Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Sesto scritto A.A. 2014/15 — 15 febbraio 2016

Nome e Cognome:

---

1) Sia $Q \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ data da

$$Q = \{[x^0 : x^1 : x^2 : x^3] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \mid (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0\} .$$

(i) Dimostra che Q è una sottovarietà embedded di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di dimensione 2.
(ii) Calcola la coomologia di de Rham di Q.
(iii) Trova una carta locale di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ adattata a Q e centrata nel punto $p_0 = [1 : 0 : 0 : 1] \in Q$.
(iv) Usando la base di $T_{p_0}\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ indotta dalla carta locale del punto precedente determina una base di $T_{p_0}Q$.
(v) Sia $f \colon \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ data da

$$f([x^0 : x^1 : x^2 : x^3]) = \frac{(x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2}{(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} .$$

Dimostra che $f|_Q \colon Q \to \mathbb{R}$ è di classe C^∞, e determina il nucleo di $d(f|_Q)_{p_0} \colon T_{p_0}Q \to \mathbb{R}$.

2) Sia M una n-varietà, e $X_1, \ldots, X_r \in \mathcal{T}(M)$ tali che $\dim \mathrm{Span}\big(X_1(p), \ldots, X_r(p)\big) = r$ per ogni $p \in M$. Per $\ell \geq 1$ poniamo

$$\mathcal{I}^\ell = \big\{\omega \in A^\ell(M) \mid \omega(X_{j_1}, \ldots, X_{j_\ell}) \equiv 0 \text{ per ogni } 1 \leq j_1, \ldots, j_\ell \leq r\big\} .$$

Dimostra che $d(\mathcal{I}^1) \subseteq \mathcal{I}^2$ se e solo se esistono $c_{ij}^k \in C^\infty(M)$ tali che $[X_i, X_j] = \sum\limits_{k=1}^{r} c_{ij}^k X_k$ per i, $j = 1, \ldots, r$.

3) Sia $S = S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ la sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$ privata del polo nord $N = (0, 0, 1)$, e indichiamo con g la metrica Riemanniana su S data da

$$g_p(v, w) = \frac{1}{(1 - p^3)^2} \langle v, w \rangle$$

per ogni $p = (p^1, p^2, p^3) \in S$ e ogni v, $w \in T_pS$, dove $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$ e stiamo considerando T_pS come sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ tramite l'identificazione indotta dall'inclusione $S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

(i) Dimostra che la proiezione stereografica dal polo nord $\varphi \colon S \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\varphi(p) = \frac{1}{1 - p^3}(p^1, p^2)$$

è un'isometria fra (S, g) e $\mathbb{R}^2$ considerato con la metrica piatta.
(ii) Determina tutte le geodetiche di (S, g) uscenti dal punto $-N = (0, 0, -1)$. Che differenza c'è fra queste geodetiche e le geodetiche (uscenti da $-N$) rispetto alla metrica standard di S^2?