Correzione secondo compitino, testo A

7 aprile 2010

1 Parte 1

Esercizio 1.1. Tra le funzioni del vostro "bestiario", le funzioni che più hanno un comportamento simile a quello cercato sono le funzioni esponenziali (pag. 234 del vostro libro di testo). Innanzitutto, una funzione esponenziale del tipo $a \cdot p^x$ con $a > 0$ e base un numero $p > 1$, è strettamente crescente ed il suo limite a $-\infty$ è 0. Supponiamo ora di sommargli una costante C. Il fatto che la funzione esponenziale sia crescente significa che, per ogni $a < b$ abbiamo che $f(a) < f(b)$. Questo implica quindi che per ogni $a < b$, per ogni costante C, abbiamo che $f(a) + C < f(b) + C$. Sappiamo inoltre che, date due funzioni f e g, se esiste il loro limite a $-\infty$ ed è un numero finito, il limite della loro somma è la somma dei loro limiti. Prendiamo come f una funzione esponenziale come sopra e sommiamogli la funzione costante $g = -2$. La funzione $a \cdot p^x - 2$ è ancora crescente ed ha come limite a $-\infty$ il valore -2. Dobbiamo ora fare in modo che passi per lo 0: sappiamo che qualsiasi sia la base p si ha che $p^0 = 1$. Se valutiamo la funzione in 0 ed imponiamo che il suo valore sia 0 abbiamo che $a - 2 = 0$ e quindi $a = 2$. Dunque le funzioni del tipo $2 \cdot p^x - 2$ con $p > 1$ soddisfano la consegna dell'esercizio. Per esempio, la funzione $f(x) = 2e^x - 2$.

Esercizio 1.2. Rimandiamo alla sezione sui logaritmi del vostro libro (pag. 241). I logaritmi sono definiti solo sui numeri strettamente positivi, quindi per determinare il dominio della funzione dobbiamo chiedere che $2^t - 2 > 0$, cioè che $2^t > 2$. Applichiamo il logaritmo in base 2 ad entrambi i lati della disuguaglianza ottenendo che $t > 1$ (nota bene che, se la base del logaritmo fosse stata minore di 1 avremmo dovuto invertire la disuguaglianza). Il dominio della funzione $g(t)$ è quindi $(1, +\infty)$.

Studiamo ora la disequazione $\log_{327}(2^t - 2) < 0$; poichè la base è maggiore di 1 questa diseguaglianza è equivalente a $2^t - 2 < 1$, cioè $2^t < 3$. Prendiamo il logaritmo in base 2 di entrambi i membri ed otteniamo che $t < \log_2 3$. Intersechiamo questa soluzione col dominio di definizione della funzione (altrimenti non ha senso) ottenendo che $g(t) < 0$ per $t \in (1, \log_2 3)$.

Esercizio 1.3. Notiamo innanzitutto che arctan è la funzione inversa della tangente. Facciamo riferimento a pag. 322 del vostro testo per dimostrazione che la derivata di $\arctan(y)$ è $1/(1+y^2)$. Ora, possiamo, utilizzando la formula di derivazione della funzione composta (pag. 314), calcolare la derivata che ci richiede l'esercizio. Spezzeremo il calcolo della derivata in più passi. Se indichiamo con $y(z) = (1 + z)/(1 + z^2)$ abbiamo che la derivata cercata è

$$\frac{1}{1 + y(z)^2} \frac{dy}{dz}(z).$$

Calcoliamo quindi dy/dz usando la formula per la derivata del quoziente (pag. 313):

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1+z}{1+z^2}\right) = \frac{1+z^2-(1+z)(2z)}{(1+z^2)^2} = \frac{1-2z-z^2}{(1+z^2)^2}.$$

Calcoliamo ora $1/(1+y(z)^2)$:

$$\frac{1}{1+y(z)^2} = \frac{1}{1+(1+z)^2(1+z^2)^{-2}} = \frac{(1+z^2)^2}{(1+z^2)^2+(1+z)^2}$$

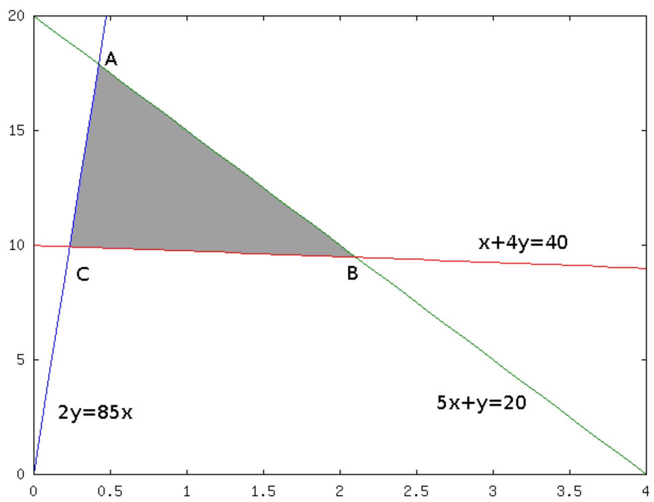
Quindi la derivata è:

$$F'(z) = \frac{1-2z-z^2}{(1+z^2)^2+(1+z)^2} = \frac{1-2z-z^2}{z^4+3z^2+2z+1}.$$

2 Parte 2

Esercizio 2.1. Per la parte teorica relativa alla programmazione lineare vi rimandiamo a pag. 165 del vostro libro di testo. Indicheremo con x la razione giornaliera di pecorino, in ettogrammi (100 grammi), e con y la razione di soia, in ettogrammi. La funzione da minimizzare è la funzione $S(x,y) = 5x+2y$ che ci dà la spesa in euro. La quantità di grassi assunta in un giorno è $30x+6y$ grammi, mentre la quantità di carboidrati è data da $5x+20y$ grammi.

Possiamo ora scrivere i vincoli del problema. Il fatto che si debbano assumere almeno 200 grammi di carboidrati si traduce in $5x+20y \geq 200$, mentre la condizione che la quantità di grassi sia inferiore a 120 grammi si traduce in $30x+6y \leq 120$. La condizione che la quantità di carboidrati non sia maggiore del triplo della quantità di grassi si esprime quindi come $5x+20y \leq 3(30x+6y)$, che è equivalente a $2y \leq 85x$.



Valutiamo le tre disequazioni. La prima disequazione, che riscriviamo come $x+4y \geq 40$ ci dice che, data la retta $x+4y=40$, la soluzione cercata sta nel semipiano sopra la retta. Disegniamo ora la retta $2y=85x$: la disequazione ci dice che la soluzione vive nel semipiano sotto la retta. Ora, la terza disequazione, che può essere riscritta come $5x+y \leq 20$, ci dice che disegnata la retta $5x+y=20$ la soluzione sta nel semipiano sotto la retta. Il dominio è quindi un triangolo ed indicheremo con la lettere A l'intersezione tra la retta $2y = 85x$ e la retta $5x + y = 20$, con la lettera B l'intersezione tra la retta $x + 4y = 40$ e la retta $5x + y = 20$ e con la lettera C l'interserzione tra la retta $2y = 85x$ e la retta $x + 4y = 40$.

Valutiamo ora la funzione spesa ristretta alla retta $x + 4y = 40$, cioè $x = 40 - 4y$. La spesa $S(40 - 4y, y) = 200 - 18y$ è una funzione decrescente di y e poiché la retta $x + 4y = 40$ ha coefficiente angolare negativo possiamo dire che la soluzione cercata NON può essere il punto B. Studiamo allora la funzione spesa ristretta alla retta $2y = 85x$. La funzione spesa diventerà quindi:

$$S\left(x, \frac{85}{2}x\right) = 5x + 85x = 90x.$$

Questa funzione è una funzione crescente di x; dunque il minimo della spesa verrà assunto nel punto C. Le coordinate di questo punto sono $x = 40/171 \simeq 0.25$ ed $y = 1700/171 \simeq 10$: ogni giorno potremo quindi mangiare circa 25 grammi di pecorino ed 1 chilo di soia. Che allegria!

NOTA BENE: nel secondo compitino testo A il testo dell'esercizio 2.2 era sbagliato. Questo rendeva molto difficile risolvere i punti successivi del problema. L'esercizio è stato quindi valutato con un criterio differente, assegnando punteggio pieno alla corretta risoluzione del sistema lineare. L'errore consiste nel fatto che le coordinate di uno punti sono sbagliate: al punto $(b = 3, v = 23)$ va sostituito il punto $(b = 3, v = 23/2)$. Di seguito risolviamo il sistema come presentato nel testo del compitino. A questa soluzione seguirà la soluzione dell'esercizio come inizialmente pensato.

Esercizio 2.2. Per semplificare la notazione sostituiremo alla b la x ed alla v la y. Il generico polinomio di grado 3 in x è dato da $ax^3 + bx^2 + cx + d$. La funzione ad essa associata è la funzione $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Dati i 4 punti della consegna dell' esercizio otteniamo il seguente sistema di 4 equazioni lineari in 4 incognite:

$$\begin{cases} \frac{17}{3} = 8a + 4b + 2c + d \\ \frac{167}{24} = \frac{125}{8}a + \frac{25}{4}b + \frac{5}{2}c + d \\ 23 = 27a + 9b + 3c + d \\ \frac{487}{24} = \frac{343}{8}a + \frac{49}{4}b + \frac{7}{2}c + d. \end{cases}$$

Applichiamo ora il primo passo del metodo risolutivo del vostro libro per i sistemi lineari (pag. 186). Otteniamo cioè il seguente sistema sottraendo ogni equazione alla successiva:

$$\begin{cases} \frac{31}{24} = \frac{61}{8}a + \frac{9}{4}b + \frac{1}{2}c \\ \frac{385}{24} = \frac{91}{8}a + \frac{11}{4}b + \frac{1}{2}c \\ -\frac{65}{24} = \frac{127}{8}a + \frac{13}{4}b + \frac{1}{2}c. \end{cases}$$

Dividiamo ora ognuna delle equazioni per il coefficiente di c:

$$\begin{cases} \frac{31}{12} = \frac{61}{4}a + \frac{9}{2}b + c \\ \frac{385}{12} = \frac{91}{4}a + \frac{11}{2}b + c \\ -\frac{65}{12} = \frac{127}{4}a + \frac{13}{2}b + c. \end{cases}$$

Sottraiamo ora ogni equazione alla successiva:

$$\begin{cases} \frac{354}{12} = \frac{30}{4}a + b \\ -\frac{450}{12} = 9a + b. \end{cases}$$

Di nuovo sottraiamo ogni equazione alla successiva:

$$\frac{6}{4}a = -\frac{804}{12}.$$

Quindi $a = -134/3$ e

$$b = \frac{354}{12} + \frac{30}{4}\frac{134}{3} = \frac{729}{2}.$$

Possiamo ora sostituire in una delle equazioni del secondo passaggio per ottenere c:

$$c = \frac{31}{12} - \frac{61}{4}\frac{134}{3} - \frac{9}{2}\frac{729}{2} = -\frac{1913}{2}.$$

Ed ora troviamo d:

$$d = 23 + 27\frac{134}{3} - 9\frac{729}{2} + 3\frac{1913}{2} = 818.$$

Tornando alle variabili iniziali, indicando con b lunghezza del becco e v la velocità del volo, la funzione cercata sarà

$$v = -\frac{134}{3}b^3 + \frac{729}{2}b^2 - \frac{1913}{2}b + 818.$$

NOTA BENE: Da questo punto in poi, la soluzione dell'esercizio come era stato pensato.

1. Per semplificare la notazione sostituiremo alla b la x ed alla v la y. Il generico polinomio di grado 3 in x è dato da $ax^3 + bx^2 + cx + d$. La funzione ad essa associata è la funzione $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Dati i 4 punti della consegna dell' esercizio otteniamo il seguente sistema di 4 equazioni lineari in 4 incognite:

$$\begin{cases} \frac{17}{3} = 8a + 4b + 2c + d \\ \frac{167}{24} = \frac{125}{8}a + \frac{25}{4}b + \frac{5}{2}c + d \\ \frac{23}{2} = 27a + 9b + 3c + d \\ \frac{487}{24} = \frac{343}{8}a + \frac{49}{4}b + \frac{7}{2}c + d. \end{cases}$$

Applichiamo ora il primo passo del metodo risolutivo del vostro libro per i sistemi lineari (pag. 186). Otteniamo cioè il seguente sistema sottraendo ogni equazione alla successiva:

$$\begin{cases} \frac{31}{24} = \frac{61}{8}a + \frac{9}{4}b + \frac{1}{2}c \\ \frac{109}{24} = \frac{91}{8}a + \frac{11}{4}b + \frac{1}{2}c \\ \frac{211}{24} = \frac{127}{8}a + \frac{13}{4}b + \frac{1}{2}c. \end{cases}$$

Dividiamo ora ognuna delle equazioni per il coefficiente di c:

$$\begin{cases} \frac{31}{12} = \frac{61}{4}a + \frac{9}{2}b + c \\ \frac{109}{12} = \frac{91}{4}a + \frac{11}{2}b + c \\ \frac{211}{12} = \frac{127}{4}a + \frac{13}{2}b + c. \end{cases}$$

Sottraiamo ora ogni equazione alla successiva:

$$\begin{cases} \frac{78}{12} = \frac{30}{4}a + b \\ \frac{102}{12} = 9a + b. \end{cases}$$

Di nuovo sottraiamo ogni equazione alla successiva:

$$\frac{6}{4}a = \frac{24}{12}.$$

Quindi $a = 4/3$ e

$$b = \frac{78}{12} - \frac{30}{4}\frac{4}{3} = -\frac{7}{2}.$$

Possiamo ora sostituire in una delle equazioni del secondo passaggio per ottenere c:

$$c = \frac{31}{12} - \frac{61}{4}\frac{4}{3} + \frac{9}{2}\frac{7}{2} = -2.$$

Ed ora troviamo d:

$$d = \frac{23}{2} - 27\frac{4}{3} + 9\frac{7}{2} + 6 = 13.$$

Tornando alle variabili iniziali, indicando con b lunghezza del becco e v la velocità del volo, la funzione cercata sarà

$$v = \frac{4}{3}b^3 - \frac{7}{2}b^2 - 2b + 13.$$

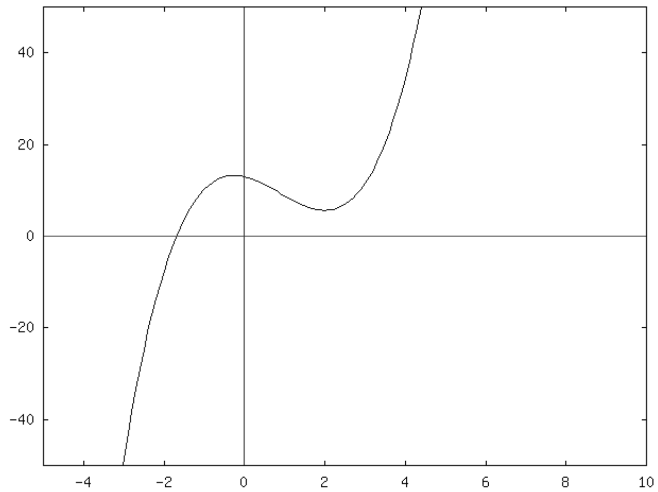
2. Calcoliamo la derivata della funzione data:

$$v'(b) = 4b^2 - 7b - 2.$$

Usando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado troviamo:

$$b_{1,2} = \frac{7 \pm 9}{8}.$$

Quindi i possibili massimi e minimi della funzione sono nei punti 2 e $-1/4$. Rimandiamo alle pag. 185 e seguenti del vostro libro per la teoria riguardante le funzioni polinomiali; poichè la funzione in oggetto è una cubica ed il coefficiente direttore è positivo sappiamo che la funzione tende a $-\infty$ se b tende a $-\infty$ e che la funzione tende a $+\infty$ se b tende a $+\infty$. Ricordandoci l'andamento delle cubiche possiamo asserire che il punto $-1/4$ sarà un massimo locale ed il punto 2 sarà un minimo locale. Per cui l'andamento della funzione sarà il seguente: la funzione è crescente fino al punto $-1/4$, dopodichè la funzione decresce fino al minimo in 2 e lì ricomincia a crescere. Il grafico della funzione sarà perciò il seguente:



3. La lunghezza del becco può essere considerata una misura delle dimensioni del fenicottero. Nell'intervallo $[0, 2]$, al crescere della lunghezza del becco il modello prevede una diminuzione della velocità del fenicottero, cosa improbabile. È inoltre improbabile che la velocità dei fenicotteri superi sensibilmente gli 80 km/h; visto che $v(5) = 505/6 \simeq 84.17$, il nostro modello potrebbe essere ragionevole nell'intervallo $[2, 5]$.

Esercizio 2.3. 1. Calcoliamo ora la retta di regressione di $N(t)$ in funzione di t. Potete trovare la parte teorica relativa all'interpolazione lineare a pag. 178 e seguenti. Usiamo la formula 4.15 a pag. 181 per calcolare il coefficiente angolare della retta di regressione:

$$\bar{m} = \frac{\overline{tN} - \bar{t} \cdot \bar{N}}{\overline{t^2} - \bar{t}^2}.$$

Utilizziamo ora i dati del problema per calcolare il coefficiente angolare della retta di regressione:

$$\overline{m} = \frac{124705.85 - 24 \cdot 2816.23}{800 - 576} = \frac{57116.33}{224} \simeq 254.98.$$

Calcoliamo ora:

$$\overline{q} = \overline{N} - \overline{m} \cdot \bar{t}.$$

Dunque:

$$\overline{q} = 2816.23 - 254.98 \cdot 24 = -4696.71.$$

Quindi la retta di regressione è:

$$N(t) = 254.98t - 4696.71$$

Per capire se è una buona interpolazione o no calcoliamo il coefficiente di Pearson:

$$\frac{\overline{tN} - \bar{t} \cdot \bar{N}}{\sqrt{(\overline{t^2} - \bar{t}^2)(\overline{N^2} - \bar{N}^2)}}.$$

Quindi:

$$\frac{57116.33}{\sqrt{224 \cdot (36028131.31 - 7931151.41)}} = \frac{57116.33}{\sqrt{224 \cdot 28096979.9}} = \frac{57116.33}{79332.99}.$$

Svolgendo il calcolo il coefficiente di correlazione di Pearson è circa 0.72 quindi NON è una buona interpolazione.

2. Provate ora a rappresentare i punti in un grafico semilogaritmico: l'asse del tempo rimarrà nella stessa scala mentre useremo la scala logaritmica per il numero di cellule. Cerchiamo ora la retta di interpolazione per la distribuzione di punti in questo grafico. Supponiamo di averla trovata e sia $\mathrm{Log}(N) = \overline{m} \cdot t + \overline{q}$. Avremo quindi che

$$N(t) = 10^{\overline{m}t+\overline{q}} = 10^{\overline{q}} \cdot (10^{\overline{m}})^t = a \cdot p^t,$$

dove $a = 10^{\overline{q}}$ e $p = 10^{\overline{m}}$. Cioè, trovare la retta di interpolazione per la distribuzione dei punti nel grafo semilogaritmico ci permette di interpolare i dati usando una funzione potenza. Calcoliamo quindi la retta di interpolazione per la funzione $\mathrm{Log}(N)$, al variare di t. Ripetiamo quindi il procedimento sopra. Troviamo il coefficiente angolare della retta di interpolazione:

$$\overline{m} = \frac{\overline{t\mathrm{Log}(N)} - \bar{t} \cdot \overline{\mathrm{Log}(N)}}{\overline{t^2} - \bar{t}^2}.$$

Utilizzando i dati del problema, abbiamo:

$$\overline{m} = \frac{74.75 - 24 \cdot 2.37}{224} = \frac{17.87}{224} \simeq 0.08.$$

Calcoliamo ora:

$$\overline{q} = \overline{\mathrm{Log}(N)} - \overline{m} \cdot \bar{t}.$$

Dunque:

$$\overline{q} = 2.37 - 0.08 \cdot 24 = 0.45.$$

La funzione interpolante sarà quindi:

$$N(t) = 10^{0.45} \cdot (10^{0.08})^t \simeq 2.82 \cdot (1.2)^t.$$

Calcoliamo il coefficiente di Pearson per capire quanto buona è l'interpolazione:

$$CP = \frac{\overline{t\mathrm{Log}(N)} - \bar{t} \cdot \overline{\mathrm{Log}(N)}}{\sqrt{(\overline{t^2} - \bar{t}^2)(\overline{\mathrm{Log}(N)^2} - \overline{\mathrm{Log}(N)}^2)}}.$$

Il coefficiente di Pearson sarà dunque:

$$\frac{17.87}{\sqrt{224 \cdot (7.05 - 5.62)}} \simeq= \frac{17.87}{\sqrt{224 \cdot (1.43)}} \simeq \frac{17.87}{17.90} \simeq 0.998,$$

che significa che la funzione potenza interpola molto bene i dati del problema.