Correzione primo compitino, testo B

20 febbraio 2010

1 Parte 1

Esercizio 1.1. Facciamo riferimento alla pagina 20 del libro di testo. Nel caso di somma (o differenza) di misure abbiamo che il valore stimato della somma è somma (o differenza) dei valori stimati delle misure mentre l'errore assoluto della somma è la somma degli errori assoluti. Abbiamo ora che Piero, vestito, pesa $85 \pm 0.5\,\mathrm{kg}$ ed i suoi vestiti pesano $2.1 \pm 0.2\,\mathrm{kg}$. Quindi il peso stimato di Piero senza vestiti è $85 - 2.1 = 82.9\,\mathrm{kg}$ e l'errore di questa misura è $0.2 + 0.5 = 0.7\,\mathrm{kg}$. Piero pesa quindi $82.9 \pm 0.7\,\mathrm{kg}$.

Esercizio 1.2. La cosa da notare è che $A \cap B \subseteq A$ (in altri termini, poichè sia vero $A \cap B$ deve essere vero A). Quindi la probabilità dell'evento A è maggiore o uguale alla probabilità che avvengano allo stesso tempo l'evento A e l'evento B: infatti

$$p(A) = p((A \cap B) \cup (A \setminus B)) = p(A \cap B) + p(A \setminus B) \geq p(A \cap B),$$

dove abbiamo usato il fatto che A è unione disgiunta di $A \cap B$ e $A \setminus B$ e il fatto che $p(A \setminus B) \geq 0$. Quindi NON possono esistere due eventi A e B di uno stesso spazio di probabilità per cui si abbia $p(A \cap B) > p(A)$.

Esercizio 1.3. Per la media facciamo riferimento a pagina 135 del vostro libro di testo. La media di x_1, x_2, x_3 è, per definizione, il numero

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

La somma $x_1 + x_2 + x_3$ sarà al più uguale al triplo del valore più grande fra x_1, x_2 e x_3; essendo $x_1, x_2, x_3 \in [0, 2]$ la somma sarà al massimo $2 + 2 + 2 = 6$, e quindi la media sarà al massimo $6/3 = 2$. In particolare la media dei valori NON può essere 3. Un'altra linea di ragionamento potrebbe essere la seguente: poiché la media è il numero μ tale per cui la somma

$$(\mu - x_1) + (\mu - x_2) + (\mu - x_3) = 0,$$

abbiamo che la media deve essere compresa nell'intervallo dove variano i valori. Infatti se questo non fosse vero tutti gli addendi avrebbero lo stesso segno e quindi la loro somma non potrebbe essere 0.

Per la varianza facciamo invece riferimento a pagina 139. Se denotiamo la media con μ, la varianza è definita come:

$$\frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + (x_3 - \mu)^2}{3}.$$

La varianza può essere $2/3$ se prendiamo come valori $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

2 Parte 2

Esercizio 2.1. Per la parte teorica relativa alle percentuali rimandiamo alle pagine 26 e seguenti del vostro libro di testo.

1. La percentuale dei 200mila euro che spettano ad Aldo si ottiene usando la seguente formula

$$\frac{\text{Parte dei 200mila spettanti ad Aldo}}{200000} \cdot 100.$$

Calcoliamo quindi il denaro spettante ad Aldo per la vendita dell'appartamento. Ad Aldo spettano di base 100mila euro. Per gli accordi presi col fratello egli deve versare a Bernardo $6000 \cdot 3 = 18000$ euro, mentre ne deve ricevere $6000 \cdot 5 = 30000$ euro. La parte spettante ad aldo sarà quindi $100000 - 18000 + 30000 = 112$mila euro. Calcoliamo ora la percentuale:

$$\frac{112000}{200000} \cdot 100 = \frac{112}{200} \cdot 100 = \frac{56}{100} \cdot 100 = 56\%.$$

2. Il numero degli anni in cui Aldo ha abitato nell'appartamento è stato calcolato con un errore relativo del 10%. Quindi Aldo ha abitato nell'appartamento 3 ± 0.3 anni. Quindi la cifra che Aldo deve versare al fratello oscilla tra $2.7 \cdot 6000 = 16200$ euro e $3.3 \cdot 6000 = 19800$ euro. A Bernardo spetterà quindi una cifra che varia tra $100000 - 30000 + 16200 = 86200$ e $100000 - 30000 + 19800 = 89800$ euro.

3. Per capire qual è il valore delle azioni rimaste in eredità a Bernardo dobbiamo capire qual è la percentuale di azioni in possesso di Bernardo alla fine della spartizione ed il valore totale delle azioni al momento delle spartizioni. Aldo possiede il 60% delle azioni e ne cede il 10% a Bernardo. Dopo la spartizione Aldo possiede quindi il $60\% \cdot 0.9 = 54\%$ delle azioni, mentre Bernardo ne possiede il $100 - 54 = 46\%$. Il valore totale delle azioni è diminuito del 20% ed è quindi, al momento della spartizione $24000 \cdot 0.8 = 19200$ euro. Il valore delle azioni rimaste in eredità a Bernardo è quindi $19200 \cdot 0.46 = 8832$ euro.

4. Visto che non abbiamo il valore totale delle obbligazioni, proviamo ad esprimere il valore delle obbligazioni possedute da Bernardo prima e dopo la spartizione usando il valore totale delle obbligazioni come parametro. Chiameremo $V_{\text{Tot},i}$ il valore totale iniziale delle obbligazioni. Inizialmente Bernardo possedeva il $100 - 60 = 40\%$ delle obbligazioni e quindi il valore delle obbligazioni in suo possesso era $0.4 \cdot V_{\text{Tot},i}$. Ora, alla fine della spartizione, Aldo ha ceduto il 10% delle sue obbligazioni a Bernardo e ne possiede quindi il 54%, (come nel punto 3); la parte di Bernardo ammonta allora al 46% delle obbligazioni. Ora il valore totale delle obbligazioni è diminuito del 10% ed è quindi $V_{\text{Tot},i} \cdot 0.9$; dunque il valore delle obbligazioni possiedute da Bernardo alla fine della spartizione è $0.46 \cdot 0.9 \cdot V_{\text{Tot},i}$. Dobbiamo ora confrontare i due valori:

$$0.4 \cdot V_{\text{Tot},i} \quad ; \quad 0.46 \cdot 0.9 \cdot V_{\text{Tot},i}.$$

Visto che $0.46 \cdot 0.9$ è maggiore di 0.4 il valore delle obbligazioni possedute da Bernardo è aumentato.

Esercizio 2.2. 1. In questo caso la probabilità è semplicemente il rapporto tra

$$\frac{\text{numero di eventi favorevoli}}{\text{numero di eventi possibili}} = \frac{8}{6+4+8} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}.$$

2. Per questo punto si può fare riferimento alla pagina 91 del vostro testo. Questo tipo di esperimento si può modellizzare con un processo di Bernoulli. Estrarre una pallina rossa è un esperimento che può riuscire con probabilità $p = 8/18$ e fallire con probabilità $q = 10/18$. Ripetiamo l'esperimento 4 volte, inoltre, poiché le estrazioni sono con reimbussolamento, le ripetizioni sono indipendenti. Quindi la probabilità di estrarre esattamente una pallina rossa è

$$\binom{4}{1}\left(\frac{8}{18}\right)\left(\frac{10}{18}\right)^3 = 4 \cdot \frac{4}{9}\left(\frac{5}{9}\right)^3 = \frac{16 \cdot 5^3}{9^4}.$$

3. L'evento E_1, "estrarre almeno una pallina rossa", è l'evento complementare all'evento E_2, "non estrarre nessuna pallina rossa". Calcoliamo la probabilità dell'evento E_2, la probabilità di E_1 sarà data da $1 - P(E_2)$. Poiché le estrazioni sono con rimbussolamento possiamo considerare ogni estrazione come un evento indipendente; se $10/18$ è la probabilità di non estrarre una pallina rossa nella singola estrazione allora

$$P(E_2) = \left(\frac{10}{18}\right)^4 = \left(\frac{5}{9}\right)^4.$$

Dunque

$$P(E_1) = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^4 = \frac{9^4 - 5^4}{9^4} = \frac{(9-5)(9+5)(9^2+5^2)}{9^4}.$$

4. Indichiamo con gli elementi dell'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ le estrazioni. Il numero di modi in cui possiamo scegliere 2 elementi di questo insieme equivale al numero di modi in cui possiamo scegliere le due estrazioni in cui sono estratte le 2 palline rosse. Abbiamo quindi

$$\binom{4}{2} = 6$$

modi in cui possiamo scegliere le 2 estrazioni in cui sono estratte palline rosse. Nelle altre due estrazioni le palline possono essere di due tipi (bianche o nere); quindi possono avvenire in $D_{2,2} = 4$ modi diversi. Per il principio base del Calcolo combinatorio, il numero totale di sequenze possibili è $6 \cdot 4 = 24$.

Esercizio 2.3. 1. A pag. 71 del vostro libro potete trovare la legge di Hardy-Weinberg. Utilizzando la legge di Hardy-Weinberg calcoliamo la probabilità dei diversi genotipi. Indicheremo con p_M la probabilità dell'allele marrone, con p_{Mb} la probabilità del **genotipo** Mb, con F_M la probabilità del **fenotipo** marrone e così via. Nel testo del problema ci vengono date le probabilità dei singoli alleli:

$$p_M = 0.3, \quad p_b = 0.7.$$

Le probabilità dei diversi genotipi sono quindi:

$$p_{MM} = (0.3)^2 = 0.09, \quad p_{Mb} = 2 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 0.42, \quad p_{bb} = (0.7)^2 = 0.49.$$

Poiché il l'allele "M" è dominante abbiamo che le probabilità dei fenotipi sono:

$$F_M = p_{MM} + p_{Mb} = 0.51, \quad F_b = p_{bb} = 0.49.$$

2. Si tratta di una probabilità condizionata. Gli eventi coinvolti sono "il figlio ha manto marrone" e "il padre ha manto marrone e la madre ha manto bianco". Dobbiamo calcolare innanzitutto la probabilità dell'intersezione, cioè la probabilità dell'evento "il figlio ha manto marrone e il padre ha manto marrone e la madre ha manto bianco". Per ipotesi i genotipi dei genitori sono indipendenti. Poichè l'allele marrone è dominante possiamo trovarci di fronte a due possibili scenari:

   (a) padre "MM" e madre "bb" e figlio marrone;

   (b) padre "Mb" e madre "bb"e figlio marrone.

   La probabilità dell'intersezione cercata sarà la somma delle probabilità nel caso **a** e **b**. Calcoliamo quindi la probabilità nel caso **a**: per la legge di disgiunzione di Mendell la totalità dei figli di questa coppia avrà genotipo "Mb" e quindi manto marrone. La probabilità dell'evento "il figlio ha manto marrone e il padre ha genotipo "MM" e la madre ha manto bianco (genotipo "bb")" è quindi $p_{MM}p_{bb}$. Calcoliamo ora la probabilità nel caso **b**: la metà dei figli di questa coppia avrà genotipo "Mb" e quindi manto marrone mentre l'altra metà avrà genotipo "bb" e quindi manto bianco. La probabilità dell'evento "il figlio ha manto marrone e il padre ha genotipo "Mb" e la madre ha manto bianco (genotipo "bb")" è quindi $1/2 \cdot p_{Mb}p_{bb}$. La probabilità dell'intersezione è quindi:

$$p_{MM}p_{bb} + \frac{1}{2}p_{Mb}p_{bb}.$$

   La probabilità dell'evento "il padre ha manto marrone e la madre ha manto bianco" è invece uguale a $F_M \cdot F_b$. Siccome $F_b = p_{bb}$ la probabilità cercata è pari a:

$$\begin{aligned}\frac{p_{MM}p_{bb} + \frac{1}{2}p_{Mb}p_{bb}}{F_M \cdot F_b} &= \frac{p_{MM} + \frac{1}{2}p_{Mb}}{F_M} = \frac{p_M^2 + p_M p_b}{p_M^2 + 2p_M p_b} \\ &= \frac{p_M + p_b}{p_M + 2p_b} = \frac{1}{p_M + 2p_b} = \frac{10}{17}.\end{aligned}$$

3. Anche qui si tratta di una probabilità condizionata. Gli eventi coinvolti sono "il genitore ha manto marrone" e "il figlio ha manto bianco". Per calcolare la probabilità dell'intersezione come prima dobbiamo distinguere più casi:

   (a) genitore "MM", altro genitore qualsiasi, figlio bianco;

   (b) genitore "Mb", altro genitore "MM", figlio bianco;

   (c) genitore "Mb", altro genitore "Mb", figlio bianco;

(d) genitore “Mb”, altro genitore “bb”, figlio bianco.

I casi **a** e **b** hanno chiaramente probabilità 0. Ragionando come nel punto 2, vediamo che il caso **c** ha probabilità $1/4 \cdot p_{Mb} \cdot p_{Mb}$ ed il caso **d** ha probabilità $1/2 \cdot p_{Mb} \cdot p_{bb}$. Poiché la probabilità che il figlio abbia manto bianco è pari a F_b abbiamo che la probabilità cercata è:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2}p_{Mb}p_{bb} + \frac{1}{4}p_{Mb}p_{Mb}}{F_b} &= \frac{\frac{1}{2}p_{Mb}(p_{bb} + \frac{1}{2}p_{Mb})}{p_{bb}} = \frac{p_M p_b(p_b^2 + p_M p_b)}{p_b^2} \\ &= \frac{p_M p_b^2(p_b + p_M)}{p_b^2} = p_M(p_b + p_M) = p_M = 0.3. \end{aligned}$$

4. Poiché l’allele bianco è recessivo, due genitori bianchi non possono avere un figlio marrone, per cui la probabilità cercata è 0.