Geometria e Topologia Differenziale

Secondo compitino A.A. 2008/09

Nome e Cognome:

---

1) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Dimostra che esistono un intorno aperto $W \subseteq \mathbb{R}^3$ di p in $\mathbb{R}^3$, una funzione $f \in C^\infty(W)$ e un valore regolare $a \in \mathbb{R}$ di f tali che $S \cap W = f^{-1}(a)$.

2) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, e $p \in S$. Posto $\mathfrak{m} = \{\mathbf{f} \in C^\infty(p) \mid \mathbf{f}(p) = 0\}$, dimostra che $\mathfrak{m}$ è l'unico ideale massimale di $C^\infty(p)$, e che T_pS è canonicamente isomorfo al duale (come spazio vettoriale) di $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

3) Sia S la superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva del piano xz di equazione $(x-2)^2 + (z-2)^2 = 2$.

(i) Dimostra che S e' una superficie regolare, e che $p = (1,0,1) \in S$.

(ii) Calcola la prima forma fondamentale di S nel punto p.

(iii) Calcola la seconda forma fondamentale di S nel punto p.

(iv) Calcola la curvatura Gaussiana in tutti i punti di S.

(v) Trova una curva su S passante per p e con curvatura normale massima nel punto p.

(vi) Trova una curva $\sigma\colon I \to S$ su S passante per p e con curvatura normale massima in tutti i suoi punti, cioè tale che

$$\kappa_n(s) = \max\{Q_{\sigma(s)}(v) \mid v \in T_{\sigma(s)}S,\ I_{\sigma(s)}(v) = 1\}$$

per ogni $s \in I$.