

# Geometria analitica dello spazio

*Note per l'insegnamento di Matematica per Scienze Naturali e Ambientali e Scienze Geologiche*

Marco Abate

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

Largo Pontecorvo 5, 56127 Pisa

E-mail: [marco.abate@unipi.it](mailto:marco.abate@unipi.it)

Dicembre 2015

# Capitolo 1

## Geometria analitica dello spazio

---

### 1.1 Coordinate cartesiane nello spazio

In queste note indicheremo con  $\mathcal{A}^2$  il piano euclideo e con  $\mathcal{A}^3$  lo spazio euclideo.

Nella Sezione 3.2 del libro di testo abbiamo visto come la scelta di 3 punti  $O$ ,  $A_1$  e  $A_2$  non allineati nel piano euclideo permette di introdurre delle coordinate nel piano, permette cioè di trovare una funzione bigettiva  $\Phi: \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  che associa a ogni punto  $P \in \mathcal{A}^2$  le sue *coordinate*  $(x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2$  rispetto al *sistema di riferimento*  $R(O, A_1, A_2)$  di *origine*  $O$ .

In breve, la procedura è la seguente:

- la scelta dei punti  $O$  e  $A_1$  determina una corrispondenza biunivoca fra la retta (detta *asse  $x$*  o *asse delle ascisse*) passante per i punti  $O$  e  $A_1$  e l'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali, che associa a  $O$  il numero 0 e ad  $A_1$  il numero 1, per cui il segmento  $\overline{OA_1}$  funge da unità di misura sull'asse  $x$ ;
- analogamente, la scelta dei punti  $O$  e  $A_2$  determina una corrispondenza biunivoca fra la retta (detta *asse  $y$*  o *asse delle ordinate*) passante per i punti  $O$  e  $A_2$  e l'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali, che associa a  $O$  il numero 0 e ad  $A_2$  il numero 1, per cui il segmento  $\overline{OA_2}$  funge da unità di misura sull'asse  $y$ ;
- preso un punto  $P \in \mathcal{A}^2$ , la retta passante per  $P$  e parallela all'asse  $y$  interseca l'asse  $x$  in un unico punto, a cui corrisponde il numero reale  $x_P \in \mathbb{R}$ , detto *ascissa* di  $P$ ; analogamente, la retta passante per  $P$  e parallela all'asse  $x$  interseca l'asse  $y$  in un unico punto, a cui corrisponde il numero reale  $y_P \in \mathbb{R}$ , detto *ordinata* di  $P$ , e si pone  $\Phi(P) = (x_P, y_P)$ ;
- viceversa, data una coppia  $(x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2$ , si trova il punto  $P = \Phi^{-1}(x_P, y_P) \in \mathcal{A}^2$  come intersezione della retta passante per il punto dell'asse  $x$  di ascissa  $x_P$  parallela all'asse  $y$  con la retta passante per il punto dell'asse  $y$  di ordinata  $y_P$  parallela all'asse  $x$ .

Nello spazio  $\mathcal{A}^3$  una procedura analoga permette di costruire una funzione bigettiva  $\Psi: \mathcal{A}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  che associa a ogni punto  $P \in \mathcal{A}^3$  le sue coordinate  $(x_P, y_P, z_P) \in \mathbb{R}^3$ :

- si scelgono quattro punti  $O$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  non contenuti in uno stesso piano, che formeranno un *sistema di riferimento*  $R(O, A_1, A_2, A_3)$  di *origine*  $O$ ;
- la scelta dei punti  $O$  e  $A_1$  determina una corrispondenza biunivoca fra la retta (detta *asse  $x$* ) passante per i punti  $O$  e  $A_1$  e l'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali, che associa a  $O$  il numero 0 e ad  $A_1$  il numero 1, per cui il segmento  $\overline{OA_1}$  funge da unità di misura sull'asse  $x$ ;
- analogamente, la scelta dei punti  $O$  e  $A_2$  determina una corrispondenza biunivoca fra la retta (detta *asse  $y$* ) passante per i punti  $O$  e  $A_2$  e l'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali, che associa a  $O$  il numero 0 e ad  $A_2$  il numero 1, per cui il segmento  $\overline{OA_2}$  funge da unità di misura sull'asse  $y$ ;
- inoltre, la scelta dei punti  $O$  e  $A_3$  determina una corrispondenza biunivoca fra la retta (detta *asse  $z$* ) passante per i punti  $O$  e  $A_3$  e l'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali, che associa a  $O$  il numero 0 e ad  $A_3$  il numero 1, per cui il segmento  $\overline{OA_3}$  funge da unità di misura sull'asse  $z$ ;
- il piano contenente i punti  $O$ ,  $A_1$  e  $A_2$  sarà chiamato *piano (coordinato)  $xy$* ; il piano contenente i punti  $O$ ,  $A_1$  e  $A_3$  sarà chiamato *piano (coordinato)  $xz$* ; il piano contenente i punti  $O$ ,  $A_2$  e  $A_3$  sarà chiamato *piano (coordinato)  $yz$* ;
- preso un punto  $P \in \mathcal{A}^3$ , il piano (e non la retta) passante per  $P$  e parallelo al piano  $yz$  interseca l'asse  $x$  in un unico punto, a cui corrisponde il numero reale  $x_P \in \mathbb{R}$ , detto *ascissa* di  $P$ ; analogamente, il piano passante per  $P$  e parallelo al piano  $xz$  interseca l'asse  $y$  in un unico punto, a cui corrisponde il numero reale  $y_P \in \mathbb{R}$ , detto *ordinata* di  $P$ ; infine, il piano passante per  $P$  e parallelo al piano  $xy$  interseca

l'asse  $z$  in un unico punto, a cui corrisponde il numero reale  $z_P \in \mathbb{R}$ , detto *altezza* di  $P$ , e si pone  $\Psi(P) = (x_P, y_P, z_P)$ ;

- viceversa, data una tripla  $(x_P, y_P, z_P) \in \mathbb{R}^3$ , si trova il punto  $P = \Phi^{-1}(x_P, y_P, z_P) \in \mathcal{A}^3$  come intersezione di tre piani: il piano parallelo al piano  $yz$  passante per il punto dell'asse  $x$  di ascissa  $x_P$ , il piano parallelo al piano  $xz$  passante per il punto dell'asse  $y$  di ordinata  $y_P$ , e il piano parallelo al piano  $xy$  passante per il punto dell'asse  $z$  di ascissa  $z_P$ .

Nel seguito supporremo di aver fissato una volta per tutte un sistema di riferimento  $R(O, A_1, A_2, A_3)$ , e di conseguenza identificheremo lo spazio euclideo  $\mathcal{A}^3$  con l'insieme  $\mathbb{R}^3$  delle terne di numeri reali. In particolare, per noi un punto  $P$  sarà sempre dato da una terna di numeri reali  $(x_P, y_P, z_P) \in \mathbb{R}^3$ .

**Osservazione 1.1.1.** Per motivi che saranno più chiari quando studieremo l'algebra lineare, gli elementi di  $\mathbb{R}^3$  saranno spesso scritti anche come colonne (e non solo come righe) di numeri reali. Per esempio, per dire che il punto  $P$  ha coordinate  $(x_P, y_P, z_P)$  scriveremo

$$P = \begin{vmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{vmatrix}.$$

In particolare,

$$O = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

**Osservazione 1.1.2.** Su  $\mathbb{R}^3$  è naturale introdurre due operazioni, una *somma* e un *prodotto per scalari*, operando componente per componente. Per l'esattezza, si ha

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{vmatrix}$$

e

$$\lambda \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{vmatrix}$$

dove  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Le proprietà algebriche di queste operazioni seguono immediatamente dalle proprietà della somma e del prodotto fra numeri reali. In maniera analoga si definiscono, componente per componente, una somma e un prodotto per scalari sull'insieme  $\mathbb{R}^n$  delle  $n$ -uple di numeri reali.

**Definizione 1.1.1:** Diremo che due punti  $v^1, v^2 \in \mathbb{R}^3$  con  $v^1, v^2 \neq O$  sono *proporzionali* se esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che  $v^2 = \lambda v^1$ . (Quando studieremo l'algebra lineare diremo che sono *linearmente dipendenti*.)

**Osservazione 1.1.3.** Una volta fissato un sistema di riferimento  $R(O, A_1, A_2, A_3)$ , a ogni punto  $P \in \mathcal{A}^3$  possiamo associare anche il *vettore applicato nell'origine*  $\overrightarrow{OP}$ ; indicheremo con  $\mathcal{V}_O^3$  l'insieme dei vettori applicati nell'origine. In particolare, il vettore  $\overrightarrow{OO}$  sarà detto *vettore nullo*; inoltre porremo  $\vec{i} = \overrightarrow{OA_1}$ ,  $\vec{j} = \overrightarrow{OA_2}$  e  $\vec{k} = \overrightarrow{OA_3}$ . Analoghe definizioni si possono introdurre nel piano, ottenendo  $\mathcal{V}_O^2$ .

Anche su  $\mathcal{V}_O^3$  possiamo introdurre una somma e un prodotto per scalari. La *somma* di due vettori applicati  $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2} \in \mathcal{V}_O^3$  è il vettore  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$  il cui estremo  $P$  è il quarto vertice del parallelogramma di vertici  $O, P_1$  e  $P_2$ . Il *prodotto* di un vettore applicato  $\overrightarrow{OP_1} \in \mathcal{V}_O^3$  per uno *scalare*  $\lambda \in \mathbb{R}$  è il vettore applicato  $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OP_1}$  il cui estremo  $P$  si trova sulla retta  $r$  passante per  $O$  e  $P_1$ , e ha coordinata  $\lambda$  su questa retta rispetto al sistema di coordinate dato da  $O$  e  $P_1$  (in altre parole, il segmento  $\overrightarrow{OP}$  è lungo  $|\lambda|$  volte il segmento  $\overrightarrow{OP_1}$ , e  $P$  è sulla semiretta determinata da  $O$  e  $P_1$  se  $\lambda > 0$ , sulla semiretta opposta se  $\lambda < 0$ ). Maggiori dettagli su queste operazioni si trovano nella Sezione 10.1 del libro di testo.

**Osservazione 1.1.4.** Le operazioni introdotte su  $\mathbb{R}^3$  e quelle introdotte su  $\mathcal{V}_O^3$  sono strettamente correlate. Infatti usando un po' di geometria euclidea dello spazio è possibile dimostrare che

$$P = \begin{vmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{se e solo se} \quad \overrightarrow{OP} = x_P \vec{i} + y_P \vec{j} + z_P \vec{k}.$$

Di conseguenza, usando le proprietà distributive e associative della somma e del prodotto per scalari, si trova che se  $P_1$  ha coordinate  $(x_1, y_1, z_1)$  e  $P_2$  ha coordinate  $(x_2, y_2, z_2)$  allora

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} \quad \text{se e solo se} \quad P = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

e

$$\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OP_1} \quad \text{se e solo se} \quad P = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

In altre parole, una volta fissato un sistema di riferimento, *sommare o moltiplicare per uno scalare vettori applicati o terne di numeri reali è esattamente la stessa cosa*. Per questo motivo (una volta fissato un sistema di riferimento) noi identificheremo sistematicamente punti dello spazio euclideo, vettori applicati nell'origine e terne di numeri reali, e useremo indistintamente le parole “punto” o “vettore” anche per indicare gli elementi di  $\mathbb{R}^3$ .

## 1.2 Piani

In questa sezione vogliamo mostrare come sia possibile descrivere i punti di un dato piano una volta fissato un riferimento cartesiano.

**ESEMPIO 1.2.1.** Sia  $\pi_{yz}$  il piano  $yz$ . Per definizione, i punti di  $\pi_{yz}$  sono esattamente i punti di  $\mathbb{R}^3$  con ascissa uguale a 0; in formule,

$$\pi_{yz} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \right\}.$$

**ESEMPIO 1.2.2.** Sia  $\pi$  un piano parallelo al piano  $\pi_{yz}$ . Di nuovo per definizione, i punti di  $\pi$  hanno tutti la stessa ascissa, che chiameremo  $d$ ; viceversa, ogni punto di ascissa  $d$  appartiene al piano  $\pi$ . In altre parole,

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = d \right\}.$$

Negli esempi precedenti, i punti di un piano sono stati identificati come i punti dello spazio le cui coordinate soddisfano una certa equazione. Questo è sempre possibile:

**Definizione 1.2.1:** Dati  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  con  $a, b, c$  non tutti nulli, il piano  $\pi$  di equazione cartesiana

$$ax + by + cz = d \tag{1.2.1}$$

è dato da

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d \right\}.$$

In altre parole, i punti del piano sono tutti e soli i punti dello spazio le cui coordinate soddisfano l'equazione  $ax + by + cz = d$ . I coefficienti  $a, b$  e  $c$  sono i *parametri di giacitura* del piano  $\pi$ . Il piano  $\pi_0$  di equazione cartesiana  $ax + by + cz = 0$  (cioè stessi parametri di giacitura ma termine noto nullo) è il *piano di giacitura* del piano  $\pi$ .

**Osservazione 1.2.1.** Per definizione, un punto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  appartiene al piano  $\pi$  di equazione cartesiana  $ax + by + cz = d$  se e solo se  $d = ax_0 + by_0 + cz_0$ .

**Osservazione 1.2.2.** Supponi che siano fissati i parametri di giacitura  $a_0, b_0, c_0$ , e indichiamo con  $\pi_d$  il piano di equazione cartesiana  $a_0x + b_0y + c_0z = d$ , con  $d \in \mathbb{R}$ . I piani  $\pi_d$  al variare di  $d \in \mathbb{R}$  sono tutti a due a due disgiunti (perché?), cioè sono paralleli. In particolare,  $O \in \pi_d$  se e solo se  $d = 0$ ; quindi il piano di giacitura è l'unico piano passante per l'origine e parallelo al piano dato.

**Osservazione 1.2.3.** L'equazione cartesiana di un piano  $\pi$  non è unica. Infatti, se  $\lambda \neq 0$  allora

$$ax + by + cz = d \quad \text{se e solo se} \quad \lambda(ax + by + cz) = \lambda d \quad \text{se e solo se} \quad (\lambda a)x + (\lambda b)y + (\lambda c)z = \lambda d,$$

per cui  $ax + by + cz = d$  e  $(\lambda a)x + (\lambda b)y + (\lambda c)z = \lambda d$  sono equazioni cartesiane dello stesso piano (perché?). Viceversa, è possibile far vedere che due equazioni della forma (1.2.1) determinano lo stesso piano se e solo se sono una un multiplo dell'altra.

Vediamo di capire se riusciamo a descrivere quali punti  $P \in \mathbb{R}^3$  appartengono al piano  $\pi$  di equazione cartesiana  $ax + by + cz = d$ . Per ipotesi, almeno uno dei parametri di giacitura è non nullo; supponiamo  $a \neq 0$  (se  $a = 0$  si procederà in modo analogo usando uno degli altri parametri di giacitura). Allora  $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  appartiene al piano  $\pi$  se e solo se

$$ax + by + cz = d \quad \text{se e solo se} \quad x = \frac{d}{a} - \frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z.$$

In altre parole,  $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  appartiene al piano  $\pi$  se e solo se

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (d/a) - (b/a)y - (c/a)z \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d/a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} -c/a \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Scrivendo

$$P_0 = \begin{vmatrix} d/a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad v = \begin{vmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad w = \begin{vmatrix} -c/a \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix},$$

abbiamo quindi ottenuto che tutti i punti  $P \in \pi$  si possono scrivere nella forma

$$P = P_0 + yv + zw,$$

dove  $y, z \in \mathbb{R}$  sono numeri reali qualsiasi. Questo suggerisce di introdurre la seguente

**Definizione 1.2.2:** Dati  $P_0, v, w \in \mathbb{R}^3$ , con  $v, w \neq O$  non proporzionali, il piano  $\pi$  passante per  $P_0$  e di vettori di giacitura  $v$  e  $w$  è l'insieme dei punti della forma

$$P = P_0 + sv + tw, \tag{1.2.2}$$

al variare di  $s, t \in \mathbb{R}$ . In altre parole,  $\pi$  è l'immagine della funzione  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la cui espressione è data da  $F(s, t) = P_0 + sv + tw$ . La formula (1.2.2) è detta *equazione parametrica* del piano  $\pi$ , e  $s$  e  $t$  sono detti *parametri*. Il piano di giacitura  $\pi_0$  di  $\pi$  ha equazione parametrica  $P = sv + tw$ .

In altre parole ancora, se

$$P_0 = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}, \quad v = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix}, \quad w = \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{vmatrix},$$

allora un punto  $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  appartiene al piano passante per  $P_0$  e avente vettori di giacitura  $v$  e  $w$  se e solo se esistono  $s, t \in \mathbb{R}$  tali che

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix} + s \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 + sv_1 + tw_1 \\ y_0 + sv_2 + tw_2 \\ z_0 + sv_3 + tw_3 \end{vmatrix}. \tag{1.2.3}$$

Vogliamo trovare un'equazione cartesiana di un piano di equazione parametrica (1.2.2). In altre parole, dobbiamo trovare  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  con  $a, b, c$  non tutti nulli in modo che tutti i punti della forma (1.2.3) soddisfino la relazione  $ax + by + cz = d$ . In altre parole, vogliamo che

$$a(x_0 + sv_1 + tw_1) + b(y_0 + sv_2 + tw_2) + c(z_0 + sv_3 + tw_3) = d$$

sia vero per *qualsiasi*  $s, t \in \mathbb{R}$ . Raccogliendo  $s$  e  $t$  a sinistra, e portando a destra tutti i termini che non dipendono da  $s$  e  $t$ , otteniamo

$$(av_1 + bv_2 + cv_3)s + (aw_1 + bw_2 + cw_3)t = d - ax_0 - by_0 - cz_0.$$

Ora, il membro sinistro è una funzione di  $s$  e  $t$ , mentre il membro destro è una costante; quindi perché i due membri siano uguali occorre che anche il membro sinistro sia costante. Ma questo può accadere (perché?) se e solo se i coefficienti di  $s$  e  $t$  sono uguali a zero — e di conseguenza anche il membro destro dev'essere uguale a zero. In altre parole,  $a, b, c$  e  $d$  devono soddisfare il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} av_1 + bv_2 + cv_3 = 0, \\ aw_1 + bw_2 + cw_3 = 0, \\ ax_0 + by_0 + cz_0 = d. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

Questo è un sistema lineare di tre equazioni in quattro incognite ( $a, b, c$  e  $d$ ), le cui soluzioni ci forniscono i parametri di giacitura del piano  $\pi$ . Per risolverlo, conviene usare le prime due equazioni per trovare  $a, b$  e  $c$  (a meno di un multiplo; ricorda l'Osservazione 1.2.3); mettendo i valori trovati nella terza equazione si ricava  $d$ . Ma vediamo un esempio.

ESEMPIO 1.2.3. Vogliamo trovare un'equazione cartesiana per il piano  $\pi$  di equazione parametrica

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} + s \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}. \quad (1.2.5)$$

Il sistema (1.2.4) in questo caso è

$$\begin{cases} a - b + c = 0, \\ a + b + c = 0, \\ b + 2c = d. \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda ci riconduciamo al sistema

$$\begin{cases} a - b + c = 0, \\ 2b = 0, \\ b + 2c = d, \end{cases}$$

da cui segue subito

$$\begin{cases} a = -c, \\ b = 0, \\ d = 2c. \end{cases}$$

Quindi un'equazione cartesiana di  $\pi$  è della forma  $-cx + cz = 2c$ , con  $c \neq 0$  qualsiasi; come previsto, l'equazione cartesiana è definita a meno di un multiplo ( $c$ ). Per esempio, prendendo  $c = 1$  troviamo l'equazione

$$-x + z = 2.$$

Per verificare l'esattezza del risultato, è sufficiente inserire le espressioni di  $x, y$  e  $z$  date da (1.2.5) nell'equazione cartesiana trovata e verificare che si ottiene un'identità. E infatti si ha  $-(s+t) + (2+s+t) = 2$  per qualsiasi valore di  $s$  e  $t$ , come desiderato.

Vogliamo ora fornire un'interpretazione geometrica dei parametri di giacitura di un piano. Nella Sezione 10.2 del libro di testo è spiegato come usare il prodotto scalare per determinare il coseno  $\theta$  dell'angolo fra due vettori (applicati nell'origine)  $v, w \in \mathbb{R}^2$ :

$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}, \quad (1.2.6)$$

dove  $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$  è la lunghezza del vettore  $v = (v_1, v_2)$ ,  $\|w\| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$  è la lunghezza del vettore  $w = (w_1, w_2)$ , e  $\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2$  è il prodotto scalare di  $v$  e  $w$ . In particolare, siccome due vettori sono ortogonali se e solo se il coseno dell'angolo fra loro è zero, *i vettori  $v$  e  $w$  sono ortogonali se e solo se  $\langle v, w \rangle = 0$ .*

Si può dimostrare che la formula (1.2.6) vale anche per vettori  $v, w \in \mathbb{R}^3$ , usando la seguente naturale generalizzazione del prodotto scalare:

**Definizione 1.2.3:** Siano  $v = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$  due vettori (applicati nell'origine). Il *prodotto scalare*  $\langle v, w \rangle$  di  $v$  e  $w$  è dato da

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, la *lunghezza*  $\|v\|$  di  $v$  è data da

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \geq 0.$$

Con queste definizioni, il coseno dell'angolo fra  $v$  e  $w$  è ancora dato dalla formula (1.2.6), e di conseguenza *due vettori*  $v, w \in \mathbb{R}^3$  *sono ortogonali se e solo se*  $\langle v, w \rangle = 0$ .

**Osservazione 1.2.4.** Le formule per il prodotto scalare e per la lunghezza di un vettore si possono chiaramente estendere a “vettori” espressi da  $n$ -uple di numeri reali, senza limitarsi ai casi  $n = 2$  e  $n = 3$ . Il prodotto scalare di due elementi  $v = (v_1, \dots, v_n)$  e  $w = (w_1, \dots, w_n)$  di  $\mathbb{R}^n$  è definito dalla formula

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n,$$

e la lunghezza dalla formula

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

In questo contesto, la formula (1.2.6) diventa la *definizione* del coseno dell'angolo fra i due “vettori”  $v$  e  $w$ .

Consideriamo ora un piano  $\pi_0$  passante per l'origine, di equazione cartesiana  $ax + by + cz = 0$ . Usando il prodotto scalare possiamo esprimere il piano  $\pi_0$  come segue:

$$\pi_0 = \left\{ \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \middle| \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \middle| \in \mathbb{R}^3 \mid \left\langle \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array}, \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right\rangle = 0 \right\}.$$

In altre parole, i punti del piano  $\pi_0$  sono esattamente i punti ortogonali al vettore  $(a, b, c)$  dato dai parametri di giacitura. Ricordando che un piano qualsiasi di equazione cartesiana  $ax + by + cz = d$  è parallelo al suo piano di giacitura, che ha equazione  $ax + by + cz = 0$ , abbiamo fatto vedere che:

- il vettore  $(a, b, c)$  dei parametri di giacitura di un piano  $\pi$  di equazione cartesiana  $ax + by + cz = 0$  è ortogonale a  $\pi$ ;
- viceversa, ogni piano di equazione cartesiana  $ax + by + cz = d$  è ortogonale al vettore  $(a, b, c)$ .

In particolare, è estremamente semplice trovare l'equazione cartesiana del piano  $\pi$  passante per il punto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e ortogonale al vettore  $v_0 = (a, b, c)$ : infatti  $a, b$  e  $c$  devono essere i parametri di giacitura, e  $d$  dev'essere dato (Osservazione 1.2.1) da  $d = ax_0 + by_0 + cz_0$ . Quindi l'equazione cartesiana cercata è

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0 \quad \text{o, equivalentemente,} \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Nota che la formula  $ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$  può essere scritta anche nella forma

$$\left\langle \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array}, \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array}, P_0 \right\rangle,$$

per cui il piano  $\pi$  è costituito dai vettori il cui coseno dell'angolo con  $(a, b, c)$  è uguale al coseno dell'angolo fra  $(a, b, c)$  e  $P_0$ .

**ESEMPIO 1.2.4.** Vogliamo un'equazione cartesiana per il piano  $\pi$  passante per  $P_0 = (1, 2, -3)$  e ortogonale a  $(-2, 3, 5)$ . Per quanto abbiamo visto la risposta è

$$-2x + 3y + 5z = -2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) = -11.$$

Siamo ora anche in grado di dare un'interpretazione geometrica ai conti che abbiamo descritto per passare da equazione cartesiana a equazione parametrica e viceversa. Infatti, supponiamo che  $P = P_0 + sv + tw$  sia un'equazione parametrica di un piano di equazione cartesiana  $ax + by + cz = 0$ . Allora il piano di giacitura ha equazione  $P = sv + tw$  e dev'essere composto tutto da vettori ortogonali ad  $(a, b, c)$ . In particolare,  $v$  (che si ottiene con  $s = 1$  e  $t = 0$ ) e  $w$  (che si ottiene con  $s = 0$  e  $t = 1$ ) devono essere entrambi ortogonali a  $(a, b, c)$ . Quindi passare da equazioni cartesiane a equazioni parametriche corrisponde a determinare un punto  $(P_0)$  del piano e due vettori (non nulli e non proporzionali)  $v$  e  $w$  ortogonali al vettore  $(a, b, c)$  dei parametri di giacitura.

Viceversa, supponiamo il piano  $\pi$  abbia equazione parametrica  $P = P_0 + sv + tw$ . Allora passare a equazione cartesiana significa trovare un vettore  $(a, b, c)$  non nullo che sia ortogonale sia a  $v$  sia a  $w$  — questo è il significato delle prime due equazioni in (1.2.4) —, e poi scegliere  $d \in \mathbb{R}$  in modo che  $P_0 \in \pi$  — e questo è il significato della terza equazione in (1.2.4).

Per capire vantaggi e svantaggi di equazioni parametriche e cartesiane, proviamo a usarle per affrontare dei problemi geometrici che coinvolgono piani.

Il primo problema che affrontiamo è come trovare il piano  $\pi$  passante per tre punti  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$  non allineati. Equazioni parametriche di  $\pi$  si scrivono subito: sono

$$P = P_0 + s(P_1 - P_0) + t(P_2 - P_0). \quad (1.2.7)$$

Infatti ponendo  $s = t = 0$  si recupera  $P_0$ , ponendo  $s = 1, t = 0$  si recupera  $P_1$  (in quanto  $P_0 + P_1 - P_0 = P_1$ ), e ponendo  $s = 0$  e  $t = 1$  si recupera  $P_2$ .

Le equazioni cartesiane richiedono invece un poco più di lavoro: infatti, ricordando l'Osservazione 1.2.1, per trovare i coefficienti  $a, b, c$  e  $d$  di un'equazione cartesiana per  $\pi$  dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + cz_0 = d, \\ ax_1 + by_1 + cz_1 = d, \\ ax_2 + by_2 + cz_2 = d. \end{cases}$$

Nota che sottraendo la prima equazione alle altre due, e poi mettendo la prima equazione al terzo posto, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = 0, \\ a(x_2 - x_0) + b(y_2 - y_0) + c(z_2 - z_0) = 0, \\ ax_0 + by_0 + cz_0 = d, \end{cases}$$

che è esattamente il sistema che dobbiamo risolvere per passare dalle equazioni parametriche (1.2.7) a equazioni cartesiane.

**ESEMPIO 1.2.5.** Vogliamo il piano passante per i punti  $P_0 = (2, 1, 1)$ ,  $P_1 = (-1, -1, 2)$  e  $P_2 = (1, 2, 1)$ . Siccome  $P_1 - P_0 = (-3, -2, 1)$  e  $P_2 - P_0 = (-1, 1, 0)$ , equazioni parametriche sono

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + s \begin{vmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Per trovare le equazioni cartesiane dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2a + b + c = d, \\ -a - b + 2c = d, \\ a + 2b + c = d. \end{cases}$$

Sommando la terza equazione alla seconda, e sottraendo il doppio della terza equazione alla prima, ci riconduciamo al sistema

$$\begin{cases} -3b - c = -d, \\ b + 3c = 2d, \\ a + 2b + c = d. \end{cases}$$



Sommando il triplo della seconda equazione alla prima equazione troviamo

$$\begin{cases} 8c = 5d, \\ b + 3c = 2d, \\ a + 2b + c = d, \end{cases} \implies \begin{cases} c = \frac{5}{8}d, \\ b = 2d - 3c = \frac{1}{8}d, \\ a = d - 2b - c = \frac{1}{8}d. \end{cases}$$

Qualsiasi valore non nullo di  $d$  ci fornisce dei parametri di giacitura di  $\pi$ . Prendendo per esempio  $d = 8$  otteniamo come equazione cartesiana

$$x + y + 5z = 8.$$

Il secondo problema consiste nel determinare le posizioni reciproche di due piani, dove la “posizione reciproca” è determinata da che tipo di intersezione hanno:

**Definizione 1.2.4:** Diremo che due piani  $\pi_1$  e  $\pi_2$  sono *paralleli* se sono disgiunti, cioè se  $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ ; che sono *incidenti* se la loro intersezione è una retta; che sono *coincidenti* se coincidono, cioè se  $\pi_1 = \pi_2$  — per cui in particolare la loro intersezione è un piano.

Determinare la posizione reciproca di due piani partendo dalle equazioni parametriche è possibile, ma richiede diversi conti; e capire quali conti fare richiede delle nozioni di algebra lineare che vedremo solo in seguito. Invece, determinare la posizione reciproca di due piani a partire dalle equazioni cartesiane è molto più semplice. Infatti, se  $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$  è un'equazione cartesiana per il piano  $\pi_1$ , e  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$  è un'equazione cartesiana per il piano  $\pi_2$ , i punti dell'intersezione  $\pi_1 \cap \pi_2$  sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2. \end{cases} \quad (1.2.8)$$

Quindi per trovare la posizione reciproca di  $\pi_1$  e  $\pi_2$  basta risolvere il sistema (1.2.8): se non ha soluzioni i piani sono paralleli; se le soluzioni dipendono da due parametri (cioè le soluzioni sono le equazioni parametriche di un piano) i piani sono coincidenti; se le soluzioni dipendono da un solo parametro dobbiamo essere nel solo caso rimasto, e quindi i due piani sono incidenti (quando studieremo i sistemi lineari in generale vedremo che non ci sono altri casi possibili: le soluzioni di (1.2.8) o non esistono oppure dipendono necessariamente da uno o da due parametri).

**Osservazione 1.2.5.** Nota che è facile stabilire la posizione reciproca dei due piani semplicemente guardando il sistema (1.2.8). Infatti, per l'Osservazione 1.2.3 i due piani sono coincidenti se e solo se le due equazioni sono una un multiplo dell'altra, e questo si vede a occhio. Inoltre, i due piani sono paralleli se e solo se (non sono coincidenti e) hanno lo stesso piano di giacitura, e questo accade (Osservazioni 1.2.2 e 1.2.3) se e solo se il vettore dei parametri di giacitura di un piano è proporzionale al vettore dei parametri di giacitura dell'altro piano (e i due piani non sono coincidenti), condizione anche questa che si verifica a occhio. Infine, se il vettore dei parametri di giacitura di un piano non è proporzionale al vettore dei parametri di giacitura dell'altro piano allora i due piani sono incidenti.

Concludiamo questa sezione con degli esempi numerici di determinazione della posizione reciproca di due piani.

**ESEMPIO 1.2.6.** Vogliamo trovare la posizione reciproca dei piani  $\pi_1$  di equazione cartesiana  $x + y + 2z = 3$  e  $\pi_2$  di equazione cartesiana  $2x + 2y + 4z = 6$ . Il sistema formato dalle due equazioni è

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3, \\ 2x + 2y + 4z = 6; \end{cases}$$

La seconda equazione è il doppio della prima; quindi (ricorda l'Osservazione 1.2.3) si tratta di due piani coincidenti, di equazione parametrica (ottenuta risolvendo una qualsiasi delle due equazioni)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ESEMPIO 1.2.7. Vogliamo trovare la posizione reciproca dei piani  $\pi_1$  di equazione cartesiana  $x + y + 2z = 3$  e  $\pi_3$  di equazione cartesiana  $2x + 2y + 4z = 8$ . Il sistema formato dalle due equazioni è

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3, \\ 2x + 2y + 4z = 8; \end{cases}$$

Sottraendo il doppio della prima equazione alla seconda equazione otteniamo l'uguaglianza  $0 = 2$ , chiaramente falsa; quindi il sistema non ammette soluzioni e i due piani sono paralleli (confronta con le Osservazioni 1.2.2 e 1.2.3).

ESEMPIO 1.2.8. Vogliamo trovare la posizione reciproca dei piani  $\pi_1$  di equazione cartesiana  $x + y + 2z = 3$  e  $\pi_3$  di equazione cartesiana  $2x - 2y + 4z = 8$ . Il sistema formato dalle due equazioni è

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3, \\ 2x - 2y + 4z = 8; \end{cases}$$

Sottraendo il doppio della prima equazione alla seconda equazione otteniamo

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3, \\ -4y = 2, \end{cases} \quad \implies \quad \begin{cases} x = 3 - y - 2z = \frac{7}{2} - 2z, \\ y = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

per cui le soluzioni del sistema si possono scrivere nella forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} - 2z \\ -\frac{1}{2} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dove  $z \in \mathbb{R}$  può assumere un qualsiasi valore. Le soluzioni dipendono quindi da un solo parametro libero ( $z$ ), e questo vuol dire che i piani sono incidenti, e si intersecano in una retta.

### 1.3 Rette

Nella sezione precedente abbiamo visto che intersecando due piani è possibile ottenere una retta. Questo suggerisce come ottenere le equazioni cartesiane di una retta:

*Definizione 1.3.1:* Le equazioni

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \end{cases} \quad (1.3.1)$$

sono *equazioni cartesiane* della retta  $r \subset \mathbb{R}^3$  dello spazio ottenuta come intersezione del piano di equazione cartesiana  $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$  con il piano di equazione cartesiana  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ , sotto l'ipotesi che  $(a_1, b_1, c_1)$  non sia proporzionale a  $(a_2, b_2, c_2)$  in modo che l'intersezione sia effettivamente una retta (vedi l'Osservazione 1.2.5). La retta  $r_0$  di equazione cartesiana

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \end{cases}$$

è detta *retta di giacitura* di  $r$ .

Analogamente, l'Esempio 1.2.8 suggerisce come devono essere fatte le equazioni parametriche di una retta:

*Definizione 1.3.2:* Dati  $P_0, v \in \mathbb{R}^3$ , con  $v \neq O$ , la retta  $r$  passante per  $P_0$  e con *vettore direttore*  $v$  è l'insieme dei punti della forma

$$P = P_0 + tv, \quad (1.3.2)$$

al variare di  $t \in \mathbb{R}$ . In altre parole,  $r$  è l'immagine della funzione  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  la cui espressione è data da  $F(t) = P_0 + tv$ . La formula (1.3.2) è detta *equazione parametrica* della retta  $r$ , e  $t$  è detto *parametro*. La *retta di giacitura*  $r_0$  di  $r$  ha equazione parametrica  $P = tv$ .

**Osservazione 1.3.1.** L'equazione parametrica di una retta nel piano è sempre della forma (1.3.2), semplicemente con  $P_0$  e  $v$  appartenenti a  $\mathbb{R}^2$  e non a  $\mathbb{R}^3$ . Invece, nel piano basta una sola equazione cartesiana  $ax + by = c$  per descrivere una retta.

Per passare da equazioni cartesiane a equazioni parametriche è sufficiente risolvere il sistema (1.3.1), come visto nell'Esempio 1.2.8. Per passare da equazioni parametriche a equazioni cartesiane si procede in modo non dissimile a quanto visto per i piani. Supponiamo di avere una retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} .$$

Le equazioni cartesiane devono essere soddisfatte da tutti i punti della retta. Quindi, se  $ax + by + cz = d$  è una delle equazioni cercate, l'uguaglianza

$$a(x_0 + tv_1) + b(y_0 + tv_2) + c(z_0 + tv_3) = d \quad \Longleftrightarrow \quad (av_1 + bv_2 + cv_3)t = d - (ax_0 + by_0 + cz_0)$$

dev'essere vera per ogni valore di  $t \in \mathbb{R}$ . Questo è possibile se e solo se (perché?) entrambi i membri sono identicamente nulli, cioè se e solo se

$$\begin{cases} av_1 + bv_2 + cv_3 = 0 , \\ ax_0 + by_0 + cz_0 = d . \end{cases} \quad (1.3.3)$$

In altre parole, i vettori  $(a_1, b_1, c_1)$  e  $(a_2, b_2, c_2)$  devono essere due vettori (non proporzionali) entrambi ortogonali al vettore direttore della retta  $r$ ; e una volta identificati  $(a_1, b_1, c_1)$  e  $(a_2, b_2, c_2)$  i valori di  $d_1$  e  $d_2$  si ottengono usando la seconda equazione in (1.3.3).

**ESEMPIO 1.3.1.** Vogliamo equazioni cartesiane per la retta  $r$  di equazioni parametriche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Dobbiamo trovare due vettori ortogonali al vettore  $(1, 1, 1)$ , non proporzionali fra loro; in altre parole, dobbiamo trovare due soluzioni non proporzionali dell'equazione  $a + b + c = 0$ . Per esempio, possiamo prendere

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Usando la seconda equazione in (1.3.3) ricaviamo  $d_1 = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1$  e  $d_2 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = 0$ , per cui

$$\begin{cases} x - y = 1 , \\ x - z = 0 \end{cases}$$

sono delle equazioni cartesiane per la retta  $r$ .

**Osservazione 1.3.2.** È facile scrivere un'equazione parametrica per la retta  $r$  passante per due punti distinti  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ : è data da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix} .$$

Invece, per trovare equazioni cartesiane della stessa retta bisogna trovare due soluzioni non proporzionali del sistema di due equazioni in quattro incognite

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + cz_0 = d , \\ ax_1 + by_1 + cz_1 = d , \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = 0 , \\ ax_0 + by_0 + cz_0 = d , \end{cases}$$

dove le incognite sono  $a, b, c$  e  $d$ .

Le equazioni cartesiane sono invece comode per studiare le posizioni reciproche di una retta e un piano.

**Definizione 1.3.3:** Siano  $\pi$  un piano e  $r$  una retta nello spazio. Diremo che  $r$  e  $\pi$  sono *paralleli* se sono disgiunti, cioè  $r \cap \pi = \emptyset$ ; diremo che sono *incidenti* se si intersecano in un solo punto; e che  $r$  è *contenuta* in  $\pi$  se  $r$  è un sottoinsieme di  $\pi$ , per cui  $r \cap \pi$  è una retta.

Se il piano  $\pi$  ha equazione cartesiana  $ax+by+cz = d$  e la retta  $r$  equazioni cartesiane  $a_1x+b_1y+c_1z = d_1$  e  $a_2x+b_2y+c_2z = d_2$ , per trovare la posizione reciproca di  $r$  e  $\pi$  basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = d, \\ a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2. \end{cases}$$

Se il sistema non ha soluzioni allora  $r$  e  $\pi$  sono paralleli; se ha un'unica soluzione allora sono incidenti (e la soluzione è il punto d'intersezione); se invece ha infinite soluzioni allora  $r$  è contenuta in  $\pi$ .

**ESEMPIO 1.3.2.** Consideriamo la retta  $r$  di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + z = 0, \end{cases}$$

e il piano  $\pi_1$  di equazione cartesiana  $3x - y + 2z = 1$ . Per risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + z = 0, \\ 3x - y + 2z = 1, \end{cases}$$

sottraiamo la prima equazione dalla seconda, e il triplo della prima equazione dalla terza; otteniamo

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ -2y = -1, \\ -4y + z = -2, \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 - y - z = 1/2, \\ y = 1/2, \\ z = -2 + 4y = 0. \end{cases}$$

Il sistema ha un'unica soluzione  $(1/2, 1/2, 0)$ , per cui  $r$  e  $\pi_1$  sono incidenti, e  $(1/2, 1/2, 0)$  è il loro punto di intersezione.

**ESEMPIO 1.3.3.** Sia  $r$  la stessa retta dell'esempio precedente e consideriamo il piano  $\pi_2$  di equazione cartesiana  $3x - y + 3z = 1$ . Per risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + z = 0, \\ 3x - y + 3z = 1, \end{cases}$$

sottraiamo la prima equazione dalla seconda, e il triplo della prima equazione dalla terza; otteniamo

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ -2y = -1, \\ -4y = -2, \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 - y - z = 1/2 - z, \\ y = 1/2, \\ y = 1/2. \end{cases}$$

Il sistema ha infinite soluzioni della forma  $(1/2 - z, 1/2, z)$ , per cui  $r$  è contenuta in  $\pi_2$ . Nota che

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

è un'equazione parametrica della retta  $r$ .

ESEMPIO 1.3.4. Sia  $r$  la stessa retta dell'Esempio 1.3.2, e consideriamo il piano  $\pi_3$  di equazione cartesiana  $3x - y + 3z = 0$ . Per risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + z = 0, \\ 3x - y + 3z = 0, \end{cases}$$

sottraiamo la prima equazione dalla seconda, e il triplo della prima equazione dalla terza; otteniamo

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ -2y = -1, \\ -4y = -3, \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 - y - z, \\ y = 1/2, \\ y = 3/4, \end{cases}$$

che è chiaramente impossibile, per cui  $r$  e  $\pi_3$  sono paralleli.

Infine, le posizioni reciproche di due rette non dipendono solo da quanti punti sono nell'intersezione:

**Definizione 1.3.4:** Siano  $r_1$  ed  $r_2$  due rette nello spazio. Se  $r_1 \cap r_2$  è un punto, diremo che  $r_1$  ed  $r_2$  sono *incidenti*; se  $r_1 = r_2$  diremo che sono *coincidenti*. Se  $r_1 \cap r_2 = \emptyset$  abbiamo due casi: se  $r_1$  ed  $r_2$  hanno la stessa retta di giacitura allora sono *parallele*; se invece hanno rette di giacitura distinte sono *sghembe*.

Le equazioni parametriche sono utili per distinguere rette incidenti o sghembe dalle rette parallele o coincidenti, in quanto le due rette hanno la stessa retta di giacitura se e solo se (perché?) i loro vettori di giacitura sono proporzionali. Usando le equazioni cartesiane riusciamo invece a distinguere i quattro casi.

Supponiamo che le rette  $r_1$  ed  $r_2$  abbiamo come equazioni cartesiane

$$r_1 : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} a'_1x + b'_1y + c'_1z = d'_1, \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = d'_2, \end{cases}$$

e consideriamo il sistema di quattro equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a'_1x + b'_1y + c'_1z = d'_1, \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = d'_2. \end{cases}$$

Se questo sistema ha infinite soluzioni allora le due rette coincidono; se ha un'unica soluzione allora le due rette sono incidenti; se non ha soluzioni allora le due rette sono parallele o sghembe. Per distinguere fra questi due ultimi casi occorre considerare il sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a'_1x + b'_1y + c'_1z = 0, \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = 0, \end{cases}$$

che fornisce l'intersezione delle rette di giacitura. Se questo sistema ha infinite soluzioni allora (perché?) le due rette sono parallele; se invece ha come unica soluzione il punto  $(0, 0, 0)$  allora le due rette sono sghembe.

Concludiamo queste note con esempi delle quattro situazioni.

ESEMPIO 1.3.5. Consideriamo le due rette

$$r_1 : \begin{cases} x - y + z = 1, \\ x + y - z = 1, \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} 3x + y - z = 3, \\ 3x - y + z = 3. \end{cases}$$

Per risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ x + y - z = 1, \\ 3x + y - z = 3, \\ 3x - y + z = 3. \end{cases}$$

sottraiamo la prima equazione dalla seconda, e il triplo della prima equazione dalla terza e dalla quarta. Otteniamo

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2y - 2z = 0, \\ 4y - 4z = 0, \\ 2y - 2z = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 + y - z = 1, \\ y = z, \\ y = z, \\ y = z; \end{cases}$$

quindi il sistema ha infinite soluzioni della forma  $(1, z, z)$ , per cui le due rette sono coincidenti, e

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

è una loro equazione parametrica.

ESEMPIO 1.3.6. Sia  $r_1$  la stessa retta dell'esempio precedente, e consideriamo la retta

$$r_3 : \begin{cases} x + y + z = 0, \\ 3x + y + z = 2. \end{cases}$$

Per risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ x + y - z = 1, \\ x + y + z = 0, \\ 3x + y + z = 2. \end{cases}$$

sottraiamo la prima equazione dalla seconda e dalla terza, e il triplo della prima dalla quarta. Otteniamo

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2y - 2z = 0, \\ 2y = -1, \\ 4y - 2z = -1, \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 + y - z, \\ y = z, \\ y = -1/2, \\ y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}z, \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1, \\ y = -1/2, \\ z = -1/2. \end{cases}$$

Il sistema ha un'unica soluzione  $(1, -1/2, -1/2)$ ; quindi le rette  $r_1$  ed  $r_3$  sono incidenti, e si intersecano nel punto  $(1, -1/2, -1/2)$ .

ESEMPIO 1.3.7. Sia  $r_1$  la stessa retta dell'Esempio 1.3.5, e consideriamo la retta

$$r_4 : \begin{cases} 3x + y - z = 3, \\ 3x - y + z = 4. \end{cases}$$

Per risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ x + y - z = 1, \\ 3x + y - z = 3, \\ 3x - y + z = 4. \end{cases}$$

sottraiamo la prima equazione dalla seconda, e il triplo della prima equazione dalla terza e dalla quarta. Otteniamo

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2y - 2z = 0, \\ 4y - 4z = 0, \\ 2y - 2z = 1, \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 + y - z, \\ y = z, \\ y = z, \\ y = z + 1, \end{cases}$$

che chiaramente non può avere soluzioni; quindi  $r_1$  ed  $r_4$  sono parallele o sghembe. Per capire in quale dei due casi siamo consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ x + y - z = 0, \\ 3x + y - z = 0, \\ 3x - y + z = 0. \end{cases}$$

Procedendo come prima ricaviamo

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2y - 2z = 0, \\ 4y - 4z = 0, \\ 2y - 2z = 0, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = y - z = 0, \\ y = z, \\ y = z, \\ y = z, \end{cases}$$

che ha infinite soluzioni della forma  $(0, z, z)$ , per cui  $r_1$  ed  $r_4$  sono parallele.

ESEMPIO 1.3.8. Infine, sia  $r_1$  sempre la stessa retta dell'Esempio 1.3.5, e consideriamo la retta

$$r_5 : \begin{cases} x + y + z = 0, \\ 3x + y + z = -2. \end{cases}$$

Per risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ x + y - z = 1, \\ x + y + z = 0, \\ 3x + y + z = -2. \end{cases}$$

sottraiamo la prima equazione dalla seconda e dalla terza, e il triplo della prima dalla quarta. Otteniamo

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2y - 2z = 0, \\ 2y = -1, \\ 4y - 2z = -5, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 + y - z, \\ y = z, \\ y = -1/2, \\ y = -\frac{5}{4} + \frac{1}{2}z, \end{cases}$$

che non ha soluzioni, in quanto se  $z = y = -1/2$  allora  $-\frac{5}{4} + \frac{1}{2}z = -\frac{3}{2} \neq -\frac{1}{2} = y$ , contro l'ultima equazione. Quindi  $r_1$  ed  $r_5$  sono o parallele o sghembe. Per capire in quale dei due casi siamo consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ x + y - z = 0, \\ x + y + z = 0, \\ 3x + y + z = 0. \end{cases}$$

Procedendo come prima ricaviamo

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2y - 2z = 0, \\ 2y = 0, \\ 4y - 2z = 0, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = y - z, \\ y = z, \\ y = 0, \\ y = \frac{1}{2}z, \end{cases}$$

che ha come unica soluzione  $(0, 0, 0)$ . Di conseguenza, le rette  $r_1$  ed  $r_5$  sono sghembe.