MATEMATICA E STATISTICA — CORSO B
PROF. MARCO ABATE

SOLUZIONI PRIMO SCRITTO

11 aprile 2007

1. Parte I

Esercizio 1.1. *Lunedì il prezzo della benzina al distributore è salito del* 10% *rispetto al prezzo del sabato precedente. Mercoledì il prezzo della benzina si riabbassa del* 10% *rispetto al prezzo di lunedì. Rispetto a sabato, il prezzo della benzina è aumentato, diminuito o rimasto costante? Perché?*

Indicando con P_S, P_L e P_M rispettivamente i prezzi della benzina il sabato, il lunedì e il mercoledì, si ha

$$P_L = \left(1 + \frac{10}{100}\right) P_S = 1.1 P_S,$$

$$P_M = \left(1 - \frac{10}{100}\right) P_L = 0.9 P_L = 0.99 P_S.$$

Pertanto il prezzo della benzina è diminuito dell'1% da sabato a mercoledì.

Esercizio 1.2. *La funzione* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *data da* $f(x) = x^2$ *è invertibile?*

Una funzione è invertibile se e solo se è iniettiva e suriettiva. La funzione data non è iniettiva in quanto $f(2) = f(-2) = 4$. Pertanto f non è invertibile.

Esercizio 1.3. *Calcola il seguente integrale*

$$\int_{-1}^{0} (3x^2 + 2x + 1)\, dx\ .$$

Usando la linearità degli integrali, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} (3x^2 + 2x + 1) dx &= \int_{-1}^{0} 3x^2 dx + \int_{-1}^{0} 2x dx + \int_{-1}^{0} 1\, dx \\ &= x^3\Big|_{-1}^{0} + x^2\Big|_{-1}^{0} + x\Big|_{-1}^{0} = -1 + 1 - 1 = -1. \end{aligned}$$

2. Parte II

Esercizio 2.1. *Ti hanno rubato il cellulare, fortunatamente dotato di codice PIN (formato da 4 cifre numeriche). Qual è la probabilità che il ladro riesca ad indovinare il codice,*

(1) *non avendo nessuna informazione?*
(2) *sapendo che la prima cifra del codice è* 0*?*
(3) *sapendo che una cifra (e una sola cifra) del codice è* 0*?*
(4) *sapendo che le cifre sono* $0, 1, 2, 3$*, ma non sapendo l'ordine?*
(5) *sapendo che le cifre sono* $2, 2, 3, 9$*, ma non sapendo l'ordine?*

(1) I numeri da 0000 a 9999 sono $10000 = 10^4$ (opppure: per ogni cifra ho 10 possibilità… 10^4 possibilità in totale). $P = \frac{1}{10^4}$.

(2) I numeri da 0000 a 0999 sono $1000 = 10^3$ (oppure: per la prima cifra ho un'unica possibilità, per ognuna delle altre tre…). $P = \frac{1}{10^3}$.

(3) Per decidere quale cifra del codice è 0 abbiamo 4 possibilità. Ognuna delle altre cifre può essere scelta in 9 modi diversi (le cifre tra 1 e 9). Pertanto i codici possibili sono $4 \cdot 9^3$ e $P = \frac{1}{4 \cdot 9^3}$.

(4) Lo 0 può stare in 4 posti, l'1 in uno dei 3 rimanenti... I codici possibili sono $4! = 24$ e $P = \frac{1}{24}$.

(5) Il 3 può stare in 4 posti possibili, il 9 in uno dei 3 rimanenti e gli ultimi due spazi hanno obbligatoriamente dei 2. Pertanto i codici possibili sono $4 \cdot 3 = 12 = \frac{4!}{2!}$ (perché?) e $P = \frac{1}{12}$.

Esercizio 2.2. *Misuri l'altezza di un albero in funzione del tempo. Quando hai iniziato l'esperimento ($t = 0$), l'altezza dell'albero era di* 1.00 m. *Dopo una settimana ($t = 1$) l'altezza dell'albero era di* 1.04 m. *Dopo due settimana ($t = 2$), di* 1.10 m. *Supponendo che l'altezza dipenda in modo quadratico dal tempo, trova la funzione che esprime la crescita dell'albero. La funzione che hai trovato può rappresentare la crescita dell'albero anche per tempi precedenti all'inizio della tua misurazione? A partire da quando? Perché?*

La generica funzione quadratica è $h(t) = at^2 + bt + c$. Troviamo a, b, c imponendo il passaggio per i punti dati; si ottiene

$$\begin{cases} 1.00 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \\ 1.04 = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \\ 1.10 = a \cdot 4 + b \cdot 2 + c \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0.01 \\ b = 0.03 \\ c = 1 \end{cases}$$

Pertanto $h(t) = 0.01t^2 + 0.03t + 1$.

Condizioni di sensatezza per la funzione trovata sono sicuramente che l'altezza dell'albero sia sempre positiva ($h \geq 0$) e che l'altezza dell'albero non decresca nel tempo. Il vertice della parabola è in $(-1.5, 0.9925)$; pertanto la prima condizione è sempre verificata e la seconda è verificata per $t \geq -1.5$. Bisogna pertanto richiedere che $t \geq -1.5$.

Esercizio 2.3. *Studiando la crescita della popolazione di rane in uno stagno, giungi alla conclusione che il numero N di individui varia nel tempo secondo la funzione*

$$N(t) = 100 + 50\frac{e^t - 1}{e^t + 1} .$$

Studia la funzione N (anche per tempi negativi).

Dominio. L'unica cosa da verificare è che il denominatore non si annulli. Ora, $e^t + 1 > 0$ per ogni t, dato che entrambi gli addendi sono positivi. Quindi $D = \mathbb{R}$.

Simmetrie. Vediamo se $N(t)$ è pari o dispari:

$$N(-t) = 100 + 50\frac{e^{-t} - 1}{e^{-t} + 1} = 100 + 50\frac{1 - e^t}{1 + e^t} = 100 - 50\frac{e^t - 1}{e^t + 1},$$

ovvero $N(t)$ non è né pari né dispari. Da quanto scritto sopra si vede che la parte pari è 100 e la parte dispari è $50\frac{e^t-1}{e^t+1}$.

Segno. Per studiare il segno riscriviamo $N(t)$ come

$$N(t) = \frac{150e^t + 50}{e^t + 1} .$$

Numeratore e denominatore sono sempre positivi, quindi $N(t) > 0$ per ogni t.

Limiti. Dobbiamo studiare i limiti per t che tende a $\pm\infty$.

$$\lim_{t \to -\infty} N(t) = \left[\frac{150 \cdot 0 + 50}{0 + 1}\right] = \left[\frac{50}{1}\right] = 50,$$

$$\lim_{t \to +\infty} N(t) = \left[\frac{150 \cdot \infty + 50}{\infty + 1}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Quest'ultimo limite è in forma indeterminata "infinito-su-infinito". Pertanto possiamo applicare de l'Hôpital:

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{150e^t}{e^t} = \lim_{t\to\infty} 150 = 150.$$

Crescenza. Per studiare la crescenza, dobbiamo calcolare la derivata prima di $N(t)$ e studiarne il segno.

$$N'(t) = 0 + 50\frac{e^t(e^t+1) - (e^t-1)e^t}{(e^t+1)^2} = 100\frac{e^t}{(e^t+1)^2} \ .$$

Sia il numeratore sia il denominatore sono sempre positivi, pertanto $N(t)$ è sempre crescente.

Concavità. Per studiare la concavità, dobbiamo calcolare la derivata seconda di $N(t)$ e studiarne il segno.

$$N''(t) = 100\frac{e^t(e^t+1)^2 - e^t2(e^t+1)e^t}{(e^t+1)^4} = 100\frac{e^t(1-e^t)}{(e^t+1)^3} \ .$$

Il denominatore è sempre positivo, $100e^t$ pure, pertanto il segno è dato dal segno di $1-e^t$. Ora, $1-e^t > 0$ se e solo se $t < 0$. Pertanto per $t < 0$ $N(t)$ è convessa, per $t > 0$ è concava, e $t = 0$ è un punto di flesso.

Le informazioni raccolte sono riassunte nel grafico.