

Analisi 2 Ingegneria Civile 11 – 09 – 2027

Esercizio 1 Trovare tutti i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^3 + y^4 - x^2y^2$$

e studiarne la natura (dire se si tratta di max loc., min loc., sella).

Esercizio 2 Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int \int \int_{\Omega} (x + y)z dx dy dz$$

dove

$$\Omega = \{(x, y, z) | (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 \leq 4\}.$$

Esercizio 3 Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + y, e^{z^2}, -z + 1)$$

lungo la superficie S definita come

$$S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1 - z, z > 0\}$$

orientato secondo la normale che vale $(0, 0, 1)$ in $(0, 0, 1)$.

SOLUZIONI

Esercizio 1 I punti critici soddisfano il sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy^2 = 0 \\ 4y^3 - 2x^2y = 0 \end{cases}$$

quindi abbiamo dalla seconda equazione $y = 0$ oppure $4y^2 = 2x^2 \iff 2y^2 = x^2$. Se $y = 0$ allora dalla prima equazione $x = 0$ e quindi troviamo $(0, 0)$. Se invece $2y^2 = x^2$ allora dalla prima equazione $3x^2 - x^3 = 0$ da cui $x = 0$ oppure $x = 3$. Nel primo caso abbiamo di nuovo che $y = 0$ e quindi ritroviamo $(0, 0)$, mentre per $x = 3$ troviamo dalla prima equazione $y^2 = \frac{9}{2}$ e quindi i punti $(3, \pm\frac{3}{\sqrt{2}})$. Scrivendo l'hessiana vediamo che nei punti $(3, \pm\frac{3}{\sqrt{2}})$ ha determinante negativo, quindi punti di sella, mentre in $(0, 0)$ l'hessiana e' la matrice nulla quindi non possiamo usare il test dell'hessiano. Tuttavia restringendo per $y = 0$ troviamo la funzione x^3 che ha nell'origine una sella, quindi $(0, 0)$ e' una sella.

Esercizio 2 Con il cambio di variabili

$$x - 2 = X, y + 3 = Y, z - 1 = Z$$

siamo ricondotti. calcolare l'integrale

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{X^2+Y^2+Z^2 \leq 4} (X + Y - 1)(1 + Z) dX dY dZ \\ &= \int \int \int_{X^2+Y^2+Z^2 \leq 4} (X + Y - 1 + XZ + YZ - Z) dX dY dZ \end{aligned}$$

ed usando argomenti di simmetria si ha che tutti gli integrali al secondo membro sono nulli, eccetto

$$\int \int \int_{X^2+Y^2+Z^2 \leq 4} -1 dX dY dZ = -\frac{4}{3}\pi \times 8 = -\frac{32}{3}\pi$$

Esercizio 3 Si ha che S non e' una superficie chiusa, quindi procediamo con l'aggiunta di un tappo che la renda chiusa. Infatti abbiamo che

$$S \cup T = \partial\Omega$$

dove

$$\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 1 - z, z > 0\}$$

e

$$T = \{(x, y, 0) | x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Osserviamo che la normale ν assegnata e' coerente con la normale esterna su S , vista come parte di $\partial\Omega$, e che la normale esterna su T e' data dal vettore $(0, 0, -1)$. Quindi usando il teorema della divergenza abbiamo

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz &= \text{Flusso}(\vec{F}, \partial\Omega, \nu_{ext}) \\ &= \text{Flusso}(\vec{F}, S, \nu) + \text{Flusso}(\vec{F}, T, (0, 0, -1)) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \text{Flusso}(\vec{F}, S, \nu) &= \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz - \text{Flusso}(\vec{F}, T, (0, 0, -1)) \\ &= 0 - \int \int_{u^2+v^2 \leq 1} (-1) du dv = \pi \end{aligned}$$