

IL PROBLEM SOLVING

SSIS

24 novembre 2008

IL PROBLEM SOLVING

1. Che cos'è un problema
2. Il problema nella psicologia della Gestalt
3. Il problema in educazione matematica: chi è il 'bravo' solutore?
4. Perché fare problem solving a scuola? Come?
5. L'attività di risoluzione di problemi in classe: le scelte dell'insegnante
6. Il problem solving come approccio
7. Il problem solving contro il fatalismo

IL PROBLEM SOLVING

1. Che cos'è un problema 
2. Il problema nella psicologia della Gestalt
3. Il problema in educazione matematica: chi è il 'bravo' solutore?
4. Perché fare problem solving a scuola? Come?
5. L'attività di risoluzione di problemi in classe: le scelte dell'insegnante
6. Il problem solving come approccio
7. Il problem solving contro il fatalismo

...PROBLEM SOLVING

↘ problemi

Che cos'è un problema?

Un problema sorge
quando un essere vivente ha una meta
ma non sa come raggiungerla.

[Duncker, 1935]



problema / esercizio

ESERCIZIO

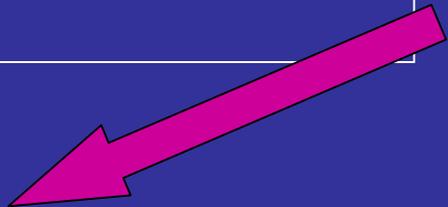
PROBLEMA

comportamento
automatico

comportamento
strategico

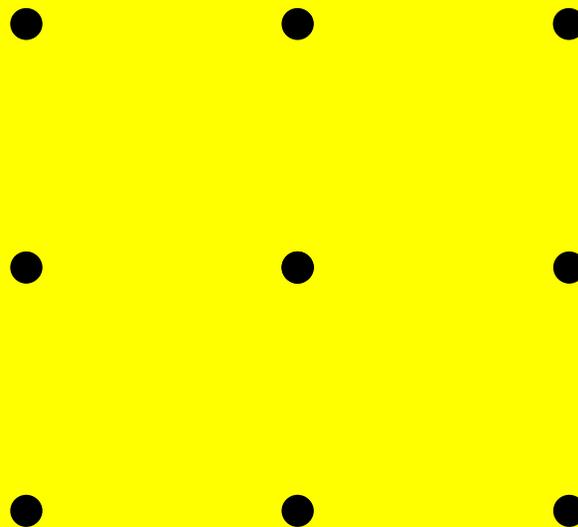
...nel problema di devono prendere DECISIONI!!!!

IL PROBLEM SOLVING

1. Che cos'è un problema
 2. Il problema nella psicologia della Gestalt
 3. Il problema in educazione matematica: chi è il 'bravo' solutore?
 4. Perché fare problem solving a scuola? Come?
 5. L'attività di risoluzione di problemi in classe: le scelte dell'insegnante
 6. Il problem solving come approccio
 7. Il problem solving contro il fatalismo
- 

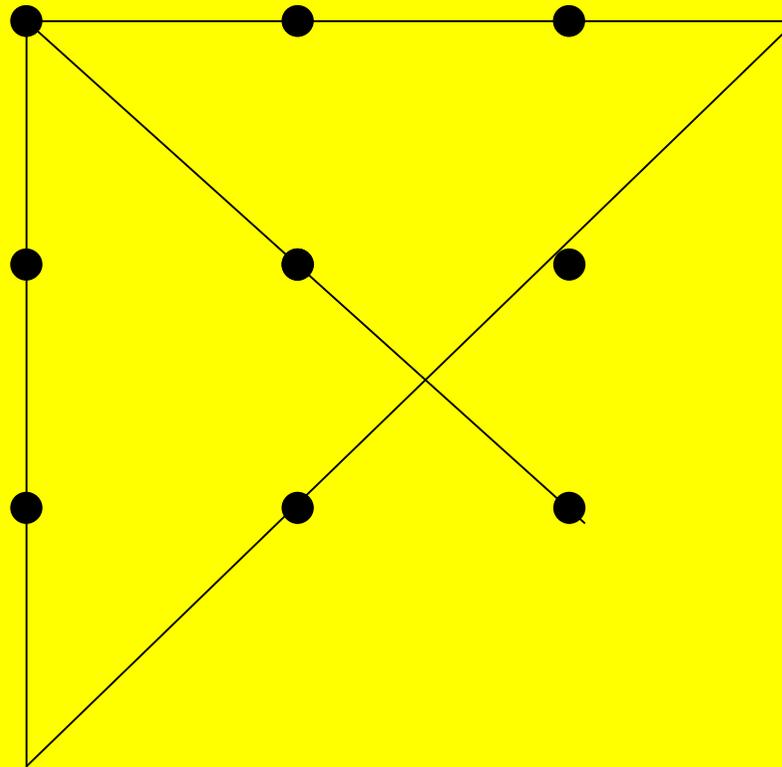
PROBLEMA DEI 9 PUNTI DI MAIER

Unire i nove punti con 4 segmenti retti continui senza sovrapposizioni:



PROBLEMA DEI 9 PUNTI DI MAIER

Unire i nove punti con 4 segmenti retti continui senza sovrapposizioni:



IL PROBLEM SOLVING

1. Che cos'è un problema
2. Il problema nella psicologia della Gestalt
3. Il problema in educazione matematica: chi è il 'bravo' solutore? 
4. Perché fare problem solving a scuola? Come?
5. L'attività di risoluzione di problemi in classe: le scelte dell'insegnante
6. Il problem solving come approccio
7. Il problem solving contro il fatalismo

Il bravo solutore di problemi

Il 'bravo' solutore

- Ha le conoscenze necessarie
- Ha un repertorio di euristiche (Polya)

Le 4 fasi di un processo risolutivo:

- Si *comprende* il problema
- Si *compila un piano*
- Si *sviluppa* il piano
- Si procede alla *verifica*

George Polya

Le euristiche

- "Scopo dell'euristica è lo studio dei metodi e delle leggi di invenzione e di scoperta" (Polya, 1945).
- Nell'ambito del problem solving il termine 'euristico' è usato come aggettivo, col significato di 'utile per la scoperta':
 - ragionamenti euristici
 - procedimenti di valore euristico
 - metodi euristici.
- Alcuni studiosi, fra cui lo stesso Polya, chiamano *euristiche* i metodi euristici.
- I metodi euristici (o euristiche) sono in definitiva strategie di carattere generale utili nell'affrontare un problema, in quanto facilitano il raggiungimento della soluzione.
- Spesso i termini *strategie* ed *euristiche* sono usati come *sino*.

Duncker: alcune euristiche

- l'analisi dell'obiettivo
- l'analisi della situazione o del materiale
- l'analisi del conflitto

...euristiche valide sia per problemi di natura pratica che per problemi di tipo matematico, in particolare di **dimostrazione**.

Dimostrazioni (Duncker, 1935)

“Se voglio far capire a qualcuno una dimostrazione, posso avvalermi di procedimenti ben diversi, a seconda che prenda l’avvio soprattutto da quanto è dato o invece soprattutto da quanto è richiesto.

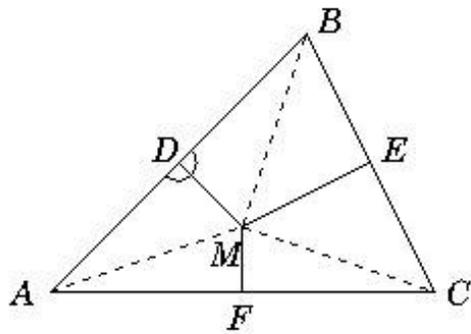
I casi estremi sono:

A – Cerco, per quanto è possibile, di far scaturire la dimostrazione dall’alto, dall’obiettivo, dall’enunciato, chiedendomi: 'Da cosa potrebbe derivare l’enunciato? Che cosa è necessario?'

B – Oppure comincio dal basso, chiedendomi: 'Che cosa è dato?'. Cioè sviluppo dalle premesse date varie inferenze, che si congiungono in seguito in modo sorprendente nella dimostrazione dell’enunciato.

Il primo modo lo chiamerei ‘organico’. [...]

Il secondo, il modo opposto, è quello ‘meccanico’.”



Teorema: Il punto di intersezione delle tre perpendicolari ai punti mediani dei lati di un triangolo è il centro del cerchio circoscritto.

DIMOSTRAZIONE 1 (dall'alto)

Che cosa significa 'centro del cerchio circoscritto'?

E' evidentemente il punto in cui la distanza dai tre vertici è uguale; quindi:
 $MA = MB = MC$.

Bisognerebbe dimostrarlo.

MA e MB sono lati dei triangoli MAD e MBD. Quindi si dovrebbe (se possibile) dimostrare che questi triangoli sono uguali.

In effetti $AD = BD$, inoltre $\angle MDA = \angle MDB = 90^\circ$ (per ipotesi). Quindi i triangoli, avendo il lato MD in comune, sono uguali, quindi $MA = MB$, ecc.

DIMOSTRAZIONE 2 (dal basso)

Collego il punto di intersezione delle tre perpendicolari, M, con A, B, e C e considero (dapprima) i triangoli MAD e MBD.

Qui $AD = BD$; inoltre $\angle MDA = \angle MDB = 90^\circ$ (per ipotesi). Quindi i due triangoli, avendo il lato MD in comune, sono uguali.

Quindi $MA = MB$, ecc.

Ciò significa allora che M è il centro del cerchio circoscritto.

Un esempio (Polya)

“Se non si riesce a risolvere il problema proposto, si tenti di risolvere prima qualche problema connesso con questo.”

Problema di costruzione:

In un triangolo assegnato, inscrivere un quadrato avente due vertici sulla base e ciascuno degli altri due vertici su un lato del triangolo.

“Qual è l'incognita?”

“Un quadrato.”

“Quali sono i dati?”

“Soltanto un triangolo.”

“Qual è la condizione?”

“Che i quattro vertici del quadrato appartengano al contorno del triangolo e, precisamente, due stiano sulla base e ciascuno degli altri due giaccia su un lato del triangolo.”

“E' possibile soddisfare alla condizione?”

“Ritengo di sì, ma non ne sono sicuro.”

“Sembra che tu non trovi il problema troppo facile. *Se non si riesce a risolvere il problema proposto, si tenti di risolvere prima qualche problema connesso con questo.* Si può soddisfare ad una parte della condizione?”

“Cosa si intende per una parte della condizione?”

“Ecco, la condizione riguarda tutti i vertici del quadrato; ossia quanti punti?”

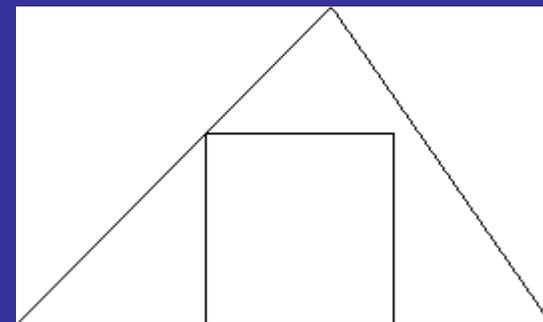
“Quattro.”

“Una parte della condizione dovrebbe riferirsi ad un numero di vertici minore di quattro. *Si tenga conto soltanto di una parte della condizione, trascurando l'altra.* Quale parte della condizione si presta ad essere soddisfatta più facilmente?”

“E' immediato disegnare un quadrato con due vertici sul contorno del triangolo – od anche con tre vertici su di esso!”

“*Si disegni una figura!*”

Lo studente disegna la figura 1.

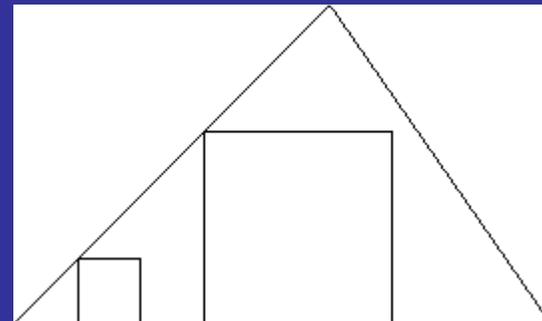


“Così si è tenuto conto soltanto di una parte della condizione, trascurando l'altra. Fino a che punto risulta ora determinata l'incognita?”

“Il quadrato richiesto non è ancora individuato: quello disegnato ha solo tre vertici appartenenti al contorno del triangolo.”

“Bene! Si disegni un'altra figura!”

Lo studente traccia la figura 2.



“ “Abbiamo detto che il quadrato non è determinato dalla *parte della condizione considerata. Come può variare?*”

[...]

“Tre vertici dei quadrati precedenti giacciono sul contorno del triangolo, ma il quarto vertice non è ancora dove dovrebbe stare. Il quadrato richiesto, come abbiamo già notato, non è fino a questo momento individuato; esso può variare e lo stesso accade per il suo quarto vertice. *Come può variare questo punto?*”

[...]

“Si facciano dei tentativi pratici, per vedere meglio. Si disegnino tanti quadrati, come quelli già considerati, aventi tutti e tre i vertici sul contorno del triangolo: quadrati piccoli e quadrati grandi. Quale sembra essere il luogo descritto dai quarti vertici? *Come può quindi variare il quarto vertice di ciascun quadrato siffatto?*”

Alcune critiche (Schoenfeld)

- La scelta di trascurare la condizione che impone tutti e 4 i vertici del quadrato sui lati del triangolo è evidentemente solo una delle tante possibili. Ad esempio si poteva rinunciare invece alla condizione che il quadrilatero fosse un quadrato, e lavorare sui rettangoli, ottenendo il problema: *inscrivere un rettangolo nel triangolo dato* (problema P2).
- D'altra parte la prima euristica poteva suggerire il problema P3 considerato da Polya nel suo colloquio: *costruire un quadrato che abbia solo 3 vertici sul triangolo*; ma anche:
 - *inscrivere una figura diversa da un quadrilatero, ad esempio una circonferenza* (problema P4);
 - *partire dal quadrato e costruire un triangolo simile a quello dato soddisfacente le condizioni* (problema P5);
 - *inscrivere un quadrato in un triangolo particolare, ad esempio isoscele o equilatero* (problema P6)

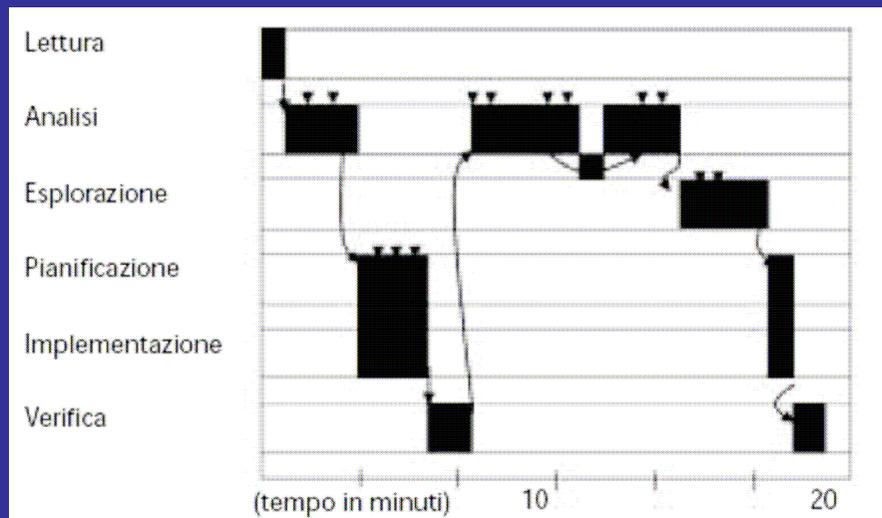
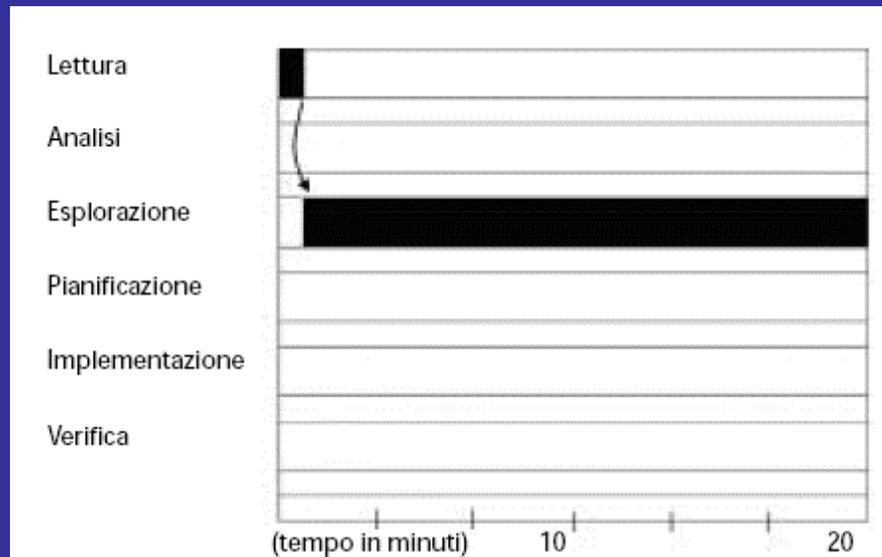
Ognuna di queste scelte avrebbe avuto una notevole influenza sul processo risolutivo.

Il 'bravo' solutore

- Ha le conoscenze necessarie
- Ha un repertorio di euristiche (Polya)
- Ha abilità metacognitive

Gli *episodi* (Schoenfeld, 1983):

1. Lettura
2. Analisi
3. Esplorazione
4. Pianificazione
5. Implementazione
6. Verifica
7. Transizione



Il 'bravo' solutore

- Ha le conoscenze necessarie
- Ha un repertorio di euristiche (Polya)
- Ha abilità metacognitive
- Ha convinzioni 'vincenti'

LE CONVINZIONI

sulla disciplina

sull'ambiente

sul compito

su di sé

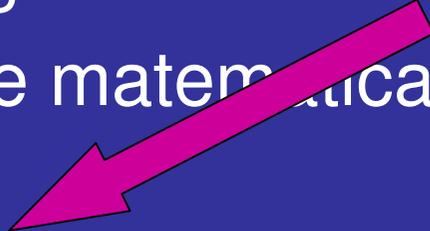


**ASPETTI
AFFETTIVI**

Il 'bravo' solutore

- Ha le conoscenze necessarie
- Ha un repertorio di euristiche (Polya)
- Ha abilità metacognitive
- Ha convinzioni 'vincenti'
- Ha un buon senso di auto-efficacia
- Ha motivazioni

IL PROBLEM SOLVING

1. Che cos'è un problema
 2. Il problema nella psicologia della Gestalt
 3. Il problema in educazione matematica: chi è il 'bravo' solutore?
 4. Perché fare problem solving a scuola? Come?
 5. L'attività di risoluzione di problemi in classe: le scelte dell'insegnante
 6. Il problem solving come approccio
 7. Il problem solving contro il fatalismo
- 

Perché fare problem solving

- Sviluppa:
 - ✓ la capacità di prendere decisioni
 - ✓ l'assunzione della responsabilità dei propri processi di pensiero...
 - ✓ ...dell'apprendimento
- Favorisce la costruzione del senso di auto-efficacia
- Favorisce una visione delle discipline come discipline vive, di processi più che di prodotti

➤ **Si fa problem solving a scuola?**

➤ **In particolare:**

**Si fa problem solving attraverso
l'attività usuale di soluzione di
problemi?**

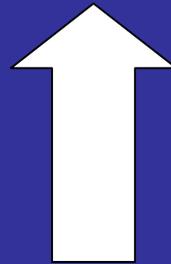
No!

Responsabilità della scarsa attenzione al problem solving:

- ✓ scarsi processi di controllo
- ✓ scarsa consapevolezza dei processi decisionali
- ✓ scarsa assunzione della responsabilità dei propri processi di pensiero...
- ✓ ...dell'apprendimento
- costruzione di un basso senso di auto-efficacia
- visione della matematica come disciplina di prodotti più che di processi

**Responsabilità dell'attività tradizionale di
soluzione di problemi**

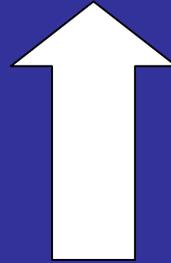
Il problem solving in classe



Ripensiamo l'attività di soluzione di problemi

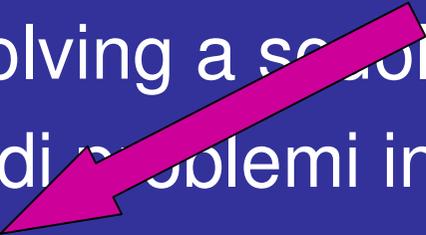
Responsabilità dell'attività tradizionale di soluzione di problemi

Il problem solving in classe



Ripensiamo l'attività di soluzione di problemi

IL PROBLEM SOLVING

1. Che cos'è un problema
 2. Il problema nella psicologia della Gestalt
 3. Il problema in educazione matematica: chi è il 'bravo' solutore?
 4. Perché fare problem solving a scuola? Come?
 5. L'attività di risoluzione di problemi in classe: le scelte dell'insegnante
 6. Il problem solving come approccio
 7. Il problem solving contro il fatalismo
- 

Che tipo di problema?

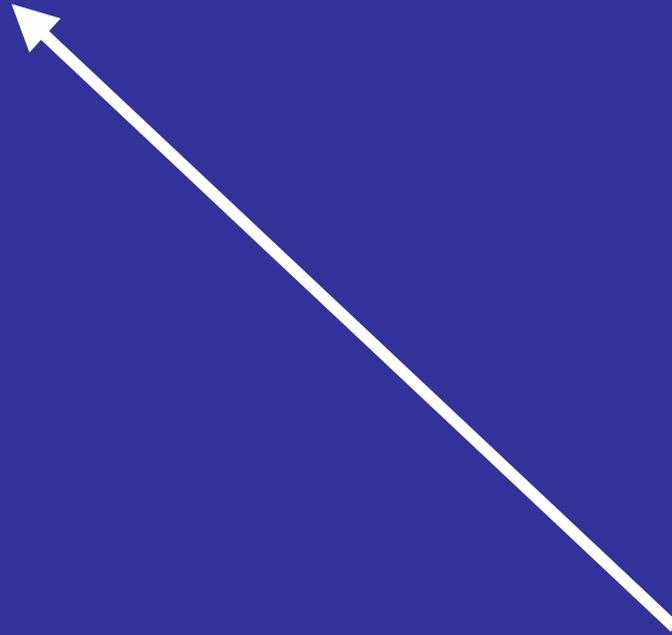
Come usarlo?

Perché?

Scelte didattiche

...l'insegnante!

Che tipo di problema?



Scelte didattiche

...l'insegnante!

➤ *Struttura matematica*

- ✓ Il contenuto (area / equazioni / frazioni...)
- ✓ Quantità di processi risolutivi possibili (uno / più d'uno)
- ✓ Varietà di strategie risolutive (approccio grafico, manipolativo, ...; per prove ed errori, per casi particolari, soluzione generale,...)
- ✓ La complessità (problemi ad una o più operazioni)
- ✓ La possibilità di dare risposte parziali
- ✓ ...

CHE TIPO DI PROBLEMA?

Si devono utilizzare
conoscenze apprese
di recente



Non si sa a priori quali
conoscenze utilizzare

E' previsto un unico
approccio



Sono possibili più
approcci

E' previsto un unico
processo risolutivo



Sono possibili più
processi risolutivi

E' del tipo "tutto o
niente"



Sono possibili
risposte parziali

Come usarlo?



Scelte didattiche

...l'insegnante!

➤ *Modalità d'uso*

- Individuale / a coppie / a gruppi
- Con/senza richiesta di verbalizzazione
- A casa / in classe
- Poco tempo / molto tempo
- Confronto finale: sì / no
- ...

MODALITA' D'USO

Da soli



A gruppi

Poco tempo



Il tempo necessario

A casa

(in classe solo la verifica)



In classe

L'insegnante
corregge, risponde



L'insegnante
fa domande

Che tipo di problema?

Come usarlo?

Perché?

Scelte didattiche

...l'insegnante!

Perché?



Scelte didattiche

...l'insegnante!

➤ *Obiettivi*

- ✓ Verificare conoscenze e abilità
- ✓ Consolidare conoscenze e abilità
- ✓ Introdurre nuove conoscenze
- ✓ Promuovere abilità di problem solving
- ✓ Promuovere un atteggiamento positivo verso la matematica

OBIETTIVI

Valutare
conoscenze e
abilità

Consolidare
conoscenze e
abilità

Introdurre
conoscenze

OBIETTIVI

Sviluppare abilità
e conoscenze
In matematica

Consolidare
conoscenze e
abilità

Promuovere abilità
di problem solving
(in matematica)

Introdurre
conoscenze

Promuovere
un atteggiamento
positivo verso
la matematica

Il problem solving in classe

- Il ruolo degli errori

Popper

‘Evitare errori è un ideale meschino: se non osiamo affrontare problemi che siano così difficili da rendere l’errore quasi inevitabile, non vi sarà allora sviluppo della conoscenza. In effetti, è dalle nostre teorie più ardite, *incluse quelle che sono erronee*, che noi impariamo di più. Nessuno può evitare di fare errori; la cosa più grande è imparare da essi.’

Il problem solving in classe

- Il ruolo degli errori
- L'idea di successo: dalla risposta corretta a processi di pensiero significativi

Il problem solving in classe

- Il ruolo degli errori
- L'idea di successo: dalla risposta corretta a processi di pensiero significativi
- Il ruolo dell'insegnante

L'insegnante:

- *Non* corregge eventuali errori
- *Non* suggerisce la risposta corretta

Ma...

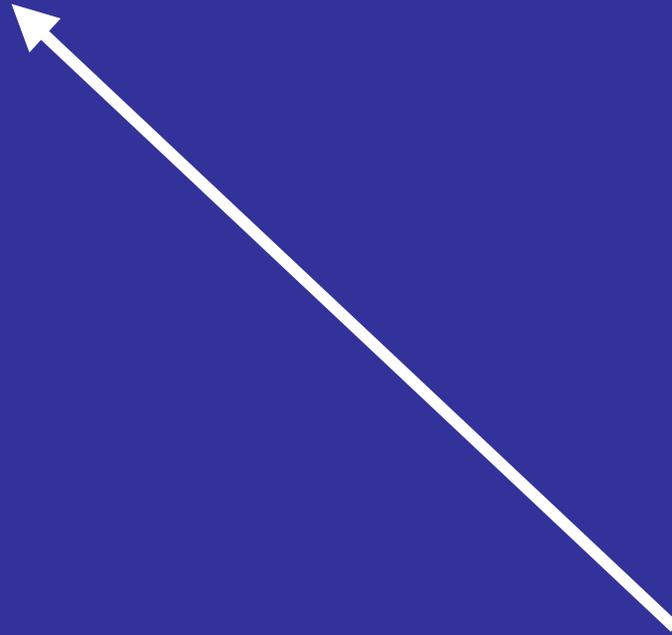
- Fa domande per stimolare processi di pensiero:
 - ✓ Cosa avete fatto?
 - ✓ Cosa state facendo?
 - ✓ Cosa pensate di fare?
- Utilizza le potenzialità della 'comunità di pratica' per:
 - ✓ sottolineare la varietà dei processi possibili
 - ✓ sviluppare abilità di argomentazione
 - ✓ negoziare significati

Il problem solving in classe

- Il ruolo degli errori
- L'idea di successo: dalla risposta corretta a processi di pensiero significativi
- Il ruolo dell'insegnante
- Importanza di avere un repertorio di problemi

Ma c'è ancora un altro
aspetto...

Che tipo di problema?



Scelte didattiche

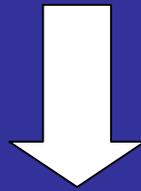
...l'insegnante!

La formulazione del testo



La comprensione del problema

Secondo molti ricercatori (e insegnanti) le difficoltà degli allievi sono spesso dovute a difficoltà nella fase iniziale di comprensione.



Importanza di individuare le variabili legate al processo di comprensione

ALLIEVO

TESTO

il problema scolastico

INSEGNANTE

problema espresso attraverso un testo (scritto)



PROBLEMI VERBALI

- La struttura matematica è contestualizzata in una situazione 'concreta', 'famigliare':

il *contesto*

- C'è una *richiesta* (in genere una domanda)

intende favorire

- la **motivazione**
- la **comprensione** della richiesta e delle informazioni, richiamando le esperienze e conoscenze dell'allievo

PROBLEMI VERBALI

- La struttura matematica è contestualizzata in una situazione 'concreta', 'famigliare':

struttura

narrativa

- (in genere una domanda)

Che tipo di problema?

Come usarlo?

Perché?

Scelte didattiche

...l'insegnante!

Che tipo di problema?

STRUTTURA MATEMATICA

STRUTTURA NARRATIVA

Scelte didattiche

...l'insegnante!

Riassumendo...

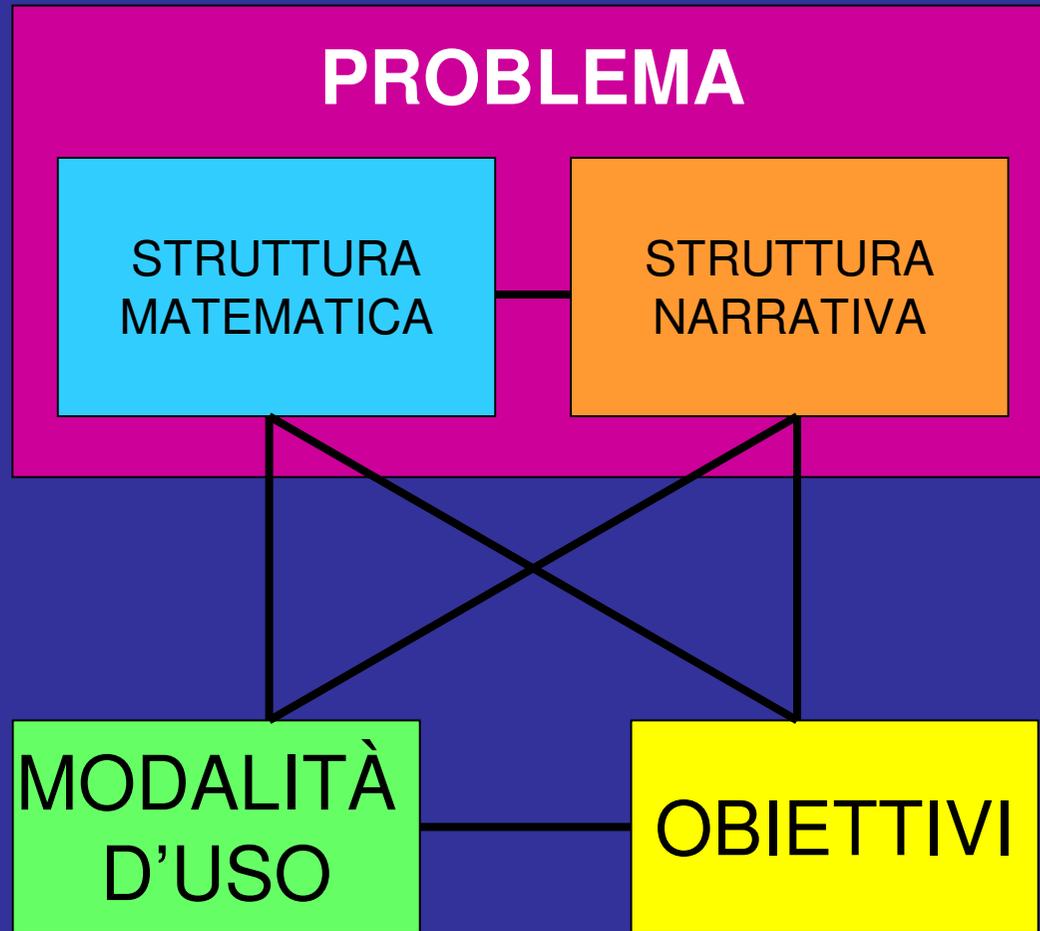
PROBLEMA

STRUTTURA
MATEMATICA

STRUTTURA
NARRATIVA

MODALITÀ
D'USO

OBIETTIVI



IL PROBLEM SOLVING

1. Che cos'è un problema
2. Il problema nella psicologia della Gestalt
3. Il problema in educazione matematica: chi è il 'bravo' solutore?
4. Perché fare problem solving a scuola? Come?
5. L'attività di risoluzione di problemi in classe: le scelte dell'insegnante
6. Il problem solving come approccio 
7. Il problem solving contro il fatalismo

Il problem solving è un approccio



- si può utilizzare in qualsiasi momento della pratica scolastica

Il problem solving è un approccio

- Ad esempio:
 - Proporre domande e problemi PRIMA di introdurre o ripassare un concetto (vedi progetto precorsi e progetto P.O.R.T.A.)

Anche l'insegnamento è problem solving



L'insegnante deve continuamente:

- Riconoscere problemi
 - Prendere decisioni:
 - ✓ prima
 - ✓ durante
 - ✓ dopo
- ...l'interazione con gli allievi

Anche l'insegnamento è
problem solving



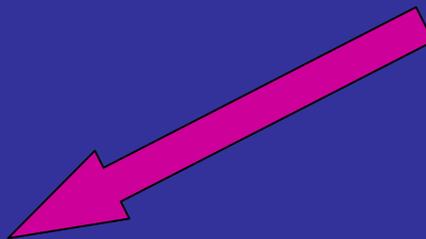
Anche nell'insegnamento l'errore va
messo nel conto...

Bruno Bettelheim, *Un genitore quasi perfetto*

[...] per una buona educazione dei propri figli, non bisogna cercare di essere dei genitori perfetti, né tanto meno aspettarsi che lo siano, o che lo diventino, i nostri figli. La perfezione non è alla portata del normale essere umano, e l'accanimento nel volerla raggiungere è inevitabilmente di ostacolo a quell'atteggiamento di tolleranza verso le imperfezioni altrui, comprese quelle dei figli, che, solo, rende possibili rapporti umani decenti.

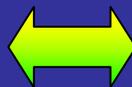
E' invece alla portata di tutti essere genitori passabili, vale a dire genitori che educano bene i figli. Occorre però che gli errori che commettiamo nell'educarli (errori il più delle volte dovuti semplicemente all'intensità del nostro coinvolgimento emotivo) siano più che compensati dalle molte occasioni in cui ci comportiamo in modo giusto con loro.

IL PROBLEM SOLVING

1. Che cos'è un problema
 2. Il problema nella psicologia della Gestalt
 3. Il problema in educazione matematica: chi è il 'bravo' solutore?
 4. Perché fare problem solving a scuola? Come?
 5. L'attività di risoluzione di problemi in classe: le scelte dell'insegnante
 6. Il problem solving come approccio
 7. Il problem solving contro il fatalismo
- 

Io non sono in grado
di controllare

La matematica
è *di per sé* incontrollabile



La matematica
è incontrollabile

FATALISMO



Rinuncia
a pensare



NON
RISPONDE

RISPONDE
A CASO

Contro il fatalismo...

...il problem solving:

- Per ricostruire il senso di auto-efficacia
- Per scardinare una visione della matematica distorta (formule da ricordare, esercizi tutti uguali, ...)

Per un recupero mirato...

- Individuare una serie di problemi adatti per scardinare il basso senso di auto-efficacia: (eventualmente riformulando opportunamente la domanda)
- Individuare una serie di problemi adatti per scardinare una visione della matematica come disciplina fatta di regole da memorizzare e applicare

**Scarso senso
di auto-efficacia**



La matematica
è incontrollabile

FATALISMO



Rinuncia
a pensare

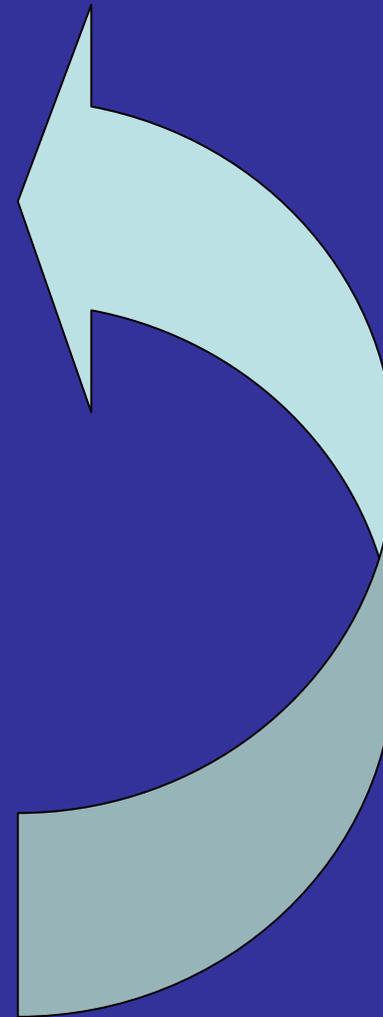
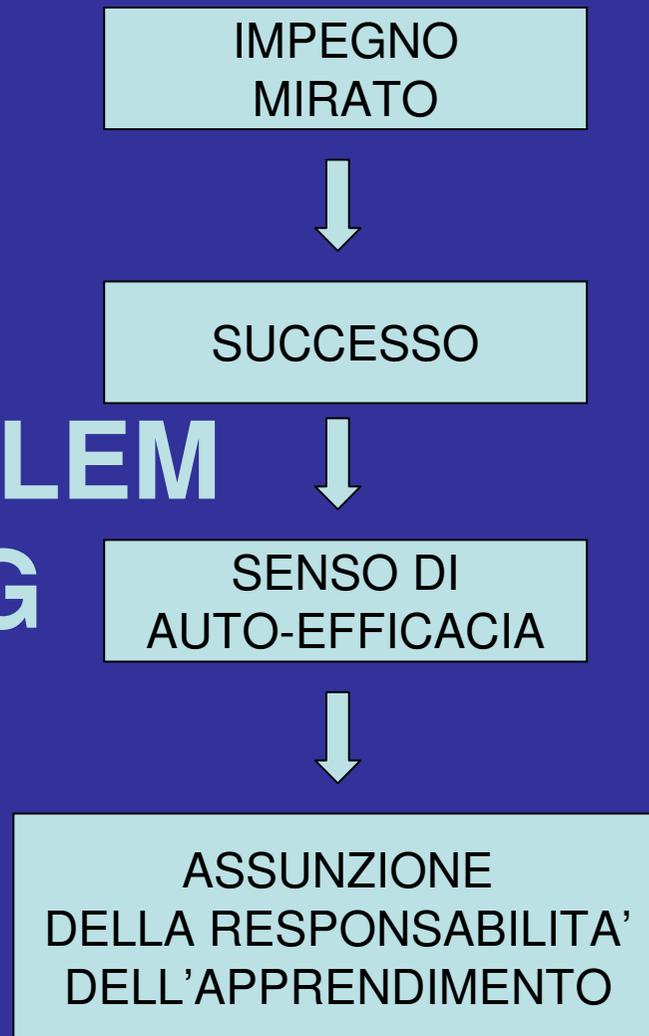


**NON
RISPONDE**



**RISPONDE
A CASO**

IL PROBLEM SOLVING



**Scarso senso
di auto-efficacia**

Struttura matematica

Quali problemi?

Formulazione

Quale metodologia?

**Scarso senso
di auto-efficacia**

Struttura matematica

Quali problemi?



Problemi:

- **che non richiedano prerequisiti scolastici**
- **che permettano l'*esplorazione***

**Scarso senso
di auto-efficacia**

**Richieste che valorizzino anche le
risposte parziali**

Quali problemi?

Formulazione



➤ La formulazione della richiesta

La domanda ha un ruolo cruciale per far sì che la percezione di successo sia associata al lavoro fatto, e non necessariamente alla risoluzione 'completa'

Esempio

Avendo:

- 3 pantaloni di colore diverso (nero, marrone, blu)
- 4 maglie di colore diverso (giallo, verde, arancione, bianco)
- 2 paia di scarpe diverse (con le stringhe / senza stringhe)

quanti sono i modi diversi di combinare pantaloni, maglie, scarpe?



...per dare la risposta corretta devi trovarli TUTTI!

- Trova alcuni modi diversi di combinare pantaloni, maglie, scarpe
- Riesci a trovarli tutti?
- Come fai ad essere sicuro di averli trovati proprio tutti?

**Scarso senso
di auto-efficacia**

Una metodologia che 'forzi' ad assumersi le
responsabilità

Ad esempio: lavoro a coppie

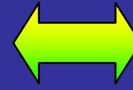
E comunque: a gruppi omogenei

Quale metodologia?



**Scarso senso
di auto-efficacia**

**Visione 'distorta'
della matematica**



La matematica
è incontrollabile

FATALISMO



**Rinuncia
a pensare**



**NON
RISPONDE**

**RISPONDE
A CASO**

**Visione 'distorta'
della matematica**



La matematica
è incontrollabile

FATALISMO



Rinuncia
a pensare



NON
RISPONDE



RISPONDE
A CASO

Contro il fatalismo...

...il problem solving:

- Per ricostruire il senso di auto-efficacia
- Per scardinare una visione della matematica distorta (formule da ricordare, esercizi tutti uguali, ...)

Visione 'distorta' della matematica

Quali problemi?

Quale metodologia?

**Visione 'distorta'
della matematica**

Struttura matematica

Quali problemi?

Problemi:

- aperti
- che richiedano di formulare congetture
- che permettano più processi risolutivi

➤ La formulazione della domanda

La domanda ha un ruolo cruciale per far sì che la percezione di successo sia associata al lavoro fatto, e non necessariamente alla risoluzione 'completa' :

- per spostare l'attenzione dai prodotti ai processi

Una strategia...

- Fare in modo che non sia possibile una “risposta corretta” che prescindenda dai processi di pensiero.

Esempi:

- *Non* chiedere “Trova...”, ma chiedere solo: “Come faresti a trovare...?”
- Eliminare i dati numerici, chiedendo: “Quali dati ti servirebbero?”

Visione 'distorta' della matematica

- **Formulare la richiesta:**
"Come faresti per..."
- **Non mettere (solo) dati numerici**

Quali problemi?

Formulazione

```
graph TD; A[Formulazione] --> B[Quali problemi?]; B --> C[➤ Formulare la richiesta: "Come faresti per..."]; C --> D[➤ Non mettere (solo) dati numerici];
```

Visione 'distorta' della matematica

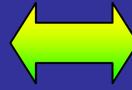
- richiedere la verbalizzazione
- favorire il confronto, la discussione

Quale metodologia?



Scarso senso
di auto-efficacia

Visione 'distorta'
della matematica



La matematica
è incontrollabile

FATALISMO



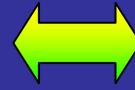
Rinuncia
a pensare



NON
RISPONDE

RISPONDE
A CASO

**Scarso senso
di auto-efficacia**



**Visione 'distorta'
della matematica**

F I N E

PEZZO PROBLEM SOLVING