Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Quinto scritto A.A. 2014/15 — 21 gennaio 2016

Nome e Cognome:

---

1) Una *coppia esatta* di gruppi abeliani è una sucessione esatta di gruppi abeliani della forma

$$A \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{k} A \xrightarrow{i} A ,$$

dove A e B sono gruppi abeliani a i, j e k sono omomorfismi di gruppi.

(i) Posto $d = j \circ k$, dimostra che $d \circ d = O$.

(ii) Posto $A_1 = i(A)$ e $B_1 = (\ker d)/d(B)$, definisci degli omomorfismi $i_1 \colon A_1 \to A_1$, $j_1 \colon A_1 \to B_1$ e $k_1 \colon B_1 \to A_1$ in modo che la successione

$$A_1 \xrightarrow{i_1} A_1 \xrightarrow{j_1} B_1 \xrightarrow{k_1} A_1 \xrightarrow{i_1} A_1$$

sia una coppia esatta di gruppi abeliani.

2) Sia $\pi \colon E \to M$ un fibrato vettoriale di rango r su una varietà M, e poni

$$F = \bigcup_{p \in M} E_p \oplus E_p^* ,$$

dove E_p^* indica lo spazio duale di E_p per ogni $p \in M$. Indichiamo con $\tilde{\pi} \colon F \to M$ la proiezione data da $\tilde{\pi}(E_p \oplus E_p^*) = \{p\}$ per ogni $p \in M$, e con $\Phi \colon F \to \mathbb{R}$ l'applicazione data da $\Phi(v, \omega) = \omega(v)$ per ogni $v \in E_p$, $\omega \in E_p^*$ e $p \in M$. Definisci una struttura di fibrato vettoriale di rango $2r$ su $(F, \tilde{\pi})$ tale che l'applicazione Φ risulti differenziabile.

3) Indichiamo con ∇^0 la connessione piatta su $\mathbb{R}^n$, e con $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ il prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^n$. Fissato un campo vettoriale $Z \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ sia $\nabla \colon \mathcal{T}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{T}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ definita da

$$\nabla_X Y = \nabla^0_X Y + \langle X, Y \rangle Z$$

per ogni X, $Y \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$.

(i) Dimostra che ∇ è una connessione simmetrica. Per quali campi Z la connessione ∇ è compatibile con la metrica Euclidea di $\mathbb{R}^n$?

(ii) Sia $\sigma \colon I \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare, e supponiamo che Z non si annulli lungo il supporto di σ. Trova sotto quali condizioni un campo costante X_0 è ∇-parallelo lungo σ.

(iii) Se σ è della forma $\sigma(t) = p_0 + tv_0$ e Z è un campo costante $Z \equiv Z_0 \in \mathbb{R}^n$, determina tutti i campi vettoriali $X \in \mathcal{T}(\sigma)$ che sono ∇-paralleli.

(iv) Se σ è della forma $\sigma(t) = p_0 + tv_0$, che relazione deve intercorrere fra Z e σ perché σ sia una ∇-geodetica?

(v) Dimostra che una curva regolare σ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco è una ∇-geodetica se e solo se $\ddot{\sigma} + Z \circ \sigma \equiv O$. Deducine che se $Z \equiv Z_0 \neq O$ è costante allora nessuna curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco può essere una ∇-geodetica.

(vi) Supponiamo ora $n = 2$. Dimostra che non esiste alcun campo $Z \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ tale che tutte le curve della forma $\sigma(t) = (r \cos t, r \sin t)$ siano delle ∇-geodetiche.