Geometria e Topologia Differenziale

Terzo compitino A.A. 2004/05 — 20 maggio 2005

Nome e Cognome:

---

1) Lo scopo di questo esercizio è dimostrare che una superficie regolare compatta in $\mathbb{R}^3$ contiene sempre un aperto di punti ellittici.

(i) Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e sia $s_0 \in I$ tale che

$$\|\sigma(s_0)\| = \max_{s\in I} \|\sigma(s)\|.$$

Mostra che:

$$(\mathbf{t}(s_0), \sigma(s_0)) = 0, \quad \kappa_\sigma(s_0) \neq 0, \quad (\mathbf{n}(s_0), \sigma(s_0)) \leq -\frac{1}{\kappa_\sigma(s_0)}.$$

Sia ora $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare compatta. Mostra che:

(ii) esiste $p_0 \in S$ di norma massima tra i punti di S;

(iii) p_0 è un punto ellittico di S;

(iv) S contiene un aperto di punti ellittici.

(v) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare compatta e orientabile, non omeomorfa ad una sfera. Mostra che S contiene punti ellittici, iperbolici e a curvatura gaussiana nulla.

2) Sia S la superficie regolare ottenuta ruotando attorno all'asse delle z la curva $\sigma\colon (\frac{\pi}{2}, \pi) \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\sigma(t) = (\sin t, 0, \cos t + \log\tan\frac{t}{2}).$$

(i) Calcola la curvatura gaussiana di S in ogni punto.

(ii) Sia $a \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e sia $\eta_a\colon [0, 2\pi] \to S$ il parallelo ottenuto intersecando S con il piano $\{z = a\}$. Calcola curvatura normale e curvatura geodetica di η_a.

(iii) Siano $a_1, a_2 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $a_1 < a_2$, e sia R la regione di S compresa tra i paralleli η_{a_1} e η_{a_2}. Calcola l'area di R.