Correzione Quarto scritto di Matematica per Biologi, corso B, 2010

31 gennaio 2011

1 Parte 1

Esercizio 1.1. Per risolvere questo esercizio bisogna ricordarsi (formula 2.5 pag. 66 del vostro libro) che per due eventi A e B vale la seguente formula per la probabilità dell'unione

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

e quindi che

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Proviamo, usando i dati in nostro possesso,a vedere che informazioni possiamo ricavare da quest'ultima equazione:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{7} - \frac{17}{56} = \frac{7+8-17}{56} = -\frac{2}{56}.$$

Per il secondo assioma della probabilità (P2 pag. 64) sappiamo che la probabilità di un evento deve essere un numero compreso tra 0 ed 1. Perciò non possono esistere due eventi A e B corrispondenti ai dati dell'esercizio.

Esercizio 1.2. Non è vero che una funzione dispari da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è surgettiva. Un esempio tra tutti è la funzione $\sin(x)$. La funzione $\sin(x)$ è una funzione dispari, in quanto $\sin(-x) = -\sin(x)$; inoltre è una funzione ben definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ma la sua immagine è l'intervallo $[-1, 1]$.

Esercizio 1.3. Per determinare il dominio della funzione data dobbiamo ricordarci che il logaritmo è definito solo se il suo argomento è maggiore di 0 (pag. 241 del vostro libro di testo). Quindi la funzione è ben definita per ogni t tale che $(1 + \cos t)^2 > 0$; ora, visto l'esponente pari a cui viene elevato $1 + \cos t$, sappiamo che $(1 + \cos t)^2 \geq 0$ per ogni t. I punti su cui la funzione non è definita saranno quindi i punti per cui $(1 + \cos t)^2 = 0$, cioè, i punti per cui $1 + \cos t = 0$. Ora, si tratta di risolvere la seguente equazione

$$\cos(t) = -1;$$

che sappiamo essere verificata per $t = \pi + 2k\pi$, dove k è un numero intero. La funzione è definita quindi per ogni $t \neq (2k + 1)\pi$, per $k \in \mathbb{Z}$.

Calcoliamo ora la derivata: dobbiamo ricordarci la formula di derivazione di una funzione composta (pag. 314), cioè,

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Incominciamo calcolando la derivata di $(1+\cos t)^2$: in questo caso la parte della g viene assunta dalla funzione y^2, mentre la parte della f viene assunta dalla funzione $1+\cos t$. La derivata di g è $2y$ e quella della f è $-\sin(t)$. Abbiamo quindi che:

$$(g \circ f)'(x) = 2(1+\cos t) \cdot (-\sin(t)).$$

Utilizziamo ancora la regola di derivazione delle funzioni composte per calcolare la derivata della funzione $\log((1+\cos t)^2)$; in questo caso la parte della g verrà assunta dalla funzione $\log y$ mentre quella della f sarà assunta da $(1+\cos t)^2$ di cui abbiamo calcolato la derivata sopra. Quindi

$$(\log((1+\cos t)^2))' = \frac{1}{(1+\cos t)^2} \cdot 2(1+\cos t) \cdot (-\sin(t)) = \frac{-2\sin t}{1+\cos t}.$$

Equivalentemente, potevamo osservare che per le proprietà dei logaritmi

$$\log((1+\cos t)^2) = 2\log(1+\cos(t));$$

come prima, il logaritmo è definito solo per valori strettamente positivi del suo argomento, cioè quando $1+\cos t > 0$, o, equivalentemente, $\cos t > -1$. Visto che $\cos t$ assume valori compresi in $[-1,1]$ abbiamo che la funzione è definita per ogni t tale che $\cos t \neq -1$ e dunque $t \neq (2k+1)\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$.

Per calcolare la derivata, dobbiamo usare anche qui la formula di derivazione per le funzioni composte, dove il ruolo della g viene giocato dalla funzione $2\log y$ ed il ruolo della f viene giocato da $1+\cos(t)$. La derivata della g è $2/y$, mentre la derivata della f è $-\sin t$ e dunque la derivata della funzione è

$$\frac{-2\sin t}{1+\cos t}.$$

2 Parte 2

Esercizio 2.1.

1. La cosa da notare è che il fatto di poter scegliere sia tra le 26 lettere, sia tra le cifre da 0 a 9 significa che per ogni simbolo abbiamo, in generale, 36 possibili simboli tra cui scegliere. Quindi, per il principio base del calcolo combinatorio (pag. 81 del vostro libro) i possibili codici sono 36^4.

2. Per risolvere questo punto è importante usiamo il fatto che in questa situazione la probabilità è di un evento è data da:

$$\frac{\text{Casi favorevoli}}{\text{Casi possibili}}.$$

   Possiamo contare il numero di codici che contengono solo lettere: per il principio base del calcolo combinatorio sono 26^4. Quindi la probabilità che tutti i simboli di un codice preso a caso siano lettere è

$$\frac{\text{Codici composti solo da lettere}}{\text{Codici possibili}} = \frac{26^4}{36^4} = \left(\frac{26}{36}\right)^4.$$

   Analogamente, poiché il numero di codici composti da sole cifre è 10^4, la probabilità che tutti i simboli siano cifre è

$$\frac{\text{Codici composti solo da cifre}}{\text{Codici possibili}} = \frac{10^4}{36^4} = \left(\frac{10}{36}\right)^4.$$

3. Di nuovo, ricordando che la probabilità di un evento è il rapporto tra i casi favorevoli e i casi possibili, dobbiamo contare i codici in cui $1A$ appare nelle prime due posizioni. Ora, questo significa contare tutti i codici del tipo $1AXX$ dove X è un simbolo qualsiasi dei 36 a nostra disposizione. Quindi i casi favorevoli sono 36^2 e la probabilità è quindi

$$\frac{\text{Codici con } 1A \text{ nelle prime due posizioni}}{\text{Codici possibili}} = \frac{36^2}{36^4} = \frac{1}{36^2}.$$

Ora, il problema di contare i codici in cui 11 appare nelle prime due posizioni è assolutamente analogo. Come prima, stiamo contando tutti i codici del tipo $11XX$ dove X è un simbolo qualsiasi dei 36 a nostra disposizione. Quindi i casi favorevoli sono 36^2 e la probabilità è quindi

$$\frac{\text{Codici con 11 nelle prime due posizioni}}{\text{Codici possibili}} = \frac{36^2}{36^4} = \frac{1}{36^2}.$$

Con un ragionamento analogo si vede che fissate le prime due posizioni di un codice, la probabilità che un codice preso a caso sia di quella forma è $1/36^2$.

4. Dobbiamo contare i codici con 2 cifre e 2 lettere. Per fare questo, dobbiamo prima di tutto contare in quanti modi possiamo scegliere due cifre e due lettere; per il principio base del calcolo combinatorio, i modi sono $10^2 \cdot 36^2 = (36 \cdot 10)^2$. Poi, dobbiamo contare in quanti modi possiamo scegliere le due posizioni del codice in cui mettere nell'ordine le cifre scelte (e metteremo nell'ordine le lettere scelte nelle altre due posizioni). I modi di scegliere due posizioni fra quattro possibili è dato dal coefficiente binomiale

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6\ .$$

Quindi in totale ci sono $6 \cdot (36 \cdot 10)^2$ codici composti da due cifre e due lettere, e la probabilità di scegliere a caso un codice con due cifre e due lettere è dunque:

$$\frac{6 \cdot (36 \cdot 10)^2}{36^4} = \frac{6 \cdot (10)^2}{36^2} = \frac{5^2}{6 \cdot 9} = \frac{25}{54}.$$

Un altro modo per rispondere a questa domanda era considerare il codice come una successione di quattro esperimenti, uno per ogni posizione. Ogni esperimento può dare due risultati possibili (lettera o numero), e gli esperimenti sono indipendenti fra loro. Si tratta quindi di un fenomeno di Bernoulli, e vogliamo calcolare la probabilità di esattamente 2 successi (2 lettere) su 4 esperimenti. La distribuzione binomiale ci dice che la risposta è

$$\binom{4}{2}\left(\frac{10}{36}\right)^2\left(\frac{26}{36}\right)^2 = \frac{25}{54}\ ,$$

come ottenuto precedentemente.

Esercizio 2.2. Questo è un esercizio di programmazione lineare (pag. 165 del vostro libro). La prima cosa da fare è capire quali siano esattamente i vincoli e quale sia la funzione da massimizzare. Indicheremo con x il numero di unità del prodotto X prodotte durante una settimana e con y il numero di unità del prodotto Y prodotte durante una settimana.

All'inizio della settimana la ditta ha in magazzino 30 unità del prodotto X e sappiamo che alla fine della settimana la ditta deve avere a disposizione almeno 60 unità del prodotto X. Il primo vincolo è quindi: $30 + x \geq 60$ o, equivalentemente, $x \geq 30$. Allo stesso modo, sapendo che la ditta ha in magazzino 90 unità del prodotto Y e che a fine settimana ne deve avere almeno 95 otteniamo che $y \geq 5$.

Ora dobbiamo implementare le altre condizioni; visto che per produrre il prodotto X sono necessari 48 minuti (4/5 di ora) sulla macchina A, mentre per il prodotto Y sono necessari 24 minuti (2/5 di ora) sempre sulla macchina A e la ditta ha programmato di usare la macchina A per un massimo di 40 ore, abbiamo l'ulteriore vincolo

$$\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y \leq 40,$$

o, equivalentemente $y \leq 100 - 2x$. Possiamo ripetere un ragionamento analogo per il macchinario B: per produrre un'unità di prodotto X necessita di 45 minuti (3/4 di ora) mentre ogni unità di prodotto Y necessita di 15 minuti (1/4 di ora). Dunque

$$\frac{1}{4}y + \frac{3}{4}x \leq 35,$$

o equivalentemente $y \leq 140 - 3x$.

La funzione da massimizzare è la funzione $x + y$ ed il dominio su cui la massimizziamo è quello colorato di grigio in figura.

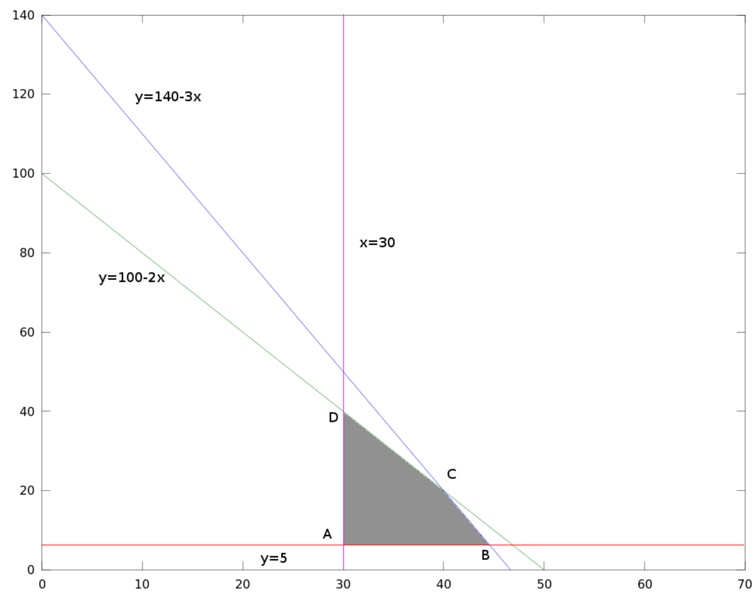

Figure 1: Insieme determinato dai vincoli

Sappiamo inoltre, dalla teoria, che il massimo della funzione verrà assunto in uno dei vertici del bordo del dominio su cui stiamo massimizzando. Proviamo a studiare quali siano i possibili candidati come massimo; per fare ciò restringiamo la funzione $S(x, y) = x+y$ alle diverse rette che compongono il bordo del dominio su cui la stiamo massimizzando.

Se restringiamo la funzione alla retta $x = 30$ abbiamo che $S(30, y) = 30 + y$ è una funzione crescente delle y, quindi $S(D) > S(A)$. Restringiamo ora la funzione S alla retta $y = 140 - 3x$: abbiamo che $S(x, 140 - 3x) = x + 140 - 3x = 140 - 2x$ è una funzione decrescente della x, quindi $S(C) > S(B)$. Se ci restringiamo alla retta $y = 100 - 2x$ abbiamo che la funzione $S(x, 100 - 2x)$ è ancora funzione decrescente delle x e quindi $S(D) > S(C)$. Abbiamo quindi che $S(D) > S(A)$ e che $S(D) > S(C) > S(B)$, dunque la funzione ha il suo massimo in D. Calcoliamone le coordinate; D è il punto di intersezione tra la retta $x = 30$ e la retta $y = 100 - 2x$, quindi, per massimizzare la produzione dobbiamo produrre 30 unità di prodotto x e 40 unità di prodotto y. (Un altro modo per trovare la soluzione era calcolare direttamente il valore della funzione S nei quattro vertici A, B, C e D, e vedere in quale vertice la funzione assumeva il valore massimo).

Esercizio 2.3. Troviamo innanzitutto il dominio di definizione della funzione. Come già osservato, il logaritmo è definito per valori strettamente positivi dell'argomento. Dobbiamo dunque studiare la seguente disequazione

$$\frac{1+t^2}{t-1} > 0.$$

Osserviamo subito che il numeratore è sempre strettamente positivo; il segno della funzione razionale che stiamo studiando è quindi determinato dal segno del denominatore, cioè quando $t - 1 > 0$. La funzione è definita, quindi, per $t > 1$, cioè il suo dominio è la semiretta $(1, +\infty)$. Studiamone i limiti per t che tende ad 1^+ e per t che tende a $+\infty$. Per t che tende ad 1^+ abbiamo che $(1 + t^2)/(t - 1)$ tende a $+\infty$ per cui

$$\lim_{t \to 1^+} \log\left(\frac{1+t^2}{t-1}\right) = +\infty.$$

Per t che tende a $+\infty$ abbiamo che $(1+t^2)/(t-1)$ tende nuovamente a $+\infty$ per cui

$$\lim_{t \to +\infty} \log\left(\frac{1+t^2}{t-1}\right) = +\infty.$$

Studiamo ora il segno della funzione, cioè per quali valori di t si ha

$$\log\left(\frac{1+t^2}{t-1}\right) > 0.$$

Siccome il logaritmo naturale di un numero è positivo se e solo se questo numero è maggiore di 1, dobbiamo studiare la disequazione

$$\frac{1+t^2}{t-1} > 1.$$

Ma questa ci interessa solo nel dominio della funzione, che è $(1 + \infty)$, dove $t - 1 > 0$; quindi è equivalente studiare la disequazione

$$1 + t^2 > t - 1.$$

Dunque, per quali valori di t abbiamo che $t^2 - t + 2 > 0$? Visto che il discriminante di questa equazione di secondo grado è negativo (e quindi non esiste un t per cui la funzione si annulla) e $t^2 - t + 2$ ha almeno un valore positivo (in $t = 0$ vale 2) abbiamo che è sempre positiva. Di conseguenza la funzione $Q(t)$ è sempre positiva.

Calcoliamo ora la derivata, ricordandoci che possiamo scrivere $Q(t)$ nella forma più comoda $Q(t) = \log(1 + t^2) - \log(t - 1)$. Abbiamo quindi che

$$Q'(t) = \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1}{t-1} = \frac{2t(t-1) - (1+t^2)}{(1+t^2)(t-1)} = \frac{t^2 - 2t - 1}{(1+t^2)(t-1)}.$$

Studiamo ora il segno della derivata; la prima osservazione che possiamo fare è che per ogni t nell'insieme di definizione della funzione ($t > 1$) il denominatore ha segno positivo, per cui non contribuisce allo studio del segno della funzione. Studiamo quindi il segno del denominatore $t^2 - 2t - 1 \geq 0$. L'equazione $t^2 - 2t - 1 = 0$ ha una soluzione in $1 - \sqrt{2}$ (che non appartiene al dominio di $Q(t)$) ed una soluzione in $1 + \sqrt{2}$. Sappiamo inoltre che il suo segno è negativo per t compreso tra $1-\sqrt{2}$ e $1+\sqrt{2}$; abbiamo quindi che la funzione $Q(t)$ è decrescente per t compreso tra 1 e $1 + \sqrt{2}$ e crescente da $1 + \sqrt{2}$ in poi.

Calcoliamo ora la derivata seconda, usando la forma "comoda" della derivata prima, quella con i due addendi $2t/(1 + t^2)$ e $1/(t - 1)$. Abbiamo quindi

$$Q''(t) = \frac{2(1+t^2) - 2t(2t)}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{(t-1)^2} = -\frac{2t^2 - 2}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{(t-1)^2}.$$

Ne studiamo ora il segno

$$-\frac{2t^2 - 2}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{(t-1)^2} \geq 0, \quad \text{o equivalentemente } \frac{-t^4 + 4t^3 + 2t^2 - 4t + 3}{(1+t^2)^2(t-1)^2} \geq 0.$$

Anche ora, il segno della derivata seconda dipende solo dal numeratore.

Studiamo perciò il numeratore: lo indicheremo con $N(t)$ ed investighiamo qual è il suo comportamento; ciò che ci interessa è capire se $N(t)$ abbia o meno degli zeri nel dominio della funzione. Chiaramente $N(t)$ è un polinomio di quarto grado; un polinomio di quarto grado ha al più quattro radici, dunque il segno di $Q''(t)$ cambierà al più quattro volte. Inoltre, essendo $N(t)$ un polinomio, sia $N(t)$ sia le sue derivate sono definite e continue su tutto $\mathbb{R}$.

Visto che $N(1) = 4$ e $\lim_{t\to+\infty} N(t) = -\infty$, abbiamo che il numeratore si annullerà almeno una volta nel dominio di definizione della funzione $Q(t)$. Per capire qualitativamente il comportamento di $N(t)$ calcoliamo

$$N'(t) = -4t^3 + 12t^2 + 4t - 4$$

e

$$N''(t) = -12t^2 + 24t + 4$$

le usiamo per capire il comportamento del numeratore. Nel grafico 2 potete trovare i grafici di $N(t), N'(t)$ e $N''(t)$.

La derivata seconda del numeratore (in rosso nel grafico 2) ha un solo zero nel dominio di definizione della funzione, in $(2\sqrt{3} + 3)/3$, ed è positiva tra 1 e $(2\sqrt{3} + 3)/3$ e negativa da $(2\sqrt{3} + 3)/3$ in poi. Questo significa che $N'(t)$ (in

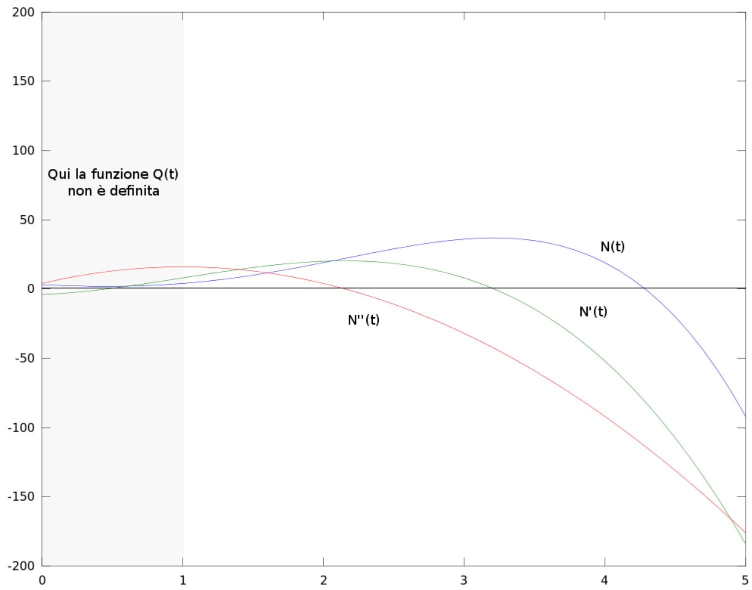

Figure 2: Grafico del numeratore della derivata seconda e sue derivate

verde nel grafico 2) è crescente tra 1 e $(2\sqrt{3}+3)/3$ e decrescente da $(2\sqrt{3}+3)/3$ in poi. Dallo studio di $N''(t)$ e visto che

$$N'(1) = 8 \quad \text{e} \lim_{t\to+\infty} N'(t) = -\infty,$$

questo significa che la derivata del numeratore si annulla per un solo valore $\alpha > (2\sqrt{3}+3)/3$; infatti, se vi fossero altri zeri, $N'(t)$ dovrebbe raggiungere un minimo locale e poi tornare a crescere e questo comportamento verrebbe rispecchiato da un ulteriore cambiamento di segno di $N''(t)$. Quindi $N(t)$ (in blu nel grafico 2) è crescente per t compreso tra 1 e α e decrescente da α in poi. Con un ragionamento analogo, usando le informazione che abbiamo sul segno di $N'(t)$, visto che $\lim_{t\to+\infty} N(t) = -\infty$ e $N(1) = 4$, abbiamo che $N(t)$ si annullerà per un solo $\beta > \alpha$ ed avremo quindi un cambio di concavità della funzione $Q(t)$, cosa che può essere vista chiaramente nel grafico 3.

La seconda domanda ci chiede per quali valori di t il modello effettivamente rispecchia il fenomeno preso in considerazione. Dallo studio dei limiti della funzione ci accorgiamo che la quantità di antidoto necessaria tende a più infinito per t che tende ad 1. Questo tipo di comportamento è poco plausibile: è ragionevole supporre che in una situazione reale la quantità di antidoto cresca all'aumentare della quantità di tossina. Questo ci fa pensare che il modello rispecchi il fenomeno solo per $t > 1 + \sqrt{2}$.

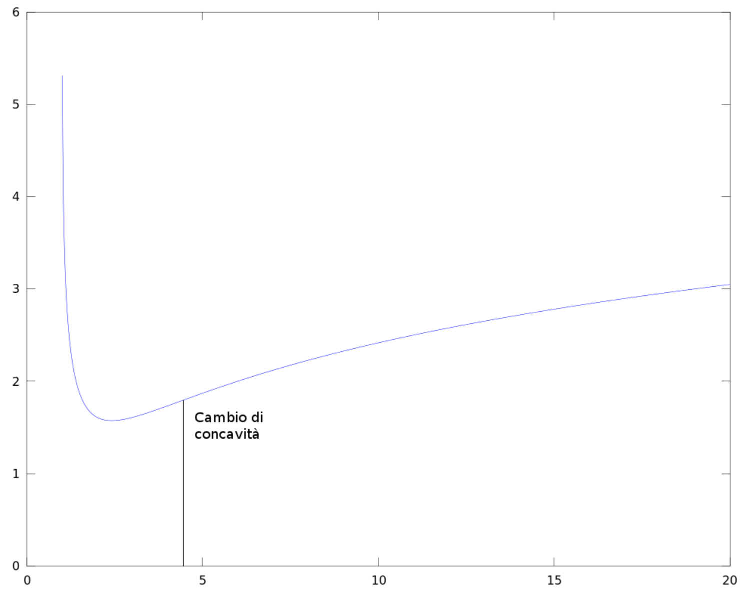

Figure 3: Grafico della funzione $Q(t)$

Calcoliamo ora il limite che ci viene proposto nella terza domanda

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\frac{Q(t)}{\log t} &= \lim_{t\to+\infty}\frac{\log\left(\frac{1+t^2}{1-t}\right)}{\log t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\log\left(\frac{t^2}{t}\frac{(1/t^2)+1}{1-(1/t)}\right)}{\log t}\\ &= \lim_{t\to+\infty}\frac{\log t+\log\left(\frac{(1/t^2)+1}{1-(1/t)}\right)}{\log t}=1+\lim_{t\to+\infty}\frac{\log\left(\frac{(1/t^2)+1}{1-(1/t)}\right)}{\log t}=1.\end{aligned}$$