

## MATEMATICA

## PRIMO COMPITINO

## SOLUZIONE DI ALCUNI ESERCIZI

PROFF. MARCO ABATE E MARGHERITA LELLI-CHIESA

## PRIMA PARTE

**Esercizio 1.** (Testo A) *Determina, motivando la risposta, se la funzione  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  data da*

$$f(x) = \frac{x-2}{x}$$

*è iniettiva.*

**Soluzione 1.** (Testo A) La funzione  $f$  è iniettiva. Per verificarlo, facciamo vedere che se  $f(x_1) = f(x_2)$  allora  $x_1 = x_2$ , per cui due elementi distinti del dominio hanno necessariamente immagine distinta. Supponiamo quindi  $f(x_1) = f(x_2)$  per qualche  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$ ; allora

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\implies \frac{x_1-2}{x_1} = \frac{x_2-2}{x_2} \implies 1 - \frac{2}{x_1} = 1 - \frac{2}{x_2} \\ &\implies \frac{2}{x_1} = \frac{2}{x_2} \implies \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \implies x_1 = x_2, \end{aligned}$$

come affermato.  $\square$

**Esercizio 1.** (Testo B) *Determina, motivando la risposta, se la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  data da*

$$f(x) = \frac{1-4x^2}{x^2+1}$$

*è iniettiva.*

**Soluzione 1.** (Testo B) La funzione  $f$  non è iniettiva. Per dimostrarlo è sufficiente osservare che assume lo stesso valore su due elementi distinti del dominio: per esempio,  $f(-\frac{1}{2}) = 0 = f(\frac{1}{2})$ . Più in generale, si ha  $f(-x) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , per cui la funzione è pari.  $\square$

**Esercizio 2.** (Testo A) *Scrivi un vettore di lunghezza 1 ortogonale al vettore  $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ . Quanti ce ne sono?*

**Soluzione 2.** (Testo A) Un vettore  $\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$  è ortogonale al vettore  $\vec{v}$  se e solo se il loro prodotto scalare si annulla, cioè se e solo se  $3a + 2b - c = 0$ ; di conseguenza i vettori ortogonali a  $\vec{v}$  sono tutti e soli i vettori della forma  $\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j} + (3a + 2b)\vec{k}$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$  qualsiasi.

Per avere un vettore di lunghezza 1 basta dividere  $\vec{w}$  per la sua lunghezza, che è  $\sqrt{a^2 + b^2 + (3a + 2b)^2}$ . Quindi esistono infiniti vettori di lunghezza 1 ortogonali a  $\vec{v}$ : sono tutti e soli i vettori della forma

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + (3a + 2b)^2}} (a\vec{i} + b\vec{j} + (3a + 2b)\vec{k})$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$  non entrambi nulli.  $\square$

**Esercizio 2.** (Testo B) *Scrivi un vettore di lunghezza 1 ortogonale al piano di equazione  $3x + 2y - z = 3$ . Quanti ce ne sono?*

**Soluzione 2.** (Testo B) Ricordando che i coefficienti  $a, b$  e  $c$  dell'equazione cartesiana di un piano identificano le coordinate di un vettore ortogonale al piano, si ottiene immediatamente che tutti i vettori ortogonali al piano dato sono multipli del vettore  $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ .

Il vettore  $\vec{v}$  ha lunghezza  $\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$ ; quindi un multiplo  $c\vec{v}$  di  $\vec{v}$  ha lunghezza  $|c|\sqrt{14}$ . Per ottenere un vettore di lunghezza 1 si deve quindi avere  $|c|\sqrt{14} = 1$ , cioè  $c = \pm \frac{1}{\sqrt{14}}$ . Di conseguenza ci sono solo due vettori di lunghezza 1 ortogonali al piano dato:  $\frac{1}{\sqrt{14}}\vec{v} = \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$ , e il suo opposto  $-\frac{1}{\sqrt{14}}\vec{v} = -\frac{3}{\sqrt{14}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$ .  $\square$

**Esercizio 3.** (Testo B) *Esiste un  $k \in \mathbb{R}$  per cui il sistema*

$$\begin{cases} kx + 3y = 3, \\ x - 2y = 2, \end{cases}$$

*ammette soluzione? Se pensi che la risposta sia affermativa, indica tutti i valori di  $k$  per cui il sistema ha soluzione, e descrivi le soluzioni; se pensi che la risposta sia negativa, spiega perché.*

**Soluzione 3.** (Testo B) La matrice dei coefficienti del sistema e il suo vettore dei termini noti si possono rappresentare come

$$\left| \begin{array}{cc|c} k & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{array} \right|.$$

Per effettuare una riduzione a scala senza dividere per  $k$  (che ci costringerebbe a considerare separatamente il caso  $k = 0$ ), cominciamo con uno scambio di righe:

$$\left| \begin{array}{cc|c} k & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{array} \right| \longrightarrow \left| \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ k & 3 & 3 \end{array} \right| \longrightarrow \left| \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3+2k & 3-2k \end{array} \right|.$$

Quindi se  $k \neq -3/2$  la matrice a scala ottenuta ha 2 pivot e il nostro sistema lineare è equivalente al sistema con (unica) soluzione

$$(1) \quad \begin{cases} x - 2y = 2, \\ (3 + 2k)y = 3 - 2k, \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 + 2y = 2 + 2\frac{3-2k}{3+2k} = \frac{12}{3+2k}, \\ y = \frac{3-2k}{3+2k}. \end{cases}$$

Se invece  $k = -3/2$  la riduzione a scala è

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{array} \right|,$$

per cui il sistema è impossibile.

Riassumendo, il sistema ammette soluzione per ogni  $k \neq -3/2$ , e in tal caso le soluzioni sono date da (1).  $\square$

SECONDA PARTE

**Esercizio 4.** (Testo B)

- (a) *Scrivi un'equazione cartesiana del piano  $\alpha$  passante per il punto  $A = (-2, 1, 0)$  e parallelo al piano  $\beta$  di equazione  $3x + y - z = 0$ .*
- (b) *Scrivi delle equazioni parametriche della retta  $r$  passante per il punto  $B = (3, 2, 5)$  e ortogonale ai piani  $\alpha$  e  $\beta$ .*
- (c) *Trova le coordinate del punto  $P$  intersezione della retta  $r$  con il piano  $\alpha$ .*

**Soluzione 4.** (Testo B)

(a) La condizione di parallelismo tra piani si può tradurre nel fatto che le equazioni cartesiane dei due piani devono avere gli stessi coefficienti  $a$ ,  $b$  e  $c$ , mentre il passaggio per il punto  $A$  significa che le coordinate di  $A$  devono soddisfare l'equazione del piano. Quindi un'equazione cartesiana di un piano parallelo al piano  $\beta$  dev'essere della forma  $3x + y - z = d$ . Le coordinate di  $A$  soddisfano questa equazione se e solo se  $3(-2) + 1 - 0 = d$ , cioè se e solo se  $d = -5$ , per cui un'equazione cartesiana del piano  $\alpha$  è data da  $3x + y - z + 5 = 0$ .

(b) La condizione che la retta  $r$  sia ortogonale ai piani del punto precedente si può soddisfare imponendo che il vettore direttore della retta abbia come coordinate i coefficienti  $a$ ,  $b$  e  $c$  dei suddetti piani. Quindi, poiché il punto  $B$  deve appartenere alla retta, equazioni parametriche della retta  $r$  sono

$$\begin{cases} x = 3 + 3t, \\ y = 2 + t, \\ z = 5 - t. \end{cases}$$

(c) Per individuare le intersezioni tra una retta e un piano è sufficiente mettere a sistema le equazioni che li rappresentano e risolvere il sistema così ottenuto. Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} x = 3 + 3t, \\ y = 2 + t, \\ z = 5 - t, \\ 3x + y - z + 5 = 0. \end{cases}$$

Sostituendo i valori di  $x$ ,  $y$  e  $z$  dati dalle prime tre equazioni nella quarta si trova

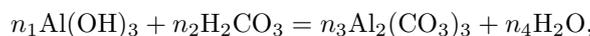
$$3(3 + 3t) + (2 + t) - (5 - t) + 5 = 0 \implies 11 + 11t = 0 \implies t = -1.$$

Sostituendo il valore di  $t = -1$  nelle prime tre equazioni troviamo che il punto di intersezione ha coordinate  $P = (0, 1, 6)$ . □

**Esercizio 5.** (Testo B) *Bilancia la seguente reazione chimica, risolvendo esplicitamente un sistema lineare:*

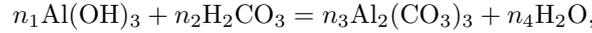


[Suggerimento: bilanciare questa reazione chimica significa trovare i più piccoli numeri naturali  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  e  $n_4$  per cui si abbia



dove l'uguaglianza significa che il numero di atomi di ciascun elemento è lo stesso sia a sinistra sia a destra dell'uguale.]

**Soluzione 5.** (Testo B) Come suggerito, bilanciare la reazione chimica data significa trovare i più piccoli numeri naturali  $n_1, n_2, n_3$  e  $n_4$  per cui si abbia



dove l'uguaglianza significa che il numero di atomi di ciascun elemento è lo stesso sia a sinistra sia a destra dell'uguale.

Il bilancio dell'alluminio implica  $n_1 = 2n_3$ , quello dell'ossigeno  $3n_1 + 3n_2 = 9n_3 + n_4$ , quello dell'idrogeno  $3n_1 + 2n_2 = 2n_4$  e infine quello del carbonio  $n_2 = 3n_3$ ; abbiamo quindi il sistema omogeneo

$$\begin{cases} n_1 - 2n_3 = 0, \\ 3n_1 + 3n_2 - 9n_3 - n_4 = 0, \\ 3n_1 + 2n_2 - 2n_4 = 0, \\ n_2 - 3n_3 = 0. \end{cases}$$

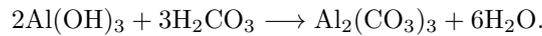
Riducendo a scala la matrice associata al sistema otteniamo

$$\begin{array}{ccc} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -9 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right| & \longrightarrow & \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right| \longrightarrow \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \end{array} \right| \\ & & \longrightarrow & \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & -2 \end{array} \right| \longrightarrow \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|. \end{array}$$

Dunque la matrice a scala ottenuta ha 3 pivot, per cui il sistema omogeneo ha infinite soluzioni, dipendenti da  $4 - 3 = 1$  variabile libera. Risolvendo all'indietro troviamo che le soluzioni hanno la forma

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix} = n_4 \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ 1/6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Perché la soluzione sia composta da numeri interi positivi occorre che  $n_4$  sia un multiplo di 6. In particolare, il valore minimo ammissibile di  $n_4$  è  $n_4 = 6$ , e il bilancio della reazione è dato da



□

**Esercizio 6.** (Testo B) *Al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$  studia (cioè determina per quali valori del parametro ammette soluzione, e in tal caso trova le soluzioni) il sistema lineare:*

$$\begin{cases} -3x + z = 2a, \\ ax + y = 2 + a, \\ -ax + ay = 0, \end{cases}$$

**Soluzione 6.** (Testo B) La matrice dei coefficienti del sistema e il suo vettore dei termini noti si possono rappresentare come

$$\left| \begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 2a \\ a & 1 & 0 & 2 + a \\ -a & a & 0 & 0 \end{array} \right|.$$

Operiamo una riduzione a scala:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 2a \\ a & 1 & 0 & 2+a \\ -a & a & 0 & 0 \end{array} \right| &\longrightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 2a \\ 0 & 1 & a/3 & 2+a+\frac{2a^2}{3} \\ 0 & a & -a/3 & -\frac{2a^2}{3} \end{array} \right| \\ &\longrightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 2a \\ 0 & 1 & a/3 & 2+a+\frac{2a^2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{a(a+1)}{3} & -\frac{2a^2}{3}-2a-a^2-\frac{2a^3}{3} \end{array} \right| \\ &= \left| \begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 2a \\ 0 & 1 & a/3 & 2+a+\frac{2a^2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{a(a+1)}{3} & -\frac{a}{3}(2a^2+5a+6) \end{array} \right|. \end{aligned}$$

Quindi se  $a \neq 0, -1$  abbiamo ottenuto una matrice a scala con 3 pivot, per cui il nostro sistema ha un'unica soluzione, che si ottiene risolvendo all'indietro:

$$\begin{cases} -3x + z = 2a, \\ y + \frac{a}{3}z = 2 + a + \frac{2a^2}{3}, \\ -\frac{a(a+1)}{3}z = -\frac{a}{3}(2a^2 + 5a + 6), \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{3}z - \frac{2a}{3} = \frac{a+2}{a+1}, \\ y = 2 + a + \frac{2a^2}{3} - \frac{a}{3}z = \frac{a+2}{a+1}, \\ z = \frac{2a^2+5a+6}{a+1}. \end{cases}$$

Se  $a = -1$  la riduzione a scala ci ha fornito la seguente matrice:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1/3 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|,$$

per cui il sistema per  $a = -1$  è impossibile.

Infine, se  $a = 0$  la riduzione a scala ci ha fornito la seguente matrice:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|.$$

Quindi la matrice a scala ha 2 pivot, il sistema è compatibile e le (infinite) soluzioni dipendono da  $3 - 2 = 1$  variabile libera. Infatti, risolvendo all'indietro troviamo

$$\begin{cases} -3x + z = 0, \\ y = 2, \\ 0 = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{3}z, \\ y = 2, \\ z = z, \end{cases}$$

cioè

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

□