta > 0$, e posto $D = \{z \in X : \ |\varphi(z-x)| < \delta\})$, si ha $x \in D$ e $D = \varphi^{-1}(A) \in \mathcal{B}$, con $A = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \varphi x| < \delta\}$.
Proviamo (2); siano $D_1, D_2 \in \mathcal{B}$ e sia $x \in D_1 \cap D_2$: dato che la classe $\mathcal{B}$ è chiusa rispetto all'intersezione, si può scegliere $D = D_1 \cap D_2$: allora $D \in \mathcal{B}$ e $x \in D = D_1 \cap D_2$.
Da quanto provato segue che $\mathcal{B}$ è base di una e una sola topologia τ su X. Per provare che $\tau = w$ osserviamo che tutti i funzionali $\varphi \in X^*$ sono continui rispetto a τ, visto che $\varphi^{-1}(A)$ è aperto in τ per ogni aperto $A \subseteq \mathbb{C}$; quindi, per definizione, w è meno fine di τ. D'altra parte, ogni aperto di τ è unione di elementi della base $\mathcal{B}$, e questi sono aperti in w, perché intersezioni finite di controimmagini di aperti di $\mathbb{C}$ mediante funzionali di X^*. Pertanto τ è meno fine di w. In definitiva, $\tau = w$.

Esercizio 10.6.2 Dobbiamo verificare che per ogni intorno V di x relativo alla topologia debole di X esiste un elemento U della famiglia $\mathcal{U}_x$ tale che $U \subseteq V$. Dato che V è intorno di x, esiste un w-aperto E tale che $x \in E \subseteq V$: essendo E unione di elementi della base $\mathcal{B}$, introdotta nell'esercizio 10.6.1, esiste $D \in \mathcal{B}$ tale che $x \in D \subseteq E \subseteq V$. Sarà $D = \bigcap_{j=1}^m \varphi_j^{-1}(A_j)$, con $\varphi_j \in X^*$ e $A_j \subseteq \mathbb{C}$ aperti, tali che $\varphi_j(x) \in A_j$, $j = 1, \dots, m$. Scelto $\delta > 0$ tale che $B_j = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\lambda - \varphi_j(x)| < \delta\} \subseteq A_j$ per $j = 1, \dots, m$, poniamo $U = \bigcap_{j=1}^m \varphi_j^{-1}(B_j)$: si ha allora $x \in U \subseteq V$ e

$$U = \{z \in X :\ |\varphi_j(x - z)| < \delta,\ j = 1, \dots m\} = x + U_{\varphi_1, \dots, \varphi_m, \delta} \in \mathcal{U}_x\,.$$

Esercizio 10.6.3 (i) Sia $x_n \to x$ in $\sigma(X, X^*)$: ciò significa che per ogni intorno U di x della forma

$$U = \{y \in X :\ |\varphi_i(y - x)| < \varepsilon,\ 1 \le i \le N\}$$

esiste $n_U \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in U$ per ogni $n \ge n_U$. Siano allora $\varphi \in X^*$ ed $\varepsilon > 0$: per ipotesi l'insieme $V = \{y \in X :\ |\varphi(y - x)| < \varepsilon\}$ è un intorno di x in $\sigma(X, X^*)$, e dunque vi è $n_V \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in V$ per ogni $n \ge n_V$. Ne segue $\varphi x_n \to \varphi x$ per $n \to \infty$. Dato che φ è arbitrario, si ha $x_n \rightharpoonup x$ in X. Viceversa, sia $x_n \rightharpoonup x$ in X. Fissiamo un intorno di x della forma

$$U = \{y \in X :\ |\varphi_i(y - x)| < \varepsilon,\ 1 \le i \le N\};$$

dato che, per ipotesi, $\varphi_i x_n \to \varphi_i x$ per $n \to \infty$, $1 \le i \le N$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $|\varphi_i(x_n - x)| < \varepsilon$ per ogni $n \ge \nu$, $1 \le i \le N$, e ciò significa che $x_n \in U$ per ogni $n \ge \nu$. Pertanto $x_n \to x$ in $\sigma(X, X^*)$.

(ii) Sia $\varphi_n \to \varphi$ in $\sigma(X^*, X)$: ciò significa che per ogni intorno U di φ della forma

$$U = \{\psi \in X^* :\ |(\psi - \varphi)x_i| < \varepsilon,\ 1 \le i \le N\}$$

esiste $n_U \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_n \in U$ per ogni $n \ge n_U$. Siano allora $x \in X$ ed $\varepsilon > 0$: per ipotesi l'insieme $V = \{\psi \in X^* :\ |(\psi - \varphi)x| < \varepsilon\}$ è un intorno di φ in $\sigma(X^*, X)$, e dunque vi è $n_V \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_n \in V$ per ogni $n \ge n_V$. Ne segue $\varphi_n x \to \varphi x$ per $n \to \infty$. Dato che x è arbitrario, si ha $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ in X^*. Viceversa, sia $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ in X^*. Fissiamo un intorno di φ della forma

$$U = \{\psi \in X^* :\ |(\psi - \varphi)x_i| < \varepsilon,\ 1 \le i \le N\};$$

dato che, per ipotesi, $\varphi_n x_i \to \varphi x_i$ per $n \to \infty$, $1 \le i \le N$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $|(\varphi_n - \varphi)x_i| < \varepsilon$ per ogni $n \ge \nu$, $1 \le i \le N$, e ciò significa che $\varphi_n \in U$ per ogni $n \ge \nu$. Pertanto $\varphi_n \to \varphi$ in $\sigma(X^*, X)$.

Esercizio 10.6.4 (i) Sia $\{\varphi_n\} \subset X^*$ tale che per ogni $x \in X$ la successione numerica $\{\varphi_n x\}$ sia di Cauchy: allora esiste un numero A_x tale che $\varphi_n x \to A_x$ per $n \to \infty$. Ne segue $|\varphi_n x| \le C_x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; quindi, per il teorema di Banach-Steinhaus, risulta $\|\varphi_n\|_{X^*} \le C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ma allora la quantità A_x, che è evidentemente lineare rispetto a x, verifica $|A_x| \le \limsup_{n\to\infty} |\varphi_n x| \le C\|x\|_X$ per ogni $x \in X$. Dunque la mappa $x \mapsto A_x$ definisce un elemento $\varphi \in X^*$ per il quale si ha $\varphi_n x \to \varphi x$ per ogni $x \in X$, ossia $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ in X^*.

(ii) Sia $\{x_n\} \subset X$ tale che per ogni $\varphi \in X^*$ la successione numerica $\{\varphi x_n\}$ sia di Cauchy: allora esiste un numero A_φ tale che $\varphi x_n \to A_\varphi$ per $n \to \infty$. Ne segue $|J_{x_n}\varphi| = |\varphi x_n| \le C_\varphi$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; quindi, per il teorema di Banach-Steinhaus, risulta $\|x_n\|_X = \|J_{x_n}\|_{X^{**}} \le C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ma allora la quantità A_φ, che è evidentemente lineare rispetto a φ, verifica $|A_\varphi| \le \limsup_{n\to\infty} |J_{x_n}\varphi| \le C\|\varphi\|_{X^*}$ per ogni $\varphi \in X^*$. Dunque la mappa $\varphi \mapsto A_\varphi$ definisce un elemento $\Lambda \in X^{**}$ per il quale si ha $J_{x_n}\varphi \to \Lambda\varphi$ per ogni $\varphi \in X^*$. Essendo X riflessivo, esiste un unico $x \in X$ tale che $\Lambda = J_x$, da cui $\varphi x_n \to \varphi x$ per ogni $\varphi \in X^*$; pertanto $x_n \rightharpoonup x$ in X.

Esercizio 10.6.5 Consideriamo la successione $\{x^{(n)}\} \subset c_0$ definita da $x_k^{(n)} = 1$ se $k \le n$, $x_k^{(n)} = 0$ se $k > n$. Essa è debolmente di Cauchy perché, fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $y \in \ell^1$ si ha per $n > m \ge \nu_\varepsilon$

$$\left|\langle y, x^{(n)} - x^{(m)}\rangle_{\ell^1, c_0}\right| = \left|\sum_{k=1}^n y_k - \sum_{k=1}^m y_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^n y_k\right| \le \sum_{k=m+1}^n |y_k| < \varepsilon.$$

Tuttavia, $\{x^{(n)}\}$ non converge debolmente in c_0 perché il suo unico possibile candidato limite, ossia la successione $\mathbf{1} = \{1, 1, 1, \dots\}$, appartiene a ℓ^∞ ma non a c_0.

Esercizio 10.6.6 (i) Per la convergenza uniforme basta osservare che

$$\|A_nB - AB\|_{\mathcal{L}(X)} \le \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(X)}\|B\|_{\mathcal{L}(X)}\,, \qquad \|AB_n - AB\|_{\mathcal{L}(X)} \le \|A\|_{\mathcal{L}(X)}\|B_n - B\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

Per la convergenza forte, se $A_n \to A$ fortemente, allora $\|A_nBx - ABx\|_X \to 0$; se $B_n \to B$ fortemente, allora $\|A(B_n - B)x\|_X \le \|A\|_{\mathcal{L}(X)}\|(B_n - B)x\|_X \to 0$.
Per la convergenza debole, se $A_n \to A$ debolmente, allora $(A_n - A)Bx \rightharpoonup 0$; se $B_n \to B$ debolmente, allora per ogni $F \in X^*$ si ha $|F(A(B_n - B)x| = |A^*F(B_n - B)x| \to 0$, perché $A^*F \in X^*$.
(ii) Se $A_n \to A$ e $B_n \to B$ in $\mathcal{L}(X)$, allora in particolare $\{B_n\}$ è limitata in $\mathcal{L}(X)$ da una costante M; dunque

$$\|A_nB_n - AB\|_{\mathcal{L}(X)} \le \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(X)}\|B_n\|_{\mathcal{L}(X)} + \|A\|_{\mathcal{L}(X)}\|B_n - B\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0.$$

(iii) Se $\|A_n\|_{\mathcal{L}(X)} \le M$ e $\|(A_n - A)x\|_X \to 0$, $\|(B_n - B)x\|_X \to 0$, allora per ogni $x \in X$ si ha

$$\|A_nB_nx - ABx\|_X \le \|A_n\|_{\mathcal{L}(X)}\|B_nx - Bx\|_X + \|(A_n - A)Bx\|_X \to 0.$$

In generale però questa convergenza non c'è: se $X = c_{00}$, definiamo per $x \in c_{00}$

$$(A_nx)_k = \begin{cases} k\,x_k & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \ne n, \end{cases} \qquad (B_nx)_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k < n \\ \frac{1}{n}\,x_{k-n+1} & \text{se } k \ge n. \end{cases}$$

Allora si ha, con facili verifiche, $\|A_n\|_{\mathcal{L}(c_{00})} = n$, e $\|A_nx\|_\infty = 0$ per ogni $n \ge N$, ove $N = \max\{k \in \mathbb{N}^+ : x_k \ne 0\}$; dunque A_n converge fortemente a 0; inoltre $B_n \to 0$ addirittura uniformemente. Tuttavia, A_nB_n non converge fortemente a 0, poiché per ogni $x \in c_{00}$ si ha

$$(A_nB_nx)_k = \begin{cases} k\,(B_nx)_k = x_1 & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \ne n, \end{cases}$$

da cui, scelto $x \in c_{00}$ tale che $x_1 \ne 0$, si ricava $\|A_nB_nx\|_\infty = |x_1| \not\to 0$.
(iv) Sia $X = \ell^2$; definendo

$$(A_nx)_k = x_{n+k}\,, \qquad (B_nx)_k = (A_n^*x)_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \le n \\ x_{k-n} & \text{se } k > n, \end{cases}$$

si ottiene $\|A_n\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} = \|A_n^*\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} = 1$, ed inoltre

$$\|A_nx\|_{\ell^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+n}|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \to 0 \quad \forall x \in \ell^2,$$

mentre A_n^* converge debolmente a 0, dato che, per quanto appena visto,

$$|(A_n^*x, y)_{\ell^2}| = |(x, A_ny)_{\ell^2}| \le \|x\|_{\ell^2}\|A_ny\|_{\ell^2} \to 0 \quad \forall x, y \in \ell^2.$$

Tuttavia $A_nA_n^*$ non converge debolmente a 0, in quanto

$$(A_nA_n^*x, y)_{\ell^2} = (A_n^*x, A_n^*y)_{\ell^2} = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_{k-n}\overline{y_{k-n}} = \sum_{h=1}^{\infty} x_h\overline{y_h} = (x, y)_{\ell^2} \not\to 0.$$

Esercizio 10.6.7 (i) Risulta

$$\|U_nx\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \to 0 \quad \forall x \in \ell^2;$$

in particolare $\|U_n\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} \le 1$. Tuttavia

$$\|U_n\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} \ge \sup_{i \in \mathbb{N}^+} \|U_ne_i\|_2 = \|U_ne_{n+1}\|_2 = 1;$$

dunque $\|U_n\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} = 1 \not\to 0$.

(ii) Poniamo $(Vx)_k = k\,x_k$ per ogni $x \in c_{00}$: allora, se $x \in c_{00}$ con $x_k = 0$ per $k > N$, si ha

$$\|V_n x - Vx\|_2^2 = \sum_{k=1}^{N} |k\,x_k - k\,x_k|_2 = 0 \qquad \forall n > N;$$

però

$$\sup_{x \in c_{00}} \frac{\|Vx\|_2}{\|x\|_2} \geq \|Ve_n\|_2 = n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+;$$

il che mostra che V non è limitato su c_{00}.

(iii) Si ha

$$(C_n x)_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \leq n \\ x_{k-n} & \text{se } k > n, \end{cases}$$

e pertanto

$$(C_n x, y)_2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_{k-n}\,\overline{y_k} \leq \|x\|_2 \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k|^2} \to 0 \qquad \forall x, y \in \ell^2,$$

e quindi $C_n \to 0$ debolmente; tuttavia

$$1 \geq \|C_n\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} \geq \|C_n e_1\|_2 = 1,$$

cioè $C_n \not\to 0$ uniformemente, ed inoltre

$$\|C_n x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_{k-n}|^2} = \|x\|_2 \qquad \forall x \in \ell^2,$$

ossia $C_n \not\to 0$ fortemente.

Esercizio 10.6.8 Se $f_n \rightharpoonup f$ in L^p, allora per la proposizione 10.6.2 si ha $\|f_n\|_p \leq K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, cioè vale (i). Inoltre, se $\mu(E) < \infty$, risulta $\chi_E \in L^q$ (ove $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) e dunque, per il teorema 9.2.1,

$$\int_E f_n\,d\mu = \langle f_n, \chi_E \rangle_{L^p,(L^p)^*} \to \langle f, \chi_E \rangle_{L^p,(L^p)^*} = \int_E f\,d\mu,$$

ossia vale (ii).

Viceversa, da (ii) segue che $\int f_n \varphi\,d\mu \to \int f\varphi\,d\mu$ per ogni $\varphi \in \mathcal{S}_0$; poiché $\mathcal{S}_0$ è denso in L^p (esercizio 9.1.23), grazie a (i) si ha per ogni $g \in L^q$, scelta $\varphi \in \mathcal{S}_0$ tale che $\|g - \varphi\|_q < \varepsilon$,

$$\left|\int (f_n - f) g\,d\mu\right| \leq \|f_n - f\|_p \|g - \varphi\|_q + \left|\int (f_n - f)\varphi\,d\mu\right|;$$

il primo addendo a secondo membro è minore di $K\varepsilon$, mentre il secondo, per quanto visto sopra, è minore di ε per $n \geq n_\varepsilon$. Ne segue $f_n \rightharpoonup f$ in L^p.

Se $p = \infty$, si ha, con la stessa dimostrazione, $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in L^∞ se e solo se

(i) $\|f_n\|_\infty \leq K$,

(ii) $\int_E f_n\,d\mu \to \int_E f\,d\mu$ per ogni E misurabile con $\mu(E) < \infty$.

Però (i) e (ii) non implicano $f_n \rightharpoonup f$ in L^∞: infatti, in $L^\infty(0,1)$ consideriamo $f = \chi_{[0,1]}$ e $f_n(x) = nx$ per $0 \leq x < \frac{1}{n}$, $f_n(x) = 1$ per $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$. Si ha $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in L^∞, perché per ogni $g \in L^1$ si ha

$$\left|\int_0^1 f_n g\,dx\right| \leq \int_0^{\frac{1}{n}} |g| dx \to 0.$$

Tuttavia f_n non converge debolmente a f in L^∞: ad esempio, il funzionale $\overline{T}$, estensione a L^∞ del funzionale $Th = h(0)$ definito su $C[0,1]$, verifica $\overline{T}f = Tf = f(0) = 1$, $\overline{T}f_n = Tf_n = f_n(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; dunque $\overline{T}(f_n - f) \not\to 0$ in L^1.

Esercizio 10.6.9 Sia $f_n \rightharpoonup f$ in L^1. Allora valgono (i) e (ii) dell'esercizio 10.6.8, con la stessa dimostrazione, e non serve l'ipotesi $\mu(E) < \infty$ perché $\chi_E \in L^\infty$ anche se $\mu(E) = \infty$.
Viceversa, se $\mu(X) < \infty$ allora con la stessa dimostrazione da (i) e (ii) segue che $f_n \to f$ in L^1. Però se $\mu(X) = \infty$ e se la (ii) vale solo sugli insiemi misurabili di misura finita, la tesi è falsa. Infatti, scelti $X = [0, \infty[$, $f_n = \chi_{[n,n+1]}$, $f = 0$, allora vale (i) (in quanto $\|f_n\|_1 \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$), e vale anche (ii), dato che se $m(E) < \infty$ si ha $\int_E f_n \, dx = m(E \cap [n, n+1]) \to 0$; tuttavia con $E = [k, \infty[$ risulta

$$\int_E f_n \, dx = m(E \cap [n, n+1]) = 1 \qquad \forall n > k,$$

cosicché $\langle f, \chi_E \rangle_{L^1,(L^1)^*} \not\to 0$. Dunque $f_n \not\rightharpoonup f$ in L^1.

Esercizio 10.6.10 Se M è un convesso debolmente chiuso, allora è chiuso, dato che la topologia debole è meno fine della topologia indotta dalla norma.
Viceversa, sia M un convesso chiuso. Se, per assurdo, esistesse un punto x appartenente alla chiusura debole di M ma non a M, il compatto $\{x\}$ e il chiuso M sarebbero separati: dunque, per l'esercizio 10.1.9 esisterebbe $F \in X^*$ tale che $\sup_M F < Fx$. Posto $\delta = \frac{1}{2}(Fx - \sup_M F)$, consideriamo l'insieme $U = x + U_{F,\delta}$, che è un w-intorno di x; esiste $z \in M \cap U$, e per tale z si ha $Fz \leq \sup_M F$ e $|F(z-x)| < \delta$. Ne segue $Fx \leq |F(x-z)| + Fz \leq \delta + \sup_M F < Fx$, che implica $Fx < \sup_M F$ per la scelta di δ: assurdo. Dunque M coincide con la sua chiusura debole, ossia è debolmente chiuso.

Esercizio 10.6.11 Sia, per assurdo, $\{x_n\} \subseteq X$ tale che $x_n \rightharpoonup x$ e $x_n \rightharpoonup y$ con $x \neq y$. Per l'esercizio 10.1.9 esiste $g \in X^*$ tale che $gx < gy$, da cui $gx = \lim_{n\to\infty} gx_n = gy > gx$, assurdo.
Sia ora, per assurdo, $\{g_n\} \subseteq X^*$ tale che $g_n \overset{*}{\rightharpoonup} g$ e $g_n \overset{*}{\rightharpoonup} h$, con $g \neq h$. Scelto $x \in X$ tale che $gx \neq hx$, si ha $gx = \lim_{n\to\infty} g_n x = hx$, assurdo.

Esercizio 10.6.12 Sia $\{F_n\} \subseteq X^*$ tale che $F_n \overset{*}{\rightharpoonup} F$ in X^*: allora $F_n x \to Fx$ in $\mathbb{C}$ per ogni $x \in X$. Dato che la successione $\{F_n x\}$ è convergente, essa è limitata, ossia $|F_n x| \leq M_x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Di conseguenza, dal teorema di Banach-Steinhaus segue che esiste $M > 0$ tale che $\|F_n\|_{X^*} \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre

$$|Fx| = \lim_{n\to\infty} |F_n x| \leq \liminf_{n\to\infty} \|F_n\|_{X^*} \|x\|_X \qquad \forall x \in X,$$

da cui $\|F\|_{X^*} \leq \liminf_{n\to\infty} \|F_n\|_{X^*}$.

Esercizio 10.6.13 (i) Siano $x_n \rightharpoonup X$ in X e $F_n \to F$ in X^*. Allora

$$|F_n x_n - Fx| \leq |F_n x_n - Fx_n| + |Fx_n - Fx| \leq \|F_n - F\|_{X^*} \|x_n\|_X + |Fx_n - Fx|;$$

all'ultimo membro il primo addendo è un infinitesimo moltiplicato per una successione limitata (proposizione 10.6.2), mentre il secondo addendo è infinitesimo per convergenza debole.

(ii) Siano $x_n \to X$ in X e $F_n \overset{*}{\rightharpoonup} F$ in X^*. Allora

$$|F_n x_n - Fx| \leq |F_n(x_n - x)| + |F_n x - Fx| \leq \|F_n\|_{X^*} \|x_n - x\|_X + |F_n x - Fx|;$$

all'ultimo membro il primo addendo è una successione limitata (esercizio 10.6.12) moltiplicata per un infinitesimo, mentre il secondo addendo è infinitesimo per convergenza debole.

(iii) In ℓ^2 si ha $x_n := e_n \rightharpoonup 0$ e $F_n x := (x, e_n)_{\ell^2} \overset{*}{\rightharpoonup} Fx = 0$; tuttavia $F_n e_n = 1$, quindi non tende a $0 = F0$.

Esercizio 10.6.14 Sia $x_n \rightharpoonup x$ in X. Dato che $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, se $g \in Y^*$ si ha $g \circ T \in X^*$ e quindi $g(Tx_n) \to g(Tx)$, ossia $Tx_n \rightharpoonup Tx$ in Y.

Esercizio 10.6.15 Sia x un punto nella chiusura debole sequenziale di K: dunque esiste $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ tale che $x_n \rightharpoonup x$ in X. Fissiamo un intorno $x + U_{\varphi_1,\dots,\varphi_m,\varepsilon}$ di x in w: allora, poiché $\varphi_i x_n \to \varphi x$ per $n \to \infty$, $i = 1, \dots, m$, esiste ν_ε tale che $|\varphi_i(x_n - x)| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu_\varepsilon$, $i = 1, \dots, m$; ciò significa che

$x_n \in x + U_{\varphi_1,\dots,\varphi_m,\varepsilon}$ per ogni $n \geq \nu_\varepsilon$. Pertanto ogni intorno di x in w contiene punti di K, e dunque x appartiene alla chiusura debole di K.

Esercizio 10.6.16 Sia $E = \{e_m + m\, e_n\}_{n,m\in\mathbb{N}} \subset \ell^p$. Una successione $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E$ che converga debolmente a 0 in ℓ^p deve essere del tipo $\{e_{m_k} + m_k\, e_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $\{m_k\}$ limitata, altrimenti $\{x_k\}$ non sarebbe limitata. Quindi $\{e_{m_k}\}$ assume un numero finito di valori. Ne segue che, al contrario, $n_k \to \infty$ (altrimenti $\{x_k\}$ assumerebbe un numero finito di valori e non potrebbe convergere debolmente a 0). Pertanto $m_k\, e_{n_k} \rightharpoonup 0$. Ma allora, i casi sono due: o m_k è definitivamente costante, $m_k = m_q$ per ogni $k \geq \nu$, e allora $x_k = e_{m_q} + m_q\, e_{n_k} \rightharpoonup e_{m_q}$, quindi non può esserci convergenza debole a 0, oppure $\{m_k\}$ assume infinite volte più di un valore, e allora $\{x_k\}$ non ha limite debole.
Da quanto detto segue che la chiusura debole sequenziale di E è l'insieme $E \cup \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Invece la chiusura debole di E contiene anche $\{0\}$, perché, fissato $i \in \mathbb{N}$ e scelto $\varphi_i \in (\ell^p)^*$ tale che $\varphi_i(e_n) = \delta_{in}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, nel w-intorno $U_{\varphi_i,\varepsilon}$ di 0 cadono tutti gli $e_m + m\, e_n$ con $m > i$ e $n > i$.

Esercizio 10.6.17 Indichiamo con S_0 la chiusura debole sequenziale di S. Poiché ogni base ortonormale $\{e_k\}$ è contenuta in S e converge debolmente a 0, si ha $0 \in S_0$. Sia ora $x \in B \setminus \{0\}$: se $\|x\|_H = 1$, allora $x \in S \subseteq S_0$. Se invece $0 < \|x\|_H < 1$, consideriamo i vettori della forma $x + t\, e_k$, $t > 0$: al variare di t, la norma di questi vettori varia con continuità da 0 a ∞, e dunque esiste $t_k > 0$ tale che $\|x + t_k\, e_k\|_H = 1$. Inoltre

$$0 < t_k = \|t_k\, e_k\|_H \leq \|x + t_k e_k\|_H + \|x\|_H = 1 + \|x\|_H < 2.$$

Se ne deduce che $x + t_k\, e_k \rightharpoonup x$ in H: infatti, per ogni $y \in H$,

$$|(t_k\, e_k, y)_H| = t_k |(e_k, y)_H| \leq 2|(e_k, y)_H| \to 0 \quad \text{per } k \to \infty.$$

Dunque $x \in S_0$ e pertanto $B \subseteq S_0$. D'altra parte, se $x \in S_0$, necessariamente deve essere $\|x\|_H \leq 1$ in virtù della proposizione 10.6.2, e quindi $x \in B$.

Esercizio 10.6.18 Per ogni $g \in C[a,b]$ si ha

$$|F_t(g) - F_s(g)| = |g(t) - g(s)| \to 0 \qquad \text{per } |t - s| \to 0^+,$$

dato che g è continua. Ne segue $F_s \overset{*}{\rightharpoonup} F_t$ in $(C[a,b])^*$ per $s \to t$.

Esercizio 10.6.19 Sia $f \in L^\infty(a,b) = (L^1(a,b))^*$. Fissiamo un intorno $U_{g_1,\dots,g_N,\varepsilon}$ di $0 \in L^\infty(a,b)$ nella topologia w^*. Scegliamo una successione $\{f_n\} \subset C[a,b]$ tale che $f_n(x) \to f(x)$ q.o. per $n \to \infty$ e $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ q.o per ogni $n \in \mathbb{N}$ (ad esempio, si può prolungare f a 0 fuori di $[a,b]$ e prendere come f_n la convoluzione di f con una mollificatrice di parametro $1/n$). Allora, fissato $\varepsilon > 0$, si ha per convergenza dominata

$$\left| \int_a^b (f_n - f) g_i \, dt \right| < \varepsilon, \qquad i = 1, \dots, N,$$

non appena n supera un opportuno ν_ε. Dunque $f_n \in f + U_{g_1,\dots,g_N,\varepsilon}$ per ogni $n \geq \nu_\varepsilon$. Pertanto ogni intorno di f in w^* contiene funzioni continue.

Esercizio 10.6.20 Sia $\dim X = k < \infty$. Allora $\dim X^* = k$; sia $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ una base di X^* con $\|\varphi_i\|_{X^*} = 1$, $1 \leq i \leq k$. Ogni w-intorno U di 0 è della forma $U = \{x \in X : \ |\varphi_{i_h} x| < \varepsilon,\ 1 \leq h \leq p\}$, ove $p \leq k$; chiaramente esso è aperto nella topologia della norma, quindi è un intorno di 0 in tale topologia. Viceversa, sia $B = \{x \in x : \ \|x\|_X < \varepsilon\}$ un intorno di 0 nella topologia della norma. Allora $|\varphi_{i_h} x| \leq \|x\|_X < \varepsilon$ per $1 \leq h \leq p$; dunque il w-intorno U è contenuto in B. Pertanto B è a sua volta un w intorno di 0.

Esercizio 10.6.21 Se $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^1$ e $x^{(n)} \to x$ in ℓ^1, allora $x^{(n)} \rightharpoonup x$ in ℓ^1. Viceversa, sia $x^{(n)} \rightharpoonup x$ in ℓ^1: possiamo supporre, rimpiazzando $\{x^{(n)}\}$ con $\{x^{(n)} - x\}$, che $x^{(n)} \rightharpoonup 0$. Supponiamo per assurdo che $x^{(n)} \not\to 0$ in ℓ^1; allora esiste $\varepsilon > 0$ ed esiste una sottosuccessione, che per semplicità non indichiamo con un altro indice, tale che $\|x^{(n)}\|_1 \geq \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Osservato che dall'ipotesi segue $x_h^{(n)} = \langle x^{(n)}, e_h \rangle_{\ell^1,\ell^\infty} \to 0$ per ogni $h \in \mathbb{N}$, definiamo $n_0 = 0$, $m_0 = 0$, e poi, induttivamente, noti

n_{h-1} e m_{h-1} ,

$$n_h = \min\left\{n > n_{h-1} : \sum_{k=0}^{m_{h-1}} |x_k^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{5}\right\}, \quad m_h = \min\left\{m > m_{h-1} : \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{5}\right\}.$$

Poniamo adesso $z = \{z_k\}$, ove

$$z_k = \operatorname{sgn} x_k^{(n_h)} \quad \text{se} \;\; m_{h-1} \le k \le m_h\,, \quad h \in \mathbb{N};$$

ovviamente $z \in \ell^\infty$, ed inoltre verificheremo che risulta

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty} z_i\, x_i^{(n_k)}\right| \ge \frac{\varepsilon}{5} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

(da cui l'assurdo, dato che per ipotesi deve essere $\sum_{i=0}^{\infty} z_i\, x_i^{(n)} \to 0$ per $n \to \infty$). Infatti

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=0}^{\infty} z_i\, x_i^{(n_k)}\right| &= \left|\sum_{i=0}^{m_{k-1}} z_i\, x^{(n_k)} + \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} |x_i^{(n_k)}| + \sum_{i=m_k+1}^{\infty} z_i\, x_i^{(n_k)}\right| = \\
&= \left|\sum_{i=0}^{m_{k-1}} z_i\, x^{(n_k)} + \|x^{(n_k)}\|_1 - \sum_{i=0}^{m_{k-1}} |x_i^{(n_k)}| - \sum_{i=m_k+1}^{\infty} |x_i^{(n_k)}| + \sum_{i=m_k+1}^{\infty} z_i\, x_i^{(n_k)}\right| \ge \\
&\ge \|x^{(n_k)}\|_1 - 2\sum_{i=0}^{m_{k-1}} |x_i^{(n_k)}| - 2\sum_{i=m_k+1}^{\infty} |x_i^{(n_k)}| \ge \varepsilon - \frac{2}{5}\,\varepsilon - \frac{2}{5}\,\varepsilon = \frac{\varepsilon}{5}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 10.6.22 Sia $g \in L^q(a,b)$, oppure $g \in L^1(a,b)$ nel caso $p = \infty$. Fissato $\varepsilon > 0$, per l'esercizio 9.1.24 esiste $h \in C_c^\infty[a,b]$ tale che

$$\|g - h\|_{L^q(a,b)} < \frac{\varepsilon}{(b-a)^{1/p}}.$$

Dunque

$$\left|\int_a^b g(x)\sin nx\,dx\right| \le \|g-h\|_{L^q(a,b)}(b-a)^{1/p} + \left|\int_a^b h(x)\sin nx\,dx\right| < \varepsilon + \left|\int_a^b h(x)\sin nx\,dx\right|.$$

D'altra parte, l'ultimo integrale si stima come segue: esistono $k, m \in \mathbb{N}$, con $k < m$, tali che $2k\pi \le a < b \le 2m\pi$; estendendo $h(x)$ con il valore 0 su $[2k\pi, 2m\pi] \setminus [a,b]$, si ha

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b h(x)\sin nx\,dx\right| &= \left|\int_{2k\pi}^{2m\pi} h(x)\sin nx\,dx\right| = \\
&= \left|\sum_{h=k}^{m-1}\int_{2h\pi}^{2(h+1)\pi} h(x)\sin nx\,dx\right| = \sum_{h=k}^{m-1}\left|\int_0^{2\pi} h(x+2h\pi)\sin nt\,dt\right|.
\end{aligned}$$

Dato che, in virtù dell'esempio 10.6.5 (2), $\sin nx \rightharpoonup 0$ in $L^2(0,2\pi)$, esiete $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left|\sum_{h=k}^{m-1}\int_0^{2\pi} h(x+2h\pi)\sin nx\,dx\right| < \varepsilon \qquad \forall n \ge n_\varepsilon\,,$$

da cui

$$\left|\int_a^b g(x)\sin nx\,dx\right| < 2\varepsilon \qquad \forall n \ge n_\varepsilon\,.$$

Esercizio 10.6.23 (i) Consideriamo la successione $\{e^{inx}\} \subset L^p(-\pi,\pi)$. Essa converge debolmente a 0 in $L^p(-\pi,\pi)$: infatti, fissata $g \in L^q(-\pi,\pi)$, esiste $h \in C[-\pi,\pi]$ tale che $\|g-h\|_p < \varepsilon$; allora, essendo $h \in L^2(-\pi,\pi)$, i coefficienti di Fourier di h rispetto alla successione $\{e^{inx}\}$ sono infinitesimi per $n \to \infty$, da cui, per n abbastanza grande,

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, e^{-inx}\, dx\right| \le \|g-h\|_q (2\pi)^{1/p} + \left|\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\, e^{-inx}\, dx\right| < (2\pi)^{1/p}\varepsilon + \varepsilon.$$

Lo stesso argomento funziona nel caso $p=\infty$ e $q=1$. Tuttavia, $e^{inx} \not\to 0$ q.o. in $[-\pi,\pi]$: infatti in tale intervallo si ha $|e^{inx}| = 1 \not\to 0$.

(ii) Usiamo lo stesso esempio: $e^{inx} \not\to 0$ in misura, perché

$$\{x \in [-\pi,\pi] : |e^{inx} - 0| > \delta\} = \{x \in [-\pi,\pi] :\ 1 > \delta\} = [-\pi,\pi] \qquad \forall \delta \in]0,1[\,.$$

(iii) Consideriamo la successione $\{[(n+1)^2\, x^n]^{1/p}\} \subset L^p(0,1)$. Essa converge a 0 q.o., ma $f_n \not\to 0$ in $L^p(0,1)$ perché le norme $\|f_n\|_p^p = n+1$ non sono limitate.

(iv) Con lo stesso esempio si ha $f_n \to 0$ in misura: infatti $f_n \to 0$ uniformemente in $[0,1-\vartheta]$ per ogni $\vartheta \in]0,1[$, e dunque

$$(n+1)^2\, x^n < \varepsilon \qquad \forall x \in [0,1-\vartheta], \quad \forall n \ge n_\vartheta\,.$$

Ne segue

$$m(\{x \in [0,1] :\ (n+1)^2\, x^n \ge \varepsilon\}) \le \vartheta,$$

vale a dire

$$\lim_{n\to\infty} m(\{x \in [0,1] :\ (n+1)^2\, x^n \ge \varepsilon\}) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Tuttavia, come abbiamo visto, $f_n \not\to f$ in $L^p(0,1)$.

(v) Dall'esercizio 10.6.22, posto $f_n = \sin nx$, si ha $\sin nx \rightharpoonup 0$ in $L^p(\pi,\pi)$, mentre $|\sin nx| \not\to 0$, dato che

$$(1, |\sin nx|)_{L^q(-\pi,\pi),L^p(-\pi,\pi)} = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin nx|\, dx \ge \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi > 0.$$

(vi) In $L^p(0,1)$ siano $f=1$ e $f_n = (-1)^n$: allora $|f_n| = |f|$, mentre

$$(1, f_{2n+1})_{L^q(0,1),L^p(0,1)} = \int_0^1 (-1)\, dx = -1 \not\to \int_0^1 1\, dx = 1.$$

Esercizio 10.6.24 Definiamo $F : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $F(f) = f(0)$. Per il teorema di Hahn-Banach, esiste $\overline{F} \in [L^\infty(0,1)]^*$, tale che $\overline{F} = F$ su $C[0,1]$. Ripetiamo l'argomentazione della dimostrazione del corollario 10.1.7: ponendo $f_n(x) = e^{-nx}$, si ha $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ in $L^\infty(0,1)$, perché se $g \in L^1(0,1)$ si ha $\int_0^1 f_n g\, dx \to 0$ per convergenza dominata; tuttavia $\overline{F}(e^{-nx}) = F(e^{-nx}) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, mentre $\overline{F}(0) = F(0) = 0$. Dunque $\overline{F}(e^{-nx}) \not\to \overline{F}(0)$ e pertanto $f_n \not\to 0$ in $L^\infty(0,1)$.

Esercizio 10.6.25 Sia $f_n \rightharpoonup f$ in L^p, oppure $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in L^∞. Posto $M(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$, per provare che $f \le M$ q.o., basta provare che $f \le M$ q.o. in un arbitrario $E \in \mathcal{F}$ con $\mu(E) < \infty$. Per l'esercizio 7.3.8, $\int_A f_n\, d\mu \to \int_A f\, d\mu$ per ogni $A \in \mathcal{F}$ con $A \subseteq E$ (si noti che $f_n, f \in L^1(E)$). Siano

$$Q_=\{x \in E :\ |M(x)| < \infty\}, \quad Q_\pm\{x \in E :\ M(x) = \pm\infty\}.$$

La tesi è evidente nei punti di Q_+. Per Q_- si ha per ogni $F \in \mathcal{F}$, con $F \subseteq Q_-$,

$$g_k(x) = \sup_{n\ge k} f_n(x) \searrow M(x) = -\infty;$$

quindi, per il teorema di B. Levi,

$$-\int_F g_k\, d\mu \to -\int_F M\, d\mu,$$

da cui

$$\int_F f\,d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_F f_k\,d\mu \le \lim_{k\to\infty}\int_F g_k\,d\mu = \int_F M\,d\mu \quad \forall F\in\mathcal{F},\ F\subseteq Q_-\,.$$

Adesso consideriamo Q: si ha

$$Q=\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\,,\quad \text{ove}\quad Q_n=\{x\in E:\ |M(x)|\le n\}.$$

Inoltre

$$Q_n=\bigcup_{m=1}^{\infty} S_{nm}\,,\quad \text{ove}\quad S_{nm}=\{x\in Q_n:\ g_k(x)\le M(x)+1\ \forall k\ge m\}:$$

infatti $S_{nm}\subseteq Q_n$, e se $x\in Q_n$ allora esiste $m\in\mathbb{N}^*$ tale che $0\le g_m(x)-M(x)\le 1$; ne segue $x\in S_{nm}$, essendo $g_k\le g_m$ per $k\ge m$. Allora, se $F\subseteq S_{nm}$ si ha, per ogni $k\ge m$, $0\le M\le g_k\le g_m\le M+1\le n+1$ (se $M\ge 0$), oppure $-n\le M\le g_k\le g_m\le M+1\le 1$ (se $M\le 0$). Dato che le costanti sono sommabili su E, per convergenza dominata si deduce che $\int_F g_k\,d\mu\to\int_F M\,d\mu$ per $k\to\infty$. Ma

$$\int_F f\,d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_F f_k\,d\mu \le \lim_{k\to\infty}\int_F g_k\,d\mu = \int_F M\,d\mu,$$

e pertanto

$$\int_F f\,d\mu \le \int_F M\,d\mu \qquad \forall F\in\mathcal{F},\ F\subseteq S_{nm}\,.$$

Infine, essendo gli S_{nm} crescenti rispetto a m, se $F\in\mathcal{F}$ e $F\subseteq Q_n$ si ha, ancora per il teorema di B. Levi,

$$\int_F f\,d\mu = \lim_{m\to\infty}\int_{F\cap S_{nm}} f\,d\mu \le \lim_{m\to\infty}\lim_{k\to\infty}\int_{F\cap S_{nm}} g_k\,d\mu = \lim_{m\to\infty}\int_{F\cap S_{nm}} M\,d\mu = \int_F M\,d\mu.$$

Poiché anche i Q_n sono crescenti rispetto e n, se $F\in\mathcal{F}$ e $F\subseteq Q$ si ottiene analogamente

$$\int_F f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{F\cap Q_n} f\,d\mu \le \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\int_{F\cap Q_n} g_k\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{F\cap Q_n} M\,d\mu = \int_F M\,d\mu.$$

In definitiva abbiamo provato che per ogni $F\in\mathcal{F}$, con $F\subseteq E$, risulta $\int_F f\,d\mu\le\int_F M\,d\mu$. Ne segue necessariamente $f(x)\le M(x)$ q.o. in E, con E arbitrario insieme misurabile di misura finita.
Dato che $m(x)=\liminf_{n\to\infty} f_n(x)=-\limsup_{n\to\infty}(-f_n(x))$, la tesi per $m(x)$ segue considerando $-f_n$ al posto di f_n.

Esercizio 10.6.26 Ripetiamo, con le dovute modifiche, la dimostrazione dell'enunciato dell'esercizio 10.4.11. Proviamo anzitutto che T è iniettivo. Se $Tx=0$, allora $\varphi(Tx)=0$ per ogni $\varphi\in X^*$, ossia $(T^*\varphi)x=0$ per ogni $\varphi\in X^*$; dato che T^* è surgettivo, si deduce che $\psi x=0$ per ogni $\psi\in X^*$. Quindi $J_x\psi=0$ per ogni $\psi\in X^*$, ossia $J_x=0$; dato che $J:X\to X^{**}$ è un'isometria, si conclude che $x=0$.
Proviamo ora che $R(T)$ è chiuso. Sia $\{y_n\}\subseteq R(T)$ tale che $y_n\to y$ in X. Sarà $y_n=Tx_n$ con le x_n univovcamente determinate, essendo T iniettivo. Allora per ogni $\psi\in X^*$ e per ogni $\varphi\in X^*$ tale che $T^*\varphi=\psi$,

$$\psi x_n=(T^*\varphi)x_n=\varphi(Tx_n)=\varphi y_n\,,$$

da cui

$$|\psi x_n|\le\|\varphi\|_{X^*}\|y_n\|_X\,.$$

D'altra parte, per l'esercizio 10.3.2, esiste $c>0$ tale che per ogni $\psi\in X^*$ vi è $\varphi\in X^*$ per cui $T^*\varphi=\psi$ e $\|\varphi\|_{X^*}\le c\|\psi\|_{X^*}$. Dunque, scelto tale φ,

$$|J_{x_n}\psi|=|\psi x_n|\le\|\varphi\|_{X^*}\|y_n\|_X\le c\|\psi\|_{X^*}\|y_n\|_X\,,$$

e per l'arbitrarietà di ψ

$$\|x_n\|_x=\|J_{x_n}\|_{X^{**}}\le c\|y_n\|_X\,.$$

Ne segue $\|x_n - x_m\|_X \le c\|y_n - y_m\|_X$, cosicché $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in X, che è completo. Quindi esiste $x \in X$ tale che $x_n \to x$, e infine $y_n = Tx_n \to Tx = y$. Perciò $R(T)$ è chiuso. Si conclude che $T : X \to R(T)$ è bigettivo tra due spazi di Banach. Per il teorema dell'applicazione aperta (teorema 10.3.1), T^{-1} è continuo.

Esercizio 10.6.27 (i) Per decrescenza, esiste il limite di $(T_n^*T_nx, x)_H$; di conseguenza esiste il limite di $(T_n^*T_n(x \pm y), x \pm y)_H$ e di $(T_n^*T_n(x \pm iy), x \pm iy)_H$. Sviluppando le differenze a due a due, si vede che esiste il limite di $((T_n^*T_nx, y)_H$. Pertanto $T_n^*T_nx$ converge debolmente in H ad un limite che, essendo lineare rispetto a x, avrà la forma Bx, con $B \in \mathcal{L}(H)$ autoaggiunto.

(ii) Le forme quadratiche $((T_n^*T_n - B)x, x)_H$ convergono a 0 in modo decrescente, e in particolare $\|T_n^*T_n\|_{\mathcal{L}(H)} \le K < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Applicando l'esercizio 8.2.9 si ha

$$|((T_n^*T_n - B)x, y)_H| \le \sqrt{((T_n^*T_n - B)x, x)_H}\,\sqrt{((T_n^*T_n - B)y, y)_H}\,,$$

e scegliendo $y = (T_n^*T_n - B)x$ si ricava

$$\begin{aligned}\|(T_n^*T_n - B)x\|_H^2 &\le \sqrt{((T_n^*T_n - B)x, x)_H}\,\sqrt{((T_n^*T_n - B)^2x, (T_n^*T_n - B)x)_H} \le \\ &\le \sqrt{((T_n^*T_n - B)x, x)_H}\,\|T_n^*T_n - B\|_{\mathcal{L}(H)}^{1/2}\,\|(T_n^*T_n - B)x\|_H\,.\end{aligned}$$

Ne segue

$$\|T_n^*T_n - B)x\|_H \le (2K)^{1/2}\,\sqrt{((T_n^*T_n - B)x, x)_H}\,,$$

e l'ultimo membro va a 0 per convergenza debole.

(iii) Dalle convergenza debole di $\{T_nx\}$ segue, per la proposizione 10.6.2,

$$\|Cx\|_H^2 \le \liminf_{n\to\infty} \|T_nx\|_H^2 = \lim_{n\to\infty} (T_n^*T_nx, x)_H = (Bx, x)_H \qquad \forall x \in H.$$

Dunque, se $x \in \ker B$ si ha $Bx = 0$ e di conseguenza $Cx = 0$, ossia $x \in \ker C$.

(iv) In $H = \ell^2$ poniamo $v = \{2^{-k}\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ e fissiamo $y \in \ell^2 \setminus \{0\}$. Poniamo poi $T_nx = (x, y)_2(v + e_n)$ per ogni $x \in \ell^2$. Risulta chiaramente $T_nx \rightharpoonup Cx$ per ogni $x \in \ell^2$, ove $Cx = (x, y)_2\,v$. Inoltre, essendo

$$(T_nx, z)_2 = (x, y)_2\,(v + e_n, z)_2 = (x, \overline{(v + e_n, z)_2}\,y)_2\,,$$

si deduce che

$$T_n^*z = (z, v + e_n)_2\,y \qquad \forall z \in \ell^2.$$

Ne segue

$$\begin{aligned}T_n^*T_nx &= (T_nx, v + e_n)_2\,y = (x, , \|v + e_n\|_2^2\,y)_2\,y = \\ &= (x, y)_2[\|v\|_2^2 + 1 + 2(v, e_n)_2]\,y = (x, y)_2[2 + 2^{-n}]\,y,\end{aligned}$$

e in particolare, posto $Bx = 2(x, y)_2\,y$,

$$(T_n^*T_nx, x)_2 = |(x, y)_2|^2[2 + 2^{-n}] \searrow 2|(x, y)_2|^2 = (Bx, x)_2\,.$$

È evidente che $T_n^*T_nx \to Bx$ per ogni $x \in \ell^2$. Inoltre si verifica immediatamente che $\ker B = [\{y\}]^\perp = \ker C$. D'altra parte, analogamente a quanto fatto per $T_n^*T_n$, si ha $C^*Cx = (x, y)_2\,y$, e di conseguenza, se $x \notin \ker C$,

$$(C^*Cx, x)_2 = |(x, y)_2|^2 < 2|(x, y)_2|^2 = (Bx, x)_2\,.$$

Esercizio 10.6.28 Esiste $M > 0$ tale che $\|x_n\|_H \le M$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Poiché $(x_n - x, x_1 - x)_H \to 0$ per $n \to \infty$, esiste

$$n_1 = \min\left\{n > 1 :\ |(x_m - x, x_1 - x)_H| \le \frac{1}{2}\ \forall m \ge n\right\}.$$

Similmente, $(x_n - x, x_i - x)_H \to 0$ per $n \to \infty$, $i = 1, \dots, n_1$, per cui esiste

$$n_2 = \min\left\{n > n_1 :\ |(x_m - x, x_i - x)_H| \le \frac{1}{4},\ i = 1, \dots, n_1\ \forall m \ge n\right\}.$$

In generale, costruito n_k, si ha $(x_n - x, x_i - x)_H \to 0$ per $n \to \infty$, $i = 1, 2, \ldots, n_k$, e dunque esiste

$$n_{k+1} = \min\left\{ m > n_k : \ |(x_m - x, x_i - x)_H| \le \frac{1}{2^k}\,,\ i = 1, \ldots, n_k, \forall m \ge n \right\}.$$

Poniamo adesso $y_m = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m x_{n_k}$, $m \in \mathbb{N}^+$; risulta allora $y_m - x = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m (x_{n_k} - x)$, da cui

$$\begin{aligned}
\|y_m - x\|_H^2 &= \frac{1}{m^2}\sum_{k,h=1}^m (x_{n_k} - x, x_{n_h} - x)_H = \\
&= \frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^m \|x_{n_k} - x\|_H^2 + \frac{2}{m^2}\mathrm{Re}\sum_{h=1}^m \sum_{k=h+1}^m (x_{n_k} - x, x_{n_h} - x)_H \le \\
&\le \frac{4M^2 m}{m^2} + \frac{2}{m^2}\sum_{h=1}^m \frac{m-h}{2^h} \le \frac{4M^2}{m} + \frac{2(m-1)}{m^2} \le \frac{4M^2+2}{m},
\end{aligned}$$

da cui $y_m \to x$ in H per $m \to \infty$.

Esercizi del paragrafo 10.7

Esercizio 10.7.1 Sia $x_0 \in X$, con $\|x_0\| = 1$. Dato che X è infinito-dimensionale, il procedimento che segue è lecito. Scegliamo $x_1 \notin [\{x_0\}]$, con $\|x_1\| = 1$, tale che $\|x_1 - x_0| > \frac{1}{2}$ (possiamo farlo grazie all'esercizio 10.1.11). Analogamente scegliamo $x_2 \notin [\{x_0, x_1\}]$, con $\|x_2\| = 1$, tale che $\|x_2 - x_i\| > \frac{1}{2}$, $i = 0, 1$. Costruiti $x_0, x_1, \ldots, x_n$, scegliamo $x_{n+1} \notin [\{x_0, \ldots, x_n\}]$, con $\|x_{n+1}\| = 1$, tale che $\|x_{n+1} - x_i\| > \frac{1}{2}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. La successione $\{x_n\}$ così generata è limitata: essendo X riflessivo, essa ha una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ debolmente convergente in X ad un punto x con $\|x\| \le 1$. Tuttavia $\{x_{n_k}\}$ non può convergere in X, perché non è una successione di Cauchy, dato che $\|x_{n_k} - x_{n_h}\| > \frac{1}{2}$ per $k > h$.

Esercizio 10.7.2 Sia B la palla unitaria chiusa in ℓ^1, o in ℓ^p, o in ℓ^∞. Se B fosse compatta (nella topologia indotta dalla norma), dalla successione $\{e_n\} \subset B$ potremmo estrarre una sottosuccessione convergente. Ma essendo $\|e_n - e_m\|_\infty = 1$, $\|e_n - e_m\|_p = 2^{1/p}$, $\|e_n - e_m\|_1 = 2$, nessuna sottosuccessione di $\{e_n\}$ può convergere.

Esercizio 10.7.3 Sia $\{x^{(n)}\} \subset K$: dunque $|x_k^{(n)}| \le a_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. Scegliamo una prima sottosuccessione di $\{x^{(n)}\}$ tale che la prima coordinata di ciascun termine formi una successione convergente a un numero x_1 con $|x_1| \le a_1$. Scegliamo una seconda sottosuccessione di $\{x^{(n)}\}$ tale che anche la seconda coordinata di ciascun termine formi una successione convergente a un numero x_2 con $|x_2| \le a_2$. Iterando il procedimento, al passo k-simo avremo una sottosuccessione di tutte le precedenti tale che le prime k coordinate di ciascun termine formino successioni convergenti a x_i con $|x_i| \le a_i$, $1 \le i \le k$. La sottosuccessione diagonale, sottosuccessione di ciascuna delle infinite già costruite, è una $\{\overline{x}^{(n)}\} \subset \{x^{(n)}\}$ tale che $\overline{x}_k^{(n)} \to x_k$ per $n \to \infty$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Posto allora $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, e fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu_\varepsilon \in N$ tale che $\sum_{k>\nu_\varepsilon}(a_k)^p < \varepsilon$ (si osservi che se $a_n \ge 0$ e $\sum a_n < \infty$ allora $\sum (a_n)^p < \infty$ per ogni $p \in [1, \infty[\,)$. Perciò

$$\begin{aligned}
\|\overline{x}^{(n)} - x\|_p^p &= \sum_{k=1}^{\nu_\varepsilon} |\overline{x}_k^{(n)} - x_k|^p + \sum_{k=\nu_\varepsilon+1}^{\infty} |\overline{x}_k^{(n)} - x_k|^p \le \\
&\le \sum_{k=1}^{\nu_\varepsilon} |\overline{x}_k^{(n)} - x_k|^p + \sum_{k=\nu_\varepsilon+1}^{\infty} 2^p (a_k)^p \le \sum_{k=1}^{\nu_\varepsilon} |\overline{x}_k^{(n)} - x_k|^p + 2^p\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dato che all'ultimo membro la prima somma è finita, per $n \to \infty$ si ottiene che $\|\overline{x}^{(n)} - x\|_p^p \le 2^p\,\varepsilon$ per $n \ge n_\varepsilon$. Pertanto $\overline{x}^{(n)} \to x$ in ℓ^p, e in conclusione K è compatto.

Esercizio 10.7.4 Poniamo $x^{(n)} = \sum_{k=1}^n e_k = \{1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots\}$ (con 0 dall'$(n+1)$-simo posto in

poi): risulta $\{x^{(n)}\} \subset B$, ma poiché $x^{(n)} \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{1} = \{1, 1, 1, \ldots\}$ in ℓ^∞, tale successione non può avere sottosuccessioni debolmente convergenti in c_0. Quindi B non è debolmente sequenzialmente compatto, e a maggior ragione, in virtù dell'esercizio 10.6.15, B non è debolmente compatto.

Esercizio 10.7.5 Supponiamo che K sia limitato ed equicontinuo. Osserviamo che $C[a, b]$ è separabile, perché i polinomi a coefficienti razionali sono un insieme numerabile denso in $C[a, b]$, grazie alla densità dei razionali in $\mathbb{R}$ ed all'esercizio 4.7.11. Quindi, per il teorema di Ascoli-Arzelà (teorema 10.7.1), K è relativamente compatto.
Viceversa, se K è relativamente compatto, e per assurdo non è limitato, esiste $\{f_n\} \subset K$ tale che $\|f_n\|_\infty \to \infty$, e da questa successione non è possibile estrarre alcuna sottosuccessione convergente in $C[a, b]$: assurdo. Se poi, per assurdo, K non è equicontinuo, esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che, scelto $\delta = \frac{1}{n}$, vi è $f_n \in K$ per la quale esistono $x_n, y_n \in [a, b]$ con $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ ma $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$. Se esiste $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ tale che $f_{n_k} \to f$ uniformemente in $[a, b]$ per $k \to \infty$, passando ad un'ulteriore sottosuccessione esiste $x \in [a, b]$ tale che $x_{n_k} \to x$ e $y_{n_k} \to x$, mentre $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0$. Ma f, limite uniforme di funzioni continue, è continua, quindi $f(x_{n_k}) \to f(x)$ e $f(y_{n_k}) \to f(x)$ per $k \to \infty$. Si ottiene allora l'assurdo:

$$0 = \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0.$$

Esercizio 10.7.6 Se S è relativamente compatto, allora $\overline{S}$ è compatto e quindi è limitato; ne segue (a). Se non valesse (b), esisterebbe $\{x^{(\nu)}\} \subseteq S$ tale che $\sum_{j=n}^\infty |x_j^{(\nu)}|^p \geq \varepsilon_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; tale successione avrebbe, per ipotesi, un punto limite $x \in \ell^p$, e per tale x si avrebbe, passando al limite, $\sum_{j=n}^\infty |x_j|^p \geq \varepsilon_0$: ciò è assurdo perché, essendo $x \in \ell^p$, tale somma dovrebbe tendere a 0 per $n \to \infty$.
Viceversa, se valgono (a) e (b), sia $\{x^{(n)}\} \subseteq S$. Per (a), esiste una sottosuccessione $\{x^{(n,1)}\} \subseteq \{x^{(n)}\}$ tale che $x_1^{(n,1)} \to x_1$ in $\mathbb{R}$. Esiste poi un'altra sottosuccessione $\{x^{(n,2)}\} \subseteq \{x^{(n,1)}\}$ tale che $x_j^{(n,2)} \to x_j$ in $\mathbb{R}$, $j = 1, 2$. In generale, per ogni $m \in \mathbb{N}^+$ esiste $\{x^{(n,m+1)}\} \subseteq \{x^{(n,m)}\}$ tale che $x_j^{(n,m+1)} \to x_j$ in $\mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, m+1$. Posto $y^{(n)} = x^{(n,n)}$, $\{y^{(n)}\}$ è una sottosuccessione di $\{x^{(n)}\}$ che verifica $y_j^{(n)} \to x_j$ in $\mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}^+$. Si ha

$$\|y^{(n)} - y^{(m)}\|_p^p = \sum_{j=1}^\infty |y_j^{(n)} - y_j^{(m)}|^p = \sum_{j=1}^r |y_j^{(n)} - y_j^{(m)}|^p + \sum_{j=r+1}^\infty |y_j^{(n)} - y_j^{(m)}|^p.$$

Il primo addendo all'ultimo membro è minore di ε se $n, m \geq \nu_\varepsilon$, dato che $y_j^{(n)} \to x_j$ per $1 \leq j \leq r$. Il secondo addendo è minore di $2^p\,\varepsilon$ se $r \geq r_\varepsilon$, grazie a (b). Ne segue che $\{y^{(n)}\}$ è una successione di Cauchy in ℓ^p; poiché $y_j^{(n)} \to x_j$ per ogni $j \in \mathbb{N}^+$, si deduce che $x \in \ell^p$ e $y^{(n)} \to x$ in ℓ^p. Pertanto S è relativamente compatto.

Esercizio 10.7.7 Supponiamo che $\mathcal{A}$ sia compatto rispetto alla convergenza debole degli operatori, e proviamo (i). Sia $\{T_n\} \subseteq \mathcal{A}$ tale che $(T_n x, y)_H \to (Tx, y)_H$ per ogni $x, y \in H$: dobbiamo mostrare che $T \in \mathcal{A}$. Per la compattezza di $\mathcal{A}$, esiste $\{T_{n_k}\} \subseteq \{T_n\}$ tale che $(T_{n_k} x, y)_H \to (Sx, y)_H$, ove $S \in \mathcal{A}$. Ne segue $(Sx, y)_H = (Tx, y)_H$ per ogni $x, y \in H$, e pertanto $T = S \in \mathcal{A}$.
Proviamo (ii). Sia $x \in H$: dobbiamo mostrare che $\{Tx\}_{T\in\mathcal{A}}$ è compatto rispetto alla convergenza debole in H. Fissata $\{T_n x\} \subseteq \{Tx\}_{T\in\mathcal{A}}$, per la compattezza di $\mathcal{A}$ esiste $\{T_{n_k}\} \subseteq \{T_n\}$ tale che $(T_{n_k} x, y)_H \to (Tx, y)_H$ per ogni $x, y \in H$, con $T \in \mathcal{A}$. Ne segue $T_{n_k} x \rightharpoonup Tx$ per ogni $x \in H$, e ciò prova la tesi.

Viceversa, assumiamo (i) e (ii) e cominciamo a provare che $\{Tx\}_{T\in\mathcal{A}}$ è limitato in H per ogni $x \in H$: se esistesse $\{T_n x\} \subseteq \{Tx\}_{T\in\mathcal{A}}$ tale che $\|T_n x\|_H \to \infty$, da (ii) ricaveremmo l'esistenza di una sottosuccessione $\{T_{n_k}\} \subseteq \{T_n\}$ tale che $(T_{n_k} x, y)_H \to (Sx, y)_H$ per ogni $x, y \in H$, con $S \in \mathcal{A}$, ossia $T_{n_k} x \rightharpoonup Sx$ per ogni $x \in H$. Ma questo è assurdo, essendo $\|T_n x\|_H \to \infty$. Quindi deve essere $\|Tx\|_H \leq c(x)$ per ogni $x \in H$. Applicando allora il teorema di Banach-Steinhaus, si ricava $\|T\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M$ per ogni $T \in \mathcal{A}$, e ciò significa che $\mathcal{A}$ è limitato in $\mathcal{L}(H)$.
Sia ora $\{e_j\}$ un sistema ortonormale completo nello spazio di Hilbert separabile H, e sia $\{T_n\}$ una successione contenuta in $\mathcal{A}$. Per diagonalizzazione, usando (ii), si costruisce una $\{T_{n_k}\} \subseteq \{T_n\}$, tale che $T_{n_k} e_j \rightharpoonup y_j$ in H, ed anche $T_{n_k}\left(\sum_{j=1}^p \lambda_j\, y_j\right) \rightharpoonup \sum_{j=1}^p \lambda_j\, y_j$. Se $x \in H$, $x = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j\, e_j$, per ogni

$y \in H$ si ha

$$\begin{aligned}
|(T_{n_k}x - T_{n_h}x, y)_H| &= \left| \left(T_{n_k}\left(x - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, e_j \right), y \right)_H \right| + \left| \left((T_{n_k} - T_{n_h}) \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, e_j \right), y \right)_H \right| + \\
&+ \left| \left(T_{n_h}\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, e_j - x \right), y \right)_H \right| \leq \\
&\leq 2M\|y\|_H \left\| x - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, e_j \right\|_H + \left| \left((T_{n_k} - T_{n_h}) \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, e_j \right), y \right)_H \right|.
\end{aligned}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, se $m = m_\varepsilon$ si ha

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, e_j \right\|_H = \sum_{j=m+1}^{\infty} |\lambda_j|^2 < \frac{\varepsilon}{4\|y\|_H M}\,,$$

e se $k, h \geq \nu(\varepsilon, m_\varepsilon) = n_\varepsilon$ l'altro addendo all'ultimo membro è minore di $\frac{\varepsilon}{2}$. Perciò, se $k, h \geq n_\varepsilon$ si ottiene $|(T_{n_k}x - T_{n_h}x, y)_H| < \varepsilon$, ossia $T_{n_k}x \rightharpoonup Tx$ in H per ogni $x \in H$, ove $T \in \mathcal{L}(H)$. Grazie a (i) si ha $T \in \mathcal{A}$. Pertanto $\mathcal{A}$ è compatto per la convergenza debole degli operatori.

Esercizio 10.7.8 Posto $M = \sup_{\overline{G}} |f|$ e dato $\varepsilon > 0$, sia $\sigma > 0$ tale che $|f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon$ per $(x,y), (x',y') \in \overline{G}$ con $|x - x'| < \sigma$ e $|y - y'| < 2M\sigma$. Fissato $(x_0, y_0) \in G$, siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < x_0 < b$, tali che, detta Δ l'unione dei due triangoli chiusi delimitati dalle due rette per (x_0, y_0) di coefficienti angolari $\pm M$ e dalle rette $x = a$ e $x = b$, risulti $\Delta \subset G$. Una *spezzata di Eulero* è una sequenza finita di segmenti concatenati così costruiti: si traccia da (x_0, y_0) la retta di coefficiente angolare $f(x_0, y_0)$; si fissa su di essa un punto (x_1, y_1) (dunque $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$) e da esso si traccia la retta di coefficiente angolare $f(x_1, y_1)$, sulla quale si fissa un altro punto (x_2, y_2) (dunque $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$). Si procede in questo modo per un numero finito di passi, generando così una spezzata, di nodi (x_j, y_j), $j = 0, 1, \ldots, p$, che è grafico di una funzione continua definita su $[a, b]$; tale grafico è contenuto in Δ e si ha $y_{j+1} = y_j + f(x_j, y_j)(x_{j+1} - x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, p-1$. Sia $\{\varphi_n\}$ una successione di funzioni, i cui grafici siano spezzate di Eulero con nodi $(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})$, $i = 0, \ldots, p_n$, scelti in modo tale che

$$\delta_n = \max_{1 \leq i \leq p_n} |\xi_i^{(n)} - \xi_{i-1}^{(n)}| \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$|\varphi_n(x)| \leq \max\{b - x_0, x_0 - a\}(1 + M) \qquad (\text{perché } (x_n, \varphi_n(x)) \in \Delta),$$

ed inoltre, se $x, x' \in [a, b]$, con (ad esempio) $x < x'$, tenuto conto che per opportuni r, s sarà

$$\xi_r^{(n)} \leq x \leq \xi_{r+1}^{(n)} \leq \cdots \leq \xi_s^{(n)} \leq x' \leq \xi_{s+1}^{(n)},$$

risulta, per definizione di φ_n,

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(x) - \varphi_n(x')| &\leq |\varphi_n(x) - \varphi_n(\xi_{r+1}^{(n)})| + \sum_{i=r+1}^{s-1} |\varphi_n(\xi_i^{(n)}) - \varphi_n(\xi_{i+1}^{(n)})| + |\varphi_n(\xi_s^{(n)}) - \varphi_n(x')| = \\
&= |f(\xi_r^{(n)}, \eta_r^{(n)})(x - \xi_{r+1}^{(n)})| + \sum_{i=r+1}^{s-1} |f(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})(\xi_{i+1}^{(n)} - \xi_i^{(n)})| + |f(\xi_s^{(n)}, \eta_s^{(n)})(x' - \xi_s^{(n)})| \leq \\
&\leq M \left(\xi_{r+1}^{(n)} - x + \sum_{i=r+1}^{s-1} (\xi_{i+1}^{(n)} - \xi_i^{(n)}) + x' - \xi_s^{(n)} \right) = M(x' - x) = M|x - x'|;
\end{aligned}$$

dunque $\{\varphi_n\}$ è una famiglia equilimitata ed equicontinua di funzioni, contenuta in $C[a,b]$. Per l'esercizio 10.7.5, esiste una sottosuccessione $\{\psi_n\} = \{\varphi_{k_n}\} \subseteq \{\varphi_n\}$ che converge uniformemente ad una funzione $\varphi \in C[a,b]$. Esiste allora $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|\psi_n - \varphi\|_\infty < 2M\sigma \quad \text{e} \quad \delta_n < \sigma \qquad \forall n > N.$$

Per ogni $n > N$, detti $(x_i^{(n)}, y_i^{(n)})$ i nodi di ψ_n , analogamente a prima possiamo scrivere, supposto che $x_r^{(n)} \le x \le x_{r+1}^{(n)} \le \cdots \le x_s^{(n)} \le x' \le x_{s+1}^{(n)}$,

$$\psi_n(x) - \psi_n(x') = [\psi_n(x) - \psi_n(x_{r+1}^{(n)})] + \sum_{i=r+1}^{s-1} [\psi_n(x_i^{(n)}) - \psi_n(x_{i+1}^{(n)})] + [\psi_n(x_s^{(n)}) - \psi_n(x')],$$

da cui

$$\psi_n(x) - \psi_n(x') = f(x_r^{(n)}, y_r^{(n)})(x - x_{r+1}^{(n)}) + \sum_{i=r+1}^{s-1} f(x_i^{(n)}, y_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i+1}^{(n)}) + f(x_s^{(n)}, y_s^{(n)})(x_s^{(n)} - x').$$

Aggiungendo e togliendo ancora altri termini, si ha

$$\begin{aligned}\psi_n(x) - \psi_n(x') &= [f(x_r^{(n)}, y_r^{(n)}) - f(x, \psi_n(x))](x - x_{r+1}^{(n)}) + \\ &+ \sum_{i=r+1}^{s-1} [f(x_i^{(n)}, y_i^{(n)}) - f(x, \psi_n(x))](x_i^{(n)} - x_{i+1}^{(n)}) + [f(x_s^{(n)}, y_s^{(n)}) - f(x, \psi_n(x))](x_s^{(n)} - x') + \\ &+ f(x, \psi_n(x)) \left[x - x_{r+1}^{(n)} + \sum_{i=r+1}^{s-1} (x_i^{(n)} - x_{i+1}^{(n)}) + x_s^{(n)} - x' \right],\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned}&\psi_n(x) - \psi_n(x') - f(x, \psi_n(x))(x - x') = \\ &= [f(x_r^{(n)}, y_r^{(n)}) - f(x, \psi_n(x))](x - x_{r+1}^{(n)}) + \sum_{i=r+1}^{s} [f(x_i^{(n)}, y_i^{(n)}) - f(x, \psi_n(x))](x_i^{(n)} - x_{i+1}^{(n)}) + \\ &+ [f(x_s^{(n)}, y_s^{(n)}) - f(x, \psi_n(x))](x_s^{(n)} - x').\end{aligned}$$

Adesso osserviamo che se $x, x' \in [a,b]$ e $|x - x'| < \sigma$, allora si ha a maggior ragione $|x - x_{r+1}^{(n)}| < \sigma$, $|x_s^{(n)} - x'| < \sigma$ e $|x_i^{(n)} - x_{i+1}^{(n)}| < \sigma$; inoltre, per la stima di equicontinuità precedentemente dimostrata, gli analoghi incrementi nella variabile y sono minori di $M\sigma$. Quindi, gli incrementi della f sono tutti in modulo minori di σ. Ne segue

$$|\psi_n(x) - \psi_n(x') - f(x, \psi_n(x))(x - x')| \le \sigma \left[x_{r+1}^{(n)} - x + \sum_{i=r+1}^{s} (x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}) + x' - x_s^{(n)} \right] = \sigma(x' - x).$$

Dividendo per $x' - x$ ricaviamo per $n > N$ e $|x - x'| < \sigma$

$$\left| \frac{\psi_n(x) - \psi_n(x')}{x - x'} - f(x, \psi_n(x)) \right| \le \sigma.$$

Al limite per $n \to \infty$ segue che, per $|x - x'| < \sigma$,

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(x')}{x - x'} - f(x, \varphi(x)) \right| \le \sigma.$$

Se ora $x' \to x$, risulta

$$f(x, \varphi(x)) - \sigma \le \liminf_{x' \to x} \frac{\varphi(x) - \varphi(x')}{x - x'} \le \limsup_{x' \to x} \frac{\varphi(x) - \varphi(x')}{x - x'} \le f(x, \varphi(x)) + \sigma.$$

Dato che σ è arbitrario, si conclude che esiste la derivata $\varphi'(x)$ e che

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \qquad \forall x \in [a,b].$$

Esercizi del paragrafo 10.8

Esercizio 10.8.1 Dalle definizioni segue immediatamente che $\delta_X(\varepsilon) \le \eta(\varepsilon)$. Per provare l'altra disuguaglianza, fissiamo $x, y \in X$ tali che $\|x\|_X \le 1$, $\|y\|_X \le 1$, $\|x-y\|_X \ge \varepsilon$; possiamo supporre $\|y\|_X \le \|x\|_X$. Mostriamo dapprima che esistono $u, v \in X$ con $\|u\|_X = 1$, $\|v\|_X = 1$, $\|u-v\|_X \ge \varepsilon$, tali che $\|u+v\|_X \ge \|x+y\|_X$. Scegliamo u, v di norma unitaria, appartenenti al piano generato da x e y, con y, u, v nello stesso semipiano delimitato dalla retta per 0 e x, in modo che $u-v = x-y$. Esiste allora $\lambda > 1$ tale che il punto $\lambda \frac{x+y}{2}$ appartiene alla semiretta uscente da x con direzione $u-x$: dunque esiste $\beta \ge 0$ tale che $\lambda \frac{x+y}{2} = \beta u + (1-\beta)x$, da cui si ricava successivamente $\lambda \frac{v-u}{2} = \lambda \frac{y-x}{2} = \beta u + (1-\beta-\lambda)x$, ossia $\lambda \frac{u+v}{2} = (\beta+\lambda)u + (1-\beta-\lambda)x$. Da questa relazione segue che i punti $\lambda \frac{x+y}{2}$ e $\lambda \frac{u+v}{2}$ si trovano entrambi sulla semiretta uscente da x: ora, se $\beta < 1$ il primo punto è interno alla palla unitaria mentre il secondo è esterno, essendo $\beta + \lambda > 1$; se invece $\beta \ge 1$, entrambi i punti sono esterni ma il secondo è più distante da u rispetto al primo. In particolare, dunque, $\|u+v\|_X \ge \|x+y\|_X$.
Mostriamo adesso che esistono $w, z \in X$ con $\|w\|_X = 1$, $\|z\|_X = 1$, $\|w-z\|_X = \varepsilon$, tali che $\|w+z\|_X \ge \|u+v\|_X \ge \|x+y\|_X$: basta scegliere w e z appartenenti all'arco di estremi u e v (giacente nel semipiano sopra definito), e tali che $\|z-w\|_X = \varepsilon$ e $z-w$ sia parallelo a $v-u$. Risulta allora, evidentemente, $\|w+z\|_X \ge \|u+v\|_X \ge \|x+y\|_X$.
Concludiamo il ragionamento: si ha $\eta(\varepsilon) \le 2 - \|w+z\|_X \le 2 - \|x+y\|_X$; ma x e y sono arbitrari vettori di X tali che $\|x\| \le 1$, $\|y\|_X \le 1$, $\|w-x\| \ge \varepsilon$, e dunque si ricava $\eta(\varepsilon) \le \delta_X(\varepsilon)$.

Esercizio 10.8.2 Anzitutto, se $\delta_X(\varepsilon) > 0$ per ogni $\varepsilon \in]0, 2]$, allora vale (1): infatti, dato $\varepsilon > 0$ e scelto $\delta = \delta_X(\varepsilon)$, se $x, y \in X$ verificano $\|x\|_X \le 1$, $\|y\|_X \le 1$ e $\|x+y\|_X > 2 - \delta_X(\varepsilon)$, per definizione di $\delta_X(\varepsilon)$ deve essere $\|x-y\|_X < \varepsilon$, e pertanto vale (1). Viceversa, se vale (1) con ε e δ, allora per ogni $x, y \in X$ con $\|x\|_X \le 1$, $\|y\|_X \le 1$ e $\|x+y\|_X > 2-\delta$ si ha $\|x-y\|_X < \varepsilon$. Ne segue che per gli $x, y \in X$ tali che $\|x\|_X \le 1$, $\|y\|_X \le 1$ e $\|x-y\|_X \ge \varepsilon$ deve necessariamente aversi $\|x+y\|_X \le 2-\delta$, vale a dire $2 - \|x+y\|_X \ge \delta$: ciò implica $\delta_X(\varepsilon) \ge \delta > 0$. Dunque l'enunciato (1) è equivalente a quello della definzione 10.8.1.
È chiaro che (1) implica (2) con gli stessi ε e δ. Viceversa, fissiamo $\vartheta > 0$ e cerchiamo $\sigma > 0$ tale che, secondo l'enunciato (1), risulti $\|x-y\|_X < \vartheta$ non appena $\|x\|_X \le 1$, $\|y\|_X \le 1$ e $\|x+y\|_X > 2-\sigma$. Siano dunque $x, y \in X$ con $\|x\|_X \le 1$, $\|y\|_X \le 1$ e $\|x+y\|_X > 2-\sigma$, ed osserviamo che $\|x\|_X \ge \|x+y\|_X - \|y\|_X \ge 2 - \sigma - 1 = 1 - \sigma$ (e, analogamente, $\|y\|_X \ge 1-\sigma$). Consideriamo i due vettori unitari

$$\xi = \frac{x}{\|x\|_X}\,, \qquad \eta = \frac{y}{\|y\|_X}\,;$$

andiamo ad utilizzare (2) con $\varepsilon = \frac{\vartheta}{3}$ e $\delta \le \varepsilon \vee \frac{1}{2}$; sceglieremo $\sigma = \frac{\delta}{5}$. Valutiamo la norma di $\xi + \eta$:

$$\begin{aligned}
\|\xi+\eta\|_X &= \left\| \frac{x}{\|x\|_X} + \frac{y}{\|y\|_X} \right\|_X = \frac{\big\|x\,\|y\|_X + y\,\|x\|_X\big\|_X}{\|x\|_X \|y\|_X} = \\
&= \frac{\big\|x(\|y\|_X - 1) + x + y + y(\|x\|_X - 1)\big\|_X}{\|x\|_X\|y\|_X} \ge \frac{\|x+y\|_X}{\|x\|_X\|y\|_X} - \frac{1-\|y\|_X}{\|y\|_X} - \frac{1-\|x\|_X}{\|x\|_X} \ge \\
&\ge \frac{2-\sigma}{\|x\|_X\|y\|_X} - \frac{\sigma}{\|y\|_X} - \frac{\sigma}{\|x\|_X} \ge 2 - \sigma - \frac{2\sigma}{1-\sigma} > 2 - 5\sigma = 2 - \delta,
\end{aligned}$$

ove nel penultimo passaggio si è fatto uso della disuguaglianza $\sigma < \frac{1}{2}$. Da (2) ricaviamo $\|\xi - \eta\|_X < \varepsilon$; di conseguenza, ricordando che $1 - \delta \le \|x\|_X \le 1$ e $1 - \delta \le \|y\|_X \le 1$,

$$\begin{aligned}
\|x-y\|_X &= \big\|\xi\,\|x\|_X - \eta\,\|y\|_X\big\|_X = \big\|\xi(\|x\|_X - 1) + \xi - \eta + \eta(1 - \|y\|_X)\big\|_X \le \\
&\le \big|\|x\|_X - 1\big| + \|\xi - \eta\|_X + \big|1 - \|y\|_X\big| < 2\delta + \varepsilon \le 3\varepsilon = \vartheta.
\end{aligned}$$

Abbiamo così provato l'enunciato (1).
Proviamo che (2), con ε e δ, equivale a (3) con ε e $\frac{\delta}{2}$. Supponiamo che valga (2) ma non (3): allora esistono $x, y \in X$ tali che $\|x\|_X = \|y\|_X = 1$, $\|x-y\|_X \ge \varepsilon$, ma $\big\|\frac{x+y}{2}\big\|_X > 1 - \frac{\delta}{2}$, ossia $\|x+y\|_X > 2-\delta$. Da (1) ricaviamo subito $\|x-y\|_X < \varepsilon$, assurdo. Analogamente, supponiamo che valga (3), ma non (2): allora esistono $x, y \in X$ tali che $\|x\|_X = \|y\|_X = 1$, $\|x+y\|_X > 2-\delta$, ma $\|x-y\|_X \ge \varepsilon$. Da (3)

ricaviamo subito $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_X \leq 1-\frac{\delta}{2}$, ossia $\|x+y\|_X \leq 2-\delta$, assurdo.

Esercizio 10.8.3 Siano $X_1,\dots,X_m$ spazi uniformemente convessi, Il fatto che $X_1\times\cdots\times X_m$, mnito dell'opportuna norma, sia uno spazio di Banach uniformemente convesso, si prova per induzione. Se $k=2$ sappiamo che la tesi è vera grazie al teorema 10.8.5. Supponiamo la tesi vera per k, e proviamola per $k+1$: siano dunque $X_1,\dots,X_{k+1}$ spazi di Banach uniformemente convessi e consideriamo il loro prodotto $X_1\times\cdots\times X_{k+1}$, munito della norma

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k+1}\|x_i\|_{X_i}^2} \qquad \forall x=(x_1,\dots,x_{k+1})\in X_1\times\cdots\times X_{k+1}\,.$$

Per ipotesi induttiva, lo spazio $X=X_1\times\cdots\times X_k$, con la norma $\|\cdot\|_X=\sqrt{\sum_{i=1}^k\|x_i\|_{X_i}^2}$, è uniformemente convesso. Dobbiamo provare che $X_1\times\cdots\times X_k\times X_{k+1}=X\times X_{k+1}$, munito della norma $\sqrt{\|\cdot\|_X^2+\|\cdot\|_{X_{k+1}}^2}$, è uniformemente convesso: questo segue dal passo $k=2$ applicato agli spazi X e X_{k+1}. Pertanto il passo $k+1$ è dimostrato. Ne segue la tesi.

Esercizio 10.8.4 Anzitutto, nella definizione 10.8.1 possiamo supporre $\delta\leq\varepsilon$. Sia $E\subset X$ un convesso chiuso e sia $d=\inf_{x\in E}\|x\|_X$. Per ogni $n\in\mathbb{N}^+$ sia $x_n\in E$ tale che $\|x_n\|_X<d\,\frac{n+1}{n}$. Poiché E è convesso, si ha $2d\leq\|x_n+x_m\|_X$; posto $y_n=\frac{x_n}{d}$, si ha $1\leq\|y_n\|_X<\frac{n+1}{n}$ e $\|y_n+y_m\|_X\geq 2$. Dunque, se $z_n=\frac{n}{n+1}\,y_n$, risulta $\|z_n\|_X\leq 1$, $\|z_m\|_X\leq 1$ e

$$\begin{aligned}\|z_n+z_m\|_X &= \|z_n-y_n+y_n+y_m+z_m-y_m\|_X\geq\\ &\geq \|y_n+y_m\|_X-\|z_n-y_n\|_X-\|z_m-y_m\|_X\geq\\ &\geq 2-\frac{1}{n+1}\,\|y_n\|_X-\frac{1}{m+1}\,\|y_m\|_X>2-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\,.\end{aligned}$$

Sia $\nu_\varepsilon\in\mathbb{N}^+$ tale che $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}<\delta<\varepsilon$ per ogni $n,m\geq\nu_\varepsilon$. Allora per tali n,m si ha $\|z_n+z_m\|_Z>2-\delta$, e per uniforme convessità ricaviamo $\|z_n-z_m\|_X<\varepsilon$. Perciò, per $n,m\geq\nu_\varepsilon$,

$$\|y_n-y_m\|_X\leq\|y_n-z_n\|_X+\|z_n-z_m\|_X+\|z_m-y_m\|_X<\frac{1}{n}+\varepsilon+\frac{1}{m}<2\varepsilon.$$

Essendo X completo, esiste $y\in X$ tale che $y_n\to y$; dunque $x_n\to x=y\,d$, e $\|x\|_X=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_X=d$. Essendo E chiuso, deduciamo che $x\in E$ ed ha norma minima.

Esercizio 10.8.5 Se $x=0$ non c'è niente da dimostrare. Se $x\neq 0$, poniamo $y_n=\frac{x_n}{\|x_n\|_X}$ e $y=\frac{x}{\|x\|_X}$. Allora $\|y_n\|_X=\|y\|_X=1$ e $y_n\rightharpoonup y$, perché per ogni $T\in X^*$ si ha per $n\to\infty$, essendo $\|x_n\|_X\leq M$ per ogni $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}|T(y_n-y)| &= \left|T\left(\frac{x_n}{\|x_n\|_X}-\frac{x_n}{\|x\|_X}\right)+T\left(\frac{x_n}{\|x\|_X}-\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right|\leq\\ &\leq \|T\|\,\|x_n\|_X\left|\frac{1}{\|x_n\|_X}-\frac{1}{\|x\|_X}\right|+\frac{|T(x_n-x)|}{\|x\|_X}\to 0.\end{aligned}$$

Dato che $y_n+y\rightharpoonup 2y$, si ha $2=2\|y\|_X\leq\liminf_{n\to\infty}\|y_n+y\|_X$; quindi $\|y_n\|_X=\|y\|_X=1$ e $\|y_n+y\|_X\geq 2-\delta$ per ogni $n\geq n_\delta$, e pertanto, per uniforme convessità, $\|y_n-y\|_X<\varepsilon$ per ogni $n\geq n_\delta$. Poiché, per ipotesi, $\|x_n\|_X\to\|x\|_X$, si deduce per $n\geq n_\delta\vee n_\varepsilon$,

$$\|x_n-x\|_X=\big\|y_n\|x_n\|_X-y\,\|x\|_X\big\|_X\leq\|x_n\|_X\|y_n-y\|_X+\|y\|_X\big|\|x_n\|_X-\|x\|_X\big|\leq(M+1)\varepsilon,$$

e ciò prova la tesi.

Esercizio 10.8.6 Anzitutto, posto $y=\tau z$, per definizione di modulo di liscezza si ha

$$\begin{aligned}\rho_Y(\tau) &= \sup\{\|x+\tau z\|_Y+\|x-\tau z\|_X-2:\ \|x\|_Y,\ \|z\|_Y\leq 1\}=\\ &= \sup\{Fx+\tau Fz+Gx-\tau Gz-2:\ \|x\|_Y,\ \|z\|_Y\leq 1,\ \|F\|_{Y^*},\ \|G\|_{Y^*}\leq 1\}=\\ &= \sup\{J_xF+\tau J_zF+J_xG-\tau J_zG-2:\ \|x\|_Y,\ \|z\|_Y\leq 1,\ \|F\|_{Y^*},\ \|G\|_{Y^*}\leq 1\}\leq\\ &\leq \sup\{\alpha F+\tau\beta F+\alpha G-\tau\beta G-2:\ \|\alpha\|_{Y^{**}},\|\beta\|_{Y^{**}}\leq 1,\ \|F\|_{Y^*},\|G\|_{Y^*}\leq 1\}=\\ &= \sup\{\|\alpha+\tau\beta\|_{Y^{**}}+\|\alpha-\tau\beta\|_{Y^{**}}-2:\ \|\alpha\|_{Y^{**}},\ \|\beta\|_{Y^{**}}\leq 1\}=\rho_{Y^{**}}(\tau).\end{aligned}$$

Per la disuguaglianza opposta, si ha

$$\begin{aligned}\rho_{Y^{**}}(\tau) &= \sup\{\|\alpha+\tau\beta\|_{Y^{**}} + \|\alpha-\tau\beta\|_{Y^{**}} - 2 :\ \|\alpha\|_{Y^{**}}\,,\ \|\beta\|_{Y^{**}} \le 1\} = \\ &= \sup\{\alpha F + \tau\beta F + \alpha G - \tau\beta G - 2 :\ \|\alpha\|_{Y^{**}}\,,\ \|\beta\|_{Y^{**}} \le 1,\ \|F\|_{Y^*}\,,\ \|G\|_{Y^*} \le 1\}.\end{aligned}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, esistono $\alpha, \beta \in Y^{**}$ e $F, G \in Y^*$, tutti con rispettive norme non superiori a 1, tali che

$$\rho_{Y^{**}}(\tau) < \alpha F + \tau\beta F + \alpha G - \tau\beta G - 2 + \varepsilon.$$

Utilizzando il lemma 10.7.8, vediamo che esiste $J_x \in J(Y)$ nel w^*-intorno $U(\alpha, F+G, \varepsilon)$ di α ed esiste $J_z \in J(Y)$ nel w^*-intorno $U(\beta, \tau(F-G), \varepsilon)$ di β: quindi

$$\begin{aligned}\rho_{Y^{**}}(\tau) &< (\alpha - J_x)(F+G) + \tau(\beta - J_z)(F-G) + Fx + Gx + \tau Fz - \tau Gz - 2 + \varepsilon < \\ &< \rho_Y(\tau) + 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Dato che $\varepsilon > 0$ è arbitrario, si ha $\rho_{Y^{**}}(\tau) \le \rho_Y(\tau)$.

Capitolo 11

Teoria spettrale

11

11.1 Spettro e risolvente

speris

Questo capitolo è dedicato alla *teoria spettrale* degli operatori lineari su uno spazio normato X, nonché ad alcune delle sue conseguenze. Se $T : X \to X$ è lineare, studieremo la struttura dell'insieme dei valori λ tali che $\lambda I - T$ è invertibile con inverso continuo. Questa proprietà è di grande importanza nelle applicazioni, poiché permette di ottenere teoremi di esistenza di soluzioni per equazioni astratte, con le quali è possibile modellizzare svariatissimi fenomeni.
Consideriamo un operatore lineare $A : D(A) \subseteq X \to X$ in uno spazio di Banach *complesso* X; se lo spazio X è reale, si può considerare il *complessificato* di X (si veda l'esercizio 11.1.1).

spectre

Definizione 11.1.1 *Sia $\lambda \in \mathbb{C}$. Il punto λ è detto* regolare *per A se l'operatore $\lambda I - A : D(A) \to X$ è iniettivo con immagine $R(\lambda I - A)$ densa in X, e se il suo inverso $(\lambda I - A)^{-1} : R(\lambda I - A) \to D(A)$ è continuo (rispetto alla norma di X). L'insieme*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ è regolare per } A\}$$

si dice insieme risolvente *di A. L'operatore $(\lambda I - A)^{-1}$, che si denota con $R(\lambda, A)$, si chiama* operatore risolvente *di A. L'insieme*

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ non è regolare per } A\}$$

si dice spettro *di A.*
A sua volta lo spettro di A si decompone in questo modo:

$$\text{spettro puntuale} = P_\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ non è iniettivo}\},$$

$$\begin{aligned}\text{spettro continuo} = C_\sigma(A) = \{&\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - A \text{ è iniettivo,} \\ &\overline{R(\lambda I - A)} = X, \ (\lambda I - A)^{-1} \text{ non è continuo}\},\end{aligned}$$

$$\text{spettro residuo} = R_\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - A \text{ è iniettivo, } \overline{R(\lambda I - A)} \subset X\}.$$

speopch **Osservazione 11.1.2** Se A è un operatore lineare chiuso, e se $\lambda \in \rho(A)$, allora l'immagine $R(\lambda I - A)$ coincide con X, cioè $\lambda I - A$ è bigettivo con inverso $(\lambda I - A)^{-1}$ definito su tutto X. Infatti, se $y \in X = \overline{R(\lambda I - A)}$, esiste $\{x_n\} \subseteq D(A)$ tale che $\lambda x_n - Ax_n \to y$; la continuità di $(\lambda I - A)^{-1}$ implica che $\{x_n\}$ è di Cauchy in X e quindi converge a un elemento $x \in X$. Ne segue che $Ax_n \to -y + \lambda x$: poiché A è chiuso, si conclude che $x \in D(A)$ e $Ax = -y + \lambda x$, cioè $y \in R(\lambda I - A)$.

spemat **Esempio 11.1.3** Sia $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un'applicazione lineare, rappresentata rispetto alla base canonica dalla matrice $\{a_{ij}\}$ che denotiamo ancora, seppur impropriamente, con A. L'equazione $\lambda x - Ax = 0$ ha l'unica soluzione $x = 0$ se e solo se λ non è un autovalore della matrice A; in tal caso, l'operatore $(\lambda I - A)^{-1}$ è definito su tutto $\mathbb{C}^n$ ed è continuo. Quindi $\lambda \in \rho(A)$ se e solo se λ non è un autovalore. In definitiva, $\sigma(A)$ è l'insieme degli autovalori della matrice A.

In analogia con il caso delle matrici, si ha la seguente

eigen **Definizione 11.1.4** *Sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare in uno spazio di Banach complesso X. I punti λ dello spettro puntuale di A si dicono* autovalori *di A; i vettori non nulli $x \in X$ tali che $\lambda x - Ax = 0$ si dicono* autovettori *di A relativi all'autovalore λ.*

spechiu **Proposizione 11.1.5** *Sia X uno spazio di Banach. Se $A : D(A) \subseteq X \to X$ è un operatore lineare chiuso, allora $\rho(A)$ è aperto in $\mathbb{C}$ e quindi $\sigma(A)$ è chiuso.*

Dimostrazione Se $\rho(A)$ è vuoto, allora è aperto. Altrimenti, fissiamo $\lambda \in \rho(A)$: per l'osservazione 11.1.2, $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$; proviamo che se $\varepsilon \in \mathbb{C}$ e $\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \varepsilon < 1$ allora risulta $\lambda - \varepsilon \in \rho(A)$.
Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $B_k = \sum_{n=0}^{k} \varepsilon^n (\lambda I - A)^{-n}$; $\{B_k\}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(X)$ per la scelta di ε. Poniamo $B = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n (\lambda I - A)^{-n}$: allora $B \in \mathcal{L}(X)$. Verifichiamo che $B(\lambda I - A)^{-1}$ è l'inverso di $(\lambda - \varepsilon)I - A$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned} B_k(\lambda I - A)^{-1}[(\lambda - \varepsilon)I - A] &= B_k[I - \varepsilon(\lambda I - A)^{-1}] = \\ &= \sum_{n=0}^{k} \varepsilon^n (\lambda I - A)^{-n}[I - \varepsilon(\lambda I - A)^{-1}] = \\ &= \sum_{n=0}^{k} \varepsilon^n (\lambda I - A)^{-n} - \sum_{n=1}^{k+1} \varepsilon^n (\lambda I - A)^{-n} = I - \varepsilon^{k+1}(\lambda I - A)^{-(k+1)}, \end{aligned}$$

e per $k \to \infty$ segue che

$$B(\lambda I - A)^{-1}[(\lambda - \varepsilon)I - A] = I|_{D(A)}\,.$$

Analogamente si ha per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in X$

$$[(\lambda - \varepsilon)I - A]B_k(\lambda I - A)^{-1}x = x - \varepsilon^{k+1}(\lambda I - A)^{-(k+1)}x;$$

posto $z_k = B_k(\lambda I - A)^{-1}x$, per $k \to \infty$ risulta allora $z_k \in D(A)$, $z_k \to B(\lambda I - A)^{-1}x$ e $[(\lambda-\varepsilon)I - A]z_k \to x$. Poiché $(\lambda-\varepsilon)I - A$ è chiuso, si ottiene che $B(\lambda I - A)^{-1}x \in D(A)$ e

$$[(\lambda - \varepsilon)I - A]B(\lambda I - A)^{-1}x = x \qquad \forall x \in X. \quad \square$$

spenorm **Proposizione 11.1.6** *Sia X uno spazio di Banach. Se $A \in \mathcal{L}(X)$ e se $|\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$, allora $\lambda \in \rho(A)$.*

Dimostrazione Se $|\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$, si verifica che l'operatore $B = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}$ inverte $\lambda I - A$. $\square$

esspectre **Esempi 11.1.7 (1)** Poniamo $X = C[a,b]$, $D(A) = X$, $(Af)(t) = t\,f(t)$ per ogni $t \in [a,b]$. Allora $A \in \mathcal{L}(X)$ e $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} = \max\{|a|,|b|\}$. Poiché

$$[(\lambda I - A)f](t) \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda - t)f(t) \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(t) \equiv 0,$$

l'operatore $\lambda I - A$ è iniettivo per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, e quindi $P_\sigma(A) = \emptyset$. Poi, se $\lambda \notin [a,b]$, allora per ogni $g \in X$ la funzione $f(t) = \frac{g(t)}{\lambda - t}$ appartiene a X e verifica la relazione $f = (\lambda I - A)^{-1}g$; inoltre

$$\|f\|_\infty \le \sup_{t\in[a,b]} \frac{1}{|\lambda - t|}\|g\|_\infty\,,$$

cosicché $\mathbb{C} \setminus [a,b] \subseteq \rho(A)$. Viceversa, se $\lambda \in [a,b]$ si ha

$$R(\lambda I - A) = \{g \in X :\ g(\lambda) = 0 \text{ e } g \text{ è derivabile nel punto } \lambda\},$$

e questo insieme non è denso in X. Pertanto $C_\sigma(A) = \emptyset$ e $R_\sigma(A) = \sigma(A) = [a,b]$.

(2) Sia $X = C[a,b]$, $D(A) = C^1[a,b]$ e $A = \frac{d}{dt}$. Poiché $\lambda f(t) - f'(t) \equiv 0$ se e solo se $f(t) \equiv c\,e^{\lambda t}$, ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore per A. Pertanto $\sigma(A) = P_\sigma(A) = \mathbb{C}$.

(3) Poniamo stavolta $X = C[a,b]$, $D(A) = \{f \in C^1[a,b] : f(a) = 0\}$, $A = \frac{d}{dt}$: l'equazione $\lambda f - f' = g$ ha l'unica soluzione $f(t) = -e^{\lambda t}\int_a^t e^{-\lambda\tau}g(\tau)\,d\tau$; di conseguenza $(\lambda I - A)^{-1}$ è definito su tutto X ed è continuo. Pertanto $\sigma(A) = \emptyset$.

(4) Sia ancora $X = C[a,b]$, con $D(A) = \{f \in C^1[a,b] : f(a) = f(b) = 0\}$ e $A = \frac{d}{dt}$. Si vede subito che lo spettro puntuale è vuoto. D'altra parte l'equazione $\lambda f - f' = g$ ha l'unica soluzione $f(t) = -e^{\lambda t}\int_a^t e^{-\lambda\tau}g(\tau)d\tau$ se e solo se g verifica la condizione di compatibilità $\int_a^b e^{-\lambda\tau}g(\tau)d\tau = 0$. Dunque l'immagine $R(\lambda I - A)$ non è densa in X e pertanto $\sigma(A) = R_\sigma(A) = \mathbb{C}$.

(5) Consideriamo ancora una volta $A = \frac{d}{dt}$ nello spazio $X = C[a,b]$, con dominio $D(A) = \{f \in C^1[a,b] : f(a) = Kf(b)\}$, essendo K un fissato numero reale non nullo. L'equazione $\lambda f - f' = 0$ ha soluzione non nulla per $\lambda = \frac{\log|K| + 2k\pi i}{a-b}$, $k \in \mathbb{Z}$, per cui $P_\sigma(A)$ è dato dall'insieme di questi punti. Gli altri punti di $\mathbb{C}$ sono in $\rho(A)$ in quanto risulta per ogni $g \in X$

$$[(\lambda I - A)^{-1}g](t) = -\frac{Ke^{\lambda b}\int_a^b e^{-\lambda\tau}g(\tau)\,d\tau}{e^{\lambda a} - Ke^{\lambda b}}\,e^{\lambda t} - e^{\lambda t}\int_a^t e^{-\lambda\tau}g(\tau)\,d\tau.$$

In definitiva, $\sigma(A) = P_\sigma(A) = \left\{ \frac{\log|K|+2k\pi i}{a-b} \right\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

(6) Siano $X = \ell^2$ e $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ definito da $(Ax)_n = x_{n+1}$. Lo spettro puntuale è $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, mentre lo spettro continuo è $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ e lo spettro residuo è vuoto (si veda la proposizione 11.1.6).

Esercizi 11.1

Xcompl

1. *(Complessificazione di uno spazio normato reale)* Sia X uno spazio normato reale. Su $X^2 = X \times X$ consideriamo le operazioni di somma e di prodotto per scalari complessi così definite:

$$(x,y) + (u,v) = (x+u, y+v), \quad (\alpha + i\beta)(x,y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y).$$

   (i) Si definisca $x + iy = (x,y)$ e si verifichi che

$$(x+iy) + (u+iv) = (x+u) + i(y+v),$$
$$(\alpha + i\beta)(x+iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y) \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

   per ogni $x, y, u, v \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (ii) Posto $X_\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in X\}$, si verifichi che $X_\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale complesso, che

$$\|x+iy\|_{X_\mathbb{C}} = \sup_{\vartheta \in [0,2\pi[} \|x\cos\vartheta + y \sin\vartheta\|_X$$

   è una norma su $X_\mathbb{C}$ e che inoltre gli spazi X e $X_\mathbb{C}$ sono isomorfi ed isometrici.

   (iii) Si mostri che, in generale, la funzione $p(x+iy) = \|x\|_X + \|y\|_X$ non è una norma su $X_\mathbb{C}$.

Xdfspnonv

2. Sia X uno spazio di Banach di dimensione finita. Se $T : X \to X$ è lineare, si provi che $\sigma(T) \neq \emptyset$, e che quando X è reale può capitare che $\sigma(T) \cap \mathbb{R} = \emptyset$.

idris

3. Sia X uno spazio di Banach e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare chiuso. Si provi l'*identità del risolvente*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A) \qquad \forall \lambda, \mu \in \rho(A).$$

risolo

4. Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Si provi che $\lambda \mapsto R(\lambda, T)$ è un'applicazione olomorfa da $\rho(T)$ in $\mathcal{L}(X)$, e si calcoli $\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, T)$. Se ne deduca che se $T \in \mathcal{L}(X)$ allora $\sigma(T) \neq \emptyset$.

norris1sud

5. Sia X uno spazio di Banach e sia $A \in \mathcal{L}(X)$. Per $\lambda \in \mathbb{C}$ poniamo $d(\lambda) = \inf\{|\lambda - \mu| : \mu \in \sigma(A)\}$. Si provi che se $\lambda \in \rho(A)$ allora

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \geq \frac{1}{d(\lambda)}\,.$$

raspe

6. Sia X uno spazio di Banach e sia $A \in \mathcal{L}(X)$. Dimostrare che:

   (i) se $\lambda \in \sigma(A)$, allora $\lambda^n \in \sigma(A^n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

   (ii) se $|\lambda| > \liminf_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}_{\mathcal{L}(X)}$ allora $\lambda \in \rho(A)$;

   (iii) esiste il limite $r_\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}_{\mathcal{L}(X)}$: tale limite si chiama *raggio spettrale* di A.

   [**Traccia:** per (iii), posto $r = \liminf_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}_{\mathcal{L}(X)}$ e fissato $\varepsilon > 0$, si scelga $m \in \mathbb{N}^+$ tale che $\|A^m\|^{1/m}_{\mathcal{L}(X)} \in]r-\varepsilon, r+\varepsilon[$; si osservi che per $n > m$ risulta, scelto $k \in \mathbb{N}^+$ in modo che $km < n \le (k+1)m$:

$$\|A^n\|^{\frac{1}{n}}_{\mathcal{L}(X)} \le \|A^{km}\|^{\frac{1}{n}}_{\mathcal{L}(X)} \cdot \|A^{n-km}\|^{\frac{1}{n}}_{\mathcal{L}(X)} \le \left[\|A^m\|^{\frac{1}{m}}_{\mathcal{L}(X)}\right]^{\frac{km}{n}} \cdot \|A\|^{\frac{n-km}{n}}_{\mathcal{L}(X)}.$$

   Dato che $\frac{1}{n} \le \frac{n-km}{n} \le \frac{m}{n}$, si deduca che $\|A\|^{\frac{n-km}{n}}_{\mathcal{L}(X)} \to 1$ per $n \to \infty$; essendo $1 - \frac{m}{n} \le \frac{km}{n} < 1$, si concluda che $\limsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}_{\mathcal{L}(X)} \le r + \varepsilon$.]

speA-1

7. Sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare chiuso nello spazio di Banach X, tale che $0 \in \rho(A)$. Si provi che se $\lambda \neq 0$ si ha $\lambda \in \sigma(A)$ se e solo se $\lambda^{-1} \in \sigma(A^{-1})$.

ronovAch

8. Sia X uno spazio normato e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare. Si provi che se $\rho(A) \neq \emptyset$ allora A è chiuso, ma che non vale il viceversa.

esspe

9. Siano $X = \ell^2$, $D(A) = \{x \in X : \sum_{n=1}^\infty n^2|x_n|^2 < \infty\}$, $(Ax)_n = nx_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. L'operatore A è chiuso? L'aggiunto A^* esiste? Si determini $\sigma(A)$.

esspe2

10. Sia $T : \ell^2 \to \ell^2$ l'operatore definito da

$$(Tx)_n = x_{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad x \in \ell^2.$$

    (i) Si calcoli la norma di T.

    (ii) Si scriva l'operatore aggiunto T^*.

    (iii) Si trovino gli autovalori di T.

esspe3

11. Sia $Tf(x) = x^2 f(x)$ per $f \in L^2(a,b)$.

    (i) Si provi che $T \in \mathcal{L}(L^2(a,b))$ e se ne calcoli la norma.

    (ii) Si mostri che T non ha autovalori e si determini $\sigma(T)$.

isomspe

12. Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$ un'isometria. Si provi che $P_\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

rhoT=rhoT*

13. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$. Si provi che $\lambda \in \sigma(T)$ se e solo se $\overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$; si mostri inoltre che se $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = \|T\|$, allora λ è autovalore per T se e solo se $\overline{\lambda}$ è autovalore per T^*.

opnormale 14. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore *normale*, ossia tale che $TT^* = T^*T$. Si provi che λ è autovalore per T se e solo se $\overline{\lambda}$ è autovalore per T^*, e che ciò è falso senza l'ipotesi $TT^* = T^*T$.

opunit 15. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore unitario, cioè tale che $TT^* = T^*T = I$. Si provi che $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

opautoagg 16. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$ autoaggiunto. Si provi che $R_\sigma(T) = \emptyset$.

spettropo 17. Sia H uno spazio di Hilbert e sia M un sottospazio chiuso di H. Si determini lo spettro della proiezione ortogonale P_M .

spettroprim 18. Sia $Tf(t) = \int_0^t f(s)\,ds$. Si determini lo spettro di T nei seguenti casi:

(i) $T : C[0,1] \to C[0,1]$, (ii) $T : C_0[0,1] \to C_0[0,1]$, (iii) $T : L^1(0,1) \to L^1(0,1)$,

ove si è posto $C_0[0,1] = \{u \in C[0,1] :\ u(0) = 0\}$.
[**Traccia:** per (i), si tratti separatamente il caso $\lambda = 0$. Per $\lambda \neq 0$, si supponga dapprima $g \in C^1[0,1]$ e si consideri l'equazione $\lambda f - Tf = g$; si osservi che se f ne è soluzione, allora f è di classe C^1 e, derivando, si ricavi una equazione differenziale da risolvere con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie seguito da una integrazione per parti. Infine si osservi che la relazione trovata per f ha senso per ogni $g \in C[0,1]$... I punti (ii) e (iii) sono analoghi.]

spettroder 19. Sia $X = L^p(-\pi,\pi)$, $1 < p < \infty$, e poniamo

$$D(A) = \{f \in AC[-\pi,\pi] :\ f' \in X,\ f(\pi) = f(-\pi)\}, \qquad A = \frac{d}{dt}.$$

Si provi che:

(i) $D(A)$ è denso in X;

(ii) A è un operatore chiuso ma non continuo;

(iii) $\sigma(A) = \{i\,n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e ogni $\lambda \in \sigma(A)$ è autovalore per A.

spettroder2 20. Sia $X = L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, e poniamo

$$D(A) = \{f \in AC(\mathbb{R}) :\ f' \in X\}, \qquad A = \frac{d}{dt}.$$

Si provi che:

(i) $D(A)$ è denso in X;

(ii) A è un operatore chiuso ma non continuo;

(iii) $\sigma(A) = \{i\,x\}_{x\in\mathbb{R}}$, ma nessun $\lambda \in \sigma(A)$ è autovalore per A;

(iv) risulta

$$R[(\lambda, A)g](t) = \begin{cases} -\displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda s} g(t+s)\,ds & \text{se } \operatorname{Re}\lambda > 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{-\lambda s} g(t+s)\,ds & \text{se } \operatorname{Re}\lambda < 0. \end{cases}$$

11.2 Operatori compatti

opcomp

Mentre per gli operatori lineari su spazi di dimensione finita si può formulare una teoria esauriente, lo studio degli operatori lineari su spazi di dimensione infinita costituisce un problema vastissimo e complicato. Tuttavia, alcune notevoli clsssi di operatori possono essere descritte in maniera sufficientemente completa. Una delle più importanti è la classe degli operatori compatti: essi infatti da una parte godono di proprietà analoghe a quelle degli operatori a immagine finito-dimensionale, e quindi se ne può fornire una descrizione accurata, e dall'altra giocano un ruolo fondamentale in numerose applicazioni, e in particolare nella teoria delle equazioni integrali.

defcomp **Definizione 11.2.1** *Siano X e Y spazi normati. Un operatore lineare $A : X \to Y$ si dice* compatto*, o* completamente continuo*, se è continuo e trasforma insiemi limitati di X in insiemi relativamente compatti di Y.*

Dalla definizione segue che gli operatori compatti sono continui. Si noti che il viceversa è falso se $\dim Y = \infty$: l'identità $I : Y \to Y$ non è compatta. Notiamo anche che, evidentemente, per ottenere la compattezza di un operatore $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ basta mostrare che l'immagine della palla unitaria di X è relativamente compatta in Y.

escomp **Esempi 11.2.2 (1)** Se $\dim Y < \infty$, ogni operatore $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ è compatto.

(2) Sia $A : \ell^2 \to \ell^2$ definito da $(Ax)_n = \frac{x_n}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. L'immagine della palla unitaria è contenuta nel cubo di Hilbert (esercizio 10.7.3), il quale è un sottoinsieme compatto di ℓ^2: ne segue che A è un operatore compatto.

(3) Se M è un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert H, la proiezione ortogonale P_M è un operatore compatto se e solo se M ha dimensione finita.

(4) Sia K una funzione di due variabili continua in $[a, b] \times [a, b]$ e sia $A : C[a, b] \to C[a, b]$ l'operatore integrale definito da $Af(t) = \int_a^b K(t, s)f(s)ds$ per ogni $t \in [a, b]$. Utilizzando il teorema di Ascoli-Arzelà (teorema 10.7.1) non è difficile verificare che A è un operatore compatto.

(5) Un caso particolare dell'esempio precedente si ha quando $K(t, s) = 0$ per $t < s$: in questo caso si ha $Af(t) = \int_a^t K(t, s)f(s)ds$ e A viene chiamato *operatore integrale di Volterra*. Per tale operatore valgono le stime, verificabili per induzione,

$$\|A^n\|_{\mathcal{L}(C[a,b])} \leq \|K\|_\infty^n \frac{(b-a)^n}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$

dunque la serie $\sum_{n=0}^\infty |\lambda|^{-n-1}\|A^n\|_{\mathcal{L}(C[a,b])}$ è convergente per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, e di conseguenza la serie $\sum_{n=0}^\infty \lambda^{-n-1}A^n$ definisce un operatore che, come si verifica facilmente, coincide con $R(\lambda, A)$. In definitiva, per ogni fissata $g \in C[a, b]$ l'*equazione integrale di Volterra*

$$\lambda f(t) - \int_a^t K(t, s)f(s)ds = g(t), \qquad t \in [a, b],$$

è univocamente risolubile in $C[a, b]$ qualunque sia $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Al contrario, come si vedrà in seguito, si ha $0 \in \sigma(A)$.

Vediamo adesso le principali proprietà degli operatori compatti fra due spazi normati X e Y. È evidente dalla definizione che essi formano un sottospazio di $\mathcal{L}(X,Y)$; il risultato che segue mostra che tale sottospazio è chiuso allorché Y è completo.

limcpcp **Proposizione 11.2.3** *Siano X uno spazio normato e Y uno spazio di Banach. Sia $\{A_n\}_{n\in N^+}$ una successione di operatori compatti da X a Y tale che $A_n \to A$ in $\mathcal{L}(X,Y)$: allora A è un operatore compatto.*

Dimostrazione Sia $\{x_n\} \subseteq X$ tale che $\|x_n\|_X \leq K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: dobbiamo provare che $\{Ax_n\}$ ha una sottosuccessione convergente in Y. Poiché A_1 è compatto, esistono un elemento $y_1 \in Y$ e una prima sottosuccessione $\{x_n^{(1)}\} \subseteq \{x_n\}$ tale che $A_1 x_n^{(1)} \to y_1$ in Y per $n \to \infty$. Poiché A_2 è compatto, esistono un altro elemento $y_2 \in Y$ e una seconda sottosuccessione $\{x_n^{(2)}\} \subseteq \{x_n^{(1)}\}$ tale che $A_i x_n^{(2)} \to y_i$ in Y per $n \to \infty$, $i = 1, 2$. Iterando il ragionamento, per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, essendo A_k compatto, esisteranno un k-simo elemento $y_k \in Y$ e una k-sima sottosuccessione $\{x_n^{(k)}\} \subseteq \{x_n^{(k-1)}\}$ tale che $A_i x_n^{(k)} \to y_i$ in Y per $n \to \infty$, $i = 1, 2, \ldots, k$.
Consideriamo adesso la successione $\{x_n^{(n)}\}$, la quale, salvo che per i suoi primi k termini, è estratta da $\{x_n^{(k)}\}$ e in particolare è una sottosuccessione della successione originaria $\{x_n\}$: per essa risulta $A_i x_n^{(n)} \to y_i$ in Y per $n \to \infty$ qualunque sia $i \in \mathbb{N}^+$. Fissiamo dunque $\varepsilon > 0$: esiste $k_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ tale che $\|A - A_k\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \varepsilon$ per ogni $k \geq k_\varepsilon$. Scelto $k = k_\varepsilon$, dato che $A_{k_\varepsilon} x_n^{(n)} \to y_{k_\varepsilon}$, esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\|A_{k_\varepsilon}(x_n^{(n)} - x_m^{(m)})\|_Y < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq \nu_\varepsilon$. Ne segue, per ogni $n, m \geq \nu_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\|_Y &= \|Ax_n^{(n)} - A_{k_\varepsilon} x_n^{(n)}\|_Y + \\ &\quad + \|A_{k_\varepsilon}(x_n^{(n)} - x_m^{(m)})\|_Y + \|A_{k_\varepsilon} x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\|_Y < \\ &< 2\varepsilon K + \varepsilon. \end{aligned}$$

Dunque la successione $\{Ax_n^{(n)}\}$ è di Cauchy in Y. Poiché Y è completo, essa è convergente in Y. □
Nella proposizione precedente la completezza di Y è essenziale, come mostra il seguente

esncp **Esempio 11.2.4** Sia $B : c_0 \to \ell^2$ definito da $(Bx)_n = \frac{x_n}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poniamo $X = (c_0, \|\cdot\|_\infty)$, $Y = (R(B), \|\cdot\|_{\ell^2})$, e consideriamo gli operatori $B_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ così definiti:

$$(B_n x)_k = \begin{cases} \frac{x_k}{k+1} & \text{se } k \leq n, \\ 0 & \text{se } k > n; \end{cases}$$

i B_n, avendo immagine finito-dimensionale, sono compatti. Si ha $B_n \to B$ in $\mathcal{L}(X,Y)$ per $n \to \infty$; d'altra parte, considerando la successione $\{y^{(n)}\} \subseteq X$ data da

$$y_k^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n, \end{cases}$$

essa è chiaramente limitata in X mentre, essendo

$$(By^{(n)})_k = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n, \end{cases}$$

si ha $By^{(n)} \to \{\frac{1}{k+1}\}_{k\in\mathbb{N}} \notin Y$. Ciò prova che $\{By^{(n)}\}$ è una successione di Cauchy in Y che non converge in Y (e in particolare Y non è completo), cosicché $\{By^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un insieme non relativamente compatto in Y. In particolare $B : X \to Y$ non è un operatore compatto. Si osservi tuttavia che $B : c_0 \to \ell^2$ èompatto.

Dalla proposizione 11.2.3 segue subito:

limfdcp **Corollario 11.2.5** *Sia X uno spazio normato e sia Y uno spazio di Banach. Allora gli operatori che sono limiti in $\mathcal{L}(X,Y)$ di successioni di operatori ad immagine finito-dimensionale sono compatti.* □

Il viceversa del corollario precedente è falso in generale, ma è vero, come vedremo, se X e Y coincidono con uno stesso spazio di Hilbert H.

composcp **Proposizione 11.2.6** *Siano X, Y, Z spazi normati, siano $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Se uno dei due operatori è compatto, allora $B \circ A$ è compatto.*

Dimostrazione Immediata conseguenza della definizione 11.2.1. □

0specp1 **Proposizione 11.2.7** *Sia X uno spazio normato e sia $A \in \mathcal{L}(X)$ un operatore compatto e iniettivo. Allora si ha $0 \in \rho(A)$ se e solo se X ha dimensione finita.*

Dimostrazione Se X ha dimensione finita, gli operatori lineari A da X in sé sono tutti continui e compatti, e se sono iniettivi sono anche surgettivi con inverso continuo. Quindi $0 \in \rho(A)$. Viceversa, sia $A \in \mathcal{L}(X)$ compatto e iniettivo e sia $0 \in \rho(A)$: allora A è anche surgettivo e $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Dunque $I = A^{-1}A$ è un operatore compatto in virtù della proposizione precedente: pertanto X ha dimensione finita. □

0specp2 **Corollario 11.2.8** *Sia X uno spazio normato di dimensione infinita. Se $A \in \mathcal{L}(X)$ è un operatore compatto, allora $0 \in \sigma(A)$.* □

aggcp **Proposizione 11.2.9** *Siano X e Y spazi normati e sia $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se A è compatto, allora A^* è compatto; viceversa, se A^* è compatto e Y è uno spazio di Banach, allora A è compatto.*

Dimostrazione ($\Longrightarrow$) Per provare che A^* è compatto dimostreremo che se W è un sottoinsieme limitato di Y^* allora $A^*(W)$ è totalmente limitato in X^*: dato che X^* è completo, ciò implicherà che $A^*(W)$ è relativamente compatto in X^*, che è quanto basta. Sia $\varepsilon > 0$: posto $S = \{x \in X : \|x\|_X = 1\}$, essendo A compatto l'insieme $A(S)$ è relativamente compatto e dunque totalmente limitato in Y. Quindi esistono $x_1, \ldots, x_n \in S$ tali che

$$\min_{1\le i\le n} \|Ax - Ax_i\|_Y < \varepsilon \qquad \forall x \in S.$$

Definiamo l'operatore $B : Y^* \to \mathbb{C}^n$ ponendo $Bg = (g(Ax_1), \ldots, g(Ax_n))$ per ogni $g \in Y^*$. Allora

$$|Bg|_n^2 = \sum_{i=1}^n |g(Ax_i)|^2 \le n\|g\|_{Y^*}^2 \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}^2 ,$$

cosicché $B \in \mathcal{L}(Y^*, \mathbb{C}^n)$. Dato che B ha immagine finito-dimensionale, l'insieme $B(W)$ è totalmente limitato in $\mathbb{C}^n$: quindi esistono $g_1, \ldots, g_m \in W$ tali che

$$\min_{1 \le j \le m} |Bg_j - Bg|_n < \varepsilon \qquad \forall g \in W.$$

Dunque, fissata $g \in W$, è possibile scegliere un indice j_0 fra 1 e m (dipendente da g) in modo che

$$|g(Ax_i) - g_{j_0}(Ax_i)| < \varepsilon, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Vogliamo adesso valutare la quantità

$$\|A^* g_{j_0} - A^* g\|_{X^*} = \sup_{x \in S} |g_{j_0}(Ax) - g(Ax)|.$$

Per ogni fissato $x \in S$, sia i_0 l'indice fra 1 e n (dipendente da x) tale che $\|Ax - Ax_{i_0}\|_Y < \varepsilon$; allora si ha

$$\begin{aligned} &|g_{j_0}(Ax) - g(Ax)| \le \\ &\quad \le |g_{j_0}(Ax) - g_{j_0}(Ax_{i_0})| + |g_{j_0}(Ax_{i_0}) - g(Ax_{i_0})| + |g(Ax_{i_0}) - g(Ax)| \le \\ &\quad \le (\|g_{j_0}\|_{Y^*} + \|g\|_{Y^*})\, \varepsilon + \varepsilon \le \left(1 + 2 \sup_{g \in W} \|g\|_{Y^*}\right) \varepsilon. \end{aligned}$$

Da questa relazione, per l'arbitrarietà di $x \in S$, segue che

$$\min_{1 \le j \le m} \|A^* g_j - A^* g\|_{X^*} \le \|A^* g_{j_0} - A^* g\|_{X^*} \le \left(1 + 2 \sup_{g \in W} \|g\|_{Y^*}\right) \varepsilon \quad \forall g \in W.$$

Ciò prova che $A^*(W)$ è totalmente limitato in X^*.

($\Longleftarrow$) L'argomentazione è del tutto analoga. □

Rcpsep **Proposizione 11.2.10** *Siano X e Y spazi normati e sia $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ un operatore compatto. Allora l'immagine $R(A)$ è separabile; inoltre $R(A)$ è uno spazio normato completo se e solo se ha dimensione finita.*

Dimostrazione Proviamo la separabilità. Dato che $R(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(nB)$, ove B è la palla unitaria chiusa di X, basta mostrare che $A(B)$ è separabile. Poiché A è compatto, l'insieme $A(B)$ è relativamente compatto in Y e dunque totalmente limitato: quindi per ogni $m \in \mathbb{N}^+$ esistono $y_1^m, \ldots, y_{p_m}^m \in A(B)$ tali che

$$\inf_{1 \le i \le p_m} \|y - y_i^m\|_Y < \frac{1}{m} \qquad \forall y \in A(B).$$

Ne segue che $\{y_i^m : 1 \le i \le p_m\,, m \in \mathbb{N}^+\}$ è un sottoinsieme numerabile denso in $A(B)$. Dimostriamo l'altro enunciato. Ovviamente, se la dimensione di $R(A)$ è finita, allora $R(A)$ è completo. Viceversa, supponiamo che $Z = R(A)$ sia completo. Siccome $A : X \to Z$ è compatto, anche $A^* : Z^* \to X^*$ è compatto (proposizione 11.2.9). Inoltre A^* è iniettivo: infatti se $f \in Z^*$ e $A^* f = 0$ allora $f(Ax) = 0$ per ogni $x \in X$, ovvero, per la surgettività di $A : X \to Z$, $fy = 0$ per ogni $y \in Z$: pertanto $f = 0$. In definitiva,

$A^* : Z^* \to R(A^*)$ è bigettivo. Proviamo che $(A^*)^{-1} : R(A^*) \to Z^*$ è continuo: se così non fosse, esisterebbe $\{f_n\} \subseteq Z^*$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \|A^* f_n\|_{X^*} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{Z^*} = +\infty.$$

Quindi $(A^* f_n)x \to 0$ in $\mathbb{C}$ per ogni $x \in X$, cioè $f_n y \to 0$ in $\mathbb{C}$ per ogni $y \in Z$. Essendo Z completo, per il teorema di Banach-Steinhaus si conclude che $\{f_n\}$ è limitata in Z^*, e ciò è assurdo. Dunque $A^* : Z^* \to R(A^*)$ è compatto, bigettivo e ha inverso continuo. Dalla proposizione 11.2.7 si ottiene allora che Z^* ha dimensione finita e infine che $\dim Z = \dim Z^* < \infty$. $\square$

Esercizi 11.2

AntoA

1. Siano X, Y spazi normati e sia $\{A_n\} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ una successione di operatori compatti tale che $A_n x \to Ax$ in Y per $n \to \infty$. L'operatore A è necessariamente compatto? È continuo?

AcptXrif

2. Siano X, Y spazi di Banach con X riflessivo, e sia $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Si provi che A è compatto se e solo se $Ax_n \to Ax$ in Y per ogni $x_n \rightharpoonup x$ in X; si provi poi che quando X non è riflessivo tale condizione non è sufficiente per la compattezza di A (ma è sempre necessaria).

AbigseXdf

3. Sia X uno spazio di Banach. Se $A \in \mathcal{L}(X)$ è bigettivo, si provi che A è compatto se e solo se $\dim X < \infty$.

opemolti

4. Fissata $g \in C[a,b]$, sia $A : C[a,b] \to C[a,b]$ definito da $Af(x) = f(x)g(x)$.

   (i) Si calcoli $\|A\|_{\mathcal{L}(C[a,b])}$ e si provi che se g non è identicamente nulla in $[a,b]$, allora A non è compatto.

   (ii) Per quali g l'operatore A ha autovalori?

   (iii) Se A ha autovalori, si provi che essi sono al più un'infinità numerabile.

riscptno

5. Sia X uno spazio di Banach di dimensione infinita. Sia $A \in \mathcal{L}(X)$ un operatore compatto. Si provi che per ogni $\lambda \in \rho(A)$ l'operatore $(\lambda I - A)^{-1}$ non è compatto.

BcptAcpt

6. Siano X, Y spazi di Banach e siano $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$ con B compatto. Si provi che se $R(A) \subseteq R(B)$, allora anche A è compatto.

escptspe

7. Sia $A : \ell^2 \to \ell^2$ definito da $(Ax)_n = \alpha x_n - x_{n+1}$, $n \geq 1$, ove $\alpha \in \mathbb{C}$. A è continuo? A è compatto? Si determini $\sigma(A)$.

escptspe2

8. Sia $X = C[0,1]$ e poniamo $Tf(t) = \int_0^t \frac{f(s)}{\sqrt{s}} ds$.

   (i) Si calcoli $\|T\|_{\mathcal{L}(X)}$;

   (ii) Si provi che T è compatto e se ne determini lo spettro;

   (iii) per $\lambda \in \rho(T)$ si scriva esplicitamente l'operatore $R(\lambda, T)$.

[**Traccia:** per $\lambda \neq 0$ si consideri l'equazione $\lambda f - Tf = g$ supponendo dapprima $g \in C^1[0,1]$: si osservi che se f è soluzione allora $f \in C^1$. Derivando, si ottiene l'equazione $\lambda f' - f = g'$, la cui soluzione (metodo di variazione delle costanti seguito da una integrazione per parti) fornisce un 'espressione che ha senso per ogni $g \in C[0,1] \dots$]

oicp

9. Sia A l'operatore integrale dell'esempio 10.4.6 (2). Si provi che $A : L^2(a.b) \to L^2(a,b)$ è compatto.

11.3 Operatori compatti in spazi di Hilbert

compHil

Nel caso di operatori compatti da uno spazio di Hilbert in sé, la teoria diventa più interessante e completa. Per cominciare, analizziamo il comportamento di un operatore compatto rispetto alla convergenza debole.

cpcdeb

Proposizione 11.3.1 *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A \in \mathcal{L}(H)$. Allora A è compatto se e solo se per ogni $\{x_n\} \subseteq H$ tale che $x_n \rightharpoonup x$ in H risulta $Ax_n \to Ax$ in H.*

Dimostrazione ($\Longleftarrow$) Sia $K \subseteq H$ un insieme limitato e sia $\{x_n\}$ una successione contenuta in K. Per il corollario 10.7.4 esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \rightharpoonup x \in H$. Per ipotesi, ciò implica $Ax_{n_k} \to Ax$, il che mostra che $A(K)$ è relativamente compatto. Dunque l'operatore A è compatto.

($\Longrightarrow$) Viceversa, sia A compatto e sia $\{x_n\}$ una successione tale che $x_n \rightharpoonup x$ in H. Allora per l'esercizio 10.6.14 si ha $Ax_n \rightharpoonup Ax$ in H. Fissiamo un'arbitraria sottosuccessione $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$: per la limitatezza di $\{x_{n_k}\}$ e la compattezza di A, è possibile estrarre un'ulteriore sottosuccessione $\{x_{n_{k_h}}\} \subseteq \{x_{n_k}\}$ tale che $Ax_{n_{k_h}} \to y$ in H. D'altra parte, $Ax_{n_{k_h}} \rightharpoonup Ax$ in H, e quindi $y = Ax$. Dato che ogni sottosuccessione di $\{Ax_n\}$ ha una sottosuccessione che converge ad Ax in H, ne deduciamo che l'intera successione $\{Ax_n\}$ converge ad Ax in H. $\square$

cpquad

Proposizione 11.3.2 *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A \in \mathcal{L}(H)$. Allora A è compatto se e solo se per ogni $\{x_n\} \subseteq H$ tale che $x_n \rightharpoonup x$ in H risulta $(Ax_n, x_n)_H \to (Ax, x)_H$.*

Dimostrazione ($\Longrightarrow$) Sia A compatto e sia $x_n \rightharpoonup x$ in H. Per avere la tesi basta osservare che

$$\begin{aligned} |(Ax_n, x_n)_H - (Ax, x)_H| &\leq |(Ax_n - Ax, x_n)_H| + |(Ax, x_n - x)_H| \leq \\ &\leq \|Ax_n - Ax\|_H \|x_n\|_H + |(Ax, x_n - x)_H| \end{aligned}$$

e che l'ultimo membro è infinitesimo per $n \to \infty$ in virtù della proposizione 11.3.1 e della limitatezza di $\|x_n\|_H$.
($\Longleftarrow$) Viceversa, osserviamo anzitutto che se $z_n \rightharpoonup 0$ e $y_n \rightharpoonup 0$ in H, allora si ha anche $z_n + \alpha y_n \rightharpoonup 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$: quindi, per ipotesi,

$$(Az_n, z_n)_H \to 0, \quad (Ay_n, y_n)_H \to 0, \quad (A(z_n + \alpha y_n), z_n + \alpha y_n)_H \to 0.$$

Scegliendo $\alpha = 1$ e $\alpha = i$, si trova per sottrazione

$$(Ay_n, z_n)_H + (Az_n, y_n)_H \to 0, \qquad (Ay_n, z_n)_H - (Az_n, y_n)_H \to 0,$$

da cui, sommando, $(Ay_n, z_n)_H \to 0$.
Ciò premesso, sia $x_n \rightharpoonup x$ in H e sia $y_n = x_n - x$, cosicché $y_n \rightharpoonup 0$. Poiché, per l'esercizio 10.6.14, $Ay_n \rightharpoonup 0$, scegliendo $z_n = Ay_n$ l'argomentazione precedente mostra che $\|Ay_n\|_H \to 0$, ossia $Ax_n \to Ax$. La proposizione 11.3.1 implica allora che A è compatto. □

Diamo un'altra caratterizzazione degli operatori compatti.

cprfin **Teorema 11.3.3** *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A \in \mathcal{L}(H)$. Allora A è compatto se e solo se esiste una successione di operatori $\{A_n\} \subseteq \mathcal{L}(H)$, tali che* $\dim R(A_n) < \infty$ *per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $A_n \to A$ in $\mathcal{L}(H)$.*

Dimostrazione ($\Longleftarrow$) La tesi segue dall'esempio 11.2.2 (1) e dalla proposizione 11.2.3.
($\Longrightarrow$) Per ipotesi, detta B la palla unitaria di H, l'insieme $A(B)$ è relativamente compatto in Y: dunque, fissato $n \in \mathbb{N}^+$, esistono $y_1, \dots y_{m_n} \in A(B)$ tali che

$$A(B) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_n} B\left(y_i, \frac{1}{n}\right).$$

Sia allora $M_n = [\{y_1, \dots, y_{m_n}\}]$: per ogni n, M_n è un sottospazio finito-dimensionale di H, e se P_n è la proiezione ortogonale su M_n risulta $P_n y_i = y_i$ per $i = 1, \dots, m_n$. Quindi per ogni $x \in B$ si ha, scegliendo y_j in modo che $Ax \in B(y_j, 1/n)$:

$$\|Ax - P_n Ax\|_H \leq \|Ax - y_j\|_H + \|y_j - P_n Ax\|_H < \frac{1}{n} + \|P_n(y_j - Ax)\|_H < \frac{2}{n}.$$

Ciò prova che

$$\|A - P_n A\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{2}{n},$$

da cui la tesi. □

Analizziamo ora la struttura dello spettro degli operatori compatti e autoaggiunti in uno spazio di Hilbert. Il primo enunciato estende un noto risultato algebrico valido per le matrici hermitiane.

eigenaagg **Proposizione 11.3.4** *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto. Allora:*

(i) *gli autovalori di A sono reali;*

(ii) *autovettori relativi ad autovalori distinti sono fra loro ortogonali.*

Dimostrazione (i) Se $Ax = \lambda x$ con $x \neq 0$, allora

$$\lambda \|x\|_H^2 = (Ax, x)_H = (x, Ax)_H = \overline{\lambda} \|x\|_H^2,$$

da cui $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Se $Ax = \lambda x$ e $Ax' = \lambda' x'$ con $x, x' \neq 0$ e $\lambda \neq \lambda'$, allora a causa di (i) si ha

$$\lambda(x, x')_H = (Ax, x')_H = (x, Ax')_H = \overline{\lambda'}(x, x')_H = \lambda'(x, x')_H \,,$$

da cui $(x, x')_H = 0$, ossia $x \perp x'$. $\square$

fquad **Proposizione 11.3.5** *Sia H uno spazio di Hilbert, sia $A \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto e sia $Q(x) = (Ax, x)_H$ la* forma quadratica *associata ad A; poniamo*

$$m = \inf_{\|x\|_H = 1} Q(x), \qquad M = \sup_{\|x\|_H = 1} Q(x).$$

Allora:

(i) *si ha $-\infty < m \leq M < +\infty$ e $\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \max\{|m|, |M|\}$;*

(ii) *supposto A anche compatto, se $m \neq 0$ allora m è autovalore di A, e se $M \neq 0$ allora M è autovalore di A.*

Dimostrazione (i) Anzitutto, evidentemente, $Q(x)$ è reale per ogni $x \in H$, si ha $m \leq M$ e

$$\max\{|m|, |M|\} = \sup_{\|x\|_H = 1} |Q(x)| \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty.$$

Se $A = 0$ allora, banalmente, $0 = \|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \max\{|m|, |M|\}$; supponiamo dunque $A \neq 0$ e poniamo

$$N = \max\{|m|, |M|\} = \sup_{\|x\|_H = 1} |Q(x)| :$$

allora, come si è osservato, $0 < N \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H)}$. D'altra parte, essendo A autoaggiunto,

$$(A(x+y), x+y)_H - (A(x-y), x-y)_H = 4\mathrm{Re}(Ax, y)_H \,,$$

da cui, grazie all'identità del parallelogrammo (proposizione 7.2.10), otteniamo per ogni $x, y \in H$

$$\begin{aligned} 4\mathrm{Re}(Ax, y)_H &\leq |(A(x+y), x+y)_H| + |(A(x-y), x-y)_H| \leq \\ &\leq N\left[\|x+y\|_H^2 + \|x-y\|_H^2\right] = 2N\left[\|x\|_H^2 + \|y\|_H^2\right]. \end{aligned}$$

Per ogni $x \in H$ tale che $\|x\|_H = 1$ e $Ax \neq 0$, scegliendo $y = \frac{Ax}{\|Ax\|_H}$ si ricava $\|Ax\|_H \leq N$: dunque $\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = N$.

(ii) Sia A compatto e autoaggiunto. Sia $m \neq 0$ e sia $\{x_n\} \subseteq H$ tale che $\|x_n\|_H = 1$ e $m \leq (Ax_n, x_n)_H < m + \frac{1}{n}$: allora esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ tale che $x_{n_k} \rightharpoonup x$, con $x \in H$; per la proposizione 10.6.2 risulta $\|x\|_H \leq 1$. Poiché A è compatto, in virtù della proposizione 11.3.2 otteniamo

$$(Ax, x)_H = \lim_{k \to \infty} (Ax_{n_k}, x_{n_k})_H = m \neq 0,$$

e in particolare $x \neq 0$.
Consideriamo adesso l'operatore $A - mI$: esso è autoaggiunto e positivo, in quanto, per definizione di m e per omogeneità,

$$((A - mI)z, z)_H = (Az, z)_H - m\|z\|_H^2 \geq 0 \quad \forall z \in H.$$

In virtù dell'esercizio 8.2.9, per la forma quadratica $z \mapsto ((A - mI)z, z)_H$ vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, ossia si ha

$$|((A - mI)z, y)_H|^2 \leq ((A - mI)z, z)_H \cdot ((A - mI)y, y)_H \qquad \forall z, y \in H;$$

scegliendo $z = x_{n_k}$ si ricava per ogni $y \in H$

$$|((A - mI)x_{n_k}, y)_H|^2 \leq ((A - mI)x_{n_k}, x_{n_k})_H \cdot ((A - mI)y, y)_H < \frac{1}{n_k} \cdot ((A - mI)y, y)_H \,,$$

da cui, per $k \to \infty$,

$$(Ax - mx, y)_H = 0 \qquad \forall y \in H,$$

e dunque $Ax = mx$. Essendo $x \neq 0$, il numero m è autovalore di A con autovettore x. Discorso analogo se $M \neq 0$. $\square$

dopofquad **Osservazioni 11.3.6 (1)** Se l'operatore A non è compatto, non è detto che m e M, anche se non nulli, siano entrambi autovalori per A: ad esempio, in $H = \ell^2$ per l'operatore $(Ax)_n = (1 + \frac{1}{n})x_n$, $n \in \mathbb{N}^+$, che non è compatto, si ha $M = \|A\|_{\mathcal{L}(H)} = 2$ e $m = 1$, ma $Ax = x$ se e solo se $x = 0$.

(2) Esistono operatori autoaggiunti su uno spazio di Hilbert per i quali nessuno fra i due numeri $\pm\|A\|_{\mathcal{L}(H)}$ è autovalore di A (esercizio 11.3.5).

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente teorema, che è un'estensione della proprietà di diagonalizzazione delle matrici hermitiane in $\mathbb{C}^N$.

teospe **Teorema 11.3.7 (spettrale)** *Sia $A \in \mathcal{L}(H)$ un operatore compatto e autoaggiunto nello spazio di Hilbert H.*

(i) *Se $\dim R(A) = n < \infty$, allora A possiede n autovalori reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ diversi da 0 (non necessariamente distinti), più l'autovalore 0 quando $\dim H > n$, ed esiste un sistema ortonormale $\{x_1, \ldots, x_n\}$ di autovettori relativi ai λ_k, tale che*

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x, x_k)_H \, x_k \qquad \forall x \in H;$$

inoltre

$$\sigma(A) = \begin{cases} \{\lambda_k\}_{1 \leq k \leq n} & \text{se } \dim H = n, \\ \{\lambda_k\}_{1 \leq k \leq n} \cup \{0\} & \text{se } \dim H > n. \end{cases}$$

(ii) *Se* $\dim R(A) = \infty$*, allora* A *possiede un'infinità numerabile di autovalori reali* $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$*, diversi da* 0 *(non tutti necessariamente distinti), tali che* $|\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}|$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}^+$ *e* $\lambda_k \to 0$ *per* $k \to \infty$*, ed esiste un sistema ortonormale* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ *di autovettori relativi ai* λ_k *, tale che*

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, x_k)_H \, x_k \qquad \forall x \in H;$$

inoltre

$$\sigma(A) = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^+} \cup \{0\}.$$

In particolare, ogni autovalore di A *ha molteplicità finita. Infine, il sistema ortonormale* $\{x_k\}$ *è completo in* H *se e solo se* 0 *non è autovalore di* A*.*

Dimostrazione Se $A = 0$ tutti gli enunciati sono banalmente veri: si ha $n = 0$ e l'unico autovalore di A è 0. Supporremo dunque $A \neq 0$. Ricordando l'osservazione 11.3.6 (2), sia $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ un autovalore di A con $|\lambda_1| = \|A\|_{\mathcal{L}(H)}$ e sia x_1 un corrispondente autovettore di norma unitaria. Detto M_1 il sottospazio generato da x_1, notiamo che il sottospazio $M_1^\perp$ è invariante per A, in quanto

$$y \in M_1^\perp \implies (Ay, x_1)_H = (y, Ax_1)_H = \lambda_1 (y, x_1)_H = 0 \implies Ay \in M_1^\perp.$$

Consideriamo allora la restrizione $A|_{M_1^\perp}$: essa è un operatore compatto e autoaggiunto nello spazio di Hilbert $M_1^\perp$. In virtù dell'osservazione 11.3.6 (2), esiste un autovalore $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $|\lambda_2| = \|A\|_{\mathcal{L}(M_1^\perp)} \leq |\lambda_1|$; scelto un autovettore corrispondente x_2 di norma unitaria, consideriamo il sottospazio M_2 generato da M_1 e da x_2: esso è ancora invariante per A e dunque la restrizione $A|_{M_2^\perp}$ è un operatore compatto e autoaggiunto nello spazio di Hilbert $M_2^\perp$. Iterando questo procedimento si presentano due casi:

(a) $\dim R(A) < \infty$: in questo caso esiste $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $A|_{M_n^\perp} = 0$. Se $\dim H = n$, ciò significa che $M_n^\perp = \{0\}$, mentre se $\dim H > n$ allora $M_n^\perp = \ker A$, ossia tale sottospazio è generato da autovettori relativi all'autovalore 0;

(b) $\dim R(A) = \infty$: in questo caso esiste una successione $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^+} \subset \mathbb{R}$ tale che λ_k è autovalore non nullo di A e $|\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}|$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$. Si ha inoltre $\lambda_k \to 0$ per $k \to \infty$: infatti i corrispondenti autovettori x_k formano un sistema ortonormale e pertanto convergono debolmente a 0 in H, da cui, essendo A compatto, $\|Ax_k\|_H = |\lambda_k| \to 0$ in virtù della proposizione 11.3.1.

Da quanto detto segue in particolare che ogni autovalore ha molteplicità finita. Nel caso (a) si ha anche, ovviamente, la formula di rappresentazione

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} (Ax, x_k)_H \, x_k = \sum_{k=1}^{n} (x, Ax_k)_H \, x_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x, x_k)_H \, x_k \quad \forall x \in H.$$

Proviamo la formula di rappresentazione nel caso (b). Sia $x \in H$ e poniamo $y_k = x - \sum_{h=1}^{k} (x, x_h)_H \, x_h$. Poiché $y_k \in M_k^\perp$, per definizione dei λ_k sarà $\|Ay_k\|_H \leq |\lambda_{k+1}| \cdot \|y_k\|_H$; ma essendo

$$\|y_k\|_H^2 = \|x\|_H^2 - \sum_{h=1}^{k} |(x, x_h)_H|^2 \leq \|x\|_H^2 \qquad \forall k \in \mathbb{N}^+,$$

si ricava $\|Ay_k\|_H \leq |\lambda_{k+1}| \cdot \|x\|_H \to 0$ per $k \to \infty$. Pertanto, osservando che

$$Ay_k = Ax - \sum_{h=1}^{k} (x, x_h)_H \, Ax_h = Ax - \sum_{h=1}^{k} \lambda_h (x, x_h)_H \, x_h \,,$$

si conclude che

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, x_k)_H \, x_k \qquad \forall x \in H.$$

Proviamo infine le asserzioni relative allo spettro di A. Mostriamo anzitutto che A non ha altri autovalori $\lambda \neq 0$ distinti dai λ_k: se infatti x_0 fosse un autovettore di norma unitaria relativo a λ, allora per la proposizione 11.3.4 avremmo (con somma finita o infinita a seconda della dimensione di $R(A)$)

$$\lambda x_0 = Ax_0 = \sum_k \lambda_k (x_0, x_k)_H \, x_k = 0,$$

da cui $x_0 = 0$, il che è assurdo.
Sia ora $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ distinto dai λ_k e proviamo che $\lambda \in \rho(A)$. Non è escluso che 0 sia autovalore di A con molteplicità qualunque: ricordando l'esercizio 10.3.3, dato che A è autoaggiunto risulta $\overline{R(A)} = (\ker A)^{\perp}$. Sia dunque $y \in H$. L'equazione $\lambda x - Ax = y$ si scrive nel modo seguente:

$$\sum_k (\lambda - \lambda_k)(x, x_k)_H \, x_k + \lambda P_{\ker A} \, x = \sum_k (y, x_k)_H \, x_k + P_{\ker A} \, y.$$

Ne segue

$$(\lambda - \lambda_k)(x, x_k)_H = (y, x_k)_H \qquad \forall k,$$
$$\lambda P_{\ker A} \, x = P_{\ker A} \, y.$$

Pertanto l'equazione $\lambda x - Ax = y$ ha l'unica soluzione

$$x = \sum_k \frac{(y, x_k)_H}{\lambda - \lambda_k} \, x_k + \frac{1}{\lambda} \, P_{\ker A} \, y;$$

l'espressione a secondo membro definisce anche l'operatore $R(\lambda, A)$. Inoltre, posto $d = \min_k |\lambda - \lambda_k|$ (si noti che $d > 0$), vale la maggiorazione

$$\begin{aligned} \|x\|_H^2 &= \|R(\lambda, A) y\|_H^2 = \\ &= \sum_k \frac{|(y, x_k)_H|^2}{|\lambda - \lambda_k|^2} + \frac{\|P_{\ker A} \, y\|_H^2}{|\lambda|^2} \leq \left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{|\lambda|^2} \right) \|y\|_H^2; \end{aligned}$$

perciò $\lambda \in \rho(A)$. Tenuto conto del corollario 11.2.8, si ottiene la tesi. □

La rappresentazione fornita dal teorema spettrale caratterizza gli operatori compatti e autoaggiunti. Vale infatti la seguente

carcpaa **Proposizione 11.3.8** *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A \in \mathcal{L}(H)$ definito da*

$$Ax = \sum_k \lambda_k (x, x_k)_H \, x_k \qquad \forall x \in H,$$

ove la somma è finita o infinita, $\{x_k\}$ è un sistema ortonormale in H al più numerabile e $\{\lambda_k\}$ è una famiglia di numeri reali tali che $|\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}|$ e $\lambda_k \to 0$. Allora A è un operatore compatto e autoaggiunto, i λ_k sono i suoi autovalori non nulli e gli x_k sono i corrispondenti autovettori.

Dimostrazione Si verifica immediatamente che $(Ax, y)_H = (x, Ay)_H$ per ogni $x, y \in H$, cosicché A è autoaggiunto.
Proviamo che A è compatto: sia $\{y_n\} \subseteq H$ una successione tale che $y_n \rightharpoonup y \in H$. Allora

$$A(y_n - y) = \sum_k \lambda_k (y_n - y, x_k)_H \, x_k \, .$$

Poiché $\lambda_k \to 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}^+$ tale che $|\lambda_k| < \varepsilon$ per ogni $k > \nu$. D'altra parte si ha $\lim_{n\to\infty} (y_n - y, x_k)_H = 0$ per $k = 1, 2, \ldots, \nu$. Perciò, grazie all'ortonormalità degli x_k e alla disuguaglianza di Bessel (proposizione 8.3.6), si ha

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \|A(y_n - y)\|_H^2 \leq \\
&\quad \leq \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\nu} |\lambda_k|^2 |(y_n - y, x_k)_H|^2 + \limsup_{n\to\infty} \sum_{k>\nu} \varepsilon^2 |(y_n - y, x_k)_H|^2 \leq \\
&\quad \leq 0 + \varepsilon^2 \sup_n \|y_n - y\|_H^2 \, ,
\end{aligned}$$

e per l'arbitrarietà di ε otteniamo $Ay_n \to Ay$. Dalla proposizione 11.3.1 segue la tesi. □

Come mostra la proposizione precedente, la rappresentazione fornita dal teorema spettrale non è vera per gli operatori che sono compatti ma non autoaggiunti, nemmeno in dimensione finita: ad esempio, come si sa, non tutte le matrici $N \times N$ possono essere diagonalizzate. Anche la proprietà di possedere almeno un autovalore non sussiste in generale per gli operatori soltanto compatti, come mostra l'esempio che segue; tuttavia essa è sempre vera in dimensione finita, dato che ogni matrice $N \times N$ ha autovalori.

cpnaa **Esempio 11.3.9** Sia $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ definito da

$$(Ax)_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ \dfrac{x_{n-1}}{n} & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Si vede facilmente che A è compatto e che non possiede autovalori. Chiaramente $0 \in \sigma(A)$ poiché A è compatto; in realtà lo spettro di questo operatore è costituito dal solo punto 0. Infatti si verifica per induzione che

$$(A^m y)_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n < m \\ \dfrac{y_{n-m}}{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-m+1)} & \text{se } n \geq m, \end{cases}$$

cosicché

$$\|A^m y\|_H^2 = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{|y_{n-m}|^2}{[n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)]^2} \leq \frac{1}{[m!]^2}\,\|y\|_H^2 \qquad \forall y \in \ell^2,$$

ossia $\|A^m\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} \leq \frac{1}{m!}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, il che ci dice che A ha raggio spettrale nullo:

$$r_\sigma(A) = \lim_{m\to\infty} \|A^m\|_{\mathcal{L}(\ell^2)}^{1/m} = 0.$$

Ricordando l'esercizio 11.1.6 si conclude che $\sigma(A) = \{0\}$.

La particolare struttura dello spettro degli operatori compatti in uno spazio di Hilbert H permette di analizzare in dettaglio la risolubilità di equazioni nell'incognita $x \in H$ della forma

$$\lambda x - Ax = y$$

con $y \in H$ assegnato e $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ fissato. Accanto a tale equazione sarà utile considerare l'equazione omogenea associata

$$\lambda x - Ax = 0$$

nonché le due equazioni "aggiunte" delle precedenti:

$$\overline{\lambda} z - A^* z = w$$

con $w \in H$ assegnato, e

$$\overline{\lambda} z - A^* z = 0.$$

Il legame fra queste quattro equazioni è fornito dal seguente "teorema dell'alternativa":

Fred **Teorema 11.3.10 (di Fredholm)** *Sia H uno spazio di Hilbert, sia $A \in \mathcal{L}(H)$ un operatore compatto e sia $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Allora:*

(i) *Fissato $y \in H$, l'equazione $\lambda x - Ax = y$ ha soluzione nse e solo se y è ortogonale a ogni soluzione z dell'equazione $\overline{\lambda} z - A^* z = 0$: in altre parole, $R(\lambda I - A) = [\ker(\overline{\lambda} I - A^*)]^\perp$.*

(ii) *Fissato $w \in H$, l'equazione $\overline{\lambda} z - A^* z = w$ ha soluzione se e solo se w è ortogonale a ogni soluzione x dell'equazione $\lambda x - Ax = 0$: in altre parole, $R(\overline{\lambda} I - A^*) = [\ker(\lambda I - A)]^\perp$.*

(iii) *L'equazione $\lambda x - Ax = y$ ha soluzione unica per ogni $y \in H$ se e solo se l'equazione $\lambda x - Ax = 0$ ha l'unica soluzione $x = 0$, ovvero $\lambda \in \rho(A)$ se e solo se $\ker(\lambda I - A) = \{0\}$.*

(iv) *L'equazione $\overline{\lambda} z - A^* z = w$ ha soluzione unica per ogni $w \in H$ se e solo se l'equazione $\overline{\lambda} z - A^* z = 0$ ha l'unica soluzione $z = 0$, ovvero $\overline{\lambda} \in \rho(A^*)$ se e solo se $\ker(\overline{\lambda} I - A^*) = \{0\}$.*

(v) *Le equazioni* $\lambda x - Ax = 0$ *e* $\overline{\lambda} z - A^* z = 0$ *hanno lo stesso numero (finito) di soluzioni linearmente indipendenti, ossia*

$$\dim \ker(\lambda I - A) = \dim \ker(\overline{\lambda} I - A^*) < \infty.$$

Dimostrazione Faremo cinque passi successivi (per i primi due si veda anche l'esercizio 10.3.2).

1° passo: $R(\lambda I - A)$ e $R(\overline{\lambda} I - A^*)$ sono chiusi.

Sia $\{y_n\} \subseteq R(\lambda I - A)$ una successione tale che $y_n \to y \in H$: dobbiamo provare che $y \in R(\lambda I - A)$. Esiste $\{x_n\} \subseteq H$ tale che $\lambda x_n - A x_n = y_n$; si può supporre che $x_n \in [\ker(\lambda I - A)]^\perp$, perché altrimenti si prenderà $x'_n = x_n - P x_n$, essendo P la proiezione ortogonale su $\ker(\lambda I - A)$. Inoltre si può supporre $\{x_n\}$ limitata: infatti se esistesse una sottosuccessione (sempre indicata con $\{x_n\}$) tale che $\|x_n\|_H \to \infty$, avremmo, per la limitatezza di $\{y_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda x_n - A x_n}{\|x_n\|_H} = 0.$$

Ma allora, per la limitatezza di $\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|_H}\right\}$ e la compattezza di A, passando a un'ulteriore sottosuccessione $\left\{\frac{Ax_n}{\|x_n\|_H}\right\}$ convergerebbe, per cui anche $\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|_H}\right\}$ convergerebbe a un elemento $z \in H$. Ovviamente avremmo $\|z\|_H = 1$ e $\lambda z - Az = 0$; ma dato che $x_n \in [\ker(\lambda I - A)]^\perp$, dovrebbe essere $z \in [\ker(\lambda I - A)]^\perp$ e quindi $z = 0$: ciò è assurdo, e pertanto $\{x_n\}$ è limitata.

Esiste allora una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che Ax_{n_k} converge in H, quindi anche $x_{n_k} = \lambda^{-1}[y_{n_k} + Ax_{n_k}]$ converge a un certo elemento $x \in H$. Ne segue $y = \lambda x - Ax$, cioè $y \in R(\lambda I - A)$. Pertanto $R(\lambda I - A)$ è chiuso. In modo assolutamente analogo si prova che $R(\overline{\lambda} I - A^*)$ è chiuso.

2° passo: $\ker(\lambda I - A) = R(\overline{\lambda} I - A^*)^\perp$ e $\ker(\overline{\lambda} I - A^*) = R(\lambda I - A)^\perp$.

Sia $z \in \ker(\lambda I - A)$: allora

$$(z, (\overline{\lambda} I - A^*)x)_H = ((\lambda I - A)z, x)_H = 0 \qquad \forall x \in H,$$

e quindi $z \in R(\overline{\lambda} I - A^*)^\perp$. Viceversa, se $z \in R(\overline{\lambda} I - A^*)^\perp$, allora

$$((\lambda I - A)z, x)_H = (z, (\overline{\lambda} I - A^*)x)_H = 0 \qquad \forall x \in H,$$

da cui $(\lambda I - A)z = 0$. In modo del tutto analogo si prova l'altra uguaglianza.

3° passo: posto $H_k = R((\lambda I - A)^k)$, esiste $j \in \mathbb{N}$ tale che $H_k = H_j$ per ogni $k \geq j$.

Ovviamente si ha $H = H_0 \supseteq H_1 \supseteq H_2 \supseteq \ldots$, e gli H_k sono sottospazi chiusi di H in virtù del 1° passo. Se fosse $H_k \supset H_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si troverebbe un sistema ortonormale $\{x_k\} \subset H$ con $x_k \in H_k$ e $x_k \perp H_{k+1}$. Allora per $h > k$ si troverebbe

$$Ax_h - Ax_k = -\lambda x_k + [\lambda x_h - (\lambda I - A)x_h + (\lambda I - A)x_k] = -\lambda x_k + y,$$

dove $y = \lambda x_h - (\lambda I - A)x_h + (\lambda I - A)x_k$ è un elemento di H_{k+1}; ne seguirebbe

$$\|Ax_h - Ax_k\|_H^2 = \|\lambda x_k\|_H^2 + \|y\|_H^2 \geq |\lambda|^2,$$

cosicché da $\{Ax_k\}$ sarebbe impossibile estrarre sottosuccessioni convergenti: ciò è assurdo perché A è compatto.

4° passo: se $\ker(\lambda I - A) = \{0\}$, allora $R(\lambda I - A) = H$.

Sia $\ker(\lambda I - A) = \{0\}$ e sia $y \in H$: se $y \notin R(\lambda I - A)$, allora $y \neq (\lambda I - A)x$ per ogni $x \in H$, da cui, per l'iniettività di $\lambda I - A$,

$$(\lambda I - A)^k y - (\lambda I - A)^{k+1} x \neq 0 \qquad \forall x \in H, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

mentre invece, per il 3° passo, se k è sufficientemente grande l'elemento $(\lambda I - A)^k y \in H_k$ deve coincidere con qualche elemento $(\lambda I - A)^{k+1} x \in H_{k+1}$.

5° passo: $\dim \ker(\lambda I - A) = \dim \ker(\overline{\lambda} I - A^*) < \infty$.

Se fosse $\dim \ker(\lambda I - A) = +\infty$, esisterebbe un sistema ortonormale $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ contenuto in $\ker(\lambda I - A)$; da $Ax_k = \lambda x_k$ seguirebbe $\|Ax_k - Ax_h\|_H = |\lambda| \|x_k - x_h\|_H = |\lambda|\sqrt{2}$, per cui $\{Ax_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sarebbe priva di sottosuccessioni convergenti: assurdo. Analogamente si prova che $\dim \ker(\overline{\lambda} I - A^*) < \infty$.

Poniamo ora

$$\mu = \dim \ker(\lambda I - A), \qquad \nu = \dim \ker(\overline{\lambda} I - A^*)$$

e proviamo che $\mu = \nu$. Siano $\{x_1, \ldots, x_\mu\}$ e $\{z_1, \ldots, z_\nu\}$ sistemi ortonormali in $\ker(\lambda I - A)$ e in $\ker(\overline{\lambda} I - A^*)$ rispettivamente. Supponiamo per assurdo che sia $\mu < \nu$, e poniamo

$$Sx = (\lambda I - A)x - \sum_{k=1}^{\mu} (x, x_k)_H \, z_k \,, \qquad x \in H.$$

L'operatore S è della forma $\lambda I - B$ con B operatore compatto; quindi ad esso è applicabile tutto quanto fin qui dimostrato. Proviamo che S è iniettivo: da $Sx = 0$ segue

$$(\lambda I - A)x = \sum_{k=1}^{\mu} (x, x_k)_H \, z_k :$$

poiché il primo membro di questa uguaglianza appartiene a $R(\lambda I - A)$ e il secondo a $\ker(\overline{\lambda} I - A^*)$, per il 2° passo si deduce $(\lambda I - A)x = 0$ e $(x, x_k)_H = 0$ per $k = 1, 2, \ldots, \mu$, cioè $x \in \ker(\lambda I - A) \cap [\ker(\lambda I - A)]^\perp$, e in definitiva $x = 0$.

Applichiamo adesso all'operatore S il 4° passo: si ottiene $R(S) = H$. Pertanto esiste $y \in H$ tale che

$$z_{\mu+1} = Sy = (\lambda I - A)y - \sum_{k=1}^{\mu} (y, x_k)_H \, z_k \,,$$

da cui

$$\begin{aligned} 1 = (z_{\mu+1}, z_{\mu+1})_H &= ((\lambda I - A)y, z_{\mu+1})_H - \sum_{k=1}^{\mu} (y, x_k)_H (z_k, z_{\mu+1})_H = \\ &= (y, (\overline{\lambda} I - A^*) z_{\mu+1})_H = (y, 0)_H = 0 \end{aligned}$$

il che è assurdo. Analogamente si mostra che non può essere $\mu < \nu$. Il teorema di Fredholm è dimostrato. □

altern **Osservazione 11.3.11** Dal teorema di Fredholm si ricava che se $A \in \mathcal{L}(H)$ è compatto e $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, allora per l'equazione

$$\lambda x - Ax = y \in H$$

vale la seguente alternativa:

- o λ non è autovalore per A, e allora l'equazione ha soluzione unica per ogni $y \in H$,
- oppure λ è autovalore per A, e allora l'equazione è risolubile, non univocamente, se e solo se $y \in [\ker(\overline{\lambda} I - A^*)]^\perp$.

In altre parole, se $\lambda \neq 0$ allora o λ è un punto regolare per A, oppure λ è un autovalore di A (di molteplicità finita): questo fatto, nel caso di un operatore A compatto e autoaggiunto, ci era già noto dal teorema spettrale (teorema 11.3.7).

Torniamo all'equazione

$$\lambda x - Ax = y \in H$$

supponendo stavolta che A sia un operatore compatto e autoaggiunto nello spazio di Hilbert H. Vogliamo rappresentare le soluzioni x, analogamente a quanto fatto nel teorema spettrale, esclusivamente in termini degli autovalori non nulli di A e dei corrispondenti autovettori.

rappFred **Proposizione 11.3.12** *Sia H uno spazio di Hilbert, sia $A \in \mathcal{L}(H)$ compatto e autoaggiunto, sia $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ la successione degli autovalori non nulli di A e sia $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ il corrispondente sistema ortonormale di autovettori. Allora:*

(i) *se $\lambda \neq 0$ non è autovalore per A, l'equazione $\lambda x - Ax = y$ ha soluzione unica per ogni $y \in H$, data da*

$$x = \frac{1}{\lambda}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k (y, x_k)_H}{\lambda - \lambda_k}\, x_k + y\right];$$

(ii) *se $\lambda \neq 0$ è autovalore per A, l'equazione $\lambda x - Ax = y$ ha soluzione se e solo se $y \in [\ker(\lambda I - A)]^\perp$, ed in tal caso tutte le soluzioni sono della forma*

$$x = \frac{1}{\lambda}\left[\sum_{\lambda_k \neq \lambda} \frac{\lambda_k (y, x_k)_H}{\lambda - \lambda_k}\, x_k + y\right] + v,$$

ove v è un arbitrario elemento di $\ker(\lambda I - A)$, il quale è un sottospazio finito-dimensionale di H.

Dimostrazione (i) Dal teorema spettrale segue che l'equazione $\lambda x - Ax = y$ può scriversi nel modo seguente:

$$x = \frac{1}{\lambda}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, x_k)_H\, x_k + y\right];$$

ne segue

$$\lambda_n(x,x_n)_H = \frac{\lambda_n}{\lambda}[\lambda_n(x,x_n)_H + (y,x_n)_H] \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

da cui

$$\lambda_n(x,x_n)_H = \frac{\lambda_n(y,x_n)_H}{\lambda - \lambda_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

e quindi la rappresentazione cercata. Si noti che si tratta della stessa formula ottenuta nell'ultima parte della dimostrazione del teorema spettrale (teorema 11.3.7): infatti da entrambe segue che $(x,x_k)_H = \frac{(y,x_k)_H}{\lambda-\lambda_k}$. La differenza fra le due formule è che adesso x è espresso in funzione di y e dei soli autovettori x_k, senza far intervenire gli elementi di $\ker A$.

(ii) Sarà $\lambda = \lambda_s$ per un certo $s \in \mathbb{N}^+$: per il teorema di Fredholm (teorema 11.3.10) esistono soluzioni se e solo se $y \in \ker(\overline{\lambda_s} I - A^*)]^\perp = \ker(\lambda_s I - A)]^\perp$. In tal caso per i $\lambda_n \neq \lambda_s$ si ha ancora

$$\lambda_n(x,x_n)_H = \frac{\lambda_n(y,x_n)_H}{\lambda_s - \lambda_n}\,,$$

mentre, tenuto conto che $y \in [\ker(\lambda_s I - A)]^\perp$, i coefficienti $(x,x_n)_H$ relativi ai $\lambda_n = \lambda_s$ saranno arbitrari. Ne segue la formula cercata.
Il fatto che $\dim\ker(\lambda_s I - A) < \infty$ segue dal teorema spettrale. □

eqint2sp **Esempio 11.3.13** Consideriamo l'equazione integrale

$$f(t) - \mu \int_a^b K(t,s) f(s)\, ds = h(t), \qquad t \in [a,b],$$

che è detta *equazione di Fredholm di seconda specie*. La funzione $K(t,s)$, detta *nucleo* dell'equazione, appartiene a $L^2(\,]a,b[\times]a,b[\,)$, il secondo membro h è una funzione assegnata in $L^2(a,b)$ e μ è un parametro complesso non nullo, mentre f è l'incognita.
Come si sa (esercizio 11.2.9), l'operatore $A : L^2(a,b) \to L^2(a,b)$ definito da

$$Af(t) = \int_a^b K(t,s) f(s)\, ds, \qquad t \in [a,b],$$

è compatto, nonché autoaggiunto se $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$. In quest'ultimo caso, l'equazione integrale si può scrivere nella forma

$$\lambda f - Af = g,$$

ove $\lambda = \frac{1}{\mu}$ e $g = \frac{1}{\mu}h$, e ad essa è applicabile la teoria precedente. In base alla proposizione 11.3.12 otteniamo che, se $\frac{1}{\mu}$ non è autovalore di A, la soluzione si rappresenta in questo modo:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu}{\mu_k - \mu} (h, \varphi_k)_{L^2(a,b)}\, \varphi_k(t) + h(t) \qquad \text{q.o. in } [a,b],$$

ove $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ è un sistema ortonormale di autovettori relativi alla famiglia $\{\frac{1}{\mu_k}\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ degli autovalori non nulli di A, e la serie converge nel senso di $L^2(a,b)$ (si veda anche l'esercizio 11.3.10).

Esercizi 11.3

escpauspe

1. Sia $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ definito per ogni $x \in \ell^2$ da $(Tx)_n = n^{-\frac{3}{4}} x_n$, $n \in \mathbb{N}^+$. Provare che T è compatto e autoaggiunto e determinarne lo spettro.

matrinfycp

2. Sia $\{a_{ij}\}$ una matrice infinita tale che $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty$. Posto $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$ per ogni $x \in \ell^2$, si provi che $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ e che A è compatto.

opmodiscr

3. Sia $\alpha \in \ell^\infty$ e si definisca $(Ax)_n = \alpha_n x_n$ per ogni $x \in \ell^2$.

   (i) Si verifichi che $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ e si calcoli $\|A\|_{\mathcal{L}(\ell^2)}$.

   (ii) Si provi che gli autovalori di A sono tutti e soli gli α_n.

   (iii) Si dimostri che $\sigma(A)$ è la chiusura dell'insieme $\{\alpha_n\}$.

   (iv) Si provi che A è compatto se e solo se $\alpha \in c_0$.

specpau

4. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A \in \mathcal{L}(H)$ un operatore compatto e autoaggiunto; posto
$$m = \inf_{\|x\|_H = 1} (Ax, x)_H \,, \qquad M = \sup_{\|x\|_H = 1} (Ax, x)_H \,,$$
si provi che $\sigma(A) \subseteq [m, M]$.
[**Traccia:** si ricordi che lo spettro è reale; se ad esempio $\lambda > M$, si applichi all'operatore strettamente positivo $\lambda I - A$ l'esercizio 10.3.3.]

nonauto

5. Si verifichi che l'operatore $A : \ell^2 \to \ell^2$, definito da
$$(Ax)_n = \begin{cases} \left(3 - \dfrac{1}{n}\right) x_n & \text{se } n \text{ è pari,} \\ x_n & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$
è autoaggiunto ma non compatto, e si provi che $\|A\|_{\mathcal{L}(H)}$ e $-\|A\|_{\mathcal{L}(H)}$ non sono autovalori per A.

rachi

6. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A \in \mathcal{L}(H)$ un operatore compatto. Dimostrare che:

   (i) se $\lambda \neq 0$ allora $\dim \ker(\lambda I - A) < \infty$;

   (ii) se $\lambda \neq 0$ allora $R(\lambda I - A)$ è un sottospazio chiuso di H.

   [**Traccia:** per (ii) si provi dapprima, per assurdo, che esiste $c > 0$ tale che $c\|x\|_H \leq \|(\lambda I - A)x\|_H$ per ogni $x \in [\ker(\lambda I - A)]^\perp$.]

spelocfin

7. Siano H uno spazio di Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ un operatore compatto, $r > 0$, E un insieme di autovalori di A con $|\lambda| \geq r$ per ogni $\lambda \in E$. Si provi che:

   (i) $R(\lambda I - A) \neq H$ per ogni $\lambda \in E$,

   (ii) E è un insieme finito.

[**Traccia:** per assurdo, se non vale (i) oppure (ii), si costruiscano una successione crescente $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ di sottospazi di H ed una successione $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} \subseteq E$, tali che

$$A(M_n) \subseteq M_n \quad \forall n \geq 1, \qquad (\lambda_n I - A)(M_n) \subseteq M_{n-1} \quad \forall n \geq 2,$$

scegliendo, nel caso che non valga (i),

$$M_n = \ker(\lambda_0 I - A)^n \quad \text{con } R(\lambda_0 I - A) = H,$$

e nel caso che non valga (ii)

$$M_n = [\{e_1, \ldots, e_n\}], \quad \text{ove } e_k \neq 0 \text{ e } \lambda_k\, e_k = Ae_k,\ k = 1, \ldots, n.$$

Si deduca l'esistenza di una successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} \subseteq H$, con $\|y_n\|_H = 1$, tale che $\{Ay_n\}$ non abbia sottosuccessioni convergenti.]

cpauspau

8. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $A \in \mathcal{L}(H)$ un operatore compatto. Se $\lambda \neq 0$ e $\lambda \in \sigma(A)$, si provi che λ è autovalore di A.

cpau0au

9. Sia H uno spazio di Hilbert di dimensione infinita e sia $T \in \mathcal{L}(H)$ compatto e autoaggiunto. Si provi che 0 è un autovalore di T; se ne deduca che $\sigma(T)$ è al più numerabile e ha come unico possibile punto di accumulazione 0, e quindi è un insieme compatto.

Kts

10. Sia $K \in L^2(\,]a,b[\times]a,b[\,)$ tale che $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$, e sia A l'operatore dell'esempio 11.3.13. Se $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ è la successione degli autovalori non nulli di A e $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ è un corrispondente sistema ortonormale di autovettori, si provi che:

    (i) $K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k(t)\overline{u_k(s)}$ q.o. in $L^2(\,]a,b[\times]a,b[\,)$;

    (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \infty$.

potopint

11. Sia A l'operatore (compatto e autoaggiunto) dell'esempio 11.3.13, sia $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ la successione degli autovalori non nulli di A e sia $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ un corrispondente sistema ortonormale di autovettori. Posto

$$K_1(t,s) = K(t,s), \qquad K_{n+1}(t,s) = \int_a^b K(t,\tau)K_n(\tau,s)\,ds \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

si provi che:

    (i) $K_n \in L^2(\,]a,b[\times]a,b[\,)$ e $\|K_n\|_{L^2(\,]a,b[\times]a,b[\,)} \leq \|K\|^n_{L^2(\,]a,b[\times]a,b[\,)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$;

    (ii) A^n è un operatore integrale il cui nucleo è $K_n(t,s)$;

    (iii) A^n è compatto e autoaggiunto, $\{(\lambda_k)^n\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ è la successione dei suoi autovalori non nulli e $\{u_k\}$ è un corrispondente sistema ortonormale di autovettori;

    (iv) $\|K_n\|^2_{L^2(a,b)} = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{2n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

opintno 12. Sia $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ una successione infinitesima tale che $\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2=+\infty$. Posto

$$Af(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(f,e_k)_{L^2(a,b)}\,e_k(t),$$

ove $e_k(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin k\pi t$, si provi che $A\in\mathcal{L}(L^2(0,1))$ e che A è compatto, ma non è un operatore integrale con nucleo in $L^2(\,]0,1[\times]0,1[\,)$.

11.4 L'equazione di Sturm - Liouville

eqSL Consideriamo l'operatoe differenziale del secondo ordine

$$Mu=pu''+ru'+qu,\qquad u\in C^2[a,b],$$

ove p,q,r sono funzioni reali continue in $[a,b]$ con $p(x)\neq 0$ in $[a,b]$. È ben noto dalla teoria delle equazioni differenziali lineari il seguente risultato:

e1pbC **Teorema 11.4.1** *Fissati $g\in C[a,b]$ e $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, nelle ipotesi sopra scritte il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} Mu=g \quad in\ [a,b]\\ u(a)=\alpha\\ u'(a)=\beta\end{cases}$$

ha una e una sola soluzione $u\in C^2[a,b]$. □

Osserviamo che un operatore differenziale del tipo sopra descritto si può sempre trasformare in un operatore della forma

$$Lv=-(\psi v')'+\varphi v,\qquad v\in C^2[a,b],$$

ove $\psi\in C^1[a,b]$ e inoltre $\psi(x)>0$ in $[a,b]$: basta moltiplicare l'operatore M per la funzione

$$-\frac{1}{p(x)}\exp\left(\int_a^x\frac{r(t)}{p(t)}\,dt\right)$$

e scegliere

$$\psi(x)=\exp\left(\int_a^x\frac{r(t)}{p(t)}\,dt\right),\qquad \varphi(x)=-\frac{q(x)}{p(x)}\exp\left(\int_a^x\frac{r(t)}{p(t)}\,dt\right).$$

Con questo artificio, lo studio delle equazioni differenziali del secondo ordine, a coefficienti reali, si può ridurre, almeno per certi scopi, allo studio di oequazionii differenziali in cui l'operatore ha la particolare forma sopra descritta. Considereremo dunque l'*equazione di Sturm-Liuville*

$$Lf-\mu f=g,$$

con L operatore del tipo sopra illustrato e f soggetta a condizioni agli estremi di natura più generale di quelle del teorema 11.4.1. Ciò ci permetterà di fare uso della teoria

sviluppata nei due paragrafi precedenti.
Definiamo l'operatore $L : D(L) \to L^2(a,b)$ nel modo seguente:

$$\begin{cases} D((L) = \{u \in C^1[a,b] :\ u' \in AC[a,b],\ u'' \in L^2(a,b),\ B_1u = B_2u = 0\}, \\ Lu = -(\psi u')' + \varphi u \quad \forall u \in D(L), \end{cases}$$

ove

$$B_1u = \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a), \qquad B_2u = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b),$$

essendo $\alpha_1\,, \beta_1\,, \alpha_2\,, \beta_2$ numeri reali tali che $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $|\alpha_2| + |\beta_2| > 0$. La scelta di questo tipo di condizioni agli estremi è dettata dal fatto che, grazie ad esse, l'operatore L risulta autoaggiunto in $L^2(a,b)$, vale a dire

$$(Lu, v)_{L^2(a,b)} = (u, Lv)_{L^2(a,b)} \qquad \forall u, v \in D(L).$$

La verifica di questo fatto è lasciata al lettore (esercizio 11.4.7). Notiamo che ogni autovettore di L è necessariamente un elemento di $C^2[a,b]$ (esercizio 11.4.1).

eigenSL **Proposizione 11.4.2** *Sia $L : D(L) \to L^2(a,b)$ l'operatore sopra definito. Allora:*

(i) *gli autovalori di L sono reali;*

(ii) *autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali in H;*

(iii) *gli autovalori di L formano un insieme al più numerabile.*

Dimostrazione Gli enunciati (i) e (ii) si provano come nella proposizione 11.3.4. Per (iii) si osservi che se l'insieme degli autovalori fosse più che numerabile, esisterebbe, per (ii), un sistema ortonormale di autovettori più che numerabile nello spazio di Hilbert separabile $L^2(a,b)$, il che è assurdo per l'osservazione 8.3.3. □

eigSLli **Proposizione 11.4.3** *Nelle ipotesi della proposizione 11.4.2, gli autovalori di L costituiscono una successione limitata inferiormente.*

Notiamo che se fosse $\psi < 0$ in $[a,b]$, la successione degli autovalori sarebbe limitata superiormente.

Dimostrazione Sia $u \in D(L)$ un autovettore relativo all'autovalore μ, con $\|u\|_{L^2(a,b)} = 1$. Dalla formiula di integrazione per parti per funzioni assolutamente continue (esercizio 6.5.18) si ha

$$\begin{aligned} \mu &= \mu\|u\|^2_{L^2(a,b)} = (Lu, u)_{L^2(a,b)} = \int_a^b [(-\psi u')' + \varphi u]\,\overline{u}\,dx = \\ &= -\psi(b)u'(b)\overline{u(b)} + \psi(a)u'(a)\overline{u(a)} + \int_a^b (\psi|u'|^2 + \varphi|u|^2)dx. \end{aligned}$$

Si tratta di stimare dal basso gli addendi dell'ultimo membro. Osserviamo preliminarmente che $|u|$, essendo una funzione continua in $[a,b]$, ha minimo non negativo in un punto $z \in [a,b]$: poiché $\|u\|_{L^2(a,b)} = 1$, deve essere

$$|u(z)| = \min_{x\in[a,b]} |u(x)| \le \frac{1}{\sqrt{b-a}}\,,$$

altrimenti avremmo

$$\int_a^b |u(x)|^2 dx > \frac{1}{b-a}\int_a^b dx = 1.$$

Di conseguenza si ha, in virtù della disuguaglianza di Hölder (proposizione 9.1.2),

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq |u(x)-u(z)| + |u(z)| = \left|\int_x^z u'(y)\,dy\right| + |u(z)| \leq \\ &\leq \sqrt{b-a}\left(\int_a^b |u'(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{b-a}} \qquad \forall x \in [a,b]. \end{aligned}$$

Ciò premesso, se $u(a) = 0$ oppure $u'(a) = 0$, certamente $\psi(a)u'(a)\overline{u(a)} = 0$; altrimenti, da $u(a)u'(a) \neq 0$ e dalla condizione $B_1 u = 0$ segue che $\beta_1 \neq 0$ e quindi esiste $c > 0$ tale che

$$\begin{aligned} &|\psi(a)u'(a)\overline{u(a)}| \leq \|\psi\|_\infty \left|\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right| |u(a)|^2 \leq \\ &\leq c\left[\sqrt{b-a}\left(\int_a^b |u'(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{b-a}}\right] \leq c_1\left(\int_a^b |u'(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} + c_2. \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo, vi è $c_1 > 0$ tale che

$$|\psi(b)u'(b)\overline{u(b)}| \leq c_1\left(\int_a^b |u'(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} + c_2.$$

Pertanto si ottiene, per opportune costanti positive $c_2, \ldots, c_6$,

$$\begin{aligned} \mu &\geq -|\psi(a)u'(a)\overline{u(a)}| - |\psi(b)u'(b)\overline{u(b)}| + \min_{x\in[a,b]} \psi(x) \int_a^b |u'|^2 dy \geq \\ &\geq c_3 \int_a^b |u'(y)|^2 dy - c_4\left(\int_a^b |u'(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} - c_5 = \\ &= \left(\sqrt{c_3 \int_a^b |u'(y)|^2 dy} - \frac{c_4}{2\sqrt{c_3}}\right)^2 - c_6 > -\infty. \quad \square \end{aligned}$$

moltSL **Proposizione 11.4.4** *Nelle ipotesi della proposizione 11.4.2, ogni autovalore di L ha molteplicità* 1.

Dimostrazione Siano $u, v \in D$ autovettori non nulli relativi all'autovalore u. Allora

$$\begin{cases} Lu = \mu u \\ B_1 u = B_2 u = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} Lv = \mu v \\ B_1 v = B_2 v = 0. \end{cases}$$

In particolare,

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \alpha_1 v(a) + \beta_1 v'(a) = 0,$$

il che implica, essendo α_1 e β_1 non entrambi nulli,

$$\det \begin{pmatrix} u(a) & v(a) \\ u'(a) & v'(a) \end{pmatrix} = 0.$$

Perciò esistono $p, q \in \mathbb{C}$, non entrambi nulli, tali che

$$p\begin{pmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} v(a) \\ v'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che la funzione $pu + qv$ risolve

$$\begin{cases} (L - \mu I)(pu + qv) = 0 \quad \text{in } [a, b] \\ (pu + qv)(a) = (pu + qv)'(a) = 0 \end{cases}$$

e per il teorema 11.4.1 si conclude che $pu + qv \equiv 0$ in $[a, b]$, cioè u e v sono linearmente dipendenti. □

0nonauto **Osservazione 11.4.5** La proposizione 11.4.2 (iii) ci autorizza a supporre, senza restrizione alcuna, che 0 non sia autovalore per L. Infatti in caso contrario, scelto un numero $\nu \in \mathbb{R}$ che non sia autovalore per L, l'equazione $Lu - \mu u = g$ si può riscrivere come

$$(-\psi u')' + (\varphi - \nu)u - (\mu - \nu)u = g;$$

dunque posto $L_0 = L - \nu I$ e $\mu_0 = \mu - \nu$, L_0 è ancora un operatore di Sturm-Liouville che non ha 0 come autovalore, e si ha

$$L_0 u - \mu_0 u = Lu - \mu u = g.$$

Risolubilità dell'equazione di Sturm - Liouville

riseqSL Consideriamo ancora l'operatore di Sturm-Liouville L, sotto le ipotesi della proposizione 11.4.2. Nell'ipotesi che 0 non sia autovalore di L, il che, come si è osservato, non è restrittivo, andiamo a dimostrare l'invertibilità di L in $L^2(a, b)$. Proviamo anzitutto il seguente

solli **Lemma 11.4.6** *Nelle ipotesi della proposizione 11.4.2, supponiamo inoltre che* 0 *non sia autovalore per* L. *Allora i due problemi*

$$\begin{cases} Lu_1 = 0 \quad \textit{in } [a, b] \\ B_1 u_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} Lu_2 = 0 \quad \textit{in } [a, b] \\ B_2 u_2 = 0, \end{cases}$$

hanno rispettivamente soluzioni $u_1, u_2 \in C^2[a, b]$ *reali, non identicamente nulle e tali che per ogni* $x \in [a, b]$ *i vettori* $(u_1(x), u_1'(x))$ *e* $(u_2(x), u_2'(x))$ *sono linearmente indipendenti in* $\mathbb{R}^2$.

Dimostrazione Per determinare u_1 e u_2 è sufficiente risolvere i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} Lu_1 = 0 \quad \text{in } [a,b] \\ u_1(a) = -\beta_1 \\ u_1'(a) = \alpha_1\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} Lu_2 = 0 \quad \text{in } [a,b] \\ u_2(b) = -\beta_2 \\ u_2'(b) = \alpha_2\,, \end{cases}$$

i quali per il teorema 11.4.1 hanno un'unica soluzione reale di classe C^2 non identicamente nulla. Si noti che $B_1u_1 = B_2u_2 = 0$. Se $(u_1(x), u_1'(x))$ e $(u_2(x), u_2'(x))$ fossero linearmente dipendenti per qualche $x \in [a,b]$, esisterebbe $x_0 \in [a,b]$ tale che $u_1(x_0)u_2'(x_0) - u_1'(x_0)u_2(x_0) = 0$. D'altra parte risulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\psi[u_1u_2' - u_1'u_2]) &= u_1(\psi u_2')' + \psi u_1'u_2' - (\psi u_1')'u_2 - \psi u_1'u_2' = \\ &= -u_1(\varphi u_2) + u_2(\varphi u_1) = 0 \qquad \text{in } [a,b], \end{aligned}$$

e poiché tale funzione è nulla in x_0 si deduce che $\psi(u_1u_2' - u_1'u_2) = 0$ in $[a,b]$; ne segue

$$u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x) = 0 \qquad \forall x \in [a,b].$$

In particolare, calcolando nei punti $x = a$ e $x = b$, si ha subito $B_2u_1 = B_1u_2 = 0$. Dunque u_1 e u_2 sono soluzioni del problema

$$\begin{cases} Lu = 0 \quad \text{in } [a,b] \\ B_1u = B_2u = 0, \end{cases}$$

e dato che 0 non è autovalore per L, questo implica $u_1 = u_2 = 0$: ciò è assurdo poiché, per ipotesi, u_1 e u_2 sono non identicamente nulle. □

c-1 **Osservazione 11.4.7** Dalla dimostrazione del lemma 11.4.6 segue che la funzione $\psi(u_1u_2' - u_1'u_2)$ è costante in $[a,b]$; si può quindi supporre (sostituendo ad esempio α_1 e β_1 con $\lambda\alpha_1$ e $\lambda\beta_1$, e corrispondentemente u_1 con λu_1, per un opportuno numero reale λ) che tale costante sia -1, cioè che

$$\psi(x)[u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)] = -1 \qquad \forall x \in [a,b].$$

Siamo ora in grado di provare il seguente

Green **Teorema 11.4.8** *Nelle ipotesi della proposizione 11.4.2, supponiamo inoltre che* 0 *non sia autovalore per* L *e che risulti* $\psi(u_1u_2' - u_1'u_2) = -1$ *in* $[a,b]$*, ove* u_1 *e* u_2 *sono le funzioni introdotte nel lemma 11.4.6. Allora per ogni* $g \in L^2(a,b)$ *il problema*

$$\begin{cases} Lf = g \quad \textit{in } [a,b] \\ B_1f = B_2f = 0 \end{cases}$$

ha l'unica soluzione (appartenente a $D(L)$*)*

$$f(x) = \int_a^b G(x,y)g(y)\,dy, \qquad x \in [a,b],$$

ove la funzione

$$G(x,y) = \begin{cases} u_1(x)u_2(y) & \text{se } x \le y \\ u_1(y)u_2(x) & \text{se } x \ge y \end{cases}$$

è continua, reale e simmetrica in $[a,b] \times [a,b]$.

Dimostrazione Cerchiamo una soluzione dell'equazione $Lf = g$ con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie: cerchiamo dunque una soluzione del tipo

$$f(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x),$$

ove $c_1(x)$ e $c_2(x)$ sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} c_1'u_1 + c_2'u_2 = 0 \\ c_1'u_1' + c_2'u_2' = -\dfrac{g}{\psi}\,. \end{cases}$$

Il determinante di questo sistema è $u_1u_2' - u_1'u_2 = -\frac{1}{\psi} \neq 0$, quindi con facili calcoli si ottiene

$$c_1' = -u_2 g, \qquad c_2' = u_1 g$$

e pertanto si può scegliere

$$c_1(x) = \int_x^b u_2(y)g(y)\,dy, \qquad c_2(x) = \int_a^x u_1(y)g(y)\,dy.$$

Ne segue, tenuto conto della definizione di $G(x,y)$,

$$f(x) = u_1(x)\int_x^b u_2(y)g(y)\,dy + u_2(x)\int_a^x u_1(y)g(y)\,dy = \int_a^b G(x,y)g(y)\,dy.$$

È chiaro che G è continua in $[a,b] \times [a,b]$ e che è una funzione reale e simmetrica. Dobbiamo verificare che la funzione f appartiene a $D(L)$, verifica $B_1 f = B_2 f = 0$ e risolve l'equazione $Lf = g$. Proviamo anzitutto che f è derivabile:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u_1'(x)\int_x^b u_2(y)g(y)\,dy - u_1(x)u_2(x)g(x) + \\ &\quad + u_2'(x)\int_a^x u_1(y)g(y)\,dy + u_2(x)u_1(x)g(x) = \\ &= u_1'(x)\int_x^b u_2(y)g(y)\,dy + u_2'(x)\int_a^x u_1(y)g(y)\,dy, \end{aligned}$$

Da questa relazione segue che $f' \in AC[a,b]$ e che, per q.o. $x \in [a,b]$,

$$f''(x) = u_1''(x)\int_x^b u_2(y)g(y)\,dy + u_2''(x)\int_a^x u_1(y)g(y)\,dy - [u_1'(x)u_2(x) - u_2'(x)u_1(x)]g(x);$$

si ha anche

$$B_1 f = \alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = [\alpha_1 u_1(a) + \beta_1 u_1'(a)] \int_a^b u_2(y) g(y)\, dy = 0,$$

e similmente

$$B_2 f = \alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = [\alpha_2 u_2(a) + \beta_2 u_2'(a)] \int_a^b u_1(y) g(y)\, dy = 0,$$

cosicché $f \in D(L)$. Inoltre

$$\begin{aligned}
Lf &= -(\psi f')' + \varphi f = \\
&= -\left[\psi \left(u_1' \int_x^b u_2(y) g(y)\, dy + u_2' \int_a^x u_1(y) g(y)\, dy\right)\right]' + \\
&\quad + \varphi \left[u_1 \int_a^x u_2 g\, dy + u_2 \int_x^b u_1 g\, dy\right] = \\
&= [-(\psi u_1')' + \varphi u_1] \int_a^x u_2 g\, dy + [-(\psi u_2')' + \varphi u_2] \int_x^b u_1 g\, dy - \psi [u_1 u_2' - u_1' u_2]\, g) = \\
&= L u_1 \int_a^x u_2 g\, dy + L u_2 \int_x^b u_1 g\, dy + g = g.
\end{aligned}$$

Infine, se f_1 è un'altra soluzione del problema, allora la funzione $f - f_1$ verifica

$$\begin{cases} L(f - f_1) = 0 \quad \text{in } [a, b] \\ B_1(f - f_1) = B_2(f - f_1) = 0, \end{cases}$$

e quindi $f - f_1 = 0$, dato che 0 non è autovalore per L. □

dopoG **Osservazioni 11.4.9 (1)** Dal teorema 11.4.8 segue che l'operatore integrale $g \mapsto Gg$, definito da

$$Gg(x) = \int_a^b G(x, y) g(y)\, dy, \qquad x \in [a, b],$$

ove $G(x, y)$ è la funzione definita nell'enunciato di tale teorema, agisce su $R(L) = L^2(a, b)$ a valori in $D(L)$ ed è autoaggiunto, dato che $G(x, y)$ è reale e simmetrica; inoltre $GL = I_{D(L)}$, $LG = I_{L^2(a,b)}$, ossia $G = L^{-1}$.

(2) La funzione G, oltre che continua in $[a, b] \times [a, b]$, è di classe C^2 fuori della diagonale $a \le x = y \le b$. Si può dimostrare (esercizio 11.4.6) che la derivata parziale $G_x(x, y)$ ha un salto pari a $-1/\psi'(y)$ per $x \to y$.

Rappresentazione delle soluzioni

rappsolu

Analizziamo adesso le proprietà dell'operatore integrale G, introdotto nell'osservazione 11.4.9 (1).

cpaaG **Proposizione 11.4.10** *Nelle ipotesi della proposizione 11.4.2, supponiamo inoltre che* 0 *non sia autovalore per* L*. Allora l'operatore* G *è compatto e autoaggiunto in* $L^2(a,b)$*.*

Dimostrazione L'operatore G è compatto per l'esempio 10.4.6 (2) e l'esercizio 11.2.9. Inoltre, in virtù del teorema 11.4.8, per ogni $g_1, g_2 \in L^2(a,b)$ esistono uniche $f_1, f_2 \in D(L)$ tali che $Lf_1 = g_1$ e $Lf_2 = g_2$. Pertanto, essendo L autoaggiunto,

$$(g_1, Gg_2)_{L^2(a,b)} = (Lf_1, f_2)_{L^2(a,b)} = (f_1, Lf_2)_{L^2(a,b)} = (Gg_1, g_2)_{L^2(a,b)}\,. \quad \square$$

eigenG **Proposizione 11.4.11** *Nelle ipotesi della proposizione 11.4.2, supponiamo inoltre che* 0 *non sia autovalore per* L*. Se* $\lambda \neq 0$*, allora* λ *è autovalore per* G*, e* $g \in L^2(a,b)$ *è un autovettore per* G *relativo a* λ*, se e solo se* $1/\lambda$ *è autovalore per* L *e* g *è un autovettore per* L *relativo a* $1/\lambda$*. In particolare gli autovalori di* G *sono reali,non nulli e di molteplicità* 1*, e gli autovettori di* G *appartengono a* $C^2[a,b]$*.*

Dimostrazione Sia $\lambda \neq 0$ tale che $Gg = \lambda g$ con $g \in L^2(a,b) \setminus \{0\}$. Poiché $G(x,y)$ è continua, si ha $g = \frac{1}{\lambda} Gg \in C[a,b]$ e dalla dimostrazione del teorema 11.4.8 segue $Gg \in C^2[a,b]$, da cui $g \in C^2[a,b]$. Applicando L si trova $Lg = \frac{1}{\lambda} g$. In particolare, dalla proposizione 11.4.2 (i) segue che $\lambda \in \mathbb{R}$. Viceversa, se $f \in D(L)$ e $Lf = \frac{1}{\lambda} f$, allora in particolare $f \in C[a,b]$, e applicando G si deduce $\lambda f = Gf$.
Resta da far vedere che 0 non è autovalore per G. Supponiamo che $g \in L^2(a,b)$ sia tale che $Gg = 0$: dobbiamo provare che $g = 0$. Dalla definizione di $G(x,y)$ si vede immediatamente che deve essere

$$c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x) = 0 \qquad \forall x \in [a,b]$$

ove

$$c_1(x) = \int_x^b u_2(y)g(y)\,dy, \qquad c_2(x) = \int_a^x u_1(y)g(y)\,dy.$$

Osservato che $c_1, u_1, c_2, u_2 \in AC[a,b]$, derivando si ottiene

$$c_1u_1' + c_2u_2' + (c_1'u_1 + c_2'u_2) = 0 \qquad \text{q.o. in } [a,b],$$

e ricordando che $c_1'u_1 + c_2'u_2 = 0$, si deduce

$$c_1u_1' + c_2u_2' = 0 \qquad \text{in } [a,b].$$

Poiché $c_1, c_2, u_1', u_2' \in AC[a,b]$, possiamo moltiplicare per ψ e derivare una seconda volta:

$$\begin{aligned} 0 &= \psi[c_1'u_1' + c_2'u_2'] + c_1(\psi u_1')' + c_2(\psi u_2')' = \\ &= \psi[c_1'u_1' + c_2'u_2'] - \varphi[c_1u_1 + c_2u_2] = \psi[c_1'u_1' + c_2'u_2'] \qquad \text{q.o. in } [a,b]; \end{aligned}$$

tenendo conto dell'altra relazione $c_1'u_1' + c_2'u_2' = -\frac{g}{\psi}$, si ricava infine $g = 0$ q.o. in $[a,b]$.
$\square$

eigenG2 **Corollario 11.4.12** *Nelle ipotesi della proposizione 11.4.2, supponiamo inoltre che* 0 *non sia autovalore per* L*. Allora gli autovalori di* G *formano una successione reale* $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}+}$ *tale che* $|\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}| > 0$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}^+$ *e* $\lambda_k \to 0$ *per* $k \to \infty$*; inoltre ogni autovalore ha molteplicità* 1*, ed esiste un sistema ortonormale di autovettori corrispondenti* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}^+} \subset C^2[a,b]$*, il quale è completo in* $L^2(a,b)$*.*

Dimostrazione La tesi è conseguenza del teorema spettrale (teorema 11.3.7) e delle proposizioni 11.4.10 e 11.4.11. □

eigenG3 **Proposizione 11.4.13** *Nelle ipotesi della proposizione 11.4.2, gli autovalori di* L *formano una successione reale* $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$*, tale che* $|\mu_k| \to +\infty$ *per* $k \to \infty$*; inoltre ogni autovalore ha molteplicità* 1 *ed esiste un sistema ortonormale di autovettori corrispondenti* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}^+} \subset C^2[a,b]$*, il quale è completo in* $L^2(a,b)$*.*

Si noti che non si fa l'ipotesi che 0 non sia autovalore per L.

Dimostrazione Se 0 non è autovalore per L, la tesi segue dal corollario 11.4.12 e dalle proposizioni 11.4.11 e 11.4.2. Se invece 0 è autovalore per L, sia $\mu_0 \in \mathbb{R}$ un numero che non sia autovalore per L (esso esiste per la proposizione 11.4.2): posto $L_0 = L - \mu_0 I$, L_0 è un operatore di Sturm-Liouville che non ha 0 come autovalore. Sia G_0 l'operatore integrale che inverte L_0: indicata con $\{\mu_k\}$ la successione degli autovalori di L (reali e di molteplicità 1 in virtù delle proposizioni 11.4.2 e 11.4.4), gli autovalori di G_0 sono i mumeri $\{\frac{1}{\mu_k - \mu_0}\}_{k\in\mathbb{N}^+}$, e i relativi autovettori sono esattamente gli autovettori $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ di L relativi ai $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$. La tesi segue applicando a G_0 il corollario 11.4.12. □

Le proposizioni precedenti, insieme col teorema spettrale, forniscono una rappresentazione delle soluzioni del problema di Sturm-Liouville. La situazione è chiarita dal seguente

rapsolSL **Teorema 11.4.14** *Nelle ipotesi della proposizione 11.4.2, valgono i seguenti fatti.*

(i) *Se* 0 *non è autovalore per* L*, allora il problema*

$$\begin{cases} Lf = g \\ B_1 f = B_2 f = 0 \end{cases}$$

è univocamente risolubile in $D(L)$ *per ogni* $g \in L^2(a,b)$*, e la soluzione* f *è somma in* $L^2(a,b)$ *della serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} (g, u_k)_{L^2(a,b)}\, u_k\,,$$

dove $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ *è la successione degli autovalori di* L *e* $\{u_k\}$ *è un corrispondente sistema ortonormale completo di autovettori.*

(ii) *Se* 0 *è autovalore per* L*, allora il problema sopra scritto è risolubile (non univocamente) se e solo se* $g \in (\ker L)^\perp$*; in tal caso le soluzioni sono tutte e sole le funzioni* f *della forma*

$$f(x) = c\, u_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} (g, u_k)_{L^2(a,b)}\, u_k(x),$$

ove $c \in \mathbb{C}$, $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ è la successione degli autovalori non nulli di L, $\{u_k\}$ è un corrispondente sistema ortonormale di autovettori, completo in $(\ker L)^\perp$, ed u_0 è un arbitrario versore di $\ker L$, il quale è un sottospazio 1-dimensionale di $L^2(a,b)$; la serie converge nel senso di $L^2(a,b)$.

In effetti si può dimostrare (esercizio 11.4.9) che le serie sopra scritte convergono assolutamente e uniformemente in $[a,b]$.

Dimostrazione (i) Per il teorema spettrale (teorema 11.3.7)

$$f = Gg = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} (g, u_k)_{L^2(a,b)} u_k \qquad \text{in } L^2(a,b),$$

da cui la tesi.

(ii) Sia $\mu_0 \in \mathbb{R}$ un numero che non sia autovalore per L. Allora $L_0 = L - \mu_0 I$ non ha 0 come autovalore. Sia $G_0 = (L_0)^{-1}$: l'equazione $Lf = g$ equivale a $f + \mu_0 G_0 f = G_0 g$. Quest'ultima equazione, per il teorema di Fredholm (teorema 11.3.10) e per l'osservazione 11.3.11, è risolubile se e solo se $G_0 g \in [\ker(I + \mu_0 G_0)]^\perp$. D'altra parte, in virtù della relazione

$$(g, v)_{L^2(a,b)} = -(g, \mu_0 G_0 v)_{L^2(a,b)} = -\mu_0 (G_0 g, v)_{L^2(a,b)} \qquad \forall v \in \ker(I + \mu_0 G_0),$$

risulta

$$G_0 g \in [\ker(I + \mu_0 G_0)]^\perp \quad \Longleftrightarrow \quad g \in [\ker(I + \mu_0 G_0)]^\perp.$$

Inoltre, grazie all'invertibilità di G_0 si ha

$$\ker(I + \mu_0 G_0) = \ker L$$

in quanto

$$v + \mu_0 G_0 v = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (G_0)^{-1} v + \mu_0 v = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Lv = 0.$$

Si conclude che l'equazione $Lf = g$ ha soluzione se e solo se $g \in (\ker L)^\perp$.
Sia ora $g \in (\ker L)^\perp$ e sia $f \in D(L)$ tale che $Lf = g$: allora, fissato un versore $u_0 \in \ker L$, possiamo scrivere $f = (f, u_0)_{L^2(a,b)}\, u_0 + f_1$, dove $f_1 \in (\ker L)^\perp$ è univocamente determinata dalla f scelta. Inoltre

$$\begin{aligned} (g, u_k)_{L^2(a,b)} &= (Lf, u_k)_{L^2(a,b)} = (Lf_1, u_k)_{L^2(a,b)} = \\ &= (f_1, Lu_k)_{L^2(a,b)} = \mu_k (f_1, u_k)_{L^2(a,b)} \qquad \forall k \in N^+, \end{aligned}$$

e quindi

$$f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} (g, u_k)_{L^2(a,b)}\, u_k \qquad \text{in } L^2(a,b),$$

da cui la tesi. □

DirNeu **Esempi 11.4.15 (1)** Sia

$$D(l) = \{u \in C^1[0,\pi] :\ u' \in AC[0,\pi],\ u'' \in L^2(0,\pi),\ u(0) = u(\pi) = 0\}, \quad Lu = -u''.$$

Si scelgono quindi $\psi \equiv 1$ e $\varphi \equiv 0$, e nelle condizioni agli estremi $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Cerchiamo gli autovalori e i corrispondenti autovettori: la soluzione generale dell'equazione $-u'' + \mu u = 0$ è

$$u(x) = a \cos \sqrt{\mu}\, x + b \sin \sqrt{\mu}\, x, \qquad a, b \in \mathbb{C},$$

e le condizioni agli estremi implicano $a = 0$, $\mu = \mu_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}^+$. In particolare, 0 non è autovalore. Il corrispondente sistema ortonormale di autovettori è $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx \right\}_{k \in \mathbb{N}^+}$. Andiamo a costruire il nucleo $G(x, y)$ dell'operatore $G = L^{-1}$. Le funzioni $u_1(x) = cx$ e $u_2(x) = c(\pi - x)$ verificano rispettivamente

$$\begin{cases} -u_1'' = 0 \\ u_1(0) = 0 \\ u_1'(0) = c, \end{cases} \qquad \begin{cases} -u_2'' = 0 \\ u_2(\pi) = 0 \\ u_2'(\pi) = -c, \end{cases}$$

e si ha

$$u_1 u_2' - u_1' u_2 = -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Quindi il nucleo di G è

$$G(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x(\pi - y)}{\pi} & \text{se } x \le y \\ \dfrac{y(\pi - x)}{\pi} & \text{se } x \ge y. \end{cases}$$

Perciò se $g \in C[0, \pi]$ la soluzione del problema

$$\begin{cases} -f'' = g \quad \text{in } [a, b] \\ f(0) = f(\pi) = 0 \end{cases}$$

è la funzione

$$f(x) = \int_0^\pi G(x, y) g(y)\, dy = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(\int_0^\pi g(t) \sin kt\, dt \right) \sin kx.$$

(2) Sia

$$D(L) = \{u \in C^1[0, \pi] : \ u' \in AC[0, \pi], \ u'' \in L^2(0, \pi), \ u'(0) = u'(\pi) = 0\}, \quad Lu = -u''.$$

In questo caso $\psi \equiv 1$, $\varphi \equiv 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Gli autovalori sono $\mu_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}$; in particolare 0 è autovalore per L. Il corrispondente sistema ortonormale di autovettori è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right\} \cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos kx \right\}_{k \in \mathbb{N}^+}$. Si ha

$$\ker L = \{c\}_{c \in \mathbb{C}}, \qquad (\ker L)^\perp = \left\{ u \in L^2(a, b) : \int_0^\pi u(x)\, dx = 0 \right\}.$$

Perciò se $g \in C[a,b] \cap (\ker L)^\perp$ le soluzioni del problema

$$\begin{cases} -f'' = g \quad \text{in } [a,b] \\ f'(0) = f'(\pi) = 0 \end{cases}$$

sono date dalla famiglia $\{f_c\}_{c\in\mathbb{C}}$, ove

$$f_c(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\left(\int_0^\pi g(t)\cos kt\, dt\right)\cos kx + c.$$

Si noti che in questi due esempi le serie convergono assolutamente e uniformemente in $[0,\pi]$; inoltre esse sono derivabili termine a termine e le serie delle derivate convergono ancora assolutamente e uniformemente in $[0,\pi]$. Invece le serie delle derivate seconde convergono soltanto in $L^2(a,b)$.

Esercizi 11.4

autoC2

1. Nelle ipotesi della proposizione 11.4.2 si provi che ogni autovettore di L appartiene a $C^2[a,b]$.

SLneg

2. Siano $X = L^2(a,b)$, $D(A) = \{u \in AC[a,b] :\ u(a) = u(b) = 0\}$, $Lu = -(\psi u')' + \varphi u$ per ogni $u \in D(L)$, ove $\psi \in C^1[a,b]$ e $\varphi \in C[a,b]$. Se $\psi < 0$ e $\varphi \le 0$, si provi che gli autovalori di L sono tutti negativi.

pbequi

3. Trovare autovalori e autovettori del problema

$$\begin{cases} [(1+x)^2 u']' + \lambda u = 0 \quad \text{in } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0; \end{cases}$$

dedurre che le funzioni

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{1+x}\,\log 2}\sin\left(\frac{\pi k}{2\log 2}\log(1+x)\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}^+}$$

formano un sistema ortonormale completo in $L^2(0,1)$.
[**Traccia:** Si mostri che u è soluzione del problema proposto se e solo se la funzione $v(t) = u(e^t - 1)$ risolve $v'' + v' + \lambda v = 0$ in $[0, \log 2]$ con le condizioni ai limiti $v(0) = v(\log 2) = 0$.]

sostitu

4. Si provi che un'equazione della forma

$$(\psi(\xi)u')' + \lambda u = 0, \qquad \xi \in [0,a],$$

con $\psi \in C^2[0,a]$ e $\psi > 0$, si può trasformare nell'equazione

$$v'' + q(x)v' + \lambda v = 0, \qquad x \in [0,b],$$

con opportuni $b > 0$ e $q \in C[0,b]$, facendo uso delle sostituzioni

$$x = \eta(\xi) = \int_0^\xi \frac{dt}{\sqrt{\psi(t)}}, \qquad v(x) = u(\eta^{-1}(x))\sqrt[4]{\psi(\eta^{-1}(\xi))}.$$

asintau 5. Determinare l'andamento asintotico degli autovalori del problema

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \quad \text{in } [0,1] \\ u(0) = u(1) + u'(1) = 0. \end{cases}$$

nucSL 6. Sia $G(\cdot,\cdot)$ la funzione definita nella dimostrazione del teorema 11.4.8. Si provi che:

(i) G è continua in $[a,b]\times[a,b]$ ed è di classe C^2 per $x \neq y$;

(ii) $\lim_{x\to y^+} G_x(x,y) - \lim_{x\to y^-} G_x(x,y) = -\frac{1}{\psi(y)}$ per ogni $y \in [a,b]$;

(iii) $B_1 G(\cdot,y) = B_2 G(\cdot,y) = 0$ per ogni $y \in [a,b]$;

(iv) $[LG(\cdot,y)](x) = 0$ per $x \in [a,b]\setminus\{y\}$, per ogni $y \in [a,b]$.

aggSL 7. Si definisca

$$H = \{f \in C^1[a,b] : f' \in AC[a,b], f'' \in L^2(a,b)\},$$

e sia L l'operatore definito da

$$D(L) = \{f \in H : B_1 f = B_2 f = 0\}, \qquad Lf = (-\psi f')' + \varphi f,$$

ove $\psi \in C^1[a,b]$ con $\psi > 0$, $\varphi \in C[a,b]$ e le condizioni agli estremi $B_1 f$ e $B_2 f$ sono definite nel modo usuale. Si provi che L è autoaggiunto in $L^2(a,b)$.
[**Traccia:** per provare che $D(L^*) \subseteq D(L)$, si supponga dapprima che 0 non sia autovalore per L. Se $v \in D(L^*)$, si verifichi che GL^*v è un ben definito elemento di H e si osservi che per ogni $u \in D(L)$ si ha $u = GLu$ e quindi $(Lu,v)_{L^2(a,b)} = (u, L^*v)_{L^2(a,b)} = (GLu, L^*v)_{L^2(a,b)} = (Lu, GL^*v)_{L^2(a,b)}$; se ne deduca che $v = GL^*v \in H$. Integrando per parti si ricavi, per ogni $u \in D(L)$, che $(Lu,v)_{L^2(a,b)} = \left[-\psi u'\overline{v} + \psi u\overline{v'}\right]_a^b + (u, Lv)_{L^2(a,b)}$; si concluda che, affinché $u \mapsto (Lu,v)_{L^2(a,b)}$ sia continua nella norma di $L^2(a,b)$, deve aversi $B_1 v = B_2 v = 0$, cioè $v \in D(L)$. Si passi infine al caso generale...]

eseSL 8. Siano $X = L^2(0,1)$, $D(L) = \{u \in C^2[0,1] : u(0) = u(1),\ u'(0) = u'(1)\}$, $Lu = u''$ per ogni $u \in D(L)$. Provare che L è autoaggiunto e trovarne autovalori ed autovettori.

Merc 9. Siano $\varphi \in C[a,b]$ e $\psi \in C^1[a,b]$ con $\varphi \geq 0$ e $\psi > 0$, e sia L definito da

$$D(L) = \{f \in H : f(a) = f(b) = 0\}, \qquad Lf = (-\psi f')' + \varphi f,$$

essendo H lo spazio introdotto nell'esercizio 11.4.7. Indichiamo con $\{\lambda_k\}$ gli autovalori di L, necessariamente positivi (perché?), con $\{u_k\}$ un sistema ortonormale di autovettori corrispondenti e con $G(x,y)$ il nucleo dell'operatore integrale $G = L^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(a,b))$. Si provino i seguenti fatti:

(i) si ha $Lf = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k (f,u_k)_{L^2(a,b)}\, u_k$ in $L^2(a,b)$ per ogni $f \in D(L)$;

(ii) vale $\sum_{k=1}^\infty \lambda_k |(f,u_k)_{L^2(a,b)}|^2 = \int_a^b [\psi|f'|^2 + \varphi|f|^2]\,dx$ per ogni $f \in D(L)$;

(iii) si ha la relazione $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (f,u_k)_{L^2(a,b)} \overline{(g,u_k)_{L^2(a,b)}} = \int_a^b [\psi f' \overline{g'} + \varphi f \overline{g}]\, dx$ per ogni $f, g \in D(L)$;

(iv) risulta $(Gf, f)_{L^2(a,b)} \geq 0$ per ogni $f \in D(L)$ e $G(x,x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$;

(v) la funzione $G_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} u_k(x) \overline{u_k(y)}$ è ben definita e continua in $[a,b] \times [a,b]$, il corrispondente operatore integrale G_n è compatto e autoaggiunto in $L^2(a,b)$, e si ha $G_n f = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} (f,u_k)_{L^2(a,b)}\, u_k$ in $L^2(a,b)$ e $(G_n f, f)_{L^2(a,b)} \geq 0$ per ogni $f \in L^2(a,b)$;

(vi) la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} |u_k(x)|^2$ converge per ogni $x \in [a,b]$, e dunque la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} u_k(x) \overline{u_k(y)}$ converge assolutamente in $[a,b] \times [a,b]$, con somma uguale a $G(x,y)$;

(vii) le serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} |u_k(x)|^2$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} u_k(x) \overline{u_k(y)}$ convergono uniformemente in $[a,b]$ e in $[a,b] \times [a,b]$ rispettivamente;

(viii) si ha $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \int_a^b G(x,x)\, dx < +\infty$;

(ix) per ogni $f \in D(L)$ la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (f,u_k)_{L^2(a,b)}\, u_k(x)$ converge a $f(x)$ assolutamente e uniformemente in $[a,b]$;

(x) (*teorema di Mercer*) per ogni $g \in L^2(a,b)$ l'equazione $Lf = g$ ha soluzione unica $f \in D(L)$ data da $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (g,u_k)_{L^2(a,b)}\, u_k(x)$, e la serie converge assolutamente e uniformemente in $[a,b]$.

[**Traccia:** per provare (vii) si dimostri dapprima il *lemma del Dini*: se $\{f_n\} \subset C[a,b]$, se $f \in C[a,b]$ e se $f_n(x) \nearrow f(x)$ per $n \to \infty$, allora $f_n \to f$ uniformemente in $[a,b]$.]

Soluzioni degli esercizi del capitolo 11

sol11

Esercizi del paragrafo 11.1

Esercizio 11.1.1 (i) Per $(x,y), (u,v) \in X \times X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ poniamo

$$(x,y) + (u,v) = (x+u, y+v), \qquad (\alpha + i\beta)(x,y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y).$$

Definendo $x + iy = (x,y)$, mostriamo che si ha

$$(x+iy) + (u+iv) = (x+u) + i(y+v), \quad (\alpha + i\beta)(x+iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y).$$

Infatti

$$(x+iy) + (u+iv) = (x,y) + (u,v) = (x+u, y+v) = (x+u) + i(y+v),$$

$$(\alpha + i\beta)(x+iy) = (\alpha + i\beta)(x,y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y).$$

(ii) $X_{\mathbb{C}} = \{x + iy : (x,y) \in X \times X\}$ è uno spazio vettoriale complesso grazie a (i). La quantità

$$\|x + iy\|_{X_{\mathbb{C}}} = \sup_{\vartheta \in [0, 2\pi]} \|x \cos\vartheta + y \sin\vartheta\|_X$$

è una norma su $X_{\mathbb{C}}$: infatti essa è ovviamente non negativa, e se essa è nulla allora $x\cos\vartheta + y\sin\vartheta = 0$ per ogni $\vartheta \in [0, 2\pi]$; scegliendo $\vartheta = 0$ si ottiene $x = 0$, e se $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ si ricava $y = 0$, da cui $x + iy = 0$. Viceversa, se $x + iy = 0$ allora $(x, y) = (0, 0)$ e dunque $\|0 + i0\|_{X_{\mathbb{C}}} = 0$. Poi,

$$\begin{aligned}\|(\alpha+i\beta)(x+iy)\|_{X_{\mathbb{C}}} &= \|(\alpha x-\beta y)+i(\beta x+\alpha y)\|_{X_{\mathbb{C}}} = \\ &= \sup_{\vartheta\in[0,2\pi]} \|(\alpha x-\beta y)\cos\vartheta + (\beta x+\alpha y)\sin\vartheta\|_X \\ &= \sup_{\vartheta\in[0,2\pi]} \left\| \frac{\alpha x-\beta y}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos\vartheta + \frac{\beta x+\alpha y}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sin\vartheta \right\|_X \sqrt{\alpha^2+\beta^2}.\end{aligned}$$

Posto $\cos\gamma = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ e $\sin\gamma = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ si ha

$$\begin{aligned}&\|(\alpha+i\beta)(x+iy)\|_{X_{\mathbb{C}}} = \\ &\quad= \sup_{\vartheta\in[0,2\pi]} \|(x\cos\gamma - y\sin\gamma)\cos\vartheta + (x\sin\gamma + y\cos\gamma)\sin\vartheta\|_X \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \\ &\quad= \sup_{\vartheta\in[0,2\pi]} \|x(\cos\gamma\cos\vartheta + \sin\gamma\sin\vartheta) + y(-\sin\gamma\cos\vartheta + \cos\gamma\sin\vartheta\|_X \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \\ &\quad= \sup_{\sigma\in[0,2\pi]} \|x\cos\sigma + y\sin\sigma\|_X \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \|x+iy\|_{X_{\mathbb{C}}}|\alpha+i\beta|.\end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned}\|(x+iy)+(u+iv)\|_{X_{\mathbb{C}}} &= \|(x+u)+i(y+v)\|_{X_{\mathbb{C}}} = \sup_{\vartheta\in[0,2\pi]} \|(x+u)\cos\vartheta + (y+v)\sin\vartheta\|_X = \\ &= \sup_{\vartheta\in[0,2\pi]} \|(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta) + (u\cos\vartheta + v\sin\vartheta)\|_X \le \\ &\le \sup_{\vartheta\in[0,2\pi]} \|x\cos\vartheta + y\sin\vartheta\|_X + \sup_{\vartheta\in[0,2\pi]} \|u\cos\vartheta + v\sin\vartheta\|_X = \\ &= \|x+iy\|_{X_{\mathbb{C}}} + \|u+iv\|_{X_{\mathbb{C}}}\,.\end{aligned}$$

Dunque $\|\cdot\|_{X_{\mathbb{C}}}$ è una norma. Proviamo per concludere che X si immerge isometricamente in $X_{\mathbb{C}}$. Posto $i(x) = x + i0$ per ogni $x \in X$, si ha

$$\|i(x)\|_{X_{\mathbb{C}}} = \|x+i0\|_{X_{\mathbb{C}}} = \sup_{\vartheta\in[0,2\pi]} \|x\cos\vartheta\|_X = \|x\|_X\,.$$

(iii) Verifichiamo che $p(x+iy) = \|x\|_X + \|y\|_X$ non è una norma su $X_{\mathbb{C}}$. È facile vedere che $p \ge 0$ e che p si annulla solo in $0 + i0$. Però p non è positivamente omogenea: infatti, posto come prima $\cos\vartheta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, si ha

$$\begin{aligned}p((\alpha+i\beta)(x+iy)) &= p(\alpha x-\beta y+i(\beta x+\alpha y)) = \|\alpha x-\beta y\|_X + \|\beta x+\alpha y\|_X = \\ &= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,(\|x\cos\vartheta - y\sin\vartheta\|_X + \|x\sin\vartheta + y\cos\vartheta\|_X)\,;\end{aligned}$$

adesso, scegliendo $x = y$, si trova

$$\frac{p((\alpha+i\beta)(x+ix))}{|\alpha+i\beta|} = \|x\|_X(|\cos\vartheta - \sin\vartheta| + |\sin\vartheta + \cos\vartheta|).$$

Dunque, per $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ si ha $\cos\vartheta = \sin\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, e il risultato a secondo membro è $\sqrt{2}\|x\|_X$, mentre per avere la positiva omogeneità dovrebbe essere $p(x+ix)$, ossia $2\|x\|_X$.

Esercizio 11.1.2 Sia $m = \dim X < \infty$. Fissiamo una base $\{e_1, \dots, e_m\}$ di X. Allora risulta

$$Te_k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{jk}\, e_j\,, \qquad k = 1, \dots, m,$$

per certi $\lambda_{jk} \in \mathbb{C}$. Quindi, per ogni $v = \sum_{n=1}^m v_n\, e_n$ si ha

$$Tv = \sum_{n=1}^m v_n\, Te_n = \sum_{n,j=1}^m v_n\, \lambda_{jn}\, e_j\,,$$

cioè $(Tv)_j = \sum_{n=1}^m v_n\, \lambda_{jn}$. Dunque Tv è rappresentato nella base $\{e_1, \dots, e_m\}$ dalla matrice $\Lambda = \{\lambda_{jn}\}$. Perciò $Tv = \lambda v$ se e solo se λ è autovalore della matrice Λ. Dato che Λ ha almeno un autovalore, si ricava che $\sigma(T) \neq \emptyset$.
Inoltre, se T è reale, allora Λ è una matrice reale. Può ben darsi che $\sigma(T) \cap \mathbb{R} = \emptyset$: ad esempio, con $m = 2$, se $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ si ha $\Lambda v = \lambda v$ se e solo se $\binom{-v_2}{v_1} = \lambda \binom{v_1}{v_2}$, da cui $\lambda = \pm i$. Quindi $\sigma(T) = \{\pm i\}$ è disgiunto da $\mathbb{R}$.

Esercizio 11.1.3 Siano $\lambda, \mu \in \rho(A)$. Osservato che $AR(\lambda, A) = -I + \lambda R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$, si ha

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) - R(\mu, A) &= R(\lambda, A)\,[I - (\lambda I - A)R(\mu, A)] = \\ &= R(\lambda, A)\,[(\mu I - A) - (\lambda I - A)]\,R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A). \end{aligned}$$

Esercizio 11.1.4 Se $X = \{0\}$, allora l'unico elemento di $\mathcal{L}(X)$ è $T = 0$: quindi $I0 = 0$ e $\lambda I - T = \lambda I = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, e questo operatore è invertibile con inverso a sua volta 0, cosicché $\sigma(T) = \emptyset$. Sia dunque $X \neq \{0\}$. Poiché $\rho(T)$ è aperto, fissato $\lambda \in \rho(T)$ esiste $r > 0$ tale che $\lambda + h \in \rho(T)$ per ogni $h \in \mathbb{C}$ con $0 < |h| < r$. Per l'identità del risolvente (esercizio 11.1.3) si ha

$$R(\lambda + h, T) - R(\lambda, T) = -hR(\lambda + h, T) R(\lambda, T),$$

da cui

$$R(\lambda + h, T)[I + hR(\lambda, T)] = R(\lambda, T),$$

e dunque, se $|h|$ è abbastanza piccolo,

$$R(\lambda + h, T) = R(\lambda, T)[I + hR(\lambda, T)]^{-1}.$$

Ne segue, per $|h| < \frac{1}{2\|R(\lambda,T)\|_{\mathcal{L}(X)}}$,

$$\|R(\lambda + h, T)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{\|R(\lambda, T)\|_{\mathcal{L}(X)}}{1 - |h|\|R(\lambda, T)\|_{\mathcal{L}(X)}} \leq 2\|R(\lambda, T)\|_{\mathcal{L}(X)}\,.$$

Tornando alla relazione iniziale, si ha

$$\|R(\lambda + h, T) - R(\lambda, T)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq |h|\|R(\lambda + h, T)\|_{\mathcal{L}(X)}\|R(\lambda, T)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2|h|\,\|R(\lambda, T)\|_{\mathcal{L}(X)};$$

quindi

$$R(\lambda + h, T) \to R(\lambda, T) \quad \text{in } \mathcal{L}(X) \quad \text{per } h \to 0.$$

Ne segue, per $h \to 0$,

$$\frac{R(\lambda + h, T) - R(\lambda, T)}{h} = -R(\lambda + h, T) R(\lambda, T) \to -R(\lambda, T)^2 \quad \text{in } \mathcal{L}(X) \quad \text{per } h \to 0,$$

ossia

$$\exists \frac{d}{d\lambda} R(\lambda, T) = -R(\lambda, T)^2 \in \mathcal{L}(X) \qquad \forall \lambda \in \rho(T).$$

Supponiamo ora, per assurdo, che sia $\sigma(T) = \emptyset$, vale a dire $\rho(T) = \mathbb{C}$. Allora, fissati arbitrariamente $\varphi \in X^*$ e $x \in X \setminus \{0\}$, la funzione complessa $\lambda \mapsto \varphi(R(\lambda, T)x)$ è olomorfa su $\mathbb{C}$. Per il teorema di Liouville, essa deve essere costante (rispetto a λ). Dunque la sua derivata è nulla:

$$\frac{d}{d\lambda} \varphi(R(\lambda, T)x) = -\varphi(R(\lambda, T)^2 x) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

Ma essendo $\varphi \in X^*$ arbitrario, si deduce

$$R(\lambda, T)^2 x = 0, \qquad \forall x \in X,$$

e applicando ai due membri $(\lambda I - T)^2$ si deduce $x = 0$: assurdo.

Esercizio 11.1.5 Sia $\lambda \in \rho(A)$. Se fosse $d(\lambda)\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, esisterebbe $\mu \in \sigma(A)$ tale che $|\lambda - \mu|\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$; ma allora, ripetendo la dimostrazione della proposizione 11.1.5, l'operatore

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^k R(\lambda, A)^k$$

sarebbe limitato, e si avrebbe, con facile verifica, $B = R(\mu, A)$: dunque $\mu \in \rho(A)$, assurdo.

Esercizio 11.1.6 (i) Sia $\lambda \in \sigma(A)$. Se λ è autovalore per A, esiste $x \in X \setminus \{0\}$ tale che $\lambda x = Ax$. Ne segue $\lambda^2 x = \lambda A x = A(\lambda x) = A(Ax) = A^2 x$, e per induzione si trova $\lambda^k x = A^k x$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$. Dunque $\lambda^k \in \sigma(A^k)$.
Se $\lambda \in R_\sigma(A)$, allora $\overline{R(\lambda I - A)} \subset X$, con inclusione propria, e quindi

$$\overline{R(\lambda^2 I - A^2)} = \overline{R\big((\lambda I - A)(\lambda I + A)\big)} \subseteq \overline{R(\lambda I - A)} \subset X,$$

e induttivamente $\overline{R(\lambda I - A^k)} \subset X$. Quindi $\lambda^k \in \sigma(A^k)$.
Infine se $\lambda \in C_\sigma(A)$, allora $\overline{R(\lambda^2 I - A^2)} \subseteq \overline{R(\lambda I - A)} = X$. Se l'inclusione è propria, allora $\lambda^k \in R_\sigma(A^k) \subseteq \sigma(A^k)$; altrimenti, vale l'uguaglianza. Dato che $(\lambda I - A)^{-1}$ non è limitato, esiste $\{x_n\} \subseteq X$ tale che $\|x_n\|_X = 1$ e $\|(\lambda I - A)x_n\|_X \to 0$ per $n \to \infty$. Quindi, $(\lambda^2 I - A^2)x_n = (\lambda I + A)(\lambda I - A)x_n \to 0$ e per induzione $(\lambda^k I - A^k)x_n \to 0$ per $n \to \infty$, con $\|x_n\|_X = 1$. Ne segue $\lambda^k \in C_\sigma(A^k) \subseteq \sigma(A^k)$.

(ii) Posto $r = \liminf_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n}$, , se $|\lambda| > r$ allora, scelto $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon < |\lambda| - r$, esistono infiniti indici n tali che $\|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n} < r + \varepsilon < |\lambda|$, da cui $\|A^n\|_{\mathcal{L}(X)} < |\lambda|^n$. Ne segue $\lambda^n \in \rho(A^n)$, da cui $\lambda \in \rho(A)$ (perché in caso contrario avremmo $\lambda \in \sigma(A)$ e, per (i), $\lambda^n \in \sigma(A^n)$, assurdo).

(iii) Sia $\varepsilon > 0$ e sia $m \in \mathbb{N}$ tale che $\|A^m\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/m} \in]r - \varepsilon, r + \varepsilon[$. Se $n > m$, scelto $k \in \mathbb{N}$ tale che $km < n \le (k+1)m$, possiamo scrivere

$$\|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n} \le \|A^{km}\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n} \|A^{n-km}\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n} \le \Big[\|A^m\|\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/m}\Big]^{\frac{km}{n}} \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{n-km}{n}}.$$

Dato che $\frac{1}{n} \le \frac{n-km}{n} \le \frac{m}{n}$, l'ultimo fattore tende a 1 per $n \to \infty$. Quindi, essendo $\frac{km}{n} \in \big[1 - \frac{m}{n}, 1\big[$, si ha

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n} \le \lim_{n\to\infty} (r + \varepsilon)^{\frac{km}{n}} = r + \varepsilon.$$

Dato che ε è arbitrario, si ricava $\limsup_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n} \le r$. Dunque esiste $\lim_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n} = r$.

Esercizio 11.1.7 Sia $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. La tesi equivale a provare che $\lambda \in \rho(A)$ se e solo se $\lambda^{-1} \in \rho(A^{-1})$. Se $\lambda \in \rho(A)$, allora

$$\lambda^{-1} I - A^{-1} = \lambda^{-1}(A - \lambda I)A^{-1},$$

quindi esiste $(\lambda^{-1} I - A^{-1})^{-1} = \lambda A R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$, perché $AR(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$ grazie al teorema del grafico chiuso. Se $\lambda^{-1} \in \rho(A^{-1})$, lo stesso calcolo (con λ al posto di λ^{-1} e A al posto di A^{-1}) mostra che esiste $(\lambda I - A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1} R(\lambda^{-1}, A^{-1}) \in \mathcal{L}(X)$.

Esercizio 11.1.8 Sia $\lambda \in \rho(A)$ e sia $\{x_n\} \in D(A)$ tale che $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$ in X. Allora $(\lambda I - A)x_n \to \lambda x - y$. Poiché $R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$, ne segue $x_n = R(\lambda, A)(\lambda I - A)x_n \to R(\lambda, A)(\lambda x - y)$, da cui $x = R(\lambda, A)(\lambda x - y)$ e $x \in D(A)$. Applicando $\lambda I - A$ si ottiene $\lambda x - Ax = \lambda x - y$, ovvero $Ax = y$. Dunque A è chiuso.
Il viceversa è falso: siano $X = C[a, b]$, $D(A) = \{u \in C^1[a, b] : \ u(0) = u(1) = 0\}$, $A = \frac{d}{dt}$. Allora A è chiuso, poiché se $\{u_n\} \subset D(A)$, $u_n \to u$ e $u_n' \to v$ uniformemente in $[a, b]$, per noti teoremi di Analisi 2 si ha $u \in D(A)$ e $u' = v$. Proviamo che $\rho(A) = \emptyset$: se $\lambda \in \mathbb{C}$, l'equazione $\lambda u - u' = g$ ha come soluzioni

$u(t) = c\,e^{\lambda t} + \int_a^t e^{\lambda(t-s)} g(s)\,ds$, $c \in \mathbb{C}$. Imponendo che $u \in D(A)$, si deduce $c = 0$ e $\int_a^b e^{-\lambda s} g(s)\,ds = 0$. Si conclude che $R(A) = [\{e^{-\overline{\lambda}\cdot}\}]^\perp$ non è denso in X, e dunque $\lambda \notin \rho(A)$.

Esercizio 11.1.9 Proviamo che A è chiuso: se $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ e $x^{(n)} \to x$, $Ax^{(n)} \to y$ in ℓ^2, allora in particolare $x_k^{(n)} \to x_k$ e $kx_k^{(n)} \to y_k$ in $\mathbb{C}$ per $n \to \infty$, per ogni $k \in \mathbb{N}^+$. Pertanto $y_k = kx_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, da cui $y = Ax$; dunque A è chiuso. Inoltre per ogni $x \in D(A)$ e $z \in D(A^*)$ si ha

$$(x, A^*z)_2 = (Ax, z)_2 = \sum_{k=1}^\infty k\, x_k\, \overline{z_k} = \sum_{k=1}^\infty x_k\, k\, \overline{z_k}\,:$$

quindi $D(A^*) = D(A) = \{z \in \ell^2 :\ \{kz_k\}_{k\in\mathbb{N}^+} \in \ell^2\}$ e $A^* = A$. Pertanto A è autoaggiunto. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $y \in \ell^2$, l'equazione $\lambda x - Ax = y$, ossia $\lambda x_k - kx_k = y_k$, $k \in \mathbb{N}^+$, ha soluzione $x \in \ell^2$ se e solo se $\lambda \notin \mathbb{N}^+$, ed in tal caso

$$x_k = \frac{y_k}{\lambda - k} \quad \forall k \in \mathbb{N}^+, \qquad \|x\|_2 \le \frac{1}{\inf_{k\in\mathbb{N}^+} |\lambda - k|}\|y\|_2\,.$$

Se invece $\lambda \in \mathbb{N}^+$, allora λ è autovalore per A con autofunzione e_k. Perciò $\sigma(A) = \mathbb{N}^+ = P_\sigma(A)$.

Esercizio 11.1.10 (i) Si ha chiaramente

$$\|Tx\|_2^2 = \sum_{n=1}^\infty |x_{n+2}|^2 = \sum_{k=3}^\infty |x_k|^2 \le \|x\|_2^2 \qquad \forall x \in \ell^2,$$

e se si sceglie ad esempio $x = e_3$ si ottiene $Te_3 = e_1$, da cui $\|T\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} = 1$.

(ii) Si ha per ogni $x, y \in \ell^2$

$$(x, T^*y)_2 = (Tx, y)_2 = \sum_{n=1}^\infty x_{n+2}\,\overline{y_n} = \sum_{k=3}^\infty x_k\,\overline{y_{k-2}}\,,$$

da cui

$$(T^*y)_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 1, 2 \\ y_{k-2} & \text{se } k > 2. \end{cases}$$

(iii) Si ha $\lambda x = Tx$ se e solo se $\lambda x_n = x_{n+2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Ne segue che x_1 e x_2 sono arbitrari, mentre $x_3 = \lambda x_1$, $x_4 = \lambda x_2$, $x_5 = \lambda^2 x_1$, $x^6 = \lambda^2 x_2$, e in generale $x_{2n-1} = \lambda^{n-1} x_1$ e $x_{2n} = \lambda^{n-1} x_2$. Affinché sia $x \in \ell^2$ deve essere $|\lambda| < 1$, ed in tal caso un autovettore relativo a λ è quello sopra scritto.

Esercizio 11.1.11 (i) Se $f \in L^2(a, b)$ si ha

$$\|Tf\|_2^2 = \int_a^b |x^2 f(x)|^2 dx \le (|a| \vee |b|)^4 \int_a^b |f(x)|^2 dx = (|a| \vee |b|)^4\, \|f\|_2^2\,,$$

dunque $T \in \mathcal{L}(L^2(a, b))$ e $\|T\|_{\mathcal{L}(L^2(a,b))} \le (|a| \vee |b|)^2$. D'altronde, supposto ad esempio $|a| \ge |b|$, fissato $\varepsilon > 0$ e scelta $f = \varepsilon^{-1/2}\chi_{[a,a+\varepsilon]}$ si ha $\|f\|_2 = 1$ e

$$\|Tf\|_2^2 = \frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon} x^4\,dx \ge (|a| \wedge |a+\varepsilon|)^4 \frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon} 1\,dx = (|a| \wedge |a+\varepsilon|)^4,$$

e dunque $\|Tf\|_2 \ge (|a| \wedge |a+\varepsilon|)^2\, \|f\|_2$. Dato che ε è arbitrario, si conclude che $\|T\|_{\mathcal{L}(L^2(a,b))} = |a|^2 = (|a| \vee |b|)^2$.

(ii) Se esistesse $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $\lambda f = Tf$, con $f \neq 0$, avremmo $\lambda f(x) = x^2 f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Se $\lambda = 0$, si dedurrebbe $f \equiv 0$, assurdo; se $\lambda \neq 0$, si troverebbe $\lambda = x^2$ per ogni $x \in [a, b]$, il che è assurdo. Quindi nessun $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore per T.

Infine, per determinare lo spettro di T occorre distinguere tre casi: (1) $a < b \le 0$, (2) $a < 0 < b$, (3)

$0 \le a < b$. Se $r \in \mathbb{R}$, affinché l'equazione $[(rI - T)f](x) = (r - x^2)f(x) = g(x)$, con $g \in L^2(a,b)$, abbia soluzione in $L^2(a,b)$, è necessario che sia

$$\int_a^b |f(x)|^2\, dx = \int_a^b \frac{|g(x)|^2}{(r-x^2)^2}\, dx,$$

e dunque la funzione $\frac{1}{(r-x^2)^2}$ deve essere un elemento di $L^\infty(a,b)$. Ora nel caso (1) si ha $x^2 \in [b^2, a^2] = [b^2, \|T\|]$, dunque avremo $r \in \rho(T)$ se e solo se $r \in \mathbb{C} \setminus [b^2, \|T\|]$. Similmente, nel caso (2) sarà $x^2 \in [0, (|a| \wedge |b|)^2] = [0, \|T\|]$, da cui $r \in \rho(T)$ se e solo se $r \in \mathbb{C} \setminus [0, \|T\|]$. Nel caso (3), analogamente al caso (1), risulta $x^2 \in [a^2, b^2] = [a^2, \|T\|]$, e pertanto $r \in \rho(T)$ se e solo se $r \in \mathbb{C} \setminus [a^2, \|T\|]$. Per $r \in \rho(T)$ si ha

$$f(x) = \frac{g(x)}{(r-x^2)^2} = [(rI - T)^{-1} g](x) \qquad \forall g \in L^2(a,b).$$

Esercizio 11.1.12 Se $\lambda \in P_\sigma(T)$ esiste $x \neq 0$ tale che $\lambda x = Tx$; essendo $\|x\|_X = \|Tx\|_X$ per ogni $x \in X$, si ricava $\|x\|_X = \|Tx\|_X = |\lambda|\, \|x\|_X$, da cui $|\lambda| = 1$.

Esercizio 11.1.13 Per il primo enunciato, basta provare che $\lambda \in \rho(T)$ se e solo se $\bar\lambda \in \rho(T^*)$.
Se $\lambda \in \rho(T)$, allora esiste $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Proviamo che $\overline{R(\bar\lambda I - T^*)} = H$: se $v \in H$ e vale

$$((\bar\lambda I - T^*)w, v)_H = 0 \qquad \forall w \in H,$$

allora si ha $0 = (w, (\lambda I - T)v)_H = 0$ per ogni $w \in H$; ne segue $(\lambda I - T)v = 0$ e pertanto $v = 0$. Dunque $\overline{R(\bar\lambda I - T^*)} = H$. Proviamo adesso che $\bar\lambda I - T^*$ è iniettivo: se $(\bar\lambda I - T^*)w = 0$, allora

$$0 = ((\bar\lambda I - T^*)w, y)_H = (w, (\lambda I - T)y)_H \qquad \forall y \in H,$$

ed essendo $\lambda I - T$ bigettivo, si ricava $w = 0$. Infine, siano $w, x \in H$ e poniamo $y = (\bar\lambda I - T^*)w$, $z = (\lambda I - T)x$. Allora

$$(x,y)_H = (x, (\bar\lambda I - T^*)w)_H = ((\lambda I - T)x, w)_H = (z,w)_H\,,$$

da cui

$$|(z,w)_H| = |(x,y)_H| \le \|x\|_H \|y\|_H = \|R(\lambda,T)z\|_H \|y\|_H \le C\|z\|_H \|(\bar\lambda I - T^*)w\|_H.$$

Ciò accade per ogni $z \in H$, essendo $\lambda I - T$ bigettivo. Perciò, scelto $z = w$, si ricava

$$\|w\|_H \le C\|(\bar\lambda I - T^*)w\|_H \qquad \forall w \in H,$$

e ciò prova che $(\bar\lambda I - T^*)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Dunque $\bar\lambda \in \rho(T^*)$. Il viceversa si prova esattamente nello stesso modo.
Proviamo il secondo enunciato. Sia $\lambda \in P_\sigma(T)$, con $|\lambda| = \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$, e sia $x \neq 0$ tale cha $\lambda x - Tx = 0$. Allora $\|Tx\|_H = |\lambda| \|x\|_H = \|T\|_{\mathcal{L}(H)} \|x\|_H$, da cui $\mathrm{Re}\,(\lambda x, Tx)_H = \|Tx\|_H^2$. Si deduce allora

$$\|\overline\lambda - T^* x\|_H^2 = |\lambda|^2 \|x\|_X^2 + \|T^* x\|_H^2 - 2\mathrm{Re}\,(\overline\lambda x, T^* x)_H;$$

d'altronde

$$\mathrm{Re}\,(\overline\lambda x, T^* x)_H = \mathrm{Re}\,(\overline\lambda T x, x)_H = \mathrm{Re}\,(Tx, \lambda x)_H = \|Tx\|_H^2\,,$$

cosicché

$$\begin{aligned} \|\overline\lambda x - T^* x\|_H^2 &= |\lambda|^2 \|x\|_X^2 + \|T^* x\|_H^2 - 2\|Tx\|_H^2 = \\ &= \|T\|_{\mathcal{L}(H)}^2 \|x\|_H^2 + \|T^* x\|_H^2 - 2\|T\|_{\mathcal{L}(H)}^2 \|x\|_H^2 = \|T^* x\|_H^2 - \|T\|_{\mathcal{L}(H)}^2 \|x\|_H^2 \le 0, \end{aligned}$$

visto che $\|T^*\|_{\mathcal{L}(H)} = \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$; ne segue $\overline\lambda x - T^* x = 0$. Pertanto $\overline\lambda \in P_\sigma(T^*)$. Il viceversa si dimostra allo stesso modo.

Esercizio 11.1.14 Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ e sia $x \neq 0$ tale che $Tx = \lambda x$. Allora

$$\begin{aligned}(T^*x, \overline{\lambda}x)_H &= \lambda(T^*x, x)_H = \lambda(x, Tx)_H = |\lambda|^2\|x\|_H^2 = \|Tx\|_H^2 = \\ &= (x, T^*Tx)_H = (x, TT^*x)_H = \|T^*x\|_H^2\,,\end{aligned}$$

da cui in particolare $\|T^*x\|_X = \|Tx\|_H$. Queste relazioni implicano

$$\|T^*x - \overline{\lambda}x\|_H^2 = \|T^*x\|_H^2 + |\lambda|^2\|x\|_H^2 - 2(T^*x, \overline{\lambda}x)_H = |\lambda|^2\|x\|_H^2 - \|T^*x\|_X^2 = \|\lambda x\|_H^2 - \|Tx\|_H^2 = 0,$$

da cui infine $T^*x = \overline{\lambda}x$.
Se $H = \ell^2$, $(Tx)_n = x_{n+1}$, si ha $(T^*x)_n = 0$ per $n = 1$ mentre $(T^*x)_n = x_{n-1}$ per $n > 1$. In questo caso si ha $TT^* \neq T^*T$ (perché $TT^*e^{(1)} = 0$, $T^*Te^{(1)} = e^{(1)}$). Gli autovalori di T sono i numeri λ con $|\lambda| < 1$: infatti se $|\lambda| < 1$ l'equazione $Tx = \lambda x$ ha la soluzione $x = \{\lambda^n x_0\}_{n\in\mathbb{N}}$. Invece T^* non ha autovalori, perché da $T^*x = \lambda x$ segue $\lambda x_1 = 0$ e $\lambda x_n = x_{n-1}$ per ogni $n \geq 1$. Ne segue che se $\lambda \neq 0$ allora $x = 0$, mentre se $\lambda = 0$ si ottiene direttamente $T^*x = 0$ da cui $x = 0$.

Esercizio 11.1.15 Dall'ipotesi $TT^* = T^*T = I$ segue $T^* = T^{-1}$, cosicché T è invertibile, ossia $0 \in \rho(T)$. Dall'esercizio 11.1.7 segue che se $\lambda \neq 0$ si ha $\lambda \in \sigma(A)$ se e solo se $\lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1}) = \sigma(T^*)$; dall'esercizio 11.1.13 è $\lambda^{-1} \in \sigma(T^*)$ se e solo se $\overline{\lambda^{-1}} \in \sigma(T)$. Perciò, se $\lambda \neq 0$ si ha $\lambda \in \sigma(T)$ se e solo se $\overline{\lambda^{-1}} \in \sigma(T)$. Se $0 < |\lambda| < 1$ e $\lambda \in \sigma(T)$, allora $|\lambda^{-1}| > 1 = \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$, quindi $\lambda^{-1} \in \rho(T)$, assurdo. Ne deriva che se $\lambda \neq 0$ e $\lambda \in \sigma(T)$, allora $|\lambda| = 1$. Si conclude che $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\lambda! = 1\}$.

Esercizio 11.1.16 Sia $T = T^*$ e sia $\lambda \in R_\sigma(T)$: allora $\lambda I - T$ è iniettivo, ma $\overline{R(\lambda I - T)} \subset H$. Dunque esiste $y \neq 0$ tale che $(y, (\lambda I - T)x)_H = 0$ per ogni $x \in H$. Ma allora

$$((\bar{\lambda}I - T)y, x)_H = 0 \qquad \forall x \in H,$$

ossia $Ty = \bar{\lambda}y$. Ne segue

$$\bar{\lambda}\|y\|_H^2 = (Ty, y)_H = (y, Ty)_H = \overline{(Ty, y)_H} = \lambda\|y\|_H^2\,,$$

da cui $\bar{\lambda} = \lambda$. Dunque, $\lambda = \bar{\lambda} \in P_\sigma(T^*) = P_\sigma(T)$, ossia $\lambda \in P_\sigma(T)$; ciò è assurdo. Ne segue che $R_\sigma(T) = \emptyset$.

Esercizio 11.1.17 Se $\lambda = 0$ opppure $\lambda = 1$, allora λ è autovalore di P_M: infatti se $\lambda = 0$

$$-P_M x = 0 \quad \iff \quad x \in M^\perp,$$

e dunque ogni $x \in M^\perp \setminus \{0\}$ è autovettore dell'autovalore 0; similmente, se $\lambda = 1$

$$x - P_M x = 0 \quad \iff \quad x \in M,$$

e dunque ogni $x \in M \setminus \{0\}$ è autovettore dell'autovalore 1.
Se $\lambda \notin \{0, 1\}$ allora $\lambda \in \rho(P_M)$: infatti l'equazione $\lambda x - P_M x = y$ ha la soluzione

$$x = P_M x + P_{M^\perp} x = \frac{1}{\lambda - 1}\, P_M y + \frac{1}{\lambda}\, P_{M^\perp} y.$$

Esercizio 11.1.18 (i) Anzitutto, per $\lambda = 0$ l'equazione $Tf = 0$ significa $\int_0^t f(s)\,ds = 0$ per ogni $t \in [0, 1]$, da cui, derivando, $f = 0$. Dunque 0 non è autovalore; tuttavia, $T^{-1} = \frac{d}{dt}$ non è continuo, e pertanto $0 \in \sigma(T)$. Sia ora $\lambda \neq 0$: se $g \in C^1[0, 1]$, nell'equazione $\lambda f - Tf = g$ si ha $f \in C^1[0, 1]$, con $f(0) = g(0)/\lambda$. Derivando si ottiene l'equazione differenziale $\lambda f' - f = g'$, la cui soluzione generale, che si trova col metodo di variazione delle costanti arbitrarie, è

$$f(t) = c\,e^{\frac{t}{\lambda}} + \frac{1}{\lambda}\int_0^t e^{\frac{t-s}{\lambda}} g'(s)\,ds = c\,e^{\frac{t}{\lambda}} + \frac{1}{\lambda}\left[g(t) - e^{\frac{t}{\lambda}} g(0)\right] + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^t e^{\frac{t-s}{\lambda}} g(s)\,ds.$$

Da $f(0) = g(0)/\lambda$ segue $c = g(0)/\lambda$, da cui infine

$$f(t) = \frac{g(t)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^t e^{\frac{t-s}{\lambda}} g(s)\,ds.$$

Questa espressione ha senso anche quando $g \in C[0,1]$; quindi, approssimando g con funzioni di $C^1[0,1]$, si ottiene facilmente che la f così definita è l'unica soluzione di $\lambda f - Tf = g$, ossia coincide con $R(\lambda, T)g$. Pertanto $\lambda \in \rho(T)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(ii) Questo caso è del tutto analogo al precedente, anzi più semplice, dato che $f(0) = g(0) = 0$: si ha ancora $\sigma(T) = \{0\}$ e

$$R(\lambda, T)g = \frac{g(t)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \int_0^t e^{\frac{t-s}{\lambda}} g(s)\, ds \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

(iii) Con gli stessi calcoli si vede che se $g \in L^1(0,1)$ allora $\frac{g(t)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \int_0^t e^{\frac{t-s}{\lambda}} g(s)\, ds$ appartiene a $L^1(0,1)$ e coincide con $R(\lambda, T)g$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dunque $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Esercizio 11.1.19 (i) Si ha $AC[-\pi, \pi] \supset C_c(\,]-\pi, \pi[\,)$ e quest'ultimo spazio è denso in $L^p(-\pi, \pi)$.

(ii) Sia $\{f_n\} \subset D(A)$, con $f_n \to f$ e $f_n' \to g$ in $L^p(-\pi, \pi)$. Allora $f, g \in L^p(-\pi, \pi)$; inoltre, passando a sottosuccessioni possiamo supporre che la successione di funzioni continue $\{f_n\}$ converga a f puntualmente q.o. in $[-\pi, \pi]$: ma, scelto un punto x_0 in cui $f_n(x_0)$ converge, dalla relazione $f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^x f_n'\, d\xi$ segue che la convergenza puntuale è ovunque, e in particolare $f(-\pi) = f(\pi)$ e $f(t) - f(x_0) = \int_{x_0}^x g\, d\xi$, da cui $f \in AC[-\pi, \pi]$ e $f' = g \in L^p(-\pi, \pi)$. Dunque $f \in D(A)$ e $Af = f' = g$: pertanto A è chiuso.
Ponendo poi $f_n(x) = \left|\frac{x}{\pi}\right|^n \chi_{[-\pi,\pi]}(x)$, si vede subito che $\|f_n\|_p \to 0$ ma $\|f_n'\|_p \not\to 0$; quindi A non è limitato.

(iii) Sia $f' = \lambda f$. Allora $f(x) = c\, e^{\lambda x}$ e da $f(\pi) = f(-\pi)$ segue $c(1 - e^{2\lambda\pi}) = 0$. Perciò λ è autovalore per A se e solo se $e^{2\lambda\pi} = 1$, ossia $\lambda = i\, n$, $n \in \mathbb{Z}$. Se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$, allora $\lambda I - A$ è invertibile, perché l'equazione $\lambda f - f' = g$ ha le soluzioni $c\, e^{\lambda t} - \int_{-\pi}^t e^{\lambda(t-s)}\, g(s)\, ds$, e dalla condizione $f(\pi) = f(-\pi)$ segue facilmente

$$c = \frac{e^{\lambda\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\lambda s} g(s)\, ds}{e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi}}\,.$$

Dunque $R(\lambda, A)g = f$ e $R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(L^p(-\pi, \pi))$.

Esercizio 11.1.20 (i) L'insieme $D(A)$ contiene $C_c^\infty(\mathbb{R})$ che è denso in $L^p(\mathbb{R})$.

(ii) Sia $\{f_n\} \subset D(A)$ tale che $f_n \to f$ e $f_n' \to g$ in $L^p(\mathbb{R})$; allora $f, g \in L^p(\mathbb{R})$. Proviamo che $f_n \to f$ uniformemente. Fissata un'arbitraria sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ di $\{f_n\}$, esiste un'ulteriore sottosuccessione $\{f_{n_{k_h}}\} \subseteq \{f_{n_k}\}$ tale che $f_{n_{k_h}} \to f$ puntualmente q.o.; scelto $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f_{n_{k_h}}(x_0) \to f(x_0)$, si ha

$$\begin{aligned} |f_{n_{k_h}}(x) - f_{n_{k_r}}(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f'_{n_{k_h}}(t) - f'_{n_{k_r}}(t)] dt \right| + |f_{n_{k_h}}(x_0) - f_{n_{k_r}}(x_0)| \leq \\ &\leq |x - x_0|^{\frac{p-1}{p}} \|f'_{n_{k_h}} - f'_{n_{k_r}}\|_p + |f_{n_{k_h}}(x_0) - f_{n_{k_r}}(x_0)|. \end{aligned}$$

Ne segue che $\{f_{n_{k_h}}\}$ è una successione di Cauchy rispetto alla convergenza uniforme. Per l'arbitrarietà della sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$, l'intera successione $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$. Fissato $[a, b] \subset \mathbb{R}$, dalla relazione $f(x) = f(a) + \int_a^x f_n'(t)\, dt$, $x \in [a, b]$, segue $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt$, e quindi $f \in AC[a, b]$ e $f' = g$ in $[a, b]$. Dato che $[a, b]$ è arbitrario, si ottiene $f \in AC(\mathbb{R})$ e $f' = g \in \mathbb{R}$. Quindi A è chiuso.

(iii) Se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $f' = \lambda f$, allora $f(t) = c\, e^{\lambda t}$, $f'(t) = c\lambda\, e^{\lambda t}$, ed affinché $f, f' \in L^p(\mathbb{R})$ occorre che $\operatorname{Re}\lambda = 0$, altrimenti $|f(t)| = |c|\, e^{\operatorname{Re}\lambda\, t} \to \infty$ per $t \to +\infty$ (se $\operatorname{Re}\lambda > 0$), oppure per $t \to -\infty$ (se $\operatorname{Re}\lambda < 0$). Dunque se $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ non ci sono autovalori per A. Se $\operatorname{Re}\lambda = 0$, si ha $\lambda \in \sigma(A)$, perché le soluzioni di $\lambda f - f' = g$, con $g \in L^p(\mathbb{R})$, non appartengono a $L^p(\mathbb{R})$: ad esempio per $g = 0$ si trova $f(t) = e^{\lambda t}$, da cui $|f(t)| \equiv 1$ e $f \notin L^p(\mathbb{R})$. In particolare, nessuno di tali λ è autovalore per A. Se $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$, allora $\lambda \in \rho(A)$: infatti, con qualche calcolo si vede che l'equazione $\lambda f - f' = g$ ha le soluzioni

$$f(t) = \begin{cases} c\, e^{\lambda t} + \displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{-\lambda s} g(t+s)\, ds & \text{se } \operatorname{Re}\lambda < 0, \\ c\, e^{\lambda t} - \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\lambda s} g(t+s)\, ds & \text{se } \operatorname{Re}\lambda > 0, \end{cases}$$

che appartengono a $L^p(\mathbb{R})$ a patto di scegliere $c = 0$.

Esercizi del paragrafo 11.2

Esercizio 11.2.1 L'operatore A è continuo: infatti

$$\|Ax\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\|_Y \le \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X \qquad \forall x \in X,$$

e inoltre, dato che $\{A_n x\}$ converge per $n \to \infty$,

$$\|A_n x\|_Y \le C_x \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui, per il teorema di Banach-Steinhaus, $\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ne segue $\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le C$. Tuttavia A non è necessariamente compatto: ad esempio, se $X = Y = \ell^p$, $1 \le p < \infty$, posto $A_n x = \{x_1, \dots, x_n, 0, \dots\}$ si ha $A_n x \to x$ per $n \to \infty$, gli A_n sono compatti perché di rango finito, ma il limite I_X non è compatto.

Esercizio 11.2.2 Sia $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se A è compatto e se $x_n \rightharpoonup x$ in X, intanto otteniamo $Ax_n \rightharpoonup Ax$. Poi, essendo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un limitato di X, l'insieme $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è relativamente compatto in Y; quindi, scelta un'arbitraria sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, esiste un'ulteriore sottosuccessione $\{x_{n_{k_h}}\}_{h\in\mathbb{N}}$ tale che $Ax_{n_{k_h}}$ converge in Y, con limite Ax. Ne segue che l'intera successione $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad Ax (altrimenti, se vi fosse una sottosuccessione $\{x_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ per la quale Ax_{n_r} non converge ad Ax, dunque $\|Ax_{n_r} - Ax\|_X \ge \varepsilon_0 > 0$, applicando il ragionamento precedente a $\{x_{n_r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ troveremmo un'altra sottosuccessione $\{x_{n_{r_j}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ per cui $Ax_{n_{r_j}} \to Ax$, il che è assurdo essendo $\|Ax_{n_{r_j}} - Ax\|_X \ge \varepsilon_0$).
Viceversa, supponiamo che sia $Ax_n \to Ax$ per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $x_n \rightharpoonup x$ in X. Se $E \subset X$ è un limitato, dalla riflessività di X segue che E è debolmente relativamente compatto. Di conseguenza $A(E)$ è relativamente compatto: infatti, se $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A(E)$, sarà $y_n = Ax_n$ con $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$; allora esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $x_n \rightharpoonup x$ in X. Ne segue, per ipotesi, $y_{n_k} = Ax_{n_k} \to Ax$ in Y, cosicché $A(E)$ è relativamente compatto. Inoltre, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione convergente e pertanto l'operatore A è compatto.
Se X non è riflessivo, vala ancora la prima implicazione, con identica dimostrazione. Il viceversa però è in generale falso: as esempio, sia $X = Y = \ell^1$: se I è l'identità, I non è un operatore compatto, ma se $x_n \rightharpoonup x$ in ℓ^1, allora per l'esercizio 10.6.21 si ha $Ix_n = x_n \to x$ in ℓ^1.

Esercizio 11.2.3 Sia $A \in \mathcal{L}(X)$ bigettivo. Se $\dim X = \infty$, $I = AA^{-1}$ non è compatto, quindi A non può essere compatto.
Se $\dim X < \infty$, allora A è compatto in vrtù dell'esempio 11.2.2 (1).

Esercizio 11.2.4 (i) Sia $g \in C[a,b]$. Allora per ogni $f \in C[a,b]$

$$\|Af\|_\infty = \|fg\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty ,$$

e con $f \equiv 1$ si ottiene $\|A\|_{\mathcal{L}(C[a,b])} = \|g\|_\infty$. Supponiamo ora $g \not\equiv 0$ in $[a,b]$ e poniamo $E = \{x \in [a,b] : g(x) \ne 0\}$. L'insieme $B = \{f \in C[a,b] : \ \|f\|_\infty \le 1\}$ è un limitato di $C[a,b]$: supponendo per assurdo A compatto, l'insieme $A(B)$ risulta relativamente compatto; quindi, data un'arbitraria successione $\{f_n\} \subseteq B$, la successione $\{Af_n\}$ ha una sottosuccessione uniformemente convergente in $[a,b]$: cioè, esiste $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ tale che $\{f_{n_k} g\}$ converge uniformemente in $[a,b]$ ad una funzione $h \in C[a,b]$. Dunque, dato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$|[f_{n_k}(x) - f_{n_h}(x)]g(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in [a,b], \quad \forall k,h \ge \nu.$$

Ne segue

$$|f_{n_k}(x) - f_{n_h}(x)| < \frac{\varepsilon}{|g(x)|} \qquad \forall x \in E, \quad \forall k,h \ge \nu.$$

In particolare, $f_{n_k} \to h/g$ puntualmente in E.
Scegliamo adesso, in particolare,

$$f_n(x) = \sin n\pi \frac{x-a}{b-a}\,, \qquad h_n(x) = \cos n\pi \frac{x-a}{b-a}\,.$$

Allora, in virtù dell'argomento precedente, esistono $f, h \in C[a,b]$ tali che

$$f_{n_k} \to f/g, \quad h_{n_k} \to h/g \quad \text{in } E \text{ puntualmente.}$$

D'altra parte, per l'esempio 10.6.5 (2) risulta $f_n \rightharpoonup 0$ e $h_n \rightharpoonup 0$ in $L^2(a,b)$. Per l'esercizio 10.6.25, deve essere $f/g = h/g = 0$ in E; tuttavia, essendo $f_n^2 + h_n^2 = 1$, deve essere $0 = f^2 + h^2 = g^2$ e ciò è assurdo dato che $g \neq 0$ in E. Ne deduciamo che l'operatore A non può essere compatto.

(ii) Se $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore per A, esiste $f \neq 0$, $f \in C[a,b]$, tale che $\lambda f(x) = f(x)g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$. Sia F l'aperto ove $f \neq 0$: deve allora essere $\lambda = g(x)$ per ogni $x \in F$, cioè g costante in F. Dunque A ha un autovalore se g è costante in $\overline{D}$, ove D è un aperto non vuoto contenuto in $[a,b]$; sono autovettori tutte le $f \in C[a,b]$ nulle in D^c e diverse da 0 in D.

(iii) Dato che $[a,b]$ non può contenere un'infinità più che numerabile di aperti disgiunti, gli autovalori di A sono al più una infinità numerabile. Alla successione di autovalori $\{\lambda_n\}$ corrisponde una famiglia di aperti non vuoti disgiunti $\{D_n\}$ tale che $[a,b] \supseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ e $g(x) = \lambda_n$ su D_n.

Esercizio 11.2.5 Dato che X ha dimensione infinita, l'identità I su X non è un operatore compatto. Dunque, per ogni $\lambda \in \rho(A)$, essendo $(\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1} = I$, l'operatore $(\lambda I - A)^{-1}$ non può essere compatto in virtù della proposizione 11.2.6.

Esercizio 11.2.6 Proviamo che A è compatto: se $E \subset X$ è un limitato, dato che B è compatto l'insieme $B(E)$ è relativamente compatto, e dal fatto che $A(E) \subseteq B(E)$ segue che anche $A(E)$ è relativamente compatto. Pertanto A è compatto.

Esercizio 11.2.7 Risulta $\|Ax\|_2 \leq |\alpha|\|x\|_2 + \|x\|_2$ per ogni $x \in \ell^2$, quindi A è continuo con norma non superiore a $|\alpha| + 1$.
Poi, A non è compatto, perché l'insieme $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ è limitato ma la sua immagine $\{Ae_n\}\}_{n\in\mathbb{N}^+} = \{\alpha e_n - e_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ non è relativamente compatta, dato che è costituita da infiniti punti isolati: infatti,

$$\begin{aligned}\inf_{n,m\in\mathbb{N}} \|(\alpha e_n - e_{n+1}) - (\alpha e_m - e_{m+1})\|_2 &\geq \inf_{n\in\mathbb{N}} \|(\alpha e_n - e_{n+1}) - (\alpha e_{n+1} - e_{n+2})\|_2 = \\ &= \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{(|\alpha|^2 + |\alpha+1|^2 + 1)} \geq 1.\end{aligned}$$

Infine, poiché lo spettro di $(Tx)_n = x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^+$, è l'insieme $\{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| \leq 1\}$ (esempio 11.1.7(6)), lo spettro di $A = \alpha I - T$ è

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\alpha - \lambda| \leq 1\}.$$

Esercizio 11.2.8 (i) Risulta

$$|Tf(t)| \leq 2\sqrt{t}\|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty \qquad \forall f \in C[0,1].$$

Inoltre, se $f \equiv 1$ si ha $T1(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}}\, ds = 2$: ne segue $\|T\|_{\mathcal{L}(C[0,1])} = 2$.

(ii) L'operatore T è compatto per gli esempi 11.2.2(4) e 11.2.2(5). In particolare, dall'esempio 11.2.2(5) segue che $\rho(T) \supseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$; d'altra parte, $0 \in \sigma(T)$, perché in caso contrario avremmo $T^{-1} \in \mathcal{L}(C[0,1])$, da cui, essendo T compatto, l'identità $I = TT^{-1}$ sarebbe compatta, il che è assurdo.

(iii) Per $\lambda \neq 0$ consideriamo l'equazione $\lambda f - Tf = g$ con $g \in C^1[0,1]$: da essa intanto si ricava $\lambda f(0) = g(0)$. Poi, possiamo derivare entrambi i membri, poiché g e Tf sono derivabili e dunque anche f lo è. Si trova per $t \in]0,1]$

$$f'(t) = \frac{f(t)}{\lambda\sqrt{t}} + \frac{g'(t)}{\lambda}\,,$$

da cui, integrando l'equazione differenziale, si arriva a

$$f(t) = e^{\frac{2\sqrt{t}}{\lambda}}\left[f(0) - \frac{g(0)}{\lambda}\right] + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^t e^{\frac{2(\sqrt{t}-\sqrt{s})}{\lambda}}\frac{g(s)}{\sqrt{s}}\, ds + \frac{g(t)}{\lambda}\,.$$

Ricordando che $\lambda f(0) = g(0)$, si ha infine

$$f(t) = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^t e^{\frac{2(\sqrt{t}-\sqrt{s})}{\lambda}}\frac{g(s)}{\sqrt{s}} + \frac{g(t)}{\lambda}\,.$$

Questa formula si estende per densità a tutte le $g \in C[0,1]$. Ne segue che

$$[R(\lambda,T)g](t) = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^t e^{\frac{2(\sqrt{t}-\sqrt{s})}{\lambda}}\frac{g(s)}{\sqrt{s}}\,ds + \frac{g(t)}{\lambda} \qquad \forall g \in C[0,1].$$

Esercizio 11.2.9 Esiste una successione $\{K_n\} \subset C([a,b]\times[a,b])$ tale che $K_n \to K$ in $L^2(\,]a,b[\times]a,b[\,)$. Posto $[A_n f](x) = \int_a^b K_n(x,y)f(y)\,dy$, gli operatori A_n sono compatti per l'esempio 11.2.2(5). Inoltre

$$\begin{aligned}\|[A_n - A]f\|_2^2 &= \left|\int_a^b\int_a^b (K_n(x,y)-K(x,y))f(y)\,dy\,dx\right|^2 \leq \\ &\leq \int_a^b\left[\int_a^b (|K_n(x,y)-K(x,y)|^2 dy\right]^2 dy\int_a^b |f(y)|^2\,dy\,dx = \\ &= \|K_n - K\|_2^2\,\|f\|_2^2\,,\end{aligned}$$

da cui $\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(L^2(\,]a,b[\times]a,b[\,)[\,)} \to 0$ per $n\to\infty$. Ne segue che anche A è compatto.

Esercizi del paragrafo 11.3

Esercizio 11.3.1 L'operatore T è autoaggiunto, poiché

$$(Tx,y)_2 = \sum_{n=1}^\infty n^{-3/4}x_n\overline{y}_n = \sum_{n=1}^\infty x_n\overline{n^{-3/4}y_n} = (x,Ty)_2 \quad \forall x,y\in\ell^2.$$

Sia $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}^+} \subset \ell^2$ tale che $x^{(k)} \rightharpoonup x$ in ℓ^2 per $k\to\infty$. Allora, in particolare, per $k\to\infty$ si ha $x_n^{(k)} \to x_n$ in $\mathbb{C}$ per ogni $n\in\mathbb{N}^+$. Di conseguenza, posto $K = \sup_{k\in\mathbb{N}^+}\|x^{(k)}\|_2$ e fissato $\varepsilon > 0$, possiamo scrivere

$$|(Tx^{(k)},x^{(k)})_2 - (Tx,x)_2| = \left|\sum_{n=1}^\infty n^{-3/4}\left[|x_n^{(k)}|^2 - |x_n|^2\right]\right| \leq \sum_{n=1}^{n_0-1} n^{-3/4}\left||x_n^{(k)}|^2 - |x_n|^2\right| + 2\,n_0^{-3/4}K^2,$$

ove n_0 è scelto in modo che $n_0^{-3/4} < \varepsilon$. Dunque

$$|(Tx^{(k)},x^{(k)})_2 - (Tx,x)_2| \leq \sum_{n=1}^{n_0-1}\left||x_n^{(k)}|^2 - |x_n|^2\right| + 2K^2\varepsilon,$$

da cui

$$\limsup_{k\to\infty}(Tx^{(k)},x^{(k)})_2 - (Tx,x)_2| \leq 2K^2\varepsilon \qquad \forall\varepsilon > 0.$$

Per la proposizione 11.3.2, T è compatto.
Lo spettro di T è costituito da $\{0\}\cup\{n^{-3/4}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$. Infatti, 0 non può stare in $\rho(T)$ (altrimenti $I = TT^{-1}$ sarebbe compatta); inoltre, evidentemente, i numeri $n^{-3/4}$ sono autovalori di T con autovettore e_n, ed infine se $\lambda \notin \{0\}\cup\{n^{-3/4}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$, allora posto $\delta = \inf\{|\lambda - n^{-3/4}| : n\in\mathbb{N}^+\}$ si ha

$$x = R(\lambda,T)y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_n = \frac{y_n}{\lambda - n^{-3/4}} \quad \forall n\in\mathbb{N}^+,$$

e in particolare

$$\|R(\lambda,T)y\|_2 \leq \frac{1}{\delta}\|y\|_2 \qquad \forall y\in\ell^2.$$

Esercizio 11.3.2 Risulta per ogni $x\in\ell^2$

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^\infty |(Ax)_i|^2 = \sum_{i=1}^\infty\left|\sum_{j=1}^\infty a_{ij}x_j\right|^2 \leq \sum_{i=1}^\infty\left[\sum_{j=1}^\infty |a_{ij}|^2\right]\left[\sum_{j=1}^\infty |x_j|^2\right] = \left[\sum_{i,j=1}^\infty |a_{ij}|^2\right]\|x\|_2^2\,,$$

da cui $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$.
Poniamo ora $C = \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2$ e proviamo che A è compatto. Osserviamo anzitutto che

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i,j\le k} |a_{ij}|^2 = C;$$

quindi, dato $\varepsilon > 0$, esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mathbb{C} - \varepsilon < \sum_{i,j\le k_0} |a_{ij}|^2 \le C.$$

Ciò premesso, sia $\{x^{(n)}\} \subset \ell^2$ tale che $x^{(n)} \rightharpoonup x$ in ℓ^2; in particolare, $\|x^{(n)}\|_2 \le M$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Osservato che, per convergenza debole, $x_i^{(n)} \to x_i$ in $\mathbb{C}$ per $n \to \infty$ per ogni $i \in \mathbb{N}^+$, e posto $E = \{(i,j) : i > k_0 \text{ oppure } j > k_0\}$, si ha

$$\begin{aligned}
|(Ax^{(n)}, x^{(n)})_2 - (Ax, x)_2| &= \left| \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} \left[x_j^{(n)} \overline{x_i^{(n)}} - x_j \overline{x_i} \right] \right| \le \\
&\le \left| \sum_{i,j\le k_0} a_{ij} \left[x_j^{(n)} \overline{x_i^{(n)}} - x_j \overline{x_i} \right] \right| + \left| \sum_{i,j\in E} a_{ij} \left[x_j^{(n)} \overline{x_i^{(n)}} - x_j \overline{x_i} \right] \right| \le \\
&\le C^{1/2} \left[\sum_{i,j=1}^{n_0} \left| x_j^{(n)} \overline{x_i^{(n)}} - x_j \overline{x_i} \right|^2 \right]^{1/2} + \sum_{i,j\in E} |a_{ij}| \left[|x_j^{(n)} x_i^{(n)}| + |x_j x_i| \right].
\end{aligned}$$

Il primo termine all'ultimo membro tende a 0 per $n \to \infty$ perché è costituito da un numero finito di addendi infinitesimi; il secondo termine è costituito da due addendi simili, e per brevità analizzeremo solo il primo. Essendo $\sum_{i,j\in E} |a_{ij}|^2 < \varepsilon$, si trova, usando due volte la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j\in E} |a_{ij}|\, |x_j^{(n)} x_i^{(n)}| \le \sum_{i=k_0+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}||x_j^{(n)} x_i^{(n)}| + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=k_0+1}^{\infty} |a_{ij}|\, |x_j^{(n)} x_i^{(n)}| \le \\
&\quad \le \sum_{i=k_0+1}^{\infty} |x_i^{(n)}| \left[\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)}|^2 \right]^{1/2} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)}| \left[\sum_{j=k_0+1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{j=k_0+1}^{\infty} |x_j^{(n)}|^2 \right]^{1/2} \le \\
&\quad \le 2 \left[\sum_{i=k_0+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \right]^{1/2} \|x^{(n)}\|_2 \left[\sum_{i=k_0+1}^{\infty} |x_i^{(n)}|^2 \right]^{1/2} \le 2 \left[\sum_{i,j\in E} |a_{ij}|^2 \right]^{1/2} \|x^{(n)}\|_2^2 \le 2M^2 \varepsilon.
\end{aligned}$$

L'analisi del secondo addendo $\sum_{i,j\in E} |a_{ij}|\|x_j x_i|$ è assolutamente uguale. In definitiva, per l'arbitrarietà di ε,

$$\lim_{n\to\infty} |(Ax^{(n)}, x^{(n)})_2 - (Ax, x)_2| = 0$$

e quindi, per la proposizione 11.3.2, A è compatto.

Esercizio 11.3.3 (i) Sia $\alpha \in \ell^\infty$. Allora

$$\|Ax\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k^2 x_k^2| \le \|\alpha\|_\infty^2 \|x\|_2^2 \qquad \forall x \in \ell^2,$$

da cui $\|A\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} \le \|\alpha\|_\infty$. D'altra parte, fissato $\varepsilon > 0$, sia $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ un indice tale che $|\alpha_{k_\varepsilon}| > \|\alpha\|_\infty - \varepsilon$. Scelto $x = e^{(k_\varepsilon)}$, si ha

$$\|Ae^{(k_\varepsilon)}\|_2^2 = |\alpha_{k_\varepsilon}|^2 > [\|\alpha\|_\infty - \varepsilon]^2 = [\|\alpha\|_\infty - \varepsilon]^2 \, \|e^{(k_\varepsilon)}\|_2^2,$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε, $\|A\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} = \|\alpha\|_\infty$.

(ii) Ogni α_n è autovalore per A, perché $Ae^{(n)} = \alpha_n e^{(n)}$. Viceversa, se $Ax = \lambda x$ (con $x \neq 0$) si ha $\alpha_n x_n = \lambda x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; se $x_{n_0} \neq 0$, si ottiene $\lambda = \alpha_{n_0}$, e dunque l'insieme degli autovalori è contenuto nella famiglia $\{\alpha_n\}$.

(iii) Se $\alpha \in \overline{\{\alpha_n\}}$, e per assurdo $\alpha \in \rho(A)$, esiste $c > 0$ tale che $\|Ax - \alpha x\| \geq c\|x\|$ per ogni $x \in X$. Ma allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \alpha|^2 |x_n|^2 = \|(A - \alpha I)x\|^2 \geq c^2 \|x\|^2,$$

da cui, scegliendo $x = e^{(n)}$, si ricava $|\alpha_n - \alpha|^2 \geq c^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, contraddicendo il fatto che α è aderente a $\{\alpha_n\}$.

(v) Se $\alpha \in c_0$, allora A è compatto: infatti, se $x^{(n)} \rightharpoonup x$ in ℓ^2, allora, scelto $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|\alpha_k| < \varepsilon$ per $k > n_0$, si ha

$$\|Ax^{(n)} - Ax\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k^2 (x_k^{(n)} - x_k)^2| = \sum_{k=1}^{n_0} |\alpha_k^2 (x_k^{(n)} - x_k)^2| + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |\alpha_k^2 (x_k^{(n)} - x_k)^2|;$$

il primo addendo, per convergenza debole, tende a 0 per $n \to \infty$, mentre il secondo addendo è minore di $4\varepsilon^2 K^2$, ove K è un numero tale che $K \geq \|x^{(n)}\|_2^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ne segue che $Ax^{(n)} \to Ax$ in ℓ^2 per $n \to \infty$. Pertanto A è compatto.
Se invece $\alpha \notin c_0$, scegliendo $x^{(n)} = e^{(n)}$, si ha $e^{(n)} \rightharpoonup 0$ in ℓ^2, mentre $\|Ae^{(n)}\|_2 = \|\alpha_n e^{(n)})\|_2 = |\alpha_n|$ non è infinitesima per $n \to \infty$.

Esercizio 11.3.4 Lo spettro di A è reale perché A è autoaggiunto. Inoltre, per la proposizione 11.3.5, $\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \max\{|m|, |M|\}$. Se $\lambda > M$, l'operatore $\lambda I - A$ è autoaggiunto e strettamente positivo, e si ha

$$((\lambda I - A)x, x)_H = (\lambda - M)\|x\|_H^2 + M\|x\|_H^2 - (Ax, x)_H \geq (\lambda - M)\|x\|_H^2.$$

Da ciò segue $\|(\lambda I - A)x\|_H \geq (\lambda - M)\|x\|_H$ per ogni $x \in H$. Quindi $\ker(\lambda I - A) = \{0\}$ e, per l'esercizio 10.3.3, $\overline{R(\lambda I - A)} = X$; quindi $\lambda \in \rho(A)$. Discorso analogo per $\lambda < m$.

Esercizio 11.3.5 Ovviamente A è limitato, con

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(3 - \frac{1}{2k}\right)^2 |x_{2k}|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} |x_{2k+1}|^2 < 9\|x\|_2^2 \quad \forall x \neq 0,$$

dunque $\|A\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} \leq 3$; ma essendo

$$\lim_{k\to\infty} \|Ae^{(2k)}\|_2^2 = \lim_{k\to\infty} \left(3 - \frac{1}{2k}\right)^2 = 9,$$

si ottiene $\|A\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} = 3$. Risulta inoltre

$$(Ax, y)_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(3 - \frac{1}{2k}\right) x_{2k}\, \overline{y_{2k}} + \sum_{k=0}^{\infty} x_{2k+1}\, \overline{y_{2k+1}} = (x, Ay)_2 \qquad \forall x, y \in \ell^2,$$

quindi A è autoaggiunto. Poiché $\|Ae^{(2k+1)} - Ae^{(2m+1)}\|_2 = \|e^{(2k+1)} - e^{(2m+1)}\|_2 = \sqrt{2}$, la successione $\{Ae^{(2k+1)}\}$ non è infinitesima, benché $e^{2k+1)} \rightharpoonup 0$: quindi A non è compatto. Infine, non può esistere $x \neq 0$ tale che $Ax = 3x$, oppure $Ax = -3x$, essendo $\|Ax\|_2 < 3\|x\|$ per ogni $x \neq 0$.

Esercizio 11.3.6 (i) Sia $Z = \ker(\lambda I - A)$: Z è un chiuso ed è invariante per A, poiché se $x \in Z$ allora $A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax$, quindi $Ax \in Z$. Perciò $A|_Z = \lambda I|_Z \in \mathcal{L}(Z)$ è un operatore compatto. Essendo $R(A|_Z) = Z$ uno spazio completo, dalla proposizione 11.2.10 segue che Z ha dimensione finita.

(ii) Poniamo $S = (\lambda I - A)|_{\ker(\lambda I - A)^\perp}$: si ha $S \in \mathcal{L}(\ker(\lambda I - A)^\perp, H)$ e $R(S) = R(\lambda I - A)$. Per provare che $R(S)$ è chiuso, mostriamo che esiste $c > 0$ tale che

$$c\|x\|_H \leq \|Sx\|_H \qquad \forall x \in \ker(\lambda I - A)^\perp.$$

Da questa relazione segue facilmente la tesi: se $\{y_n\} \subseteq R(S)$, $y_n = Sx_n$, e $y_n \to y$ in H, allora la relazione sopra scritta implica che $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in H: quindi $x_n \to x \in H$, e di conseguenza $y_n = Sx_n \to Sx$ da cui $y = Sx \in R(S)$.
Se non esistesse tale c, troveremmo una successione $\{x_n\} \subseteq \ker(\lambda I - A)^\perp$ con $\|x_n\|_H = 1$ e $\|Sx_n\|_H \to 0$ per $n \to \infty$. Passando ad opportune sottosuccessioni, avremmo $x_n \rightharpoonup x$ e, per compattezza, $Ax_n \to Ax$ in H. Quindi, $\lambda x_n = Sx_n + Ax_n \to Ax$ e $x_n \to x = \frac{Ax}{\lambda}$ in H, da cui, essendo $\|x_n\|_H = 1$, $\|Ax\|_H = |\lambda| \neq 0$. D'altra parte, $Sx_n \to 0$, e quindi $SAx = 0$; poiché S è iniettivo si ottiene $Ax = 0$: assurdo, essendo $\lambda \neq 0$.

Esercizio 11.3.7 Proviamo dapprima che se non vale (i), oppure (ii), esistono una successione di sottospazi $\{M_n\}$ di H, con $M_n \subseteq M_{n+1}$ e una successione di numeri $\{\lambda_n\} \subseteq E$, tali che $A(M_n) \subseteq M_n$ per ogni $n \geq 1$ e $(\lambda_n I - A)(M_n) \subseteq M_{n-1}$ per ogni $n \geq 2$. Se non vale (i), esiste un autovalore $\lambda_0 \in E$ tale che $R(\lambda_0 I - A) = H$. Sia $S = \lambda_0 I - A$: allora, posto $M_n = \ker S^n$, esiste $y_1 \in M_1$, $y_1 \neq 0$. Poiché $R(S) = H$, esiste $y_2 \in H$ tale che $y_1 = Sy_2$, e si ha $y_2 \in M_2$, $y_2 \neq 0$. Analogamente, per ogni $n \geq 2$ esiste $y_{n+1} \in H$ tale che $y_n = Sy_{n+1}$, con

$$S^n y_{n+1} = S^{n-1} y_n = \cdots = Sy_2 = y_1, \quad S^{n+1} y_{n+1} = Sy_1 = 0.$$

Quindi $y_{n+1} \in M_{n+1} \setminus M_n$, da cui $M_n \subset M_{n+1}$. Poi, essendo $SA = AS$, si ha $A(M_n) \subseteq M_n$ (perché se $x \in M_n$ è $S^n x = 0$, da cui $S^n Ax = 0$), ed infine $S(M_n) \subseteq M_{n-1}$ (poiché se $x \in M_n$ si ha $0 = S^n x = S^{n-1}(Sx)$, da cui $Sx \in M_{n-1}$).
Se non vale (ii), esiste una successione $\{\lambda_n\} \subseteq E$ costituita da autovalori distinti. Scegliamo per ogni n un autovettore e_n di A relativo a λ_n, e definiamo $M_n = [\{e_1, \ldots, e_n\}]$: M_n, essendo un sottospazio finito-dimensionale, è chiuso. Se $x \in M_n$ si ha $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$, quindi $Ax = \alpha_1 \lambda_1 e_1 + \ldots + \alpha_n \lambda_n e_n \in M_n$ e $(\lambda_n I - A)x = \alpha_1(\lambda_n - \lambda_1)e_1 + \ldots + \alpha_{n-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1})e_{n-1} \in M_{n-1}$. Ovviamente è $M_n \subset M_{n+1}$ perché gli e_n sono linearmente indipendenti, dato che i λ_n sono tutti distinti. Scegliamo adesso $\{y_n\} \subseteq H$ tale che $y_n \in M_n \cap M_{n-1}^\perp$, con $\|y_n\|_H = 1$. Allora risulta $\|y_n - x\|_H = \sqrt{1 + \|x\|_H^2} \geq 1$ per ogni $x \in M_{n-1}$. Se $2 \leq m < n$, posto $z = Ay_m + (\lambda_n I - A)y_n$, si ha $z \in M_{n-1}$ grazie alle inclusioni $A(M_m) \subseteq M_m \subseteq M_{n-1}$ e $(\lambda_n I - A)(M_n) \subseteq M_{n-1}$. Ne segue

$$\|Ay_n - Ay_m\|_H = \|z - \lambda_n y_n\|_H = |\lambda_n| \left\| y_n - \frac{z}{\lambda_n} \right\|_H \geq |\lambda_n| \geq r.$$

Quindi, $\{y_n\}$ è limitata ma $\{Ay_n\}$ non ha sottosuccessioni convergenti, il che ci dice che A non è compatto: assurdo.

Esercizio 11.3.8 Osserviamo anzitutto che, per la proposizione 11.2.9, A^* è un operatore compatto. Sia $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq 0$: se, per assurdo, λ non è autovalore di A, allora $\ker(\lambda I - A) = \{0\}$, e di conseguenza $R(\overline{\lambda} I - A^*)$, essendo chiuso per l'esercizio 11.3.6, coincide con H. Perciò, in virtù del teorema dell'applicazione aperta, $(\overline{\lambda} I - A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Dall'esercizio 10.5.13 segue che $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, ossia $\lambda \in \rho(A)$: assurdo.

Esercizio 11.3.9 Sicuramente $0 \in \sigma(T)$, altrimenti $I = TT^{-1}$ sarebbe compatta e ciò è assurdo perché $\dim H = \infty$. Se 0 non fosse autovalore di T, avremmo $\ker T = \{0\}$, quindi $\overline{R(T)} = H$. Dall'osservazione 11.1.2 segue che 0 è un punto regolare per T, da cui $T^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, e questo è assurdo. Pertanto 0 è autovalore per T.
Se $\sigma(T)$ è finito, allora è compatto; se $\sigma(T)$ è infinito, allora dall'esercizio 11.3.7 segue che $\sigma(T)$ è numerabile e ha 0 come unico punto d'accumulazione. Quindi, anche in questo caso $\sigma(T)$ è compatto.

Esercizio 11.3.10 (i) Sappiamo che A è compatto e autoaggiunto. Poi, per q.o. $t \in [a, b]$ e per ogni $f \in L^2(a, b)$, utilizzando la formula fornita nel teorema spettrale (teorema 11.3.7(ii)),

$$\begin{aligned} \int_a^b K(t,s) f(s)\, ds = Af(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (f, u_k)_{L^2(a,b)} u_k(t) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left[\int_a^b f(s) \overline{u_k(s)}\, ds \right] u_k(t) = \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, u_k(t) \overline{u_k(s)}\, f(s) \right] ds. \end{aligned}$$

Ne segue

$$K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k(t)\overline{u_k(s)} \quad \text{per q.o. } s,t \in [a,b].$$

(ii) Dalla relazione precedente segue

$$|K(t,s)|^2 = \sum_{k,h=1}^{\infty} \lambda_k\lambda_h\, u_k(t)\overline{u_k(s)}\,\overline{u_h(t)}u_h(s),$$

da cui, grazie all'ortonormalità degli u_k ,

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2\,dsdt &= \sum_{k,h=1}^{\infty} \lambda_k\lambda_h \int_a^b u_k(t)\overline{u_h(t)}\,dt \int_a^b u_k(s)\overline{u_h(s)}\,ds = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \left[\int_a^b |u_k(t)|^2\,dt\right]^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2.\end{aligned}$$

Dato che $K \in L^2(\,]a,b[\times]a,b[\,)$, si deduce che $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \infty$.

Esercizio 11.3.11 (i) Ragioniamo per induzione: se $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare; se la tesi vale per n, nel caso $n+1$ si ha

$$\begin{aligned}\|K_{n+1}\|^2_{L^2(\,]a,b[\times]a,b[\,)} &= \int_a^b\int_a^b K_{n+1}(t,s)|^2 dtds = \int_a^b\int_a^b \left|\int_a^b K(t,r)K_n(r,s)\,dr\right|^2 dtds \leq \\ &\leq \int_a^b\int_a^b \left[\int_a^b |K(t,r)|^2 dr\right]\left[\int_a^b |K_n(p,s)|^2 dp\right] dtds = \\ &= \int_a^b\int_a^b |K(t,r)|^2 dtdr \cdot \int_a^b\int_a^b |K_n(p,s)|^2 dpds = \\ &= \|K\|^2_{L^2(\,]a,b[\times]a,b[\,)}\|K_n\|^2_{L^2(\,]a,b[\times]a,b[\,)} = \|K\|^{2+2n}_{L^2(\,]a,b[\times]a,b[\,)}.\end{aligned}$$

(ii) Usiamo ancora l'induzione. Se $n = 1$ la tesi è vera per definizione di A. Se la tesi vale per $n-1$, per ogni $f \in L^2(a,b)$ si ha

$$\begin{aligned}A^n f(t) &= \int_a^b K(t,s)A^{n-1}f(s)\,ds = \int_a^b K(t,s)\int_a^b K_{n-1}(s,p)f(p)\,dpds = \\ &= \int_a^b\int_a^b K(t,s)K_{n-1}(s,p)\,ds\,f(p)\,dp = \int_a^b K_n(t,p)f(p)\,dp.\end{aligned}$$

(iii) Essendo A compatto per l'esempio 11.3.13, l'operatore A^n è composizione di compatti e dunque è compatto per la proposizione 11.2.6. Se $\mu \neq 0$ è autovalore di A^n, con u autovettore relativo a μ, dal teorema spettrale (teorema 11.3.7(ii)) si ha

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (u,u_k)_{L^2(a,b)} u_k\,,$$

$$A^2u = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (u,u_k)_{L^2(a,b)} Au_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (u,u_k)_{L^2(a,b)} u_k\,,$$

e iterando

$$\mu u = A^n u = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n (u,u_k)_{L^2(a,b)} u_k\,.$$

da cui, infine,

$$\mu \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (u,u_k)_{L^2(a,b)} u_k = \mu A u = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{n+1} (u,u_k)_{L^2(a,b)} u_k \,.$$

Si deduce allora che $\mu\lambda_k (u,u_k)_{L^2(a,b)} = \lambda_k^{n+1}(u,u_k)_{L^2(a,b)}$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$. Dato che esiste certamente un $k \in \mathbb{N}^+$ tale che $(u,u_k)_{L^2(a,b)} \neq 0$, si ottiene che $\mu = \lambda_k^n$ per qualche k: in altre parole $P_\sigma(A^n) \subseteq \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$. D'altronde

$$A^n u_k = A^{n-1}\lambda_k u_k = \ldots = \lambda_k^{n-1} A u_k = \lambda_k^n u_k \,,$$

quindi $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^+} \subseteq P_\sigma(A^n)$ e $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ è un corrispondente sistema di autovettori.

(iv) Si procede esattamente come nella dimostrazione dell'esercizio 11.3.10(ii).

Esercizio 11.3.12 Poniamo $A_n f = \sum_{k=1}^n \lambda_k (f,e_k)_{L^2(0,1)} e_k$ per ogni $f \in L^2(0,1)$: Risulta

$$\|A_n f\|_{L^2(0,1)} \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| |(f,e_k)_{L^2(0,1)}| \|e_k\|_{L^2(a,b)} = \sum_{k=1}^n |\lambda_k| |(f,e_k)_{L^2(0,1)}| \leq \left[\sum_{k=0}^n |\lambda_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(0,1)} \,,$$

Dunque $A_n \in \mathcal{L}(L^2(0,1))$; inoltre A_n è compatto perché di rango finito. Inoltre, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $|\lambda_k| < \varepsilon$ per ogni $k > \nu_\varepsilon$. Dunque per $n > \nu_\varepsilon$ si ha

$$\|(A_n - A)f\|_{L^2(0,1)} = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k (f,e_k)_{L^2(0,1)} e_k \right\|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon \|f\|_{L^2(0,1)} \qquad \forall f \in L^2(0,1),$$

da cui $A_n \to A$ in $\mathcal{L}(L^2(0,1))$. Dunque $A \in \mathcal{L}(H)$ e dalla proposizione 11.3.3 segue che A è compatto. Tuttavia A non può essere un operatore integrale con nucleo in $L^2(\,]0,1[\,\times\,]0,1[\,)$, perché in tal caso avremmo, per l'esercizio 11.3.10, $\sum_{k=1}^\infty |\lambda_k|^2 < \infty$.

Esercizi del paragrafo 11.4

Esercizio 11.4.1 Sia $Lu = \lambda u$ in $L^2(a,b)$. Ciò significa $-(\psi u')' = (\lambda - \varphi)u \in L^2(a,b)$, con $\psi \in C^1[a,b]$ e $\varphi \in C[a,b]$. Dato che $(\lambda-\varphi)u \in C[a,b] \subset L^2(a,b)$, si ha $\psi u' \in AC[a,b]$ con $(\psi u')' \in L^2(a,b)$; in particolare, scrivendo $u' = \frac{\psi u'}{\psi}$ vediamo, grazie all'esercizio 6.5.6, che $u' \in AC[a,b]$. Possiamo dunque derivare q.o., ottenendo $(\psi u')' = \psi' u' + \psi u''$ q.o. in $[a,b]$. Perciò

$$u'' = \frac{1}{\psi}\left[(\psi u')' - \psi' u'\right] = \frac{1}{\psi}\left[(\varphi - \lambda)u + \psi' u'\right],$$

e pertanto $u \in C^2[a,b]$.

Esercizio 11.4.2 Sia $(\lambda I - L)u = 0$, con $u \in D(L)$ e $\|u\|_{L^2(a,b)} = 1$. Allora, integrando per parti,

$$\lambda = \lambda \|u\|^2_{L^2(a,b)} = (Lu,u)_{L^2(a,b)} = \int_a^b [-(\psi u')' + \varphi u]\overline{u}]\, dt = \int_a^b [\psi |u'|^2 + \varphi |u|^2]\, dt \leq 0,$$

D'altra parte, se $\lambda = 0$ lo stesso calcolo porta alla condizione $\int_a^b [\psi|u'|^2 + \varphi|u|^2]dt = 0$, che implica $u = 0$ q.o., assurdo essendo $\|u\|_{L^2(a,b)} = 1$. Dunque $\lambda < 0$.

Esercizio 11.4.3 Sia u una soluzione del problema dato. Poniamo $v(t) = u(e^t - 1)$, $0 \leq t \leq \log 2$. Allora

$$v'(t) = u'(e^t-1)e^t, \qquad v''(t) = u''(e^t-1)e^{2t} + u'(e^t-1)e^t,$$

da cui

$$v''(t) + v'(t) + \lambda v(t) = u''(e^t-1)e^{2t} + 2u'(e^t-1)e^t + \lambda u(e^t-1);$$

posto $x = e^t - 1$ si ricava

$$v''(t) + v'(t) + \lambda v(t) = u''(x)(1+x)^2 + 2u'(x)(1+x) + \lambda u(x) = \left[(1+x)^2 u'(x)\right]' + \lambda u(x) = 0.$$

Inoltre $v(0) = u(0) = 0$, $v(\log 2) = u(1) = 0$, cosicché v risolve

$$\begin{cases} v'' + v' + \lambda v = 0 \quad \text{in } [0, \log 2] \\ v(0) = v(\log 2) = 0 \end{cases}$$

se e solo se u risolve il problema dato. Le soluzioni di questa equazione con $\lambda = 0$ e secondo membro $f \in L^2(0, \log 2)$ sono

$$v(t) = c_1 + c_2(1 - e^{-t}) + \int_0^t (1 - e^{-(t-s)}) f(s)\, ds;$$

con le condizioni al contorno omogenee si trova $c_1 = c_2 = 0$ e otteniamo l'unica soluzione

$$v(t) = \int_0^t (1 - e^{-(t-s)}) f(s)\, ds, \qquad t \in [0, \log 2].$$

L'operatore lineare $Af = v$ qui definito è un operatore integrale di Volterra su $L^2(0, \log 2)$, quindi è compatto oltre che autoaggiunto. Dato che, come si verifica agevolmente, 0 non è un autovalore per A, il teorema spettrale (teorema 11.3.7) e la proposizione 11.4.2 ci dicono che gli autovalori sono un'infinità numerabile $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}^+}$, e che possiamo scegliere autovettori corrispondenti $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}^+}$che costituiscano un sistema ortonormale completo in $L^2(0, \log 2)$. Quest'ultima proprietà vale allora per le funzioni

$$u_k(x) = v_k(\log(1 + x)), \qquad x \in [0, 1],$$

le quali dunque formano un sistema ortonormale completo in $L^2(0, 1)$.
Adesso calcoliamo esplicitamente le v_k, che sono soluzioni non nulle di

$$\begin{cases} v_k'' + v_k' - \mu_k\, v_k = 0 \quad \text{in } [0, \log 2] \\ v_k(0) = v_k(\log 2) = 0. \end{cases}$$

L'equazione algebrica $\lambda^2 + \lambda - \mu_k = 0$ ha le soluzioni

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\mu_k + \frac{1}{4}};$$

con facile calcolo si riconosce che, dovendo essere $v_k \neq 0$, deve essere $1 + 4\mu_k < 0$. Da $v_k(0) = 0$ segue

$$v_k(t) = c\, e^{-t/2} \sin \sqrt{\left|\mu_k + \frac{1}{4}\right|}\, t;$$

da $v_k \neq 0$ e $v_k(\log 2) = 0$ si ricava $\sqrt{\left|\mu_k + \frac{1}{4}\right|} = \frac{k\pi}{\log 2}$. Pertanto

$$v_k(t) = c\, e^{-t/2} \sin \frac{k\pi\, t}{\log 2}\,.$$

Torniamo al problema iniziale ponendo

$$u_k(x) = v_k(\log(1 + x)) = c\, \frac{1}{\sqrt{1 + x}} \sin \frac{k\pi\, \log(1 + x)}{\log 2}\,.$$

Cercando una soluzione normalizzata si deve imporre

$$\|u_k\|^2_{L^2(0,1)} = c^2 \int_0^1 \frac{1}{1 + x} \sin^2 \frac{k\pi\, \log(1 + x)}{\log 2}\, dx = c^2 \int_0^{\log 2} \sin^2 \frac{k\pi\, t}{\log 2}\, dt = \int_0^1 \sin^2 ks\, ds = c^2 \frac{\pi}{2}\,.$$

Pertanto $c = \sqrt{2/\pi}$, e dunque

$$u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi(1 + x)}} \sin \frac{k\pi\, \log(1 + x)}{\log 2}\,, \qquad x \in [0, 1],$$

e questo sistema è ortonormale completo in $[0,1]$.

Esercizio 11.4.4 Sia u soluzione dell'equazione

$$(\psi(\xi)u'(\xi))' + \lambda\, u(\xi) = 0, \qquad \xi \in [0,a],$$

ove $\psi \in C^2[0,a]$ e $\psi > 0$; poniamo

$$x = \eta(\xi) = \int_0^\xi \frac{dt}{\sqrt{\psi(t)}}\,, \qquad v(x) = u(\eta^{-1}(x))\,\sqrt[4]{\psi(\eta^{-1}(x))}.$$

Osserviamo che $\eta'(\xi) = \psi(\xi)^{-1/2}$, e poniamo per brevità $y = \eta^{-1}(x)$; si ha allora $(\eta^{-1})'(x) = \eta'(y)^{-1} = \psi(y)^{1/2}$; pertanto, ricordando che ogni derivata rispetto a x di funzioni indipendenti da y fa comparire il fattore $\frac{dy}{dx} = \psi^{1/2}$, risulta

$$v'(x) = u'(y)\,\psi(y)^{3/4} + \frac{1}{4}\,u(y)\,\psi(y)^{-1/4}\,\psi'(y),$$

e di conseguenza, con facili calcoli,

$$\begin{aligned} v''(x) &= u''(y)\,\psi(y)^{5/4} + u'(y)\,\psi(y)^{1/4}\,\psi'(y) - \frac{1}{16}\,u(y)\,\psi(y)^{-1/4}\,\psi'(y)^2 + \frac{1}{4}\,u(y)\,\psi(y)^{1/4}\psi''(y) = \\ &= \psi(y)^{1/4}\,[u''(y)\,\psi(y) + u'(y)\,\psi'(y)] + u(y)\,\psi(y)^{1/4}\left[-\frac{1}{16}\,\psi(y)^{-1/2}\psi'(y)^2 + \frac{1}{4}\,\psi''(y)\right] = \\ &= \psi(y)^{1/4}(\psi(y)u'(y))' - v(x)\left[-\frac{1}{16}\,\psi(y)^{-1/2}\psi'(y)^2 + \frac{1}{4}\,\psi''(y)\right] = \\ &= \psi(y)^{1/4}(-\lambda\,u(y)) - v(x)q(x) = -\lambda v(x) - q(x)\,v(x), \end{aligned}$$

ove $q(x) = \frac{1}{16}\,\psi(\eta^{-1}(x))^{-1/2}\psi'(\eta^{-1}(x))^2 + \frac{1}{4}\,\psi''(\eta^{-1}(x))$. Si ha dunque, posto $b = \eta(a)$,

$$v'' + q\,v + \lambda\,v = 0 \quad \text{in } [0,b] \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\psi\,u')' + \lambda u = 0 \quad \text{in } [0,a].$$

Esercizio 11.4.5 Gli autovalori sono reali: infatti moltiplicando l'equazione per $\overline{u}$ e integrando su $[0,1]$ si ottiene

$$[u'\,\overline{u}]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 |u(t')|^2\,dt + \lambda\int_0^1 |u(t)|^2\,dt = 0,$$

e dalle condizioni agli estremi

$$-|u(1)|^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 |u(t')|^2\,dt + \lambda\int_0^1 |u(t)|^2\,dt = 0,$$

dunque $\lambda \in \mathbb{R}$.
L'equazione caratteristica è $\mu^2 + \lambda = 0$; per avere soluzioni u che verifichino i dati al bordo deve essere $\lambda < 0$: infatti per $\lambda = 0$ si trova $u(t) = ct + d$ e le condizioni date implicano $c = d = 0$, mentre per $\lambda > 0$ si ha $u(t) = c\,e^{\sqrt{\lambda}t} + d\,e^{-\sqrt{\lambda}t}$, e la conclusione è ancora $c = d = 0$. Per $\lambda < 0$ si ha invece

$$u(t) = c\,\cos\sqrt{-\lambda}t + d\,\sin\sqrt{-\lambda}t;$$

allora

$$u(0) = c = 0, \qquad u(1) + u'(1) = d\left[\sin\sqrt{-\lambda} + \sqrt{-\lambda}\,\cos\sqrt{-\lambda}\right] = 0,$$

e d può essere diverso da 0 se il fattore che lo moltiplica è nullo: si trovano così infiniti autovalori negativi λ_k, tali che $\lambda_k^2 = x_k$ e $\tan x_k = -x_k$, con $x_k > 0$. Risulta allora, visto che $\tan x_k \to -\infty$ per $k \to \infty$,

$$k\pi - \frac{\pi}{2} < x_k < k\pi, \quad k \in \mathbb{N}^+, \qquad \text{con } \lim_{k\to\infty}\left(x_k - k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Esercizio 11.4.6 Ricordiamo che

$$G(x,y)=\begin{cases} u_1(x)u_2(y) & \text{se} \quad x\le y \\ u_1(y)u_2(x) & \text{se} \quad x\ge y, \end{cases}$$

ove u_1, u_2 sono funzioni reali di classe C^2 con $Lu_1 = Lu_2 = 0$, $B_1u_1 = B_2u_2 = 0$ e $\psi(u_1u_2' - u_1'u_2) \equiv -1$ in $[a,b]$.

(i) Posto $\Delta = \{(x,y) \in [a,b]^2 : x = y\}$, G è continua in $[a,b]^2$ e di classe C^2 in $[a,b]^2 \setminus \Delta$ perché tali sono u_1 e u_2.

(ii) Risulta

$$\begin{aligned} \lim_{x\to y^+} G_x(x,y) - \lim_{x\to y^-} G_x(x,y) &= \lim_{x\to y^+} u_1(y)u_2'(x) - \lim_{x\to y^-} u_1'(x)u_2(y) = \\ &= u_1(y)u_2'(y) - u_1'(y)u_2(y) = -\frac{1}{\psi(y)} \quad \forall y \in]a,b[. \end{aligned}$$

(iii) Si ha per ogni $y \in [a,b]$

$$B_1G(\cdot,y) = \alpha_1\, G(a,y) + \beta_1\, G_x(a,y) = \alpha_1\, u_1(a)u_2(y) + \beta_1\, u_1'(a)u_2(y) = B_1u_1 \cdot u_2(y) = 0,$$

e similmente

$$B_2G(\cdot,y) = \alpha_2\, G(b,y) + \beta_2\, G_x(b,y) = \alpha_2\, u_1(y)u_2(b) + \beta_2\, u_1(y)u_2'(b) = u_1(y) \cdot B_2u_2 = 0.$$

(iv) Dalla definizione di G segue

$$[LG(\cdot,y)](x) = \begin{cases} u_1(y)[-\psi u_2')' + \varphi u_2](x) = 0 & \text{se} \quad x > y, \\ u_2(y)[-\psi u_1')' + \varphi u_1](x) = 0 & \text{se} \quad x < y. \end{cases}$$

Esercizio 11.4.7 Proviamo che $D(L^*) \subseteq D(L)$. Supponiamo dapprima che 0 non sia autovalore per L. Sia $v \in D(L^*)$: allora $L^*v \in L^2(a,b)$. Per l'esercizio 11.4.6, l'operatore $Gu(x) = \int_a^b G(x,y)u(y)\,dy$, $u \in L^2(a,b)$, è ben definito ed è a valori in H, essendo

$$H = \{w \in C^1[a,b] :\ w' \in AC[a,b],\ w'' \in L^2(a,b)\};$$

quindi $GL^*v \in H$. Poiché $GLu = u$ per ogni $u \in D(L)$ e $G = G^*$(osservazione 11.4.9), si ha

$$(Lu,v)_{L^2(a,b)} = (u,L^*v)_{L^2(a,b)} = (GLu,L^*v)_{L^2(a,b)} = (Lu,GL^*v)_{L^2(a,b)} \qquad \forall u \in D(L).$$

Dato che $0 \in \rho(L)$, al variare di u in $D(L)$ il vettore Lu descrive tutto $L^2(a,b)$. Pertanto $v = GL^*v \in H$. Possiamo allora integrare per parti la quantità $(Lu,v)_{L^2(a,b)}$:

$$(Lu,v)_{L^2(a,b)} = \Big[-\psi(b)u'(b)\overline{v(b)} + \psi(b)u(b)\overline{v'(b)} + \psi(a)u'(a)\overline{v(a)} - \psi(a)u(a)\overline{v'(a)}\Big] + (u,Lv)_{L^2(a,b)}.$$

Scegliamo $u \in D(L)$ con $u'(b) = \overline{\alpha_2}$, $u(b) = -\overline{\beta_2}$, $u'(a) = 0$ e $u(a) = 0$: si ottiene

$$(Lu,v)_{L^2(a,b)} = -\psi(b)\overline{B_2v} + (u,Lv)_{L^2(a,b)},$$

mentre scegliendo $u \in D(L)$ tale che $u'(b) = 0$, $u(b) = 0$, $u'(a) = -\overline{\alpha_1}$, $u(a) = -\overline{\beta_1}$, si ricava

$$(Lu,v)_{L^2(a,b)} = \psi(a)\overline{B_1v} + (u,Lv)_{L^2(a,b)}.$$

Se vogliamo che $u \mapsto (Lu,v)_{L^2(a,b)}$ sia continua rispetto alla norma $\|u\|_{L^2(a,b)}$, deve essere $B_1v = B_2v = 0$, e in tal caso si conclude che $v \in D(L)$ e $Lv = L^*v$.
Se 0 è autovalore per L, consideriamo $L_0 = L - \nu I$, con $\nu \in \mathbb{R}$ opportunamente scelto in modo che 0 non sia autovalore per L_0: allora basta osservare che

$$D(L^*) = D(L^* - \nu I) = D(L_0^*) \subseteq D(L_0) = D(L - \nu I) = D(L),$$

e $Lv = L_0 v + \nu v = L_0^* v + \nu v = L^* v$ per ogni $v \in D(L^*)$.
Viceversa, proviamo che $D(L) \subseteq D(L^*)$. Dato che l'inclusione contraria è vera, per ogni $u \in D(L)$ possiamo integrare per parti, copme sopra, la quantità $(v, Lu)_{L^2(a,b)}$, ottenendo

$$(v, Lu)_{L^2(a,b)} = \left[-\psi(v'\overline{u} - v\overline{u'})\right]_a^b + (Lv, u)_{L^2(a,b)}\,.$$

Dato che $B_1 v = B_1 u = 0$ e $B_2 v = B_2 u = 0$, si ha

$$\det \begin{pmatrix} u(b) & v(b) \\ u'(b) & v'(b) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u(a) & v(a) \\ u'(a) & v'(a) \end{pmatrix} = 0$$

e quindi $\left[-\psi(v'\overline{u} - v\overline{u'})\right]_a^b = 0$, da cui

$$(v, Lu)_{L^2(a,b)} = (Lv, u)_{L^2(a,b)};$$

ciò implica $v \in D(L^*)$ e $L^* v = Lv$.

Esercizio 11.4.8 Si noti che questo problema non è di tipo Sturm-Liouville. Se $u, v \in D(L)$ si ha, utilizzando le condizioni agli estremi,

$$(Lu, v)_{L^2(0,1)} = \int_0^1 u''\,\overline{v}\,dt = [u'\overline{v}]_0^1 - \int_0^1 u'\,\overline{v'}\,dt = [u'\,\overline{v}]_0^1 - [u\,\overline{v'}]_0^1 + \int_0^1 u\,\overline{v''}\,dt = (u, Lv)_{L^2(0,1)}\,.$$

Ne segue che $L = L^*$, e pertanto gli autovalori sono reali. Sia $Lu = \lambda u$: allora $u'' - \lambda u = 0$, e dunque $u(x)) = c_1\, e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2\, e^{-\sqrt{\lambda}x}$, e dalle condizioni agli estremi si ricava

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = c_1\, e^{\sqrt{\lambda}} + c_2\, e^{-\sqrt{\lambda}} \\ \sqrt{\lambda}(c_1 - c_2) = \sqrt{\lambda}(c_1\, e^{\sqrt{\lambda}} + c_2\, e^{-\sqrt{\lambda}}), \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} c_1(1 - e^{\sqrt{\lambda}}) = -c_2(1 - e^{-\sqrt{\lambda}}) \\ \sqrt{\lambda}c_1(1 - e^{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda}c_2(1 - e^{-\sqrt{\lambda}}). \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ si trova solo $c_1 = c_2 = 0$, ossia $u = 0$. Per $\lambda \neq 0$, si trovano c_1 e c_2 non nulli se $\sqrt{\lambda} = 2k\pi\, i$, cioè $\lambda = -4k^2\pi^2$, $k \in \mathbb{N}$; gli autovettori corrispondenti sono $u_k(x) = \alpha_1 \cos 2k\pi x + \alpha_2 \sin 2k\pi x$.

Esercizio 11.4.9 L'operatore L è autoaggiunto come caso particolare dell'esercizio 11.4.7; dunque gli autovalori di L sono reali. Essi sono positivi perché, se $Lu = \lambda u$, allora da $u(a) = u(b) = 0$ segue

$$\lambda \|u\|^2_{L^2(a,b)} = (Lu, u)_{L^2(a,b)} = [-\psi u'\overline{u}]_a^b + \int_a^b \left[\psi |u'|^2 + \varphi |u|^2\right] dt = \int_a^b \left[\psi |u'|^2 + \varphi |u|^2\right] dt.$$

(i) Se $f \in D(L)$ allora $Lf \in L^2(a,b)$ e vale lo sviluppo in $L^2(a,b)$

$$Lf = \sum_{k=1}^{\infty} (Lf, u_k)_{L^2(a,b)}\, u_k = \sum_{k=1}^{\infty} (f, Lu_k)_{L^2(a,b)}\, u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (f, u_k)_{L^2(a,b)}\, u_k\,.$$

(ii)-(iii) Per l'identità di Parseval (proposizione 8.3.12), se $f \in D(L)$ e $g \in L^2(a,b)$ si ha

$$(Lf, g)_{L^2(a,b)} = \sum_{k=1}^{\infty} (Lf, u_k)_{L^2(a,b)} \overline{(g, u_k)_{L^2(a,b)}} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (f, u_k)_{L^2(a,b)} \overline{(g, u_k)_{L^2(a,b)}};$$

d'altra parte, se $f, g \in D(L)$ allora, integrando per parti,

$$(Lf, g)_{L^2(a,b)} = \int_a^b \int_a^b \left[\psi f' \overline{g'} + \varphi f \overline{g}\right] dt.$$

Ciò prova (iii). Per (ii) basta prendere nella relazione precedente $g = f \in D(L)$.

(iv) Se $f \in L^2(a,b)$, posto $g = Gf$, si ha dalla relazione precedente

$$(Gf, f)_{L^2(a,b)} = (g, Lg)_{L^2(a,b)} = \int_a^b \left[\psi |g'|^2 + \varphi |g|^2\right] \, dt \geq 0.$$

Di conseguenza,

$$\int_a^b \int_a^b G(x,y) f(y) \overline{f(x)} \, dxdy \geq 0 \qquad \forall f \in L^2(a,b).$$

Scelta $f = \frac{1}{2r} \chi_{[x_0 - r, x_0 + r]}$, si ottiene

$$0 \leq \frac{1}{4r^2} \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} G(x,y) \, dxdy \qquad \forall r \in]0, \min\{x_0 - a, b - x_0\}],$$

e per $r \to 0^+$, per continuità, si deduce $G(x_0, x_0) \geq 0$ per ogni $x_0 \in [a,b]$.

(v) Posto $G_n(x,y) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} u_k(x) u_k(y)$, questa funzione è continua, reale e simmetrica in $[a,b] \times [a,b]$. Il corrispondente operatore integrale G_n è quindi compatto e autoaggiunto in $L^2(a,b)$ e, in virtù del teorema spettrale (teorema 11.3.7), si ha per $f \in L^2(a,b)$

$$G_n f = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} (f_n, u_k)_{L^2(a,b)} \, u_k \, , \qquad (G_n f, f)_{L^2(a,b)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} |(f, u_k)_{L^2(a,b)}|^2 \geq 0.$$

(vi) L'operatore $G = L^{-1}$ è compatto e autoaggiunto (proposizione 11.4.10); grazie al teorema spettrale, per ogni $f \in L^2(a,b)$, posto $g = Gf$, vale la relazione

$$(Gf, f)_{L^2(a,b)} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} |(f, u_k)_{L^2(a,b)}|^2$$

e la serie converge in $L^2(a,b)$; inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $f \in L^2(a,b)$,

$$(Gf, f)_{L^2(a,b)} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} |(f, u_k)_{L^2(a,b)}|^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} |(f, u_k)_{L^2(a,b)}|^2 = \lim_{n \to \infty} (G_n f, f)_{L^2(a,b)} \, .$$

Scegliendo, come prima, $f = \frac{1}{2r} \chi_{[x_0 - r, x_0 + r]}$, al limite per $r \to 0^+$ si ricava $G(x_0, x_0) \geq G_n(x_0, x_0)$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $x_0 \in [a,b]$. Dunque

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} |u_k(x)|^2 = G_n(x,x) \leq G(x,x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+, \quad \forall x \in [a,b];$$

pertanto la serie $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} |u_k(x)|^2$ è convergente, con

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} |u_k(x)|^2 \leq G(x,x) \qquad \forall x \in [a,b],$$

e di conseguenza la serie $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} u_k(x) \overline{u_k(y)}$ è assolutamente convergente, con

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} |u_k(x) u_k(y)| &\leq \left[\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} |u_k(x)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} |u_k(y)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sqrt{G(x,x) G(y,y)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+, \quad \forall x, y \in [a,b]. \end{aligned}$$

Per convergenza dominata si ha allora, per ogni $f, g \in L^2(a,b)$,

$$\int_a^b \int_a^b G(x,y) f(y) \overline{g(x)}\, dxdy = (Gf, g)_{L^2(a,b)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (G_n f, g)_{L^2(a,b)} = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \int_a^b \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} u_k(x) \overline{u_k(y)} f(y) \overline{g(x)}\, dxdy =$$

$$= \int_a^b \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} u_k(x) \overline{u_k(y)} f(y) \overline{g(x)}\, dxdy.$$

Per l'arbitrarietà di f e g, si conclude che

$$G(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} u_k(x) \overline{u_k(y)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} u_k(x) \overline{u_k(y)} = \lim_{n\to\infty} G_n(x,y) \qquad \forall x, y \in [a,b].$$

(vii) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} |u_k(x)|^2$ è costituita da funzioni continue e, per (vi), converge puntualmente alla funzione continua $G(x,x)$. Consideriamo le funzioni continue $h_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} |u_k(x)|^2$, che formano una successione decrescente: fissato $\varepsilon > 0$ e detto $A_n = \{x \in [a,b] :\ h_n(x) < \varepsilon\}$, risulta $A_n \subseteq A_{n+1}$ e, in virtù della convergenza puntuale, $[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Per compattezza, esiste uno sottoricoprimento finito $\{A_{n_h}\}_{h=1,\dots,p}$ di $[a,b]$: quindi, per monotonia, $[a,b] = A_{n_p}$. Pertanto, si ha $h_n(x) < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_p$ e per ogni $x \in [a,b]$, ossia la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} |u_k(x)|^2$ converge uniformemente in $[a,b]$ a $G(x,x)$. Di conseguenza, anche la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} u_k(x) \overline{u_k(y)}$ converge uniformemente a $G(x,y)$, grazie alla disuguaglianza

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} |u_k(x) u_k(y)| \leq \left[\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} |u_k(x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} |u_k(y)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

(viii) Per convergenza uniforme si ha

$$\int_a^b G(x,x)\, dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} |u_k(x)|^2\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \int_a^b |u_k(x)|^2\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}.$$

(ix) Per ogni $f \in D(L)$ e $n \in \mathbb{N}^+$ si ha

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} (f, u_k)_{L^2(a,b)} u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} (f, u_k)_{L^2(a,b)}\, u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} |(f, Lu_k)_{L^2(a,b)}|\, |u_k(x)| =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (Lf, u_k)_{L^2(a,b)}\, |u_k(x)| \leq \left[\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} |u_k(x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} |(Lf, u_k)_{L^2(a,b)}|^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

e nell'ultimo membro, per (vii), il primo fattore è infinitesimo per $n \to \infty$, mentre il secondo è limitato.

(x) Sia $g \in L^2(a,b)$: la soluzione f dell'equzione $Lf = g$ appartiene a $D(L)$ e si ha, per (ix),

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, u_k)_{L^2(a,b)}\, u_k(x)$$

con convergenza assoluta e uniforme. D'altronde

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (f, u_k)_{L^2(a,b)}\, u_k(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (f, Lu_k)_{L^2(a,b)}\, u_k(x) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (Lf, u_k)_{L^2(a,b)}\, u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (g, u_k)_{L^2(a,b)}\, u_k(x); \end{aligned}$$

l'ultima serie, avendo per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ lo stesso termine della prima, converge assolutamente ed uniformemente.

Bibliografia

BN [1] G. Bachman, L. Narici, Functional analysis, Academic Press, New York 1973.

Be [2] J. J. Benedetto, Real variable and integration, B. G. Teubner, Stuttgart 1967.

Br [3] H. Brézis, Analyse fonctionnelle. Théorie et applications, Masson, Paris 1983.

Co [4] F. Conti, Appunti di istituzioni di analisi superiore (manoscritto), Pisa 1980.

DB [5] G. de Barra, Teoria della misura e dell'integrazione, L'Arciere, Cuneo 1987.

DS [6] N. Dunford, J. T. Schwartz, Linear operators, Interscience Publ., New York 1958.

Ed1 [7] R. E. Edwards, Fourier series: a modern introduction, vol.1 e vol. 2, Holt, Rinehart and Winston inc., New York 1967.

Ed3 [8] R. E. Edwards, Functional analysis. Theory and applications, Holt, Rinehart and Winston inc., New York 1965.

EG [9] C. C. Evans, R. F. Gariepy, Measure theory and fine properties of functions, Revised edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Rabon 2015.

HS [10] E. Hewitt, K. Stromberg, Real and abstract analysis, Springer Verlag, Berlin 1965.

KF [11] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale, Mir, Mosca 1980.

L [12] E. R. Lorch, Spectral theory, Oxford Univ. Press, New York 1962.

Rog [13] C. A. Rogers, Hausdorff measures, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1970.

Roy [14] H. L. Royden, Real analysis, MacMillan, New York 1968.

Ru1 [15] W. Rudin, Real and complex analysis, McGraw Hill, New York 1987.

Sch [16] M. Schechter, Principles of functional analysis, Academic Press, New York 1971.

Ta [17] A. E. Taylor, Introduction to functional analysis, J. Wiley, New York 1961.

WZ [18] R. L. Wheeden, A. Zygmund, Measure and integral: an introduction to real analysis, Marcel Dekker, New York 1977.

W [19] H. Widom, Lectures on integral equations, notes by D. Drasin and A. Tromba, Van Nostrand-Reinhold Co., New York 1969.

Za [20] A. C. Zaanen, Integration, North-Holland Publ. Company, Amsterdam 1967.

Zy [21] A. Zygmund, Trigonometric series, vol. 1 e vol. 2, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1959.

Indice analitico

σ-algebra, 9
  degli eventi, 38
  dei Boreliani
    di $\mathbb{R}$, 11, 37
    di $\mathbb{R}^N$, 194
  dei Boreliani di $\mathbb{R}^N$, 187
  dei misurabili
    secondo Lebesgue-Stieltjes, 37
  generata, 11, 43, 183
  prodotto, 183
$\sigma(X, X^*)$, 453, 455
$\sigma(X^*, X)$, 454, 455
$\sigma(X^*, X^{**})$, 454
$\sigma(X^{**}, X^*)$, 475
ε-rete, 459, 460

additività
  dell'integrale, 110
    di funzioni semplici, 105
  della variazione totale, 226
  finita, 5
  numerabile, 2, 108
algebra
  di funzioni, 343
  di insiemi, 3, 42, 181, 430
applicazione
  antilineare, 281
  olomorfa, 518
applicazione aperta, 436
assioma della scelta, 19, 34
assoluta continuità dell'integrale, 131
assoluta continuità dell'integrale, 228
atomo, 25, 41
autovalore, 516
autovettore, 516

base duale, 447
biduale, 446

cambiamento di variabile, 235
cambiamento di variabili, 239, 246

chiusura
  debole, 468
    sequenziale, 468
classe di equivalenza
  di funzioni q.o. coincidenti, 83
  di funzioni q.o. coincidenti, 138, 140, 219, 381
  in $[0,1]/\mathbb{Q}$, 19
classe monotona, 181, 183, 185
coefficienti di Fourier, 331, 441
compattezza, 459
  sequenziale, 462
complessificazione di uno spazio normato reale, 515
completamento
  del prodotto di misure di Lebesgue, 194
  di una misura, 39, 193
continuità delle traslazioni
  in L^1, 144
  in L^2, 325
  in L^p, 388, 408
convergenza
  debole, 451, 526
    degli operatori, 452, 470, 500
  debole*, 452
  dominata, 78, 117
  forte
    degli operatori, 452, 500
  in L^1, 139, 140
  in L^p, 383
  in L^∞, 84
  in legge, 138
  in misura, 89
  in probabilità, 90
  monotona, 116
  puntuale, 78
  puntuale q.o., 82, 85, 87
  uniforme, 84, 85, 87
    degli operatori, 452, 500
convoluzione, 198, 284, 388, 503

moltiplicativa, 389
coordinate polari in $\mathbb{R}^N$, 253
cubo di Hilbert, 470, 521
curva rettificabile, 227

decomposizione di Lebesgue, 134
densità
dei polinomi, 332
trigonometrici, 336
delle funzioni costanti a tratti, 144, 145, 233, 388
di un insieme, 10, 175, 219
in C, 146, 240, 280
in L^1, 142–144
in L^p, 388
in L^∞, 84, 393
derivate del Dini, 221
diametro di un insieme, 44, 46
differenza simmetrica, 18
dimensione
di Hausdorff, 49
finita, 279, 289, 326, 441, 447, 457
infinita, 457, 459, 470
disequazione variazionale, 320
disuguaglianza
di Bessel, 331
di Cauchy-Schwarz, 281
di Hölder, 382
di Hardy, 390
di Jensen, 390
di Minkowski, 383
integrale, 390
dominio
della derivata prima, 439
di un operatore, 441
duale
di $\mathbb{C}^N$, 288
di ℓ^1, 293
di $\mathbb{R}^N$, 288
di C, 395
di $C[a,b]$, 398
di c_0, 293
di L^1, 289, 291
di L^p, 392, 395
di L^∞, 289, 426
di uno spazio di Hilbert, 327
di uno spazio normato, 288

elemento
maggiorante, 333
massimale, 333
equazione
del calore, 348
di Fredholm di 2$^{\text{a}}$ specie, 537
di Sturm-Liouville, 540
integrale, 537
di Volterra, 521
esponente coniugato, 382, 385
esponenziale di un operatore, 293
estensione di funzionali lineari, 423
estremo inferiore essenziale, 81
estremo superiore essenziale, 81
evento, 38

famiglia
equicontinua, 459
puntualmente equilimitata, 459
forma
bilineare, 435
quadratica, 507, 528
formula
dell'area, 249
di inversione, 344, 350
di Parseval, 345
funzionale
convesso, 423
di Minkowski, 428
lineare
continuo, 288
limitato, 288
positivo, 392
positivamente omogeneo, 423
positivo, 395, 430
subadditivo, 423
funzione
Γ, 52, 126
a variazione limitata, 225
assolutamente continua, 228
bi-Lipschitziana, 55
Boreliana, 80, 187
caratteristica, 14, 29, 76
costante a tratti, 122
definita q.o., 83
derivabile q.o., 220, 227, 229
di Lebesgue, 231, 234, 271
di scelta, 19

dispari, 336
essenzialmente limitata, 81
Hölderiana, 55, 234, 280
indicatrice, 29, 76
integrabile, 107
Lipschitziana, 46, 80, 233
misurabile, 76
secondo Lebesgue, 77, 79
mollificatrice, 198, 461
olomorfa, 555
pari, 336
periodica, 128, 234
q.o. finita, 85, 90
semplice, 76
integrabile, 104
sommabile, 105
sezione, 188
sommabile, 107, 126

gruppo
di operatori, 293, 446

identità
del parallelogrammo, 284, 319
del risolvente, 518
di Parseval, 334
immagine di un operatore, 290, 322
immersione canonica nel biduale, 446
insieme
σ-finito, 78, 115
Boreliano
in $\mathbb{R}^N$, 43
in $\mathbb{R}$, 11
di Cantor, 12, 14, 20, 22, 29, 49, 88, 89, 129, 144, 231, 248
di Vitali, 19
magro, 286
microscopico, 18
misurabile, 36
secondo Hausdorff, 47
secondo Lebesgue, 43
secondo Lebesgue-Stieltjes, 37
secondo Riemann, 1
non misurabile, 19
parzialmente ordinato, 333
perfetto, 13
proiezione, 184
risolvente, 515
test, 6
totalmente limitato, 459, 523
totalmente ordinato, 333
totalmente sconnesso, 13
integrale
di funzioni misurabili, 107
di funzioni semplici, 104
di Lebesgue
in $\mathbb{R}$, 104, 121, 123, 214
in $\mathbb{R}^N$, 104, 198, 246
di Riemann
in $\mathbb{R}$, 1, 121, 214
in $\mathbb{R}^N$, 198
dipendente da parametro, 118
integrazione
per "fette", 140
per cambiamento di variabile, 235
per cambiamento di variabili, 239, 246
per parti, 193, 234
invarianza per traslazioni, 2

legge
di gruppo, 293
di una variabile aleatoria, 79, 137
lemma
del Dini, 553
di Fatou, 117
per la convergenza in misura, 120
di Goldstine, 465
di Riemann-Lebesgue, 145
di Vitali, 220
di Zorn, 333, 425
limite
debole, 456
debole*, 456
di Banach, 430, 495
linearità dell'integrale, 110
lunghezza
di un intervallo, 2
di una curva, 54

massimo limite di insiemi, 17
minimo limite di insiemi, 17
misura, 36
σ-finita, 36
assolutamente continua, 129–131, 230
cardinalità, 38, 290, 331
completa, 36

con segno, 422
concentrata, 37, 129
di Borel, 37
di Dirac, 38
di Hausdorff, 47
di Lebesgue
in $\mathbb{R}$, 14
di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$, 43
di Lebesgue-Stieltjes, 37, 230, 232–234, 398
di probabilità, 38
discreta, 38
finita, 36
immagine, 79, 137
prodotto, 181, 182, 186, 191
regolare, 17, 41, 143
singolare, 129, 131
misura esterna
di Hausdorff, 44
di Lebesgue
in $\mathbb{R}$, 3
di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$, 42
di Lebesgue-Stieltjes, 37
prodotto, 199
modulo
di convessità, 472, 475
di liscezza, 475, 476
mollificatrice, 198, 379, 388, 461, 503
monotonia
dell'integrale, 108
della misura, 38
della misura di Lebesgue, 3

norma, 277
di un funzionale lineare, 288
di un operatore lineare, 287, 385
equivalente, 278
Hilbertiana, 284
in $\mathbb{C}^N$, 277
in ℓ^1, 285
in ℓ^2, 285
in ℓ^p, 386
in ℓ^∞, 280
in $\mathbb{R}^N$, 277
in AC, 233, 278
in BV, 227, 228, 278
in c, 280
in C^k, 277
in C^α, 280
in c_0, 280
in c_{00}, 280
in L^1, 138, 143, 277
in L^∞, 277
in L^p, 383
in L^∞, 83
in $\mathcal{L}(X, Y)$, 287
indotta da un prodotto scalare, 282, 284, 319
uniforme, 143, 146, 179
nucleo
del calore, 349
di Dirichlet, 433, 491
di un operatore lineare, 290, 294, 328
di un'equazione integrale, 537
numeri derivati, 221

operatore
aggiunto, 442
in uno spazio di Hilbert, 328, 442
antilineare, 328
autoaggiunto, 329, 443, 446
compatto, 521
completamente continuo, 521
derivata prima, 438, 441
di "shift", 430
di Hilbert-Schmidt, 339
di Laplace, 348
di restrizione, 440
di Sturm-Liouville, 543
integrale, 384, 443, 521, 526, 546
di Volterra, 521
lineare, 286
chiuso, 438
continuo, 287
limitato, 286
non continuo, 444
Lipschitziano, 287, 321
nilpotente, 329
normale, 520
positivo, 329, 529
risolvente, 515
strettamente positivo, 329, 538
unitario, 520
ordinamento parziale, 333
ortogonalità
fra insiemi, 321

fra vettori, 283

passaggio al limite sotto integrale, 116, 117
polinomi
di Bernstein, 145
di Hermite, 332, 337
di Legendre, 332, 337
trigonometrici, 335
predicato, 81
probabilità, 38
discreta, 38
problema di Cauchy, 470
prodotto
di convoluzione, 198, 342
scalare, 281, 329
in $\mathbb{C}^N$, 282
in $\mathbb{R}^N$, 282
in AC, 285
in C, 282
in L^2, 283
proiezione
ortogonale, 322
su un convesso chiuso, 240, 319
su un sottospazio chiuso, 322
proprietà di miglior approssimazione, 335
punto
di Lebesgue, 215, 219, 247, 308
fisso
di una funzione, 240
regolare, 515

quasi certamente, 38
quasi ovunque, 81

raggio spettrale, 519, 533
rappresentazione canonica
di una funzione di L^1, 219
di una funzione semplice, 76
rettangolo misurabile, 181
ricoprimento, 465
finito, 469
riflessività, 446
degli spazi di Hilbert, 448
di L^p, 448

scala del diavolo, 232, 264
scambio dell'ordine di integrazione, 185, 189, 195
semi-algebra, 42
separabilità, 450
di L^p, 388
separazione di insiemi convessi, 429
serie di Fourier, 331
relativa al sistema trigonometrico, 336, 433
sezione di una funzione, 188
sistema
fondamentale di intorni, 454, 455, 467
ortonormale, 330, 331, 451, 453
completo, 332, 333
trigonometrico, 330, 441
soluzione fondamentale, 349
sottoricoprimento, 465
sottospazio, 320
chiuso, 321, 449
generato, 325
sottosuccessione
convergente q.o., 90, 139
debolmente convergente, 463
debolmente* convergente, 462
diagonale, 459
uniformemente convergente, 459
spazio
AC, 228–230, 233, 278
BV, 225–229, 233, 278
C, 84, 138, 145, 146, 227, 280, 282, 439, 450
C^1, 10, 214, 297, 438
C^1_c, 176
C^2, 307
C^∞, 126, 146, 240
C^∞_c, 198
C^k, 198, 277
C^k_c, 198
C^α, 280
$C_0(\mathbb{R})$, 144
C_c, 84, 85, 88, 143, 174
C^∞_c, 143
L^1, 138, 277
L^∞, 138, 277
L^p, 381
L^∞, 83
ℓ^1, 291, 293, 294
ℓ^2, 253, 274, 280
ℓ^∞, 280, 293, 294
ℓ^p, 386, 470

Lip, 324
c, 280
c_0, 280, 291, 450
c_{00}, 280, 313
con prodotto scalare, 281
conx prodotto scalare, 319
debolmente completo, 456
debolmente* completo, 455
degli operatori lineari limitati, 286
di Banach, 83, 138, 277, 383
uniformemente liscio, 475
di Hausdorff, 41, 468
di Hilbert, 282, 319
non separabile, 330
di Schwartz, 343
duale, 288
localmente compatto, 41
metrico, 468
compatto, 467
completo, 431
separabile, 459
misurabile, 36
misurato, 36
normato, 83, 277
pre-Hilbertiano, 281
probabilizzato, 38, 76, 137
riflessivo, 446, 463, 474
separabile, 280, 330, 462
topologico, 453
T_4, 143
di Hausdorff, 453, 455
metrizzabile, 453, 455
uniformemente convesso, 472
spettro, 515
continuo, 515
puntuale, 515
residuo, 515
spezzate di Eulero, 471
subadditività numerabile, 2
successione
di Cauchy, 89, 138
fondamentale in misura, 89
supporto, 143

teorema
del grafico chiuso, 438
dell'alternativa, 533
dell'applicazione aperta, 436
delle proiezioni, 322
di Ascoli-Arzelà, 459
di B. Levi, 116, 248
di Baire, 431
di Banach-Alaoglu, 463
di Banach-Steinhaus, 431
di Brouwer, 240, 244, 253
di decomposizione di Lebesgue, 134
di derivazione di Lebesgue, 220
di Eberlein-Šmulian, 464
di Fréchèt-Kolmogorov, 460
di Fredholm, 533
di Fubini, 190, 197
di Hahn-Banach, 291, 424
di Kakutani, 466
di Lebesgue, 117
di Lusin, 85
di Mercer, 553
di Milman-Pettis, 474
di Peano, 470
di Pitagora, 283
di Plancherel, 345
di Radon-Nikodým, 136, 138, 230, 247, 271, 393
di Riesz-Fischer, 392, 419
di Riesz-Fréchèt, 327
di Severini-Egorov, 87
con convergenza dominata, 120
di Steinhaus, 144
di Tonelli, 189, 195, 384
di Vitali, 388
fondamentale del calcolo integrale, 214
spettrale, 529
topologia
debole, 453, 455, 498
debole*, 454
prodotto, 463
trasformata di Fourier
di una funzione, 340
di una misura, 351
tribù, 9

uguaglianza di Bessel, 333
uniforme limitatezza di operatori, 431
unità di un'algebra, 343

variabile aleatoria, 76
variazione totale, 225, 226

volume di un parallelepipedo, 42