Correzione primo scritto, sessione estiva 2010

1 giugno 2010

1 Parte 1

Esercizio 1.1. Per la parte di teoria relativa alle percentuali vi rimandiamo a pag. 26 del vostro libro. Indicheremo con X il prezzo del prodotto all'inizio del mese. Calcoliamo ora il prezzo a cui viene venduto il prodotto dal primo commerciante nella terza settimana. Dopo la prima settimana il primo commerciante effettua uno sconto del 15%, per cui il prezzo a cui viene venduto il prodotto è $X_2 = 0.85 \cdot X$. Ora, dopo la seconda settimana, il primo commerciante effettua un ulteriore sconto del 5%. Il prezzo sarà quindi

$$0.95 \cdot X_2 = 0.85 \cdot 0.95X = 0.8075 \cdot X.$$

Calcoliamo ora il prezzo a cui viene venduto il prodotto dal secondo commerciante. Dopo una settimana il secondo commerciante abbassa il prezzo del 10%, quindi il prezzo sarà $Y_2 = 0.9 \cdot X$ e dopo un'altra settimana lo ribassa del 10% e quindi sarà

$$0.9 \cdot Y_2 = 0.9 \cdot 0.9 \cdot Y = 0.81 \cdot Y.$$

Per cui, conviene acquistare il prodotto dal primo commerciante.

Esercizio 1.2. Per le proprietà di linearità dell'integrale spezziamo il calcolo di questo integrale nel calcolo dei suoi addendi. Calcoliamo quindi il primo addendo:

$$\int_0^1 t \cdot e^{2t}\, dt.$$

Per risolvere questo integrale useremo la formula di integrazione per parti. (pag. 392 del vostro libro di testo). Poichè la derivata di t è particolarmente semplice, è chiaro il ruolo giocato dalle due funzioni nell'integrazione per parti. Avremo perciò:

$$\int_0^1 t \cdot e^{2t}\, dt = t \cdot \frac{e^{2t}}{2}\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2t}}{2}\, dt = t \cdot \frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4}\bigg|_0^1 = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

Calcoliamo ora l'integrale definitio del secondo addendo:

$$\int_0^1 3 \cdot t^2\, dt = t^3|_0^1 = 1.$$

L'integrale cercato sarà quindi:

$$\int_0^1 (t \cdot e^{2t} + 3t^2)\, dt = \frac{e^2}{4} + \frac{5}{4}.$$

Esercizio 1.3. Ricordiamo la definizione di funzione crescente (pag. 158 del vostro libro). Una funzione si dice **crescente** se per ogni coppia di numeri x_0 ed x_1 tali che $x_0 < x_1$ si ha che $f(x_0) \leq f(x_1)$. Possiamo mostrare ora un controesempio alla prima affermazione: la funzione $f(x) = x^3$ è una funzione per cui esiste un punto x_0 in cui la derivata si annulla, il punto $x_0 = 0$, mentre la funzione è crescente. Se disegniamo il grafico della derivata, possiamo notare un come questi non sia altro che una parabola con la concavità rivolta verso l'alto e vertice nell'origine. Cioè la derivata della funzione è sempre positiva, tranne nel punto $x_0 = 0$.

Proprio l'assenza di questo tipo di comportamento è ciò che ci permette di provare che la seconda affermazione è vera. Infatti, nel caso in cui esista un punto x_0 in cui $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ possiamo affermare che in un intorno del punto x_0 la derivata f' assume sia valori negativi sia valori positivi. Questo perchè la derivata seconda positiva ci dice che in un intorno di x_0 la derivata è strettamente crescente: se in x_0 la derivata vale 0 questo significa che il suo grafico attraversa in x_0 l'asse delle x. Possiamo perciò trovare un punto $\tilde{x}$ vicino ad x_0 in cui la derivata è negativa, per cui, in un intorno di $\tilde{x}$ la funzione è strettamente decrescente.

2 Parte 2

Esercizio 2.1. Nella correzione di questo esercizio chiameremo uno dei modi diversi in cui le persone si possono sedere attorno al tavolo una configurazione.

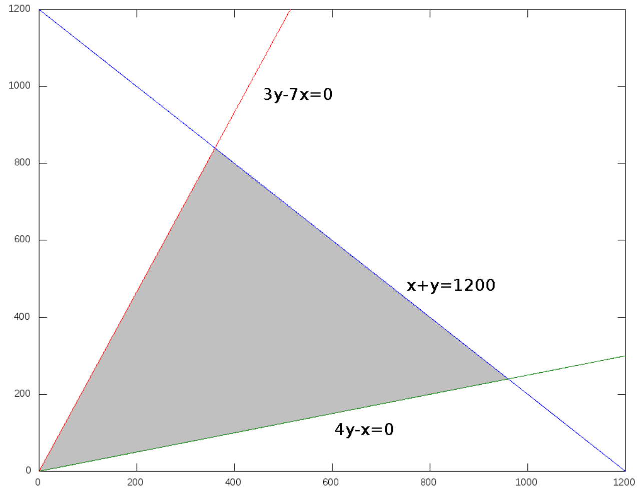
1. Supponiamo per un attimo che la tavola non sia rotonda ma che i commensali si mettano semplicemente in fila. In quanti modi possono mettersi in fila? La risposta a questo tipo di domanda la conosciamo: sono le permutazioni di 6 elementi distinti. Quindi i commensali si possono mettere in fila in 6! modi diversi. Ora, il fatto che le 6 persone si siedano attorno ad una tavola rotonda cosa significa? Significa che fissato un modo di mettersi in fila, questo è equivalente a tutti gli altri modi in cui la prima persona passa in fondo alla fila ma le persone nel mezzo rimangono le stesse. Mostriamolo con un esempio: indicheremo le persone con le lettere dell'insieme $\{A, B, C, D, E, F\}$. Supponiamo si mettano in fila nella successione A, B, C, D, E, F. Se parliamo di file, la successione precedente NON è equivalente alla successione B, C, D, E, F, A; se ora invece li facciamo sedere attorno ad un tavolo rotondo le due successioni danno luogo alla stessa configurazione. Questo significa che ognuna delle 6 successioni ottenute facendo scivolare tutte le lettere verso sinistra e spostando quelle che cascano fuori dalla fila ordinatamente in fondo alla fila dà luogo alla stessa configurazione. Perciò il numero di modi diversi in cui queste persone possono sedersi attorno ad una tavola rotonda sono $6!/6 = 5! = 120$.

2. Questo esercizio può essere risolto in almeno due modi diversi. Il primo è il seguente: supponiamo Piero si sieda ad uno dei posti del tavolo. Qual è la probabilità che Maria si sieda alla sua sinistra? Supponiamo che il vicino sinistro di Piero venga estratto a caso da un sacchetto: la probabilità che sia Maria è $1/5$. E la probabilità che Maria si sieda alla sua destra? Ancora $1/5$. Abbiamo quindi che la probabilità che Maria si sieda vicino a Piero, supponendo che il processo sia totalmente casuale è $2/5$.

Possiamo anche ragionare in un altro modo: la probabilità è il numero di eventi favorevoli sul numero totale di eventi. Supponendo perciò che ogni configurazione attorno al tavolo abbia la stessa probabilità possiamo calcolare la probabilità che Maria e Piero si siedano vicini. Contiamo ora le configurazioni favorevoli; visto che il problema non dipende da dove facciamo partire la successione studiando le successioni in cui i primi due elementi sono Piero e Maria troveremo il numero di configurazioni attorno al tavolo; supposto che la prima persona della successione sia Piero e la seconda Maria, il numero delle possibili successioni sono le permutazioni di 4 elementi nei posti rimasti liberi. Abbiamo quindi 4! possibili successioni. Inoltre, possiamo scambiare di posto Piero e Maria; per cui le configurazioni favorevoli sono $2 \cdot 4!$. Per cui la probabilità che Piero e Maria siedano vicini è: $2 \cdot 4!/5! = 2/5$.

3. La sedia vuota di Ubaldo conta come un vero e proprio commensale. Quindi, ripetendo il ragionamento fatto in 1, troviamo che le possibili configurazioni attorno al tavolo sono $7!/7 = 6! = 720$. Possiamo ora seguire uno qualsiasi dei due ragionamenti in 2 per ottenere che la probabilità che Piero e Maria siedano vicini è $1/3$.

Esercizio 2.2. Questo è un problema di programmazione lineare (pag. 165 del vostro libro). Cerchiamo di capire i vincoli del problema. Indicheremo con x la superficie coltivata a girasole (in are) e con y la superficie coltivata ad arachidi (in are). Sapendo che l'appezzamento è di 1200 are il primo vincolo del problema è che $x + y \leq 1200$. Sappiamo inoltre che la percentuale di appezzamento coltivata a girasoli deve essere almeno il 30% del totale coltivato, quindi $x \geq 0.3(x + y)$ o equivalentemente $3y - 7x \leq 0$. Possiamo identificare un ulteriore vincolo del problema dall'affermazione che la percentuale di appezzamento coltivato ad arachidi deve essere almeno il 20% del totale, cioè $y \geq 0.2(x + y)$, o equivalentemente $4y - x \geq 0$. Per cui, il dominio del problema sta sotto la retta $x + y = 1200$, sotto la retta $3y - 7x = 0$ e sopra la retta $4y - x = 0$. Il dominio su cui studieremo la nostra funzione sarà quindi il dominio in grigio nella seguente immagine.



La funzione da ottimizzare è la quantità di olio di semi vari che il terreno può produrre. Dai dati del problema sappiamo che ogni ara di terreno può produrre 5.5 tonnellate di semi di girasole. Da ogni chilo di semi di girasole si estraggono 20 g di olio; dunque, ogni ara di terreno coltivata a girasoli produce $5.5 \cdot 20 = 110$ kg di olio di semi di girasole. Un ragionamento analogo ci permette di dire che ogni ara di terreno coltivata ad arachidi produce $6.5 \cdot 25 = 162.5$ kg di olio di semi di arachide. Per cui la funzione che vogliamo massimizzare è la funzione:

$$P(x, y) = 110x + 162.5y.$$

Come sapete, i punti critici della funzione vengono assunti nei vertici del dominio. La prima cosa che possiamo notare è che dobbiamo investigare solo i due vertici del dominio che stanno sulla retta $x + y = 1200$: il terzo vertice del dominio è l'origine e $P(0, 0) = 0$. Restringiamo perciò la funzione $P(x, y)$ alla retta $x + y = 1200$. Abbiamo dunque:

$$P(x, 1200 - x) = 110x + 162.5(1200 - x) = 195000 - 52.5x.$$

Questa è una funzione lineare della x, decrescente. Avremo perciò che il massimo della funzione $P(x, y)$ verrà assunto nel punto di intersezione tra la retta $x+y = 1200$ e la retta $3y-7x = 0$, cioè nel punto $(360, 840)$. Per cui la massima quantità di olio prodotto dall'appezzamento di terreno è $P(360, 840) = 176100$ Kg.

Esercizio 2.3. 1. Vogliamo che la funzione di distribuzione sia continua e strettamente crescente. Il fatto che la funzione sia strettamente crescente segue in automatico dal fatto che $a, b, c > 0$; dobbiamo solo investigare, quindi, che i diversi rami della funzione si "incollino" bene. Vogliamo perciò che:

$$a \cdot e^{a \cdot 0} = \lim_{t \to 0^+} c + b \cdot t.$$

Cioè che $a = c$. Ora, vogliamo che

$$b \cdot 1 + c = 1,$$

cioè che $b + c = 1$. Quindi le condizioni perchè $F_{a,b,c}$ sia funzione di distribuzione di una variabile aleatoria continua $X_{a,b,c}$ sono:

$$\begin{cases} a = c \\ b + c = 1. \end{cases}$$

2. Per calcolare media e varianza di $X_{a,b,c}$ dobbiamo trovarne innanzitutto la densità di probabilità. A pag. 440 del vostro libro di testo potete trovare la dimostrazione che la densità di probabilità di una variabile aleatoria è la derivata della funzione di distribuzione. Calcoliamo perciò la densità di probabilità:

$$f_{X_{a,b,c}}(t) = \begin{cases} a^2 \cdot e^{at} & \text{per } t \leq 0; \\ b & \text{per } 0 \leq t \leq 1; \\ 0 & \text{per } t \geq 1. \end{cases}$$

   Possiamo ora calcolare la media della variabile aleatoria $X_{a,b,c}$, usando la formula che potete trovare a pag. 437:

$$\begin{aligned} E(X_{a,b,c}) &= \int_{-\infty}^{0} t \cdot a^2 \cdot e^{at}\, dt + \int_{0}^{1} t \cdot b\, dt \\ &= a^2 \left(t \cdot \frac{e^{at}}{a} \Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{at}}{a}\, dt \right) + b \frac{t^2}{2} \Big|_{0}^{1} \\ &= -e^{at} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{b}{2} = \frac{b-2}{2}. \end{aligned}$$

   Calcoliamo ora la varianza usando la formula sempre a pag. 437:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X_{a,b,c}) &= \int_{-\infty}^{0} (t - E(X_{a,b,c}))^2 \cdot a^2 \cdot e^{at}\, dt + \int_{0}^{1} (t - E(X_{a,b,c}))^2 \cdot b\, dt \\ &= a^2 \int_{-\infty}^{0} \left(t^2 - (b-2)t + \left(\frac{b-2}{2} \right)^2 \right) e^{at}\, dt \\ &+ \int_{0}^{1} \left(t^2 - (b-2)t + \left(\frac{b-2}{2} \right)^2 \right) \cdot b\, dt \\ &= at^2 e^{at} \Big|_{-\infty}^{0} - 2a \int_{-\infty}^{0} t \cdot e^{at}\, dt - (b-2)a^2 \int_{-\infty}^{0} t e^{at}\, dt \\ &+ \left(\frac{b-2}{2} \right)^2 a^2 \int_{-\infty}^{0} e^{at}\, dt + b \left(\frac{t^3}{3} - \frac{b-2}{2} t^2 + \left(\frac{b-2}{2} \right)^2 t \right) \Big|_{0}^{1} \\ &= \frac{2}{a} + (b-2) + \left(\frac{b-2}{2} \right)^2 a + b \left(\frac{3b^2 - 18b + 28}{12} \right) \\ &= \frac{2}{a} + \left(\frac{b-2}{2} \right)^2 a + b \left(\frac{3b^2 - 18b + 40}{12} \right) - 2. \end{aligned}$$