INSIEMI, LOGICA, NUMERI NATURALI. **Data:________________**

1. E' dato l'insieme A = {1, 2, 3}
Trovare tutti i sottoinsiemi di A.

2. Sia $A = \{x: x \in Q \text{ e } x^2<2\}$
$B = \{x: x \in Q \text{ e } x^2>2\}$
Scrivi alcuni elementi dell'insieme A, ed alcuni elementi dell'insieme B.
Descrivi gli insiemi:
$A \cap B$
$A \cup B$

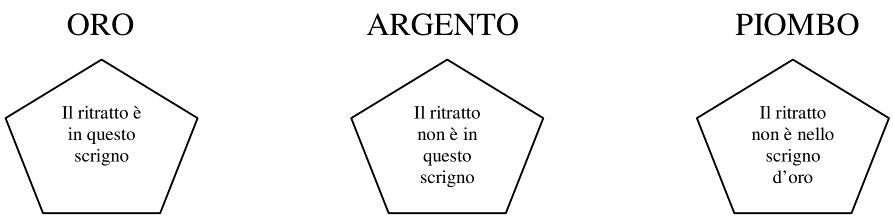
3. Dati gli insiemi A = {0 , 1} B = {a , b, c} , determinare tutte le possibili funzioni di A in B e disegnarne i relativi grafici.

4.Una società che noleggia automobili offre la possibilità ai clienti di scegliere fra le seguenti condizioni:
a) 10 euro di spesa fissa, più 1,2 euro per ogni km percorso
b) 15 euro di spesa fissa, più 0,8 euro per ogni km percorso.
Esprimere la spesa in funzione dei km x percorsi e decidere quale delle due condizioni è più conveniente, sulla base della lunghezza del percorso.

5. Siano:
A= {'casa', 'balena', 'ancora', 'catena', 'telefonata', 'bar', 'aiuole', 'sedia'}
B: l'insieme delle vocali dell'alfabeto italiano
$\Re(x,y)$: "la parola x contiene la vocale y"
Per ognuna delle seguenti proposizioni, riconoscere se si tratta di proposizione vera o falsa:
$\exists x \ \forall y \ \Re(x,y)$
$\forall y \ \exists x \ \Re(x,y)$
$\forall x \ \exists y \ \Re(x,y)$
$\exists y \ \forall x \ \Re(x,y)$

Scrivi quindi la negazione di ognuna delle proposizioni precedenti.

6. ***Gli scrigni di Porzia*** (da "Qual è il titolo di questo libro?" di Smullyan): Porzia vuole scegliere il marito in base all'intelligenza. Sposerà il pretendente che sceglierà lo scrigno dove c'è il ritratto. Gli scrigni sono tre: uno d'oro, uno d'argento uno di piombo.
Ognuno ha una iscrizione sul coperchio. Porzia spiega al pretendente che di queste tre affermazioni, al massimo una è vera.



Quale scrigno deve scegliere il pretendente?

7. Sempre più difficile! Quale scrigno deve scegliere il pretendente?
Almeno una di queste tre affermazioni è VERA, e almeno una è FALSA.

ORO	ARGENTO	PIOMBO
Il ritratto non è nello scrigno d'argento	Il ritratto non è in questo scrigno	Il ritratto è in questo scrigno

8. (Test delle carte di Wason) Ci sono 4 carte: in ogni carta da una parte c'è un numero, dall'altra una lettera. Le carte sono presentate così:

A	**R**	**4**	**7**

Dobbiamo verificare se per queste 4 carte è vera la regola: "Se da una parte c'è una vocale, dall'altra c'è un numero pari."
Quali carte gireresti per controllare se questa regola è vera?

9. Sia m un intero positivo che soddisfa tutte le seguenti tre condizioni:
1. m è dispari
2. m è multiplo di 5
3. 7 è divisore di m

Per ognuna delle seguenti affermazioni, riconosci se si tratta di affermazioni vere, false, o altro. In ogni caso spiega la risposta.

	vero	falso	dipende
m+2 è divisibile per 3	☐	☐	☐
2m è multiplo di 10	☐	☐	☐
m+3 è dispari	☐	☐	☐
7m è divisibile per 49	☐	☐	☐
$m^2 + 1$ è dispari	☐	☐	☐
m + 7 è divisibile per 14	☐	☐	☐
m+7 è multiplo di 21	☐	☐	☐

10. Sia n un numero naturale che soddisfa le seguenti condizioni:
1) Se $n<100$, allora n è pari.
2) Se n è pari, allora $n>100$.

Per ognuna delle affermazioni seguenti riconosci se si tratta di una *conseguenza* di 1) e 2), se è *incompatibile* con 1) e 2), o se è *indipendente* da 1) e 2):
a) $n < 100$
b) $n \geq 100$
c) n è dispari
d) $n > 100$
e) $n \geq 80$

11. Sapresti spiegare come mai la moltiplicazione fra due numeri naturali si esegue nel modo usuale? Ad esempio, moltiplica 237 per 38. Come mai si procede in quel modo?

12. Definizione. Sia A un sottinsieme di Q. Il numero M si dice massimo dell'insieme A se $M \geq a\ \forall a \in A$.
a) Dimostra che 7/2 non è il massimo dell'insieme $A = \{x \in Q: 1 < x < 4\}$
b) Dimostra che l'insieme $A = \{x \in Q: x > 3\}$ non ha massimo.

13. Traduci il seguente enunciato in una formula matematica:
'Dividendo 27 per 6 si ottiene come quoziente 4 e come resto 3.'

14. Considera il seguente problema.

Sappiamo che $M = 3^5 \times 5^4 \times 7^{24} \times 13^{18}$. È vero o no che *M*+5 è multiplo di 10?

Di seguito c'è un testo costituito dalle dimostrazioni di due studenti.
Le frasi delle due dimostrazioni sono state messe in disordine e mescolate a casaccio.
Riesci a ricostruire i due ragionamenti originari, sapendo che erano diversi ed entrambi accettabili?

Un numero che finisce per 0 è divisibile per 10.
Quindi *M*+5 è il prodotto di 5 per un numero pari.
Se aggiungiamo 5 a un numero che finisce con un 5, la sua ultima cifra diventa 0.
Quindi $M+5=5(K+1)$.
Quindi è multiplo di 10.
Possiamo scrivere $M=5K$.
$K+1$ è pari, dato che *K* è dispari.
M è dispari e multiplo di 5, quindi la sua cifra di destra è un 5.

15. Considera la seguente definizione:

<u>Definizione</u>: Dati due numeri interi a, b non entrambi nulli, un intero d viene detto massimo comune divisore fra a e b se valgono le seguenti tre proprietà: 1) d è un divisore di a 2) d è un divisore di b 3) se c è un divisore comune fra a e b allora c è un divisore di d.

Applica questa definizione per dimostrare che:
i) 4 è il massimo comun divisore fra 24 e 28
ii) 5 non è il massimo comun divisore fra 35 e 38
iii) 3 non è il massimo comune divisore tra 15 e 45.

16. Spiega la seguente affermazione:
'Non si può dividere per zero.'

17. La divisione euclidea è descritta dal seguente enunciato, che è un *teorema*:

Per ogni coppia di interi *m, n,* con $n \neq 0$, esistono e sono unici due interi *q, r* tali che $m=nq+r$ e $0 \leq r < n$"

a) Nell'enunciato precedente, quali lettere designano rispettivamente dividendo, divisore, quoziente e resto?
b) Perché è necessaria la condizione $n \neq 0$? Che cosa potrebbe succedere se non fosse verificata? Fare qualche prova numerica.

c) Secondo te sarebbe meglio mettere la condizione $n \leq m$? Che cosa succede se $n > m$?

d) Che cosa succede se $m=0$?

18. Nell'insieme N dei numeri naturali considera la proprietà:
$P(x) \Leftrightarrow x+3 > 5{,}5$
a) E' vero o falso che $\forall x \in N \ P(x)$?
b) E' vero o falso che $\exists x \in N \ P(x)$?
c) Determina un sottoinsieme A di N tale che $\forall x \in A \ P(x)$.
d) Determina un sottoinsieme B di N tale che risulti falso che $\exists x \in B \ P(x)$.

19. Vero o falso?
a) $\forall x \in N \ \exists y \in N$: $x - y = 3$
b) $\exists x \in N \ \forall y \in N$: $x - y = 3$
c) $\exists x \in N \ \exists y \in N$: $x - y = 3$
d) $\forall x \in N \ \forall y \in N$: $x - y = 3$

20. Leggi attentamente la dimostrazione che segue.
Teorema: Il numero $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale.
(1) Dimostriamo *per assurdo*.
(2) Se $\sqrt{2}$ fosse razionale allora esisterebbero due numeri interi *m* e *n* tali che:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

(3) e si può sempre supporre che m e n siano primi tra loro, cioè che la frazione m/n sia ridotta ai minimi termini.
(4) Dunque $m^2 = 2n^2$.
(5) Poiché m^2 è pari, anche m è pari e n è dispari.
(6) D'altra parte se poniamo $m = 2k$ allora $m^2=4k^2$
(7) Quindi: $2n^2 = 4k^2$ cioè $n^2 = 2k^2$
(8) da cui consegue che n^2 è pari
(9) Quindi anche n è pari.
(10) Ma avevamo supposto n è dispari.
(11) Quindi siamo arrivati ad un assurdo.

Rispondi ora alle seguenti domande:
a) Cosa vuol dire dimostrare per assurdo?
b) Ti ricordi altre dimostrazioni per assurdo?
c) Perché (v. 3) si può supporre che m e n siano primi fra loro?
d) Perché (v. 4) si può scrivere $m^2 = 2n^2$?
e) Perché (v. 5) se m^2 è pari anche m è pari?
f) Perché (v. 6) si può porre $m = 2k$?
g) Da cosa si ricava (v. 7) che $2n^2 = 4k^2$?
h) Perché (v. 8) allora n^2 è pari?
i) Perché (v. 9) allora n è pari?
j) Hai già usato nella dimostrazione il ragionamento al punto precedente?
k) Al punto 10 si ricorda che n è dispari. In quale punto l'avevamo dedotto? Perché?
l) In che cosa consiste l'assurdo?
m) Perché il teorema è dimostrato?