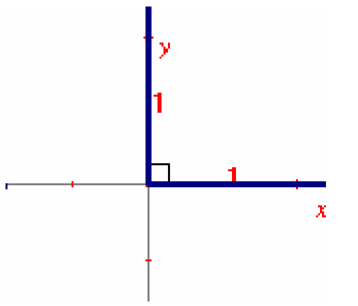
Alcune nozioni di trigonometria[1]

1. Angoli

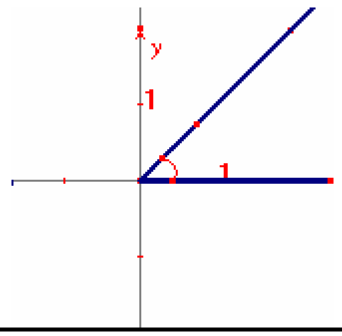
In un sistema di assi cartesiani ortogonali la misura degli angoli si effettua a partire dal semiasse positivo delle x, assumendo come positivo il verso antiorario. Le unità di misura più usate sono il *grado*, che è ricavato dividendo l'angolo giro (cioè un giro intero di circonferenza) in 360 parti uguali, e il *radiante*, che è l'angolo che sottende un arco uguale al raggio. In radianti la misura dell'angolo giro è 2π. In trigonometria angoli che differiscono per multipli di un angolo giro (cioè le cui misure differiscono per multipli di 2π) sono considerati equivalenti.

Vediamo qualche esempio.

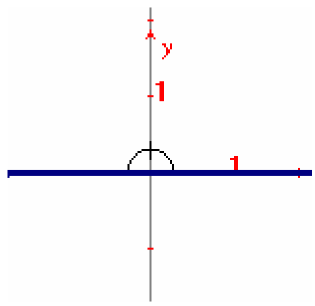
Angolo retto: misura $\frac{\pi}{2}$ radianti (90°), ma corrisponde anche a misure come $\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \ldots$.



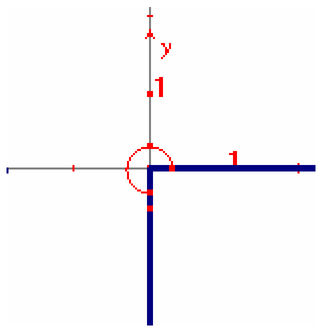
Angolo di $\frac{\pi}{4}$ radianti (45°), che corrisponde anche a misure come $\frac{9\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, \ldots$.



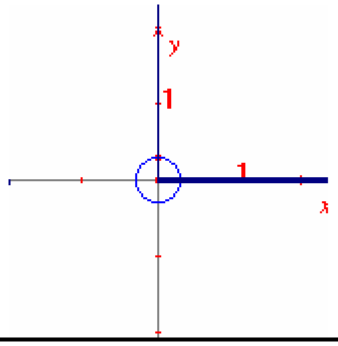
Angolo piatto: misura π radianti (180°), ma corrisponde anche a misure come $3\pi, -\pi, \ldots$.



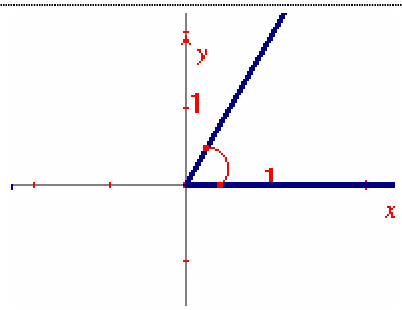
Angolo di $\frac{3\pi}{2}$ radianti (270°), che corrisponde anche a misure come $\frac{7\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \ldots$.



Angolo giro: misura 2π radianti (360°) e corrisponde anche a misure come $4\pi, -2\pi, \ldots$.



Angolo di $\frac{\pi}{3}$ radianti (60°), che corrisponde anche a misure come $\frac{7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, \ldots$.



Nel seguito useremo soltanto le misure in radianti e quando questo non crei ambiguità ometteremo l'unità di misura.

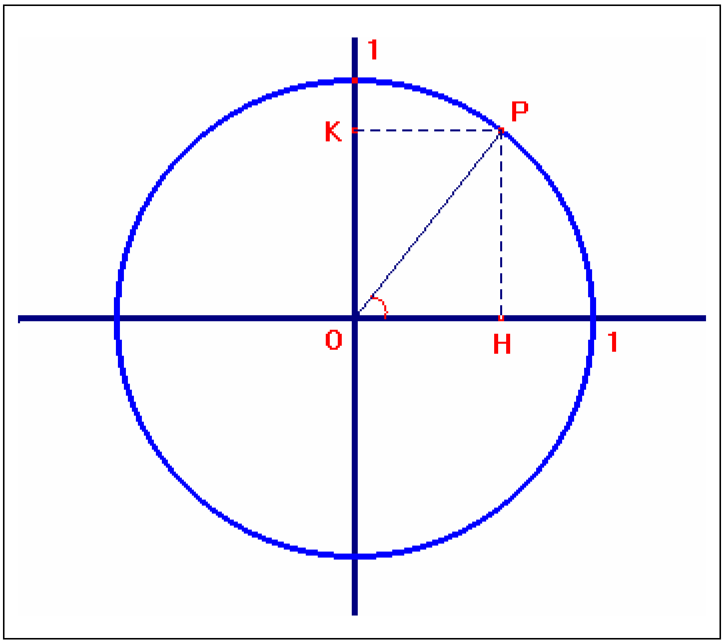
Attenzione!

La misura di un angolo è espressa da un numero reale, qualunque sia l'unità di misura. È bizzarra l'idea, purtroppo ripresa in alcuni libri di testo, che la misura di un angolo sia un numero reale quando è espressa in radianti ma non quando espressa in gradi. Nel caso dei gradi cambia la rappresentazione ma non la sostanza.

[1] Appunti .L. Ferrari dell'Università del Piemonte Orientale (sede di Alessandria)

2. Funzioni goniometriche

Consideriamo una circonferenza centrata nell'origine e di raggio 1. Chiamiamo *P* un punto sulla circonferenza e θ la misura dell'angolo $\widehat{HOP}$.



Definiamo coseno di θ [$\cos\theta$] l'ascissa del punto *P*, cioè la misura del segmento *OH* presa con segno positivo se *H* è a destra dell'origine, negativo se è a sinistra. Definiamo seno di θ [$\sin\theta$] l'ordinata del punto *P*, cioè la misura del segmento *OK* presa con segno positivo se *K* è sopra all'origine, negativo se è sotto.

Dato che le ascisse e le ordinate dei punti di una circonferenza di centro l'origine e raggio 1 sono comprese fra –1 e 1 (estremi inclusi), per qualsiasi valore di θ valgono le relazioni

$$-1 \le \cos\theta \le 1$$
$$-1 \le \sin\theta \le 1$$

Il teorema di Pitagora, applicato al triangolo OHP ci consente di ricavare la relazione

$(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2 = 1$.

Le scritture $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$ sono equivalenti rispettivamente a $(\sin\theta)^2$ e $(\cos\theta)^2$.('quadrato del seno di θ', 'quadrato del coseno di θ'). La scrittura $\sin\theta^2$ significa 'seno del quadrato di θ'.

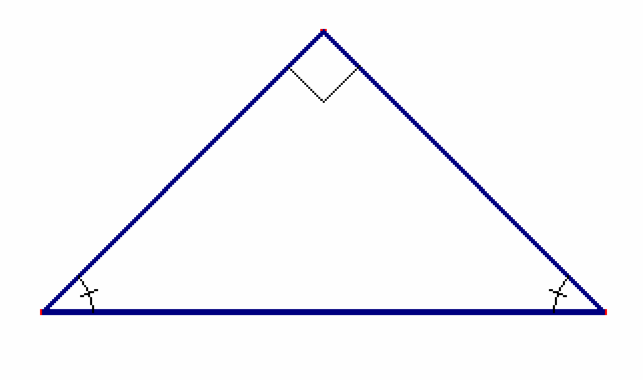
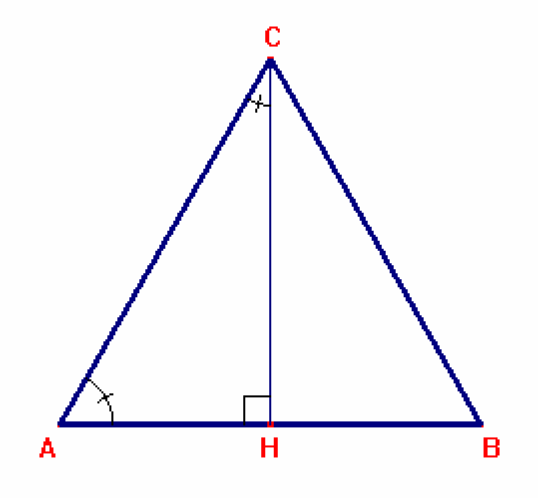
Se $\theta \neq 2(k+1)\dfrac{\pi}{2}$ al variare di *k* negli interi (cioè se θ non ha il coseno nullo) si definisce tangente di θ il rapporto fra il seno e il coseno di θ. In formula

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Dall'esame della circonferenza goniometrica e da semplici proprietà dei triangoli notevoli si ricavano le relazioni seguenti.

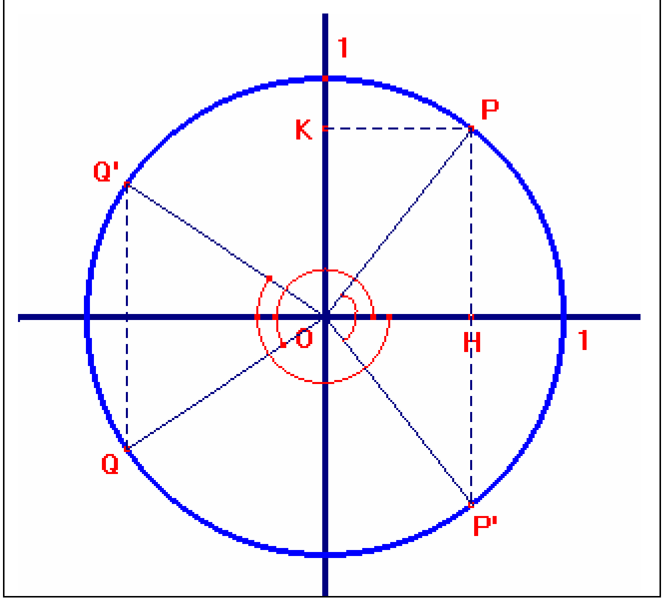
$\cos 0 = 1$	$\sin 0 = 0$	$\cos\pi = -1$	$\sin\pi = -1$
$\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$	$\sin\dfrac{\pi}{2} = 0$	$\cos\dfrac{3\pi}{2} = 0$	$\sin\dfrac{3\pi}{2} = -1$
$\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$	$\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$	$\tan 0 = 0$	$\tan\dfrac{\pi}{4} = 1$

Le relazioni delle prime due righe sono applicazioni immediate delle definizioni. Per comprendere le altre è bene ricordare che $\dfrac{\pi}{4}$ è la misura degli angoli alla base di un triangolo rettangolo isoscele, come quello disegnato sotto a sinistra, e che in un triangolo equilatero, come quello disegnato sotto a destra, gli angoli misurano $\dfrac{\pi}{3}$ e, se *H* è il punto medio del lato *AB* (e anche piede dell'altezza e della bisettrice passanti per *C*), allora l'angolo $\widehat{ACH}$ misura $\frac{\pi}{6}$. A questo punto il teorema di Pitagora consente di ricavare le formule.

Triangolo rettangolo isoscele	*Triangolo equilatero*
	

Il disegno sotto mostra che se *P'* è simmetrico di *P* rispetto all'asse delle *x*, allora $\widehat{HOP'} = -\widehat{HOP}$.

Angoli simmetrici rispetto all'asse delle *x*, hanno lo stesso coseno, e i seni uguali in modulo ma con segno opposto. Nel disegno a lato l'angolo $\widehat{HOQ}$ (che ha un'ampiezza compresa tra π e $\frac{3\pi}{2}$) è simmetrico rispetto all'asse delle *x* dell'angolo $\widehat{HOQ'}$



In formule, per ogni angolo di ampiezza *x*:

$$\cos(-x) = \cos x$$

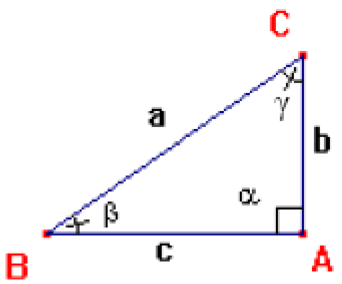
$$\sin(-x) = -\sin x$$

Attenzione!

Per calcolare una funzione goniometrica è fondamentale conoscere l'unità di misura in cui è rappresentato l'angolo. Se si usano calcolatrici, è meglio verificare l'unità di misura pre-impostata.

3. ‘Risoluzione’ di un triangolo rettangolo

E’ possibile determinare tutti gli elementi (cioè angoli e lati) di un triangolo rettangolo, se si conoscono due elementi (oltre all’angolo retto) di cui almeno uno sia un lato.
Si hanno infatti i seguenti teoremi:
Teorema 1: In un triangolo rettangolo, la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell’ipotenusa per il *seno* dell’angolo opposto (al cateto), oppure per il *coseno* dell’angolo adiacente (al cateto).



Con riferimento alla figura:
(1) $b = a \sin\beta$

(2) $b = a\cos\gamma$

(3) $c = a\sin\gamma$

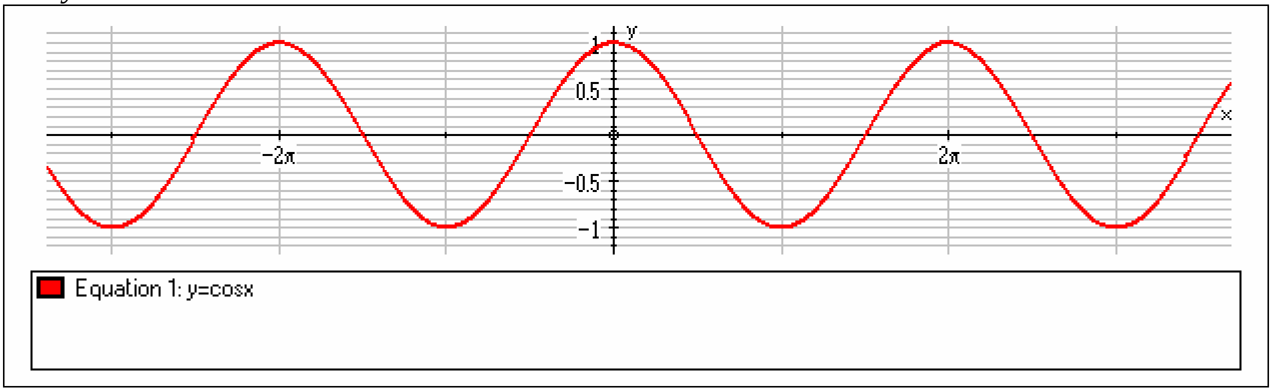
(4) $c = a\cos\beta$

Dimostrazione:
Ci limitiamo a qualche suggerimento per dimostrare (1) e (2).
Consideriamo la circonferenza di raggio 1 che ha centro in B, e chiamiamo D il punto in cui tale circonferenza interseca il lato BC (o il suo prolungamento). Conduciamo da D la perpendicolare al lato AB, e chiamiamo H il piede di tale perpendicolare (cioè il punto in cui tale perpendicolare incontra il lato AB o il suo prolungamento).
Il triangolo HBD è simile al triangolo ABC (Perché?).
Quindi possiamo scrivere:
………

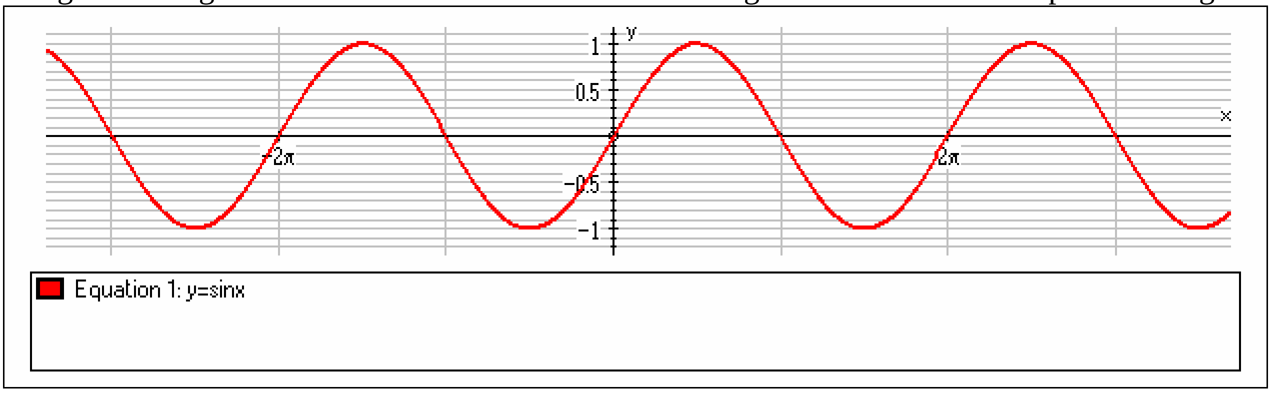
Teorema 2: In un triangolo rettangolo, la misura di un cateto è uguale a quella dell’altro cateto per la tangente dell’angolo opposto (al primo cateto).
In simboli (con riferimento alla figura):
$b = c\tan\beta$
$c = b\tan\gamma$

4. Grafici

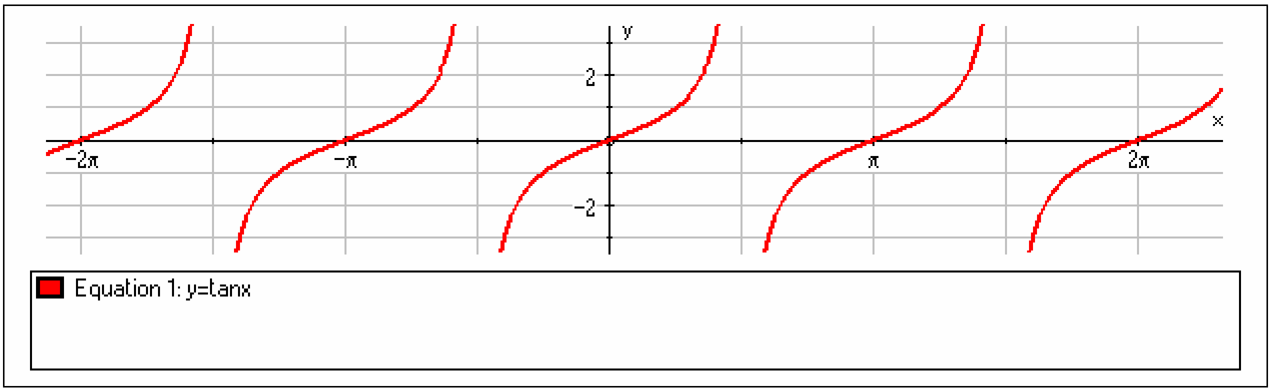
Il seguente è il grafico della funzione coseno. Si vede che il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle *y*.



Il seguente è il grafico della funzione seno. Si vede che il grafico è simmetrico rispetto all'origine.

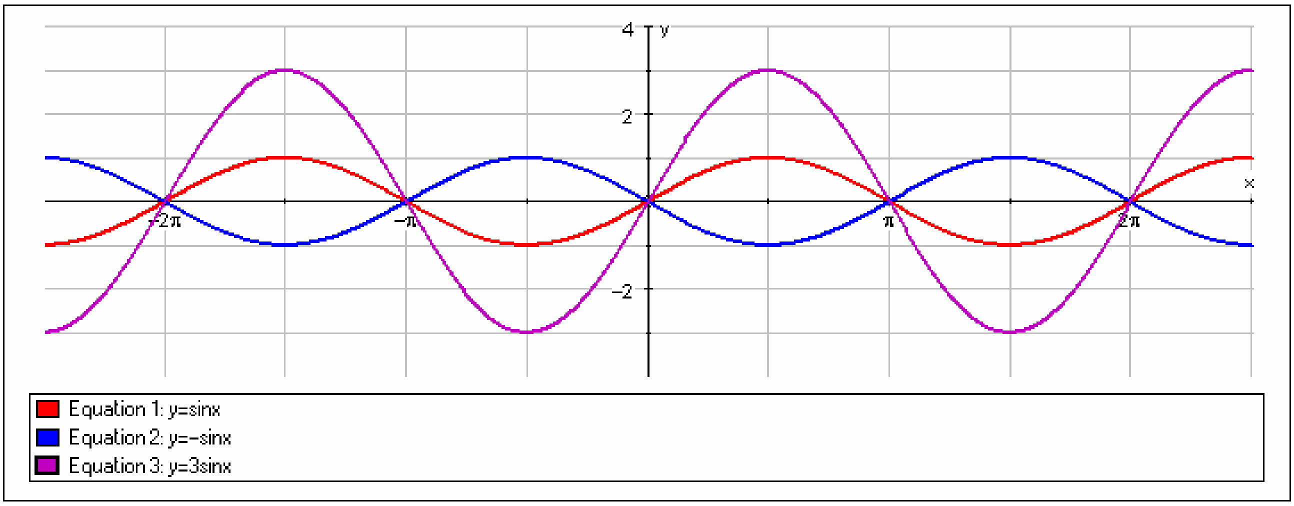


Il seguente è il grafico della funzione tangente. Si vede che la funzione non è definita sui multipli dispari di $\frac{\pi}{2}$. Ad esempio, se x tende a $\frac{\pi}{2}$ da sinistra (cioè, rimanendo minore), la funzione tende a $+\infty$ mentre se x tende a $\frac{\pi}{2}$ da destra (cioè, rimanendo maggiore), la funzione tende a $-\infty$.



0.1. Significato dei parametri

Sia A un numero reale. In una funzione del tipo $y = A \cdot \sin x$, il valore assoluto di A determina l'*ampiezza* dell'oscillazione rispetto all'asse delle y, cioè la differenza fra il punto di ordinata massima e quello di ordinata minima. Il cambiamento del segno di A trasforma il grafico nel grafico simmetrico rispetto all'asse delle x. Vediamo qualche esempio. I tre grafici nel diagramma che segue rappreseentano rispettivamente le funzioni di equazione $y = \sin x$, $y = -\sin x$, $y = 3\sin x$.

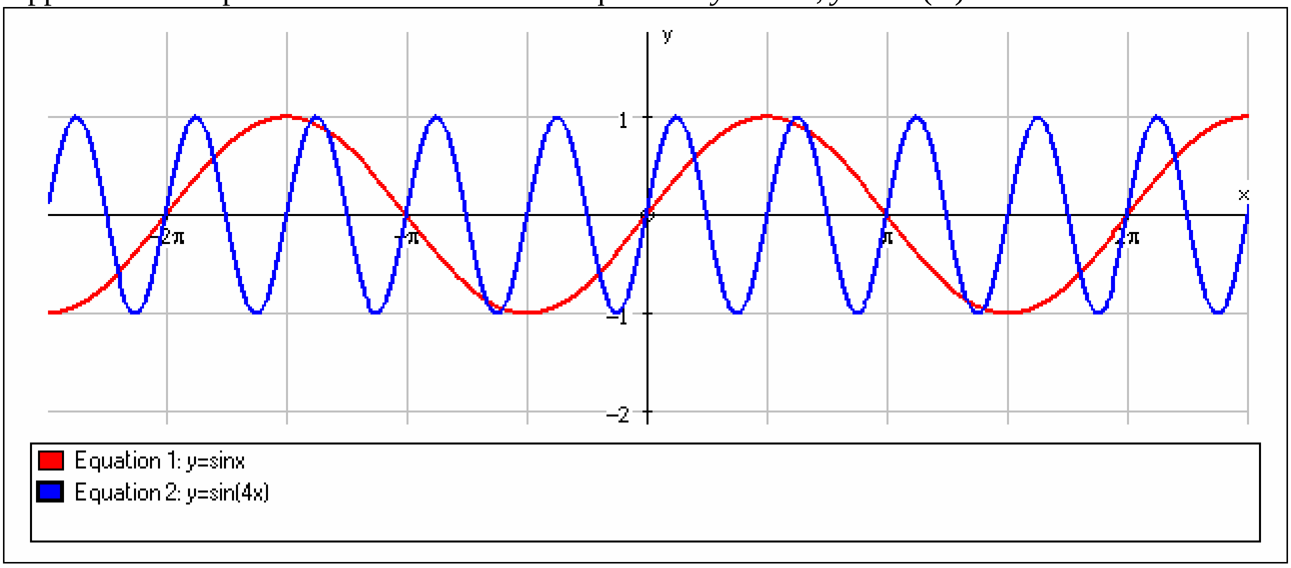


I valori delle funzioni seno e coseno si ripetono sistematicamente ogni intervallo di ampiezza 2π. Nessun intervallo più piccolo gode di tale proprietà. In altri termini 2π è il *periodo* delle funzioni seno e coseno. Il periodo della tangente è invece π. Va sottolineato che il periodo non è un intervallo, ma un numero reale (che è la misura di ogni intervallo che goda della proprietà di cui sopra). In formule, questo significa che, per ogni x reale e ogni k intero, valgono le relazioni

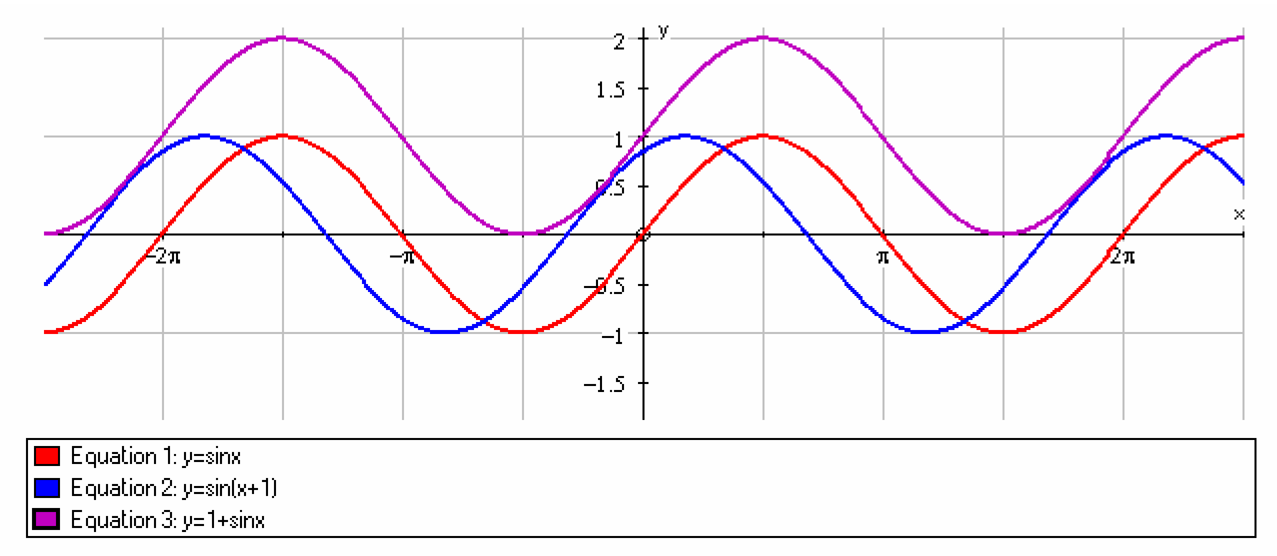
$$\sin x = \sin(x+2k\pi)$$

$$\cos x = \cos(x+2k\pi)$$

Il periodo di un'oscillazione è inversamente proporzionale alla sua *frequenza*. In una funzione del tipo $y = \sin(bx)$, al crescere di b in valore assoluto aumenta la frequenza delle oscillazioni e, ovviamente, diminuisce il periodo. Il cambiamento di segno di b trasforma il grafico nel grafico simmetrico rispetto all'asse delle y. Vediamo qualche esempio. I grafici nel diagramma che segue rappresentano rispettivamente le funzioni di equazione $y = \sin x$, $y = \sin(4x)$.



Come per tutte le funzioni, una costante additiva nell'argomento della funzione provoca una traslazione del grafico parallela all'asse delle x, mentre una costante additiva fuori dell'argomento della funzione provoca una traslazione del grafico parallela all'asse delle y. Vediamo qualche esempio. I tre grafici nel diagramma che segue rappreseentano rispettivamente le funzioni di equazione $y = \sin x$, $y = \sin(x+1)$, $y = 1+\sin x$.



Attenzione!

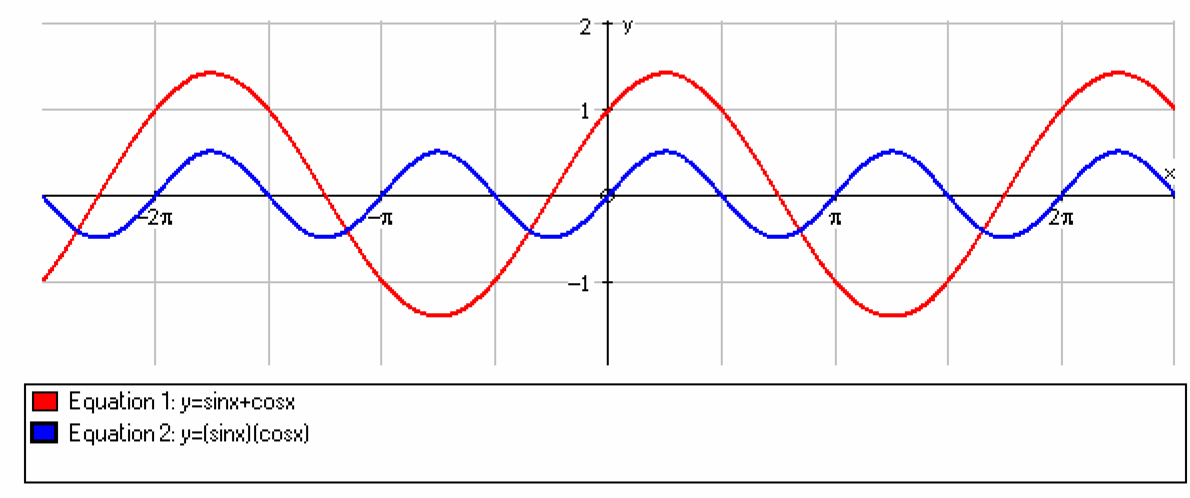
Le funzioni seno e coseno non sono lineari e hanno proprietà algebriche diverse dai polinomi. Questo significa che le relazioni che seguono non sono vere in generale, anzi sono false in quasi tutti i casi.

$\sin(x+y) = \sin x + \sin y$	$\sin(x+y) = \sin x + \sin y$
$\sin 2x = 2\sin x$	$\cos 2x = 2\cos x$
$\sin(xy) = \sin x \cdot \sin y$	$\cos(xy) = \cos x \cdot \cos y$

Per trattare le funzioni goniometriche sono state trovate diverse formule: di addizione, duplicazione, bisezione, prostaferesi, …
Non è obiettivo di questo precorso indurre gli studenti a impararle a memoria. Si trovano in qualunque manuale scolastico di trigonometria, quando servono si possono cercare.

Problemi

1) Sapendo che $\cos x = 0.4$, calcolate approssimativamente sin*x*.
2) Uno studente usa una calcolatrice per calcolare $\sin\frac{\pi}{2}$ e trova come risultato 0.027, mentre è noto che $\sin\frac{\pi}{2}=1$. Sapendo che la calcolatrice non è guasta, da dove può essere venuto fuori quel risultato?
3) Trovate il periodo di $\sin(3x)$
4) Identificate tutti gli angoli compresi tra 0 e 2π il cui coseno è positivo.
5) Identificate tutti gli angoli compresi tra 0 e 2π il cui seno è positivo.
6) Uno dei due grafici che seguono corrisponde a $y = \sin x + \cos x$, l'altro a $y = (\sin x)(\cos x)$. Individuateli.

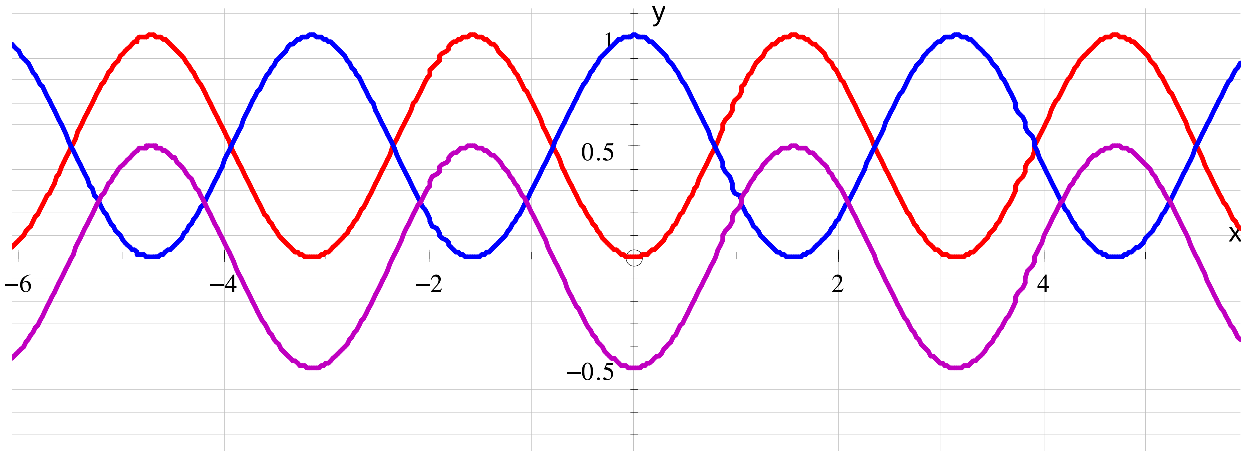


7) Sapendo che 0.9238 è un'approssimazione con 4 cifre esatte di $\cos\frac{\pi}{8}$, trovate un'approssimazione con 3 cifre esatte di $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$.

8) Provate che se $x+y=\pi$, allora $\sin x = \sin y$.

9) Provate che se $x+y=\pi$, allora $\cos x = -\cos y$.

10) Uno dei tre grafici che seguono corrisponde a $y=\cos^2 x$. Quale?



11) È vero che per ogni x reale, $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$?

Esercizi e problemi

1. Completa la seguente tabella:

misura dell'arco α	0	π/6	π/4	π/3	π/2
sinα					
cosα					
tanα					

2. Risolvi le seguenti equazioni:

sinx = ½

sinx = 0

cosx = √2/2

$tgx = 1$
$sinx = -\sqrt{2}/2$

3. Risolvi le seguenti disequazioni:
$cosx < \sqrt{3}/2$
$sinx < 1$
$cosx > - \sqrt{2}/2$
$tgx > 1$

4. Dimostra che:
$\cos (x + \pi) = - cosx$ per ogni x
$\sin (x +\pi) = - sinx$ per ogni x

5. Utilizzando la formula $\cos (\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
scrivi la formula:
- che esprime $\cos(\alpha+\beta)$ in funzione di cos e sin di α e β
- che esprime $\sin(\alpha+\beta)$ in funzione di cos e sin di α e β
- che esprime $\sin2\alpha$ in funzione di cos e sin di α e β
- che esprime $\cos2\alpha$ in funzione di cos e sin di α e β

6. E' univocamente determinata l'area di un triangolo che ha due lati di lunghezza a e b e l'angolo compreso di ampiezza γ? Perché? Quanto vale tale area?

7. Confronta i modi seguenti di introdurre la misura in radianti di un angolo:
Definizione 1. In una circonferenza di raggio r, sia α un angolo che insiste su un arco di circonferenza di lunghezza l. Si definisce misura in radianti dell'angolo α il rapporto l/r.
Definizione 2. Si definisce angolo radiante l'angolo che in una circonferenza sottende un arco di lunghezza uguale al raggio.
Definizione 3. Si definisce angolo radiante l'angolo che nella circonferenza di raggio unitario sottende un arco di lunghezza uguale a 1.
Danno risultati diversi queste definizioni? Perché? Quale ti sembra preferibile? Perché?

8. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
a) Per ogni x risulta $\sin 2x = 2\sin x$
b) Per nessun x risulta $\sin2x=2\sin x$
c) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

9. Riconosci e dimostra la verità o falsità dei seguenti enunciati:
a) Per ogni x, esiste un y tale che $\cos (x+y) = \cos x + \cos y$
b) Esiste un x tale che $\sin (x+y)=\sin x+\sin y$ per ogni y.

10. Traccia il grafico delle seguenti funzioni e trovarne il periodo:
$f(x) = \sin 3x$
$f(x) = \cos 1/6\, x$
$f(x)= 2\cos x$
$f(x)= \sin (x+ \pi/2)$