Geometria e Topologia Differenziale

Terzo compitino A.A. 2007/08

Consegna il 7 gennaio 2008

Nome e Cognome:

---

1) Considera l'applicazione $\psi\colon (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$\psi(t,s) = ((2 + e^{-t^2} \cos s)\cos t, (2 + e^{-t^2} \cos s)\sin t, e^{-t^2} \sin s),$$

e sia $\Sigma = \psi((-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R})$. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $\gamma_a\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \Sigma$ data da $\gamma_a(v) = \psi(v, a)$, e per ogni $b \in (-\pi/2, \pi/2)$ sia $\sigma_b\colon \mathbb{R} \to \Sigma$ data da $\sigma_b(u) = \psi(b, u)$.

(i) Dimostra che Σ è una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$, e che ψ è una superficie immersa.

(ii) Determina un campo $N\colon \Sigma \to \mathbb{R}^3$ di vettori normali non nulli, e determina i punti di $p \in \Sigma$ in cui $N(p)$ è orizzontale (cioè ha componente verticale nulla), e i punti $p \in \Sigma$ in cui lo spazio vettoriale generato da p e $N(p)$ è verticale (cioè contiene l'asse delle z).

(iii) Mostra che per ogni $b \in (-\pi/2, \pi/2)$ la curva σ_b è regolare e parametrizzata per un multiplo della lunghezza d'arco, e determina i valori di b per cui σ_b sia una geodetica. [*Suggerimento:* osserva che il sostegno di σ_b è contenuto in un sottospazio vettoriale verticale di $\mathbb{R}^3$.]

(iv) Mostra che per ogni $a \in \mathbb{R}$ la curva γ_a è regolare. Determina i valori di a per cui una opportuna parametrizzazione di γ_a sia una geodetica. [*Suggerimento:* osserva che esiste un istante in cui il versore normale a γ_a è orizzontale.]

2) Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ l'insieme definito da

$$S = \{(x,y,z) \mid 5x^2 - 8xy + 5y^2 + 9z^2 = 18\},$$

e sia $v\colon S \to \mathbb{R}^3$ la mappa definita da

$$v(x,y,z) = (4x^2 + 5y^2 - 9xy + 9z^2, 5x^2 + 4y^2 - 9xy + 9z^2, -z(x+y)).$$

(i) Mostra che S è una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$, diffeomorfa a S^2. [*Suggerimento:* l'isomorfismo lineare $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $h(x,y,z) = ((2x-y)/3, (-x+2y)/3, z)$ si restringe ad un diffeomeorfismo tra S e $h(S)$.]

(ii) Mostra che v è un campo vettoriale su S, e determinane i punti singolari.

(iii) Determina esplicitamente delle isometrie $F_1, F_2, F_3\colon S \to S$ distinte dall'identità che verifichino le proprietà seguenti:

(a) $F_1(p) = p$ per ogni $p \in S \cap \{x + y = 0\}$;

(b) $F_2(p) = p$ per ogni $p \in S \cap \{x - y = 0\}$;

(c) $F_3(p) = p$ per ogni $p \in S \cap \{z = 0\}$.

(iv) Calcola l'indice dei punti singolari di v.

(v) Sia R la regione regolare di S definita da $R = S \cap \{x + y \geq 0,\ x - y \geq 0,\ z \geq 0\}$, e sia $K\colon S \to \mathbb{R}$ la curvatura Gaussiana. Calcola $\int_R K\, d\nu$.

3) Chiamiamo *ovaloide* una superficie compatta di $\mathbb{R}^3$ che abbia in ogni punto curvatura Gaussiana positiva. Si può dimostrare che, se S è un ovaloide, allora S è orientabile, e la scelta di un campo normale unitario $N\colon S \to S^2$ definisce un diffeomorfismo di S su S^2 (nel seguito potrai sfruttare quanto appena affermato).

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ un ovaloide con mappa di Gauss $N\colon S \to S^2$. Per ogni $p \in S$ siano $\kappa_1(p), \kappa_2(p)$ le curvature principali di S in p, ordinate in modo che $\kappa_1(p) \leq \kappa_2(p)$.

(i) Mostra che, a meno di sostituire N con $-N$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon \leq \kappa_1(p) \leq \kappa_2(p)$ per ogni $p \in S$ (e supponi d'ora in poi che questa condizione sia verificata).

(ii) Mostra che esiste un unico diffeomorfismo $\varphi\colon S \to S$ tale che $N \circ \varphi = -N$, e deducine che per ogni $p \in S$ si ha $T_{\varphi(p)}S = T_pS$, per cui $d\varphi_p$ può essere considerato un endomorfismo di T_pS. [*Continua dietro.*]

(iii) Mostra che per ogni $p \in S$ e $v \in T_pS$ si ha $d\varphi_p(v) \neq v$.

Nel resto di questo esercizio supponi che esista una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $\|\varphi(p) - p\| = c$ per ogni $p \in S$ (in questo caso, si dice che l'ovaloide S ha *larghezza costante*).

(iv) Mostra che per ogni $p \in S$ si ha $\varphi(p) - p = c \cdot N(p)$.

(v) Mostra che, se $v \in T_pS$ con $\|v\| = 1$ definisce una direzione principale in p con $Q_p(v) = k$, allora $ck - 1 \neq 0$ e v definisce una direzione principale in $\varphi(p)$ con $Q_{\varphi(p)}(v) = k/(ck - 1)$.

(vi) Mostra che, se la curvatura Gaussiana di S è costante, allora S è una sfera.