INTRODUZIONE ALLA PROBABILITÀ

①

Lanciamo un dado non truccato. Qual è la probabilità di ottenere un 2?

A questa domanda sappiamo rispondere tutti. La risposta è $\frac{1}{6}$. Vediamo formalmente perché.

Tutti i possibili esiti sono i numeri da 1 a 6: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Ogni sottoinsieme dell'insieme Ω è un "evento": per esempio "esce un 2" è $A=\{2\}$, esce un numero dispari è $B=\{1,3,5\}$. $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

La fiducia che diamo a ogni esito è la probabilità che l'esito accada.

In questo caso tutti i numeri possono uscire con la stessa probabilità.

PIÙ IN GENERALE

Chiamiamo ~~[illegible]~~ SPAZIO CAMPIONARIO o DEGLI EVENTI, l'insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento. Lo denotiamo con Ω.

Chiamiamo EVENTO ogni sottoinsieme dello spazio campionario (la definizione formale è più complessa ma a noi basterà questa). Denotiamo l'insieme degli eventi con $\mathcal{A}$.

Ovviamente (per la nostra definizione)

- $\emptyset \in \mathcal{A}$ $\Omega \in \mathcal{A}$
- Se $A \in B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$ e $A \cup B \in \mathcal{A}$.

La probabilità è un numero che indica il grado di fiducia che abbiamo a che si verifichi un evento. Quindi ~~la probabilità~~

La probabilità è una funzione che "mangia" un evento, quindi un insieme e "sputa fuori" un numero

$P: \mathcal{A} \ni A \longrightarrow P(A) \in [0,1]$

Per la probabilità valgono le seguenti proprietà:

- $P(\Omega) = 1$ e $P(\emptyset) = 0$
- $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Un evento la cui probabilità è 1 è QUASI CERTO

~~[illegible] probabilità~~

Da queste proprietà deduciamo:

- $\forall A \in \mathcal{A}$ $0 \leq P(A) \leq 1$. Infatti $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega \Rightarrow P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega)$
- $\forall A \in \mathcal{A}$ $P(A^c) = 1 - P(A)$. Infatti $A \cup A^c = \Omega$ e $A \cap A^c = \emptyset \Rightarrow P(A) + P(A^c) = 1$

Ricordate che $(A^c)^c = A$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ si chiama spazio probabilizzato

Esercizi:

Costruiamo lo spazio probabilizzato per i seguenti ~~esempi~~ esperimenti.

1) Si lanciano 2 monete. Qual è l'evento "esce almeno una testa".
Qual è l'evento non escono teste?

sol: $\Omega=\{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\}$ $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$, 1 = testa, 0 croce

$P((1,1))=P((1,0))=P((0,1))=P((0,0))=\frac{1}{4}$

A = "esce almeno una testa" $=\{(1,1),(1,0),(0,1)\}$

B = "non esce nemmeno una testa" $=\{(0,0)\}$

$A\cap B=\emptyset$ $A\cup B=\Omega$ $\Rightarrow B=A^c$

2) Da un'urna con 3 palline bianche e 6 rosse si estraggono due palline con rimessa. Qual è l'evento non pesco palline bianche?

sol: $\Omega=\{(B,B),(B,R),(R,B),(R,R)\}$ $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$

Per definire la probabilità aspettiamo di sapere qualcos'altro.

A = {non escono palline bianche} $=\{(R,R)\}$

3) Una coppia ha 3 figli che possono essere maschi o femmine. Qual è l'evento avere al più una femmina?

sol: $\Omega=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$

$\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$ 0 femmina 1 maschio

A = {avere al più una femmina} $=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1)\}$

SPAZI EQUIPROBABILI

Torniamo all'esempio del dado. Abbiamo visto che

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ e abbiamo scritto $P(\{i\}) = \frac{1}{6}$

Abbiamo cioè dato lo stesso grado di fiducia a tutti gli esiti. Perché proprio

$P(\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}\cup\{4\}\cup\{5\}\cup\{6\}) = P(\Omega) = 1$

|| poiché sono disgiunti — valgono tutti uguali

$P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6) = 6P(1)$

Allora $6P(1) = 1 \Rightarrow P(1) = \frac{1}{6}$ $\quad P(2)=P(3)=P(4)=P(5)=P(6)=P(1)=\frac{1}{6}$

> Uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ in cui tutti gli esiti hanno la stessa probabilità si dice spazio EQUIPROBABILE

Proviamo a calcolare nel caso del dado la probabilità dei due eventi

$A = \{$esce un numero pari$\}$ $\quad B = \{$esce un multiplo di 3$\}$

$P(A) = P(\{2,4,6\}) = P(\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}) = P(2)+P(4)+P(6) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{3}{6}$

$P(B) = P(\{3,6\}) = P(\{3\}\cup\{6\}) = P(3)+P(6) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{2}{6}$

In entrambi i casi riconosciamo una facile formula

> Nel caso di spazi equiprobabili, per ogni evento A
>
> $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$ dove $\#A$ indica la CARDINALITÀ di A cioè il numero di elementi dell'insieme A

Esercizi

1) Torniamo al problema dei figli e calcoliamo la probabilità di avere al primo femmina.

sol. In questo caso li abbiamo elencati quindi è facile

$P(A) = \frac{\#A}{\#8} = \frac{3}{8}$

2) Consideriamo una famiglia con 5 figli. Tutti i figli sono eq con uguale probabil. maschio o femmina. Qual è la probabilità che ci sia almeno un maschi cioè 1 o più? Qual è la probabilità di avere ~~esattamente due~~ al più una femmine? e 2 femm

sol: Questa volta scrivere tutti gli esiti è complicato ma possiamo anche solo

caratti. Allora $\Omega = ((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_i = 1 \vee x_i = 0)$
cioè tutte le cinquine con 1 e 0. Ci serve $\#\Omega$. Quanti elementi ci sono in Ω
$\#\Omega = 2^5$

Ora dobbiamo contare gli elementi di A. Dire avere almeno un figlio maschio vuol dire avere esattamente 1 oppure esattamente 2 … e così via. Il complementare di avere almeno un maschio è non avere nessun figlio maschio. Quindi $A^c = \{$non avere figli maschi$\}$.
$\#A^c = \#\{(0,0,0,0,0)\} = 1 \Rightarrow P(A^c) = \frac{\#A^c}{\#\Omega} = \frac{1}{2^5} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{2^5}$

Per rispondere alla seconda domanda.
$B = \{$avere al più una figlia femmina$\}$. $B = B_0 \cup B_1$
dove $B_0 = \{$nessuna femmina$\}$ $B_1 = \{1$ figlia femmina$\}$
$B_0 \cap B_1 = \emptyset \Rightarrow P(B_0 \cup B_1) = P(B_0) + P(B_1)$
Calcoliamo $P(B_0) = \frac{\#B_0}{\#\Omega} = \frac{1}{2^5}$ $B_0 = \{(1,1,1,1,1)\}$

Per $\#B_1$ ci basta decidere dove mettere l'1 quindi in 5 posti diversi
$\Rightarrow P(B_1) = \frac{\#B_1}{\#\Omega} = \frac{5}{2^5} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2^5} + \frac{5}{2^5} = \frac{6}{2^5} = \frac{3}{2^4} = \frac{3}{16}$

Per $C = \{$esattamente due donne$\}$. $P(C) = \frac{\#C}{\#\Omega}$
Quanti sono gli elementi di C? Sono $\binom{5}{2}$ tanti quanti i possibili sottoinsiemi di 2 elementi (dove metto gli 0) fra 5 elementi.
Quindi $P(C) = \frac{\binom{5}{2}}{2^5}$

3) Si lanciano 5 dadi non truccati. Qual è la probabilità di ottenere 5 risultati diversi?

SOL. $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), x_i = \{1,2,3,4,5,6\}\}$ $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\ x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_4 \neq x_5\}$
$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$ Quanti elementi ha Ω? $\#\Omega = 6^5$ Quanti elementi ha A
$\#A = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$
Quindi $P(A) = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{6^{\cancel{5}}} = \frac{5 \cdot 4}{6^3}$

4) Un numero di patente è formato da 5 numeri (da 0 a 9) e 2 lettere (dell'alfabeto italiano). Qual è la probabilità che siano formati tutti da lettere e numeri diversi

SOL: $\#\Omega = 10^5 \cdot 21^2$ $\quad \#A = 21 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{21 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5 \cdot 21^2}$$

5) Si lancia 10 volte una moneta non truccata.

a) Qual è la probabilità di ottenere 4 teste?

b) Qual è la probabilità di ottenere almeno 9 teste?

INDIPENDENZA e PROBABILITÀ CONDIZIONATA

In un'urna ci sono 10 palline numerate. Sia $A = \{$estraggo una pallina con $\leq 5\}$
Poiché $\#A = 5$ $\quad P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{5}{10}$

Supponiamo che chi ha estratto la pallina la guardi e ci dica che abbiamo estratto una pallina con un numero pari. $B = \{$la pallina è pari$\}$
Ora supponiamo che dobbiamo calcolare la probabilità. Quindi per calcolare la probabilità SAPENDO questa nuova informazione ci basta fare il rapporto tra i casi favorevoli, cioè le palline ≤ 5 e pari cioè $\#A \cap B$ e i casi possibili, cioè le palline pari $\#B$. La probabilità cercata è allora

$$\frac{\#A \cap B}{\#B} = \frac{2}{5}$$

Osserviamo però che $\frac{\#A \cap B}{\#B} = \frac{\#A \cap B / \#\Omega}{\#B / \#\Omega} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Questa quantità che si indica con $P(A|B)$ si chiama PROBABILITÀ CONDIZIONATA DI A DATO B o SAPENDO B ed è

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La probabilità condizionata è ovviamente anch'essa una probabilità. Consideriamo ora 2 lanci di una moneta e i 2 eventi

$A = \{$esce testa nel primo lancio$\}$
$B = \{$esce croce al secondo lancio$\}$
$P(B|A) = P(B)$ ovviamente (ce lo suggerisce l'intuito). Questo lo possiamo scrivere anche così

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Diciamo che due eventi sono INDIPENDENTI se la probabilità dell'intersezione è uguale al prodotto delle probabilità, cioè

A e B indipendenti $\Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Longleftrightarrow P(A|B) = P(A)$

il che vuol dire che il verificarsi di uno non influisce sulla fiducia che do all'altro.

e: Da un mazzo di carte napoletane se ne estrae una. Consideriamo i due eventi $A = \{$pesco un asso$\}$ $B = \{$pesco una carta a bastoni$\}$.
~~A e B~~ sono indip. Quanto vale la probabilità che esca un asso sapendo che è uscita una carta a bastoni?

s: $P(A|B)$: se so che ho pescato una carta a bastoni ho 10 carte di cui 1 è asso quindi $P(A|B) = \frac{1}{10}$

Calcoliamo $P(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

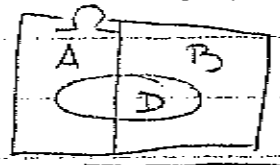
Sappiamo così che A e B sono indipendenti.

e: Un componente elettrico è prodotto da una ditta α con probabilità $\frac{1}{3}$ e da una ditta β con probabilità ~~due terzi~~ $\frac{2}{3}$. Se il componente è prodotto da α è difettoso con probabilità 0,6, se da β con probabilità 0,3.
Qual è la probabilità che un componente sia difettoso?
Sapendo che un componente è difettoso qual è la probabilità che lo abbia prodotto α?

s: Scriviamo i dati e gli eventi

$A = \{$il pezzo è prodotto da $\alpha\}$ $B = \{$il pezzo è prodotto da $\beta\}$

$D = \{$il pezzo è difettoso$\}$



$P(A) = \frac{1}{3}$ $P(B) = \frac{2}{3}$

$P(D|A) = 0{,}6$ $P(D|B) = 0{,}3$

Vogliamo

$P(D)$? D la possiamo vedere così

$D \cap \Omega = D \cap (A \cup B) = D \cap A \cup D \cap B$

!! Poiché $A \cup B = \Omega$ e $A \cap B = \emptyset$ $\{A, B\}$ si chiama partizione di Ω !!

Allora

Detto a parole un pezzo è difettoso se è difettoso ed è prodotto da α $(D \cap A)$ oppure $(\cup)$ è difettoso ed è prodotto da β $(D \cap B)$. Allora

$P(D) = P(D \cap A \cup D \cap B) =$ $(D \cap A) \cap (D \cap B) = \emptyset$

$= P(D \cap A) + P(D \cap B) =$ D e A non sono indipendenti così come non lo sono D e B

$= \frac{P(D \cap A)}{P(A)} P(A) + \frac{P(D \cap B)}{P(B)} P(B) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) = \frac{1}{3}\frac{3}{5} + \frac{2}{3}\frac{3}{10} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

Rispondiamo alla seconda domanda

$P(A|D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{P(D\cap A)}{P(A)}\frac{P(A)}{P(D)} = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{3}{8}\frac{1}{3}\frac{8}{2} = \frac{1}{2}$

Questa è una formula generale e si chiama FORMULA DI BAYES
Se A_1 e A_2 sono una partizione di Ω e D è un evento allora
$P(D) = P(D|A_1)P(A_1) + P(D|A_2)P(A_2)$ e
$P(A_i|D) = \frac{P(D|A_i)P(A_i)}{P(D)}$

es2: In una città il 17% della popolazione è vaccinata contro l'influenza. Se uno è vaccinato si ammala con probabilità 0,02 se non è vaccinato con probabilità 0,12. Qual è la probabilità di ammalarsi? Qual'è la probabilità che una persona ammalata si sia vaccinata?

sol: V={essere vaccinato} A={ammalarsi}

$P(A|V) = 0,02$ $P(A|V^c) = 0,12$ $P(V) = 0,17$ $P(V^c) = 0,83$

$P(A) = P(A|V)P(V) + P(A|V^c)\cdot P(V^c) = 0,103$

$P(V|A) = \frac{P(A|V)P(V)}{P(A)} = \frac{0,02\cdot 0,17}{0,103} = 0,03$

VARIABILI ALEATORIE

Consideriamo di usare l'esperimento del lancio di una moneta truccata. Quindi ~~quando~~ fa testa con probabilità $\frac{1}{3}$.

Abbiamo costruito $\Omega = \{0,1\}$. Possiamo formalizzarlo anche in un altro modo.

Prendiamo una funzione X che ha come dominio Ω ed è a valori in Ω e ~~X tale~~ $X(\omega) = 1$ se esce ~~una~~ testa cioè $\omega = 1$ e 0 se esce croce.

$X(0) = 0 \quad X(1) = 1$

~~In pratica è qualunque valore assume~~

In pratica $X(\omega) \in \mathcal{P}(\Omega)$

Allora

$$\boxed{\text{Si chiama variabile aleatoria una funzione } X: \Omega \to \Omega \text{ tale che } \forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad X(A) \in \mathcal{P}(\Omega).}$$

Se vogliamo calcolare la probabilità che esca testa ~~da~~ scriviamo

$$P(X=1) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) = 1) = P(\{1\}) = \frac{1}{3}$$

Consideriamo un dado e sia Y la variabile aleatoria che indica i possibili risultati. Allora

$Y \in \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad P(\text{esce un pari}) = P(Y = \text{n.ro pari})$

$= P(\omega \in \Omega : Y(\omega) \text{ è un numero pari}) = \quad \Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \quad Y = id$

$= P\{2,4,6\} = \frac{3}{6}$

~~Dato~~ Per costruire una variabile aleatoria basta sapere chi è Ω e poi costruirla come l'identità, quindi ci basta dire che valori assume e con che probabilità.

Per esempio nel caso della moneta

$X \in \{0,1\}$ e $P(X=0) = \frac{1}{3} \quad P(X=1) = \frac{2}{3}$

$Y \in \{1, \ldots, 6\} \quad P(Y=i) = \frac{1}{6}$.

A ogni variabile aleatoria discreta è associata una funzione che si chiama DENSITÀ e

$$f(k) = P(X=k).$$

PROPRIETÀ DELLA DENSITÀ:
Una funzione f è una densità se detto $\mathcal{D}$ il suo dominio
$\forall\, k \in \mathcal{D}$ $f(k) \geq 0$ e $\sum_{k \in \mathcal{D}} f(k) = 1$

La densità ci dice dove è "concentrata" la relativa variabile aleatoria.
Infatti poiché $f(k) = P(X=k)$, se $f(k)=0$ allora $P(X=k)=0$. Allora X non assume mai il valore k.
Possiamo allora immaginare che la densità sia definita su tutto $\mathbb{R}$ e che solo in alcuni punti valga diverso da 0 ~~...~~
Es: Calcoliamo la densità della variabile aleatoria che rappresenta il lancio di un dado.
$X \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Allora la densità è concentrata solo su $\{1,..,6\}$, cioè
$f(x)=0$ se $x \notin \{1,2,3,4,5,6\}$ e $f(x) = \frac{1}{6}$ se $x \in \{1,2,3,4,5,6\}$

Sia ora X una variabile aleatoria ~~...~~ a valori nell'insieme $\{x_1, x_2 \dots x_k\}$ e f la sua densità. Si definisce ~~...~~ MEDIA di X o SPERANZA di X o EXPECTATION di X la quantità
$$E[X] = \sum_{i=1}^{k} x_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i P(X=i)$$

La media è un numero!!
PROPRIETÀ DELLA MEDIA
- Se X e Y sono 2 variabili aleatorie allora $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$
- Se X è una v.a. e c una costante, allora $E[cX] = cE[X]$
- Se b è una costante allora b è una v.a. e $E[b] = b$

Sia X una v.a. a valori in $\{x_1, x_k\}$ f la sua densità e $m = E[X]$ la sua media. Si definisce VARIANZA di X la quantità
$$Var[X] = E[(X-m)^2] = \sum_{i=1}^{k} (x_k - m)^2 f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - m)^2 P(X = x_k)$$

Anche la varianza è un numero ed è sempre positivo.

PROPRIETÀ DELLA VARIANZA.

- $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$
- Se c è una costante allora $Var[c] = 0$
- Se X è una v.a. e c è una costante $Var[cX] = c^2 Var[X]$
- Se X e Y sono indipendenti $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$

La varianza indica quanto sono "dispersi" i valori che la v.a. assume. Ecco perché se la v.a. è una costante, allora assume sempre lo stesso valore e quindi la varianza vale 0.

FREGAZONI.

Siano X e Y due variabili aleatorie. Diciamo che sono INDIPENDENTI se $\forall h, k$ gli eventi $\{X=h\}$ e $\{Y=k\}$ sono indipendenti.

Es1: X lancio una moneta, Y lancio un'altra moneta.
Le 2 v.a. sono ovviamente indipendenti.

Es2: Da un'urna con 3 palline rosse e una gialla pesco 2 palline senza rimetterle nell'urna. X rappresenta la prima pallina estratta, Y la seconda.
X e Y non sono indipendenti

Esercizi

1) ~~Sia~~ ~~...~~ Calcolare la media del lancio di un dado

SOL: $X \in \{1,2,3,4,5,6\}$ $P(X=i) = \frac{1}{6} \Rightarrow$

$$E[X] = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

2) Lanciamo 2 dadi e sommiamo il punteggio qual è il ~~valore~~ ~~medio~~ il punteggio medio?

SOL: X risultato primo dado, Y risultato secondo dado.
Somma: X+Y. Vogliamo

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$$

VARIABILI ALEATORIE "FAMOSE"

• Bernoulliana

Lancio una moneta che ha probabilità di fare testa uguale a p.
Possiamo formalizzarlo con una v.a.

$X \in \{1,0\}$ $X=1$ se esce testa $X=0$ se esce croce.

$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$.

Si ~~la~~ chiama ~~ber~~ BERNOULLIANA DI PARAMETRO p una v.a. ~~di~~ X che assume solo i valori 0 e 1, e

$$P(X=1)=p \quad e \quad P(X=0)=1-p$$

Se X è una variabile aleatoria bernoulliana allora

$E[X] = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = 0(1-p) + 1 \cdot p = p$

$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 0\,P(X=0) + 1^2 P(X=1) - p^2 = p - p^2 = p(1-p)$

Quindi

Se X è una bernoulliana di parametro p

$$E[X]=p \quad e \quad Var[X] = p(1-p)$$

• Binomiale

Lanciamo 10 volte una moneta che fa testa con probabilità p.
Vogliamo la probabilità di fare esattamente 2 volte testa.
Prendiamo 10 bernoulliane di parametro p
$X_1, X_2 \dots X_{10}$. La somma

$S = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$

conta le teste uscite, perché c'è un 1 ogni volta che esce testa.
Quindi $S \in \{0,1,2 \dots 10\}$
Vogliamo $P(S=2)$.
Perché la somma faccia 2, esattamente 2 delle X_i devono fare 1. Quante sono le scelte delle 2 variabili che fanno 1? Sono tante quanto i sottoinsiemi di 2 elementi nell'insieme di 10, cioè

$$\binom{10}{2}$$

Per ognuna di queste scelte supponiamo siano i primi due lanci, dobbiamo calcolare la probabilità che queste due facciano uno e le altre 0, cioè

$P(X_1=1, X_2=1, X_3=0, X_4=0, \ldots, X_{10}=0) =$ ← sono indipendenti

$= P(X_1=1)P(X_2=1)P(X_3=0)P(X_4=0)\cdots P(X_{10}=0) =$

$= p^2(1-p)^8$

Allora

$$P(S=2)=\binom{10}{2}p^2(1-p)^8$$

Si chiama binomiale di parametri n e p ($B(n,p)$) una variabile aleatoria S che assume valori in $\{0,1,2,\ldots,n\}$ e

$$P(S=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Si può vedere come la somma n bernoulliane tutte di parametro p.

Per questo se abbiamo una binomiale S, $B(n,p)$ possiamo pensarla così $S=X_1+\ldots+X_n$. Allora con le X_i bernoulliane, indipendenti di parametro p. Quindi

$E[S]=E[X_1+X_2+\ldots+X_n]=E[X_1]+\ldots+E[X_n]=p+p+\ldots+p=np$

$Var[S]=Var[X_1+X_2+\ldots+X_n]=Var[X_1]+\ldots+Var[X_n]=np(1-p)$

Quindi

$$\boxed{E[S]=np \qquad Var[S]=np(1-p)}$$

- Geometrica.

Lancio tante volte una moneta. Qual è la probabilità di ottenere testa per la prima volta al quinto lancio?

Costruiamo al solito le bernoulliane $X_1\ X_2\ X_3$, una per ogni lancio. Se la prima volta che faccio testa è al 5° lancio allora le prime 4 X_i valgono 0 e la X_5 vale 1. Allora detta T la variabile che mi dice il primo istante di successo, ho

$P(T=5)=P(X_1=0, X_2=0, X_3=0, X_4=0, X_5=1)=$

$= P(X_1=0)P(X_2=0)P(X_3=0)P(X_4=0)P(X_5=1) = (1-p)^4 p$

Una variabile aleatoria T si dice geometrica di parametro p ($\mathcal{G}(p)$) se T assume tutti i valori in $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e

$$P(T=k) = (1-p)^{k-1} p$$

Variabili aleatorie continue.

Consideriamo il lancio del dado. La variabile aleatoria è $X \in \{1, \ldots 6\}$ e $P(X=1)=\frac{1}{6}$ $P(X\leq 3)=\frac{3}{6}$

Supponiamo ora di avere un intervallo $[a,b]$ e di avere sempre la stessa probabilità di beccare un punto a caso sull'intervallo $[ab]$.

Vuol dire che la densità è costante sull'intervallo $[ab]$.

Cioè $f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{fuori } [ab] \\ c & \text{su } [ab] \end{cases}$

Siccome deve essere una densità ci serve $\sum_{x\in[ab]} c = 1$.

Lo abbiamo imparato però che quando siamo su $\mathbb{R}$ le somme diventano integrali, quindi ci serve

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_a^b c\,dx = cx\Big|_a^b = c(b-a)$$

$\Rightarrow c = \frac{1}{b-a}$

Allora la densità in questo caso è $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } x\in[ab] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

In generale quando si parla di v.a. continue si ha una densità.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Se } f \text{ è la densità di una v.a. continua si definisce} \\ \text{funzione di ripartizione la funzione} \\ \quad F(x) = P(X\leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.\end{array}}$$

Def

Una variabile aleatoria X si dice che ha è UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA su $[ab]$ se ha densità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x\in[a,b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Troviamo la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria uniformemente distribuita su $[1,2]$

La densità è $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2-1} & x\in[1,2]\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$

Allora se $x<1$ $P(X\le x)=0$

$x>2$ $P(X\le x)=1$

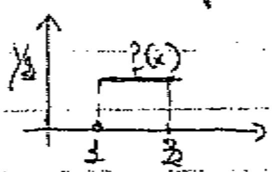
$1\le x\le 2$ $P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{1}^{x} dt=t\Big|_{1}^{x}=x-1$

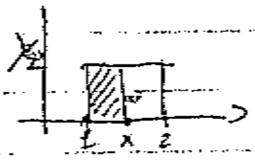
$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ x-1 & 1<x<2\\ 1 & x>2\end{cases}$$

Proprietà della funzione di ripartizione

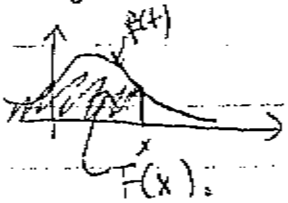
- $F(x)\in[0,1]$
- $\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$ $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$
- F è non decrescente
- $\lim_{x\to x_0}F(x)=F(x_0)$

F è un'area. È l'area sotto il grafico della densità. Nel caso della densità uniforme



$P(X\le x)=$  $(x-1)\cdot\frac{1}{2}=\int_{1}^{x}\frac{1}{2}dt$

In generale



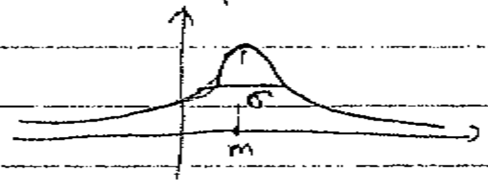
E ora una cosa importantissima.

V.2: Normale e teorema del limite centrale.

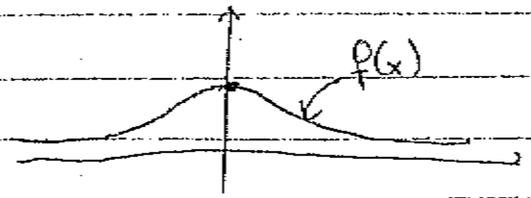
La variabile aleatoria normale X di media m e varianza σ ha densità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

~~Non la sappe~~



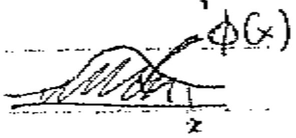
Se m=0 e σ=1 il grafico è più bello



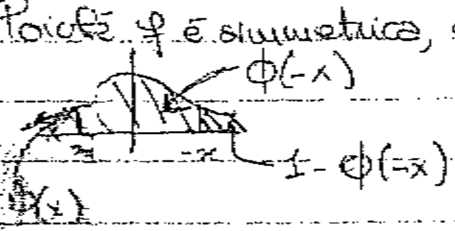
~~Ne~~ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

f come si vede è simmetrica. La funzione di ripartizione in genere si indica con φ

$\phi(x) = P(X \le x)$



Poiché f è simmetrica, se x<0 $\phi(x) = 1 - \phi(-x)$.



Noi non sappiamo calcolare questa funzione e c'è chi lo ha fatto ci sono così le tavole della normale con m=0 e σ=1

Come si leggono?

x	1	2	3	...	9
0,0					
0,1			0,5517		
⋮					
0,9					
1,0					

$\to 0,5517 = \phi(0,13) = P(X \leq 0,13)$

Nella prima colonna ci sono unità e decimi nella seconda i centesimi di x.
All'incrocio c'è $\phi(x)$, cioè $P(X \leq x)$.
Quindi è come se noi sapessimo calcolare la probabilità solo per una normale che ha media 0 e varianza 1 e in generale come si fa?

Esercizio: Si suppone che l'altezza delle persone sia come una normale con media 170 cm e varianza 25, qual è la probabilità che una persona sia più bassa di 160?

SOL: Abbiamo una v.a. $X \sim N(170, 25)$. Vogliamo

$P(X \leq 160)$ $\quad E[X] = 170 \quad Var[X] = 25$

se faccio $E[X-170] = E[X] - 170 = 0$

$\Rightarrow X-170$ è una normale con media 0

$$Var\left[\frac{X-170}{5}\right] = \frac{1}{25} Var[X-170] = \frac{1}{25}\left[Var[X] + Var[170]\right] = \frac{1}{25} 25 = 1$$

$\Rightarrow \frac{X-170}{5}$ è una normale con media 0 e varianza 1.

$$P(X \leq 160) = P\left(X-170 \leq 160-170\right) = P\left(\frac{X-170}{25} \leq \frac{160-170}{25}\right) =$$

$$P(Y \leq -2) = \phi(-2) = 1 - \phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

Proprietà della normale.

Se X e Y sono normali con medie m_1 e m_2 e varianze σ_1^2 e σ_2^2 e sono indipendenti, allora

$X+Y$ è $N(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

La normale è importante per questo risultato.
Se $X_1, \dots, X_n$ $(n > 30)$ sono v.a. tutte con la stessa legge e indipendenti e consideriamo

$$X_1 + \dots + X_n$$

Allora se $n \geq 30$

$$X_1 + \dots + X_n \sim N(nE[X_1], n\,Var[X_1])$$

Esempio.
Abbiamo preso 100 gatti e per ognuno abbiamo una variabile aleatoria che indica la lunghezza della coda (X_i con media 25 e varianza
Consideriamo la v.a.

$$T = \frac{X_1 + X_2 + \dots X_{100}}{100}$$ che indica la lunghezza media della coda

Qual è la probabilità che in media la lunghezza sia < di 20 cm?

Noi sappiamo che $\frac{X_1}{100} + \frac{X_2}{100} + \dots + \frac{X_{100}}{100}$ è $N\left(100E\left[\frac{X_1}{100}\right], 100Var\left[\frac{X_1}{100}\right]\right)$

$P(T \leq 20)$ dobbiamo normalizzare T

$E[T] = \frac{100 \cdot 25}{100}$ $\quad Var\left[\frac{X_1}{100}\right] = \frac{1}{10^4} 16 \cdot 10^4$

$$P(T \leq 20) = P\left(\frac{T-25}{4} \leq \frac{20-25}{4}\right) = P(Z \leq -1,5) = 1 - \phi(1,5) =$$

$$= 1 - 0,9332 = 0,0668$$

TEORIA DEI TEST

Problema delle code degli gatti. Un'azienda produce scatole di cereali che riempie con una macchina. Afferma di voler mettere 250 g di cereali ma la macchina riempitrice è soggetta a errori. Per non incorrere in lamentele o sprechi si decide di controllare ~~se~~ che in media in ogni ce ne siano e davvero 250 e non di più né di meno. Si sa però che la varianza è 16

Si commissiona allora un test.

I protagonisti di un test

CAMPIONE STATISTICO: famiglia di variabili aleatorie $X_1, X_2, \dots, X_n$ tutte indipendenti e con la stessa legge. n è la TAGLIA del campione

STATISTICA: è una funzione ~~delle~~ campione statistico. Noi useremo solo due statistiche

$$\bar{X} = \frac{\sum_i X_i}{n} \leftarrow \text{media campionaria}$$

$$\hat{S} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1} \leftarrow \text{varianza campionaria}$$

IPOTESI NULLA e IPOTESI ALTERNATIVA: le variabili aleatorie dipendono da uno o più parametri come la media o la varianza. Nell'esempio l'ipotesi da testare è $\overset{\text{media}}{m} = 250g$ e l'alternativa è $m \neq 250g$.

REGIONE CRITICA: se abbiamo una statistica ~~T~~ T la regione critica è ~~l'evento~~ l'evento "più grande" $\{T \in D\}$ cioè l'insieme delle eventualità che ci inducono a rifiutare l'ipotesi nulla.

LIVELLO DEL TEST: α è un numero piccolo e si sceglie l'insieme D in modo che se si calcola $P^{H_0}(T \in D)$ questo sia uguale ad α.

ATTENZIONE: Ho scritto P^{H_0} perché vuol dire che calcolo la probabilità facendo finta di aver accettato l'ipotesi nulla

Poiché imponiamo $P^{H_0}(T \in D) = \alpha$ stiamo dicendo che la probabilità di rifiutare l'ipotesi quando è vera è piccola.

Torniamo alle scatole di cereali e supponiamo di testarne 100.
~~100~~ Quindi il campione è $X_1, X_2, \dots, X_{100}$

$H_0: \mu = 250g$ $\qquad H_1 = \mu \neq 250g$

ipotesi nulla $\qquad$ ipotesi alternativa

Fissiamo un livello α per esempio $\alpha = 0,05$.

~~Cerchiamo~~ La statistica che ci interessa è

$$\frac{\sum_i^{100} X_i}{100} \leftarrow \text{media dei cereali nelle scatole}$$

Cerchiamo la regione critica. Noi rifiutiamo l'ipotesi se dopo le osservazioni la ~~differenza~~ otteniamo un numero troppo più grande o troppo più piccolo di 250. Allora la regione critica sarà fatta così

$$\left\{\left|\frac{\sum_i X_i}{100} - 250\right| > k\right\} \text{ con } k \text{ in modo che sia il più grande possibile e}$$

$$P^{250}\left\{\left|\frac{\sum_i X_i}{100} - 250\right| > k\right\} = 0,05 \leftarrow \alpha$$

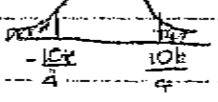
Per calcolare quella probabilità possiamo usare il teorema del limite centrale. Allora $\frac{\sum_i X_i}{100} \sim N\left(250, \frac{16}{100}\right)$ e quindi $\frac{\sum_i X_i}{100} - 250 \sim N\left(0, \frac{16}{100}\right)$

Per usare le tavole ~~posso~~ ci basta dividere per $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{100}} \Rightarrow$

$$P^{250}\left\{\left|\frac{\frac{\sum_i X_i}{100} - 250}{4/10}\right| > \frac{k}{4/10}\right\} = P^{250}\left(|Z| > \frac{10k}{4}\right)$$

Dove Z è la normale che c'è nelle tavole.

$P\left(|Z| > \frac{10k}{4}\right) =$ è questa area

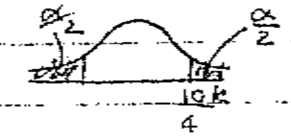


$= \cancel{\Phi\left(\frac{10k}{4}\right) \ldots} \; 2\Phi\left(\frac{10k}{4}\right) - 1$

~~Si sceglie che quest'area sia uguale ad α cioè~~

~~$\Phi\left(\frac{10k}{4}\right) \ldots$~~

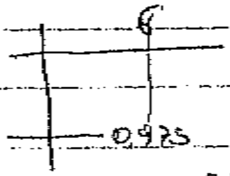
L'area colorata deve essere uguale ad α



allora voglio che

$\Phi\left(\frac{10k}{4}\right) = 1-\frac{\alpha}{2} = 0,975$.

Vado sulle tavole e cerco all'interno 0,975



Allora $\frac{10k}{4} = 1,96 \Rightarrow k = 0,784$.

→ Questo numero si chiama $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ perché

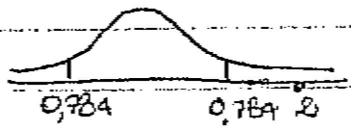
Allora la nostra regione critica è fatta così $\Phi(1,96) = P\left(Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\frac{\alpha}{2}$

$$\left\{\left|\frac{\sum X_i}{100} - 250\right| > 0,784\right\}$$

Ora prendiamo davvero 100 scatole e supponiamo di aver trovato $\frac{\sum x_i}{100} = 252$.

Con questi dati accettiamo o rifiutiamo l'ipotesi?

$\frac{\sum x_i}{100} - 250 = 2 > 0,784$



2 cade nella regione critica

quindi devo rifiutare l'ipotesi al livello α.

Tutti questi calcoli non li facciamo sempre. Basta usare queste regole per trovare la regione critica.

<u>Test sulla media a varianza nota</u>

Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione statistico con varianza σ^2 e fissiamo un livello α. Ecco le regioni critiche in funzione di ipotesi nulla e alternativa

- $H_0: m = m_0 \quad H_1: m \neq m_0 \qquad \left\{\left|\frac{\frac{\sum X_i}{n} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$
- $H_0: m \leq m_0 \quad H_1: m > m_0 \qquad \left\{\frac{\frac{\sum X_i}{n} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}\right\}$
- $H_0: m \geq m_0 \quad H_1: m < m_0 \qquad \left\{\frac{\frac{\sum X_i}{n} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha}\right\}$

ESERCIZI

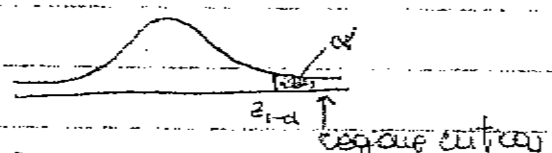
Vogliamo testare che la lunghezza delle code dei gatti che si sa avere varianza 25, su 400 gatti al livello 0.05. Si prendono le misure da 400 gatti e si ottiene $\frac{\sum x_i}{400} = 24{,}5$.
Possiamo affermare a questo livello che la lunghezza delle code dei gatti sia $\leq$ di 24 cm? E al livello 0,01?

SOL: Il test ha

$H_0: \mu \leq 24$ e $H_1: \mu > 24$.

La regione critica è fatta così

$$\left\{ \frac{\sum X_i / 400 - 24}{5/20} > z_{1-\alpha} \right\}$$



Cerco $z_{1-\alpha}$ cioè il numero tale che $\Phi(z_{1-\alpha}) = 1-\alpha = 0{,}95$

Troviamo $z_{1-\alpha} = 1{,}65$

Ora mettiamo i dati

$$\frac{\frac{\sum x_i}{400} - 24}{5/20} = \frac{24{,}5 - 24}{1/4} = 4 \cdot 0{,}5 = 2 > 1{,}65$$ quindi rifiuto l'ipotesi.

Proviamo ~~allora~~ con l'altro livello

$z_{1-\alpha}$ deve essere tale che $\Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$ cioè $z_{1-\alpha} = 2{,}33$

stavolta $2 < 2{,}33$ quindi siamo fuori dalla regione critica quindi accettiamo l'ipotesi.

Si fa un test per il gradimento di un certo programma. Vengono intervistate 100 persone e ~~l'80%~~ 80 di loro dicono che gradiscono ~~[illegible]~~. A un livello di 0,05 si può accettare l'ipotesi che il programma piaccia a più del 75% delle persone?

x: Il campione è fatto da $X_i \begin{cases} 1 & \text{piace} \\ 0 & \text{non piace} \end{cases}$ la statistica è $\frac{\sum X_i}{100}$ cioè la percentuale di quelli intervistati a cui è piaciuto il programma

$H_0: p \geq 85\%$ $\quad H_1: p < 85$

La regione critica è della forma

$$\left\{ \frac{\frac{\sum X_i}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} < z_\alpha \right\}$$

ci devo mettere la varianza di $\frac{\sum X_i}{n}$ supponendo che sia vera l'ipotesi cioè che $p=p_0$ cioè $E[X_i]=p_0$. Siccome le X_i sono bernoulline e $Var[X_i]=p_0(1-p_0)$, si ha

$$Var\left[\frac{\sum X_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2} Var \sum X_i = \frac{\sum Var[X_i]}{n^2} = \frac{n\, p_0 \ldots}{n^2}$$

Cerco prima z_α cioè il numero tale che $\Phi(z_\alpha)=\alpha=0{,}05$

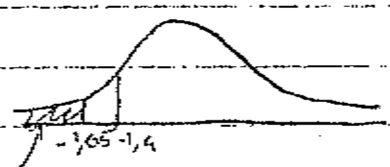
$z_\alpha<0$ $\quad \Phi(-z_\alpha)=0{,}95 \Rightarrow -z_\alpha=1{,}65 \Rightarrow z_\alpha=-1{,}65$.

Mettiamo ora i dati

$$\frac{\sum x_i}{100} = \frac{80}{100} = 0{,}8$$

Allora

$$\frac{\frac{\sum x_i}{n}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0{,}8-0{,}85}{\sqrt{\frac{0{,}85(1-0{,}85)}{100}}} = \frac{-0{,}05\cdot 10}{\sqrt{0{,}1275}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{0{,}1275}} = 1{,}40$$



regione critica.

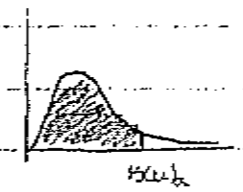
$-1{,}40 > -1{,}65 \Rightarrow$ non sono nella regione critica quindi accetto l'ipotesi.

Fino ad ora abbiamo fatto i test sulla media con la varianza nota.
Ma potremmo non conoscere la varianza. Allora ci sono altri tipi di test di cui qui non parliamo.
Oppure possiamo conoscere la media e voler fare un test sulla varianza.
In questo caso la statistica che si usa è

$$T = \frac{\sum_i (X_i - m)^2}{[\text{illegible}]} = \frac{\sum_i (X_i - m)^2}{\sigma^2} \frac{\sigma^2}{n}$$

Grandi menti hanno dimostrato che se le X_i sono gaussiane T ha legge $\chi^2(n)$ [si legge chi-quadro con n gradi di libertà)
la densità è fatta così allora

$$F(\chi(n)_\alpha) = P(T \le \chi(n)_\alpha) = \alpha.$$



Allora le regioni critiche sono fatte così

$H_0)\ \sigma^2 \le \sigma_0^2 \quad H_1)\ \sigma^2 > \sigma_0^2$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - m)^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{1-\alpha}(n) \right\}$$

$H_0)\ \sigma^2 \ge \sigma_0^2 \quad H_1)\ \sigma^2 < \sigma_0^2$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - m)^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_\alpha(n) \right\}$$

$H_0)\ \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad H_1)\ \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

$$\left\{ \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) \le \frac{\sum_i (X_i - m)}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \right\}$$

Se la media non è nota si usa la statistica

$$T = \frac{\sum_i (X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2} \quad \text{dove } \overline{X} = \frac{\sum_i X_i}{n}$$

In questo caso le regioni critiche sono della forma

$H_0)\ \sigma \le \sigma_0^2 \quad H_1)\ \sigma^2 > \sigma_0^2 \quad \{T \ge \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\}$

$H_0)\ \sigma^2 \ge \sigma_0^2 \quad H_1)\ \sigma^2 < \sigma_0^2 \quad \{T \le \chi^2_\alpha(n-1)\}$

$H_0)\ \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad H_1)\ \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad \{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le T \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$

...zi.

...vole fare un test sulla precisione di uno strumento. La ditta
...duttrice afferma che lo strumento prodotto ha una varianza non
...periore a $\sigma^2 = 10^{-4}$. Si fa un test al livello $\alpha = 0{,}05$ e si ottengono
...ste misurazioni $\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = 18{,}09 \times 10^{-4}$.
...a concludiamo?

$\mathcal{H}_0)\ \sigma \leq 10^{-4}$ $\quad$ $\mathcal{H}_1)\ \sigma \geq 10^{-4}$

La regione critica è

$$\left\{ \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{1-\alpha}(n-1) \right\} \qquad n = 10 \quad n-1$$

non conosciamo la media
quindi siamo nel secondo caso

Allora sulle tavole $\chi^2_{0,95}(9) = 3{,}325$

calcoliamo

$$\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} = \frac{18{,}09 \times \cancel{10^{-4}}}{\cancel{10^{-4}}}$$

Poiché $18{,}09 > 3{,}325$ siamo nella regione critica quindi rifiuto l'ipotesi nulla.

STATISTICA DESCRITTIVA

1) A 20 persone abbiamo chiesto il voto preso all'esame di istituzioni.
Hanno risposto così
18 18 20 19 25 30 30 26 26 26
19 27 23 27 19 25 30 26 18 23

2) A 6 persone viene chiesto di che colore hanno i capelli e rispondono così
biondo castano, neri, biondo biondo, neri

3) A 10 persone sono stati chiesti altezza e peso. Ecco le risposte

43 kg	1,56	76 kg	1,80
94 kg	1,92	81 kg	1,75
55 kg	1,58	86 kg	1,76
80 kg	1,65	77 kg	1,80
83 kg	1,70	60 kg	1,50

Questi sono tre tipi di indagine. In tutte e tre abbiamo un campione.
Si chiama NUMEROSITÀ DEL CAMPIONE il numero di osservazioni o di persone (nel primo caso 20, nel secondo 6, nel terzo 10)
Si chiama MODALITÀ ogni possibile risposta o nell'ambito dell'indagine
Nel primo caso le modalità sono 18 19 20 23 25 26 27 30 (anche gli altri sono modalità ma per comodità prendiamo solo quelle esistenti)
Nel secondo caso le modalità sono biondo castano nero.
Nel terzo sono tutte le coppie.
Nel primo e terzo caso i dati sono quantitativi. Nel secondo qualitativi.
Quando le modalità sono qualitative ci possiamo chiedere la MODA: cioè la modalità che si ripete più volte (biondo) e fare dei grafici o istogrammi. Nel caso di indagine quantitative invece possiamo giocare di più

Riprendiamo il primo esempio e come prima cosa ordiniamo i dati.

18 18 18 19 19 19 20 23 23 25 25 26 26 26 26 27 27 30 30 30

Poi ha senso costruire una tabella così:

Voto	f	f^r	f_c	f_c^r
18	3	3/20	3	3/20
19	3	3/20	8	6/20
20	1	1/20	7	7/20
23	2	2/20	9	9/20
25	2	2/20	11	11/20
26	4	4/20	15	15/20
27	2	2/20	17	17/20
30	3	3/20	20	1

f: frequenza: quante volte si ripete la stessa modalità

f^r: frequenza relativa rapporto tra $\frac{f}{n}$

$f_c^r(x_k)$: è la frequenza cumulata di x_k data dalla somma delle frequenze delle modalità $\leq x_k$

$f_c^r = \frac{f_c}{n}$

MODA: la modalità che ha frequenza maggiore (26)

MEDIANA: il dato che lascia a sx la metà dei dati;

Se n è pari prendo la modalità di posto $\frac{n}{2}+1$

Se n è dispari prendo la modalità di posto $\frac{n+1}{2}$

Nel nostro caso la mediana è il numero nella posizione 11 → 25

Possiamo anche calcolare due indicatori

Media

MEDIA $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = \sum_{j=1}^{k} x_j f_j^r$

k è il numero delle modalità, cioè il numero di risposte diverse

frequenza relativa della modalità j-sima

Varianza $s^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \sum_{j=1}^{k} (x_j - \bar{x})^2 f_j^r$

Calcoliamo allora il voto medio

$$18 \cdot \frac{3}{20} + 19 \cdot \frac{3}{20} + \frac{20}{20} + 23 \frac{2}{20} + 25 \frac{2}{20} + 26 \frac{4}{20} + 27 \frac{2}{20} + 30 \frac{3}{20}$$

Per calcolare la varianza possiamo usare anche un'altra formula cioè

$s^2 = \frac{\sum_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2$

BIBLIOGRAFIA MINIMA

- "Elementi di calcolo delle probabilità e statistica", R. Giuliano Edizioni ETS (valido supporto per la teoria, trattata in modo più esteso
- "Probabilità elementare", G. Letta, Zanichelli (solo per appassionati con buona base di matematica).
- "Probabilità e statistica per l'ingegneria e le scienze", Sheldon M. Ross Apogeo (programma molto esteso ma spiegato in modo semplice senza troppa matematica), buon numero di esercizi.

ON LINE

Rita Giuliano
Marza De Donno } esercizi per CPS a informatica (fattibili).