Funzioni armoniche in senso di viscosità

1. Una definizione preliminare

Definizione 1. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $u:\Omega\to\mathbb{R}$ e $u:\Omega\to\mathbb{R}$ due funzioni continue.*

- *Diciamo che φ tocca u da sotto nel punto $x_0\in\Omega$, se $u(x_0)=\varphi(x_0)$ e se la funzione $u-\varphi$ ha un minimo locale in x_0.*
- *Diciamo che φ tocca u da sopra nel punto $x_0\in\Omega$, se $u(x_0)=\varphi(x_0)$ e se la funzione $u-\varphi$ ha un massimo locale in x_0.*
- *Diciamo che φ tocca u strettamente da sotto nel punto $x_0\in\Omega$, se $u(x_0)=\varphi(x_0)$ e*
$$\varphi(x)<u(x)\quad\textit{per ogni}\quad x\neq x_0\quad\textit{in un intorno di } x_0.$$
- *Diciamo che φ tocca u strettamente da sopra nel punto $x_0\in\Omega$, se $u(x_0)=\varphi(x_0)$ e*
$$\varphi(x)>u(x)\quad\textit{per ogni}\quad x\neq x_0\quad\textit{in un intorno di } x_0.$$

2. Soluzioni in senso di viscosità. Definizioni equivalenti

Definizione 2. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u:\Omega\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Diciamo che u è soluzione di*
$$\Delta u=0\quad\textit{in}\quad\Omega$$
in senso di viscosità, se:

- *per ogni funzione test $\varphi\in\mathcal{T}(\Omega)$ che tocca u da sotto in un qualche punto $x_0\in\Omega$ si ha*
$$\Delta\varphi(x_0)\geq 0\,;$$
- *per ogni funzione test $\varphi\in\mathcal{T}(\Omega)$ che tocca u da sopra in un qualche punto $x_0\in\Omega$ si ha*
$$\Delta\varphi(x_0)\leq 0\,.$$

Come spazio di funzioni test possiamo usare:

- $\mathcal{T}(\Omega)=C^\infty(\Omega)$ *;*
- $\mathcal{T}(\Omega)=C^2(\Omega)$ *;*
- $\mathcal{T}(\Omega)=$ "i polinomi di grado 2"*.*

Definizione 3. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u:\Omega\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Diciamo che u è soluzione di*
$$\Delta u=0\quad\textit{in}\quad\Omega$$
in senso di viscosità, se:

- *per ogni funzione test $\varphi\in\mathcal{T}(\Omega)$ che tocca u* **strettamente** *da sotto in un qualche punto $x_0\in\Omega$ si ha*
$$\Delta\varphi(x_0)\geq 0\,;$$
- *per ogni funzione test $\varphi\in\mathcal{T}(\Omega)$ che tocca u* **strettamente** *da sopra in un qualche punto $x_0\in\Omega$ si ha*
$$\Delta\varphi(x_0)\leq 0\,.$$

Come spazio di funzioni test possiamo usare:

- $\mathcal{T}(\Omega)=C^\infty(\Omega)$ *;*
- $\mathcal{T}(\Omega)=C^2(\Omega)$ *;*
- $\mathcal{T}(\Omega)=$ "i polinomi di grado 2"*.*

Osservazione 4. *Definizione 2 e Definizione 3 sono equivalenti. Infatti, basta osservare che:*

- *se φ tocca da sopra la funzione u in x_0, allora per ogni $\varepsilon>0$ la funzione*
$$\varphi(x)+\varepsilon|x-x_0|^2$$
tocca u strettamente da sopra in x_0 (e rimane nella stessa classe di funzioni test);
- *se φ tocca da sopra la funzione u in x_0, allora per ogni $\varepsilon>0$ la funzione*
$$\varphi(x)-\varepsilon|x-x_0|^2$$
tocca u strettamente da sotto in x_0 (e rimane nella stessa classe di funzioni test).

In Definzione 2 e Definizione 3 le scelta dello spazio test $\mathcal{T}(\Omega)$ sono tutte equivalenti. Infatti, vale la seguente

Proposizione 5. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, sono equivalenti:*

(i) $\Delta u = 0$ *in senso della Definizione 2 con funzioni test* $\mathcal{T}(\Omega) =$ "i polinomi di grado 2"*;*
(ii) $\Delta u = 0$ *in senso della Definizione 2 con funzioni test* $\mathcal{T}(\Omega) = C^2(\Omega)$*;*
(iii) $\Delta u = 0$ *in senso della Definizione 2 con funzioni test* $\mathcal{T}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$.

Proof. Siccome

$$\text{"i polinomi di grado 2"} \subset C^2(\Omega) \subset C^\infty(\Omega),$$

abbiamo che

$$\text{(iii)} \;\Rightarrow\; \text{(ii)} \;\Rightarrow\; \text{(i)}.$$

Quindi, basta dimostrare che (i) $\Rightarrow$ (iii). Siano $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ una funzione test che tocca u da sopra in $x_0 \in \Omega$ e P_2 il polinomio di Taylor del secondo grado di φ in x_0. Allora,

$$\Delta\varphi(x_0) = \Delta P_2(x_0).$$

Inoltre, siccome

$$u(x) \le \varphi(x) = P_2(x) + o(|x - x_0|^2),$$

abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ il polinomio

$$P_{2,\varepsilon}(x) := P_2(x) + \varepsilon|x - x_0|^2$$

tocca u (strettamente) da sopra in x_0. Quindi, per ipotesi,

$$0 \ge \Delta P_{2,\varepsilon}(x_0) = \Delta P_2(x_0) + 2d\varepsilon.$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0$ abbiamo la tesi. □

---

3. Soluzioni in senso di viscosità e soluzioni classiche

Proposizione 6. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, sono equivalenti:*

(i) $u \in C^\infty(\Omega)$ *e* $\Delta u = 0$ *su* Ω*;*
(ii) $\Delta u = 0$ *in senso di viscosità in* Ω.

Proof. L'implicazione (i)$\Rightarrow$(ii) segue dal principio del massimo forte. Mostreremo che (ii)$\Rightarrow$(i).Siccome u è continua in Ω, sappiamo che, data una palla $B_r \subset \Omega$, esiste una funzione continua

$$u_0 : \overline{B}_r \to \mathbb{R},$$

soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 & \text{in} \quad B_r, \\ u_0 = u & \text{su} \quad \partial B_r. \end{cases}$$

Basta quindi dimostrare che u coincide con u_0 in B_r. Mostreremo che

$$u_0 \le u.$$

Supponiamo per assurdo che esiste un punto $x_0 \in B_r$ tale che

$$\delta := u_0(x_0) - u(x_0) > 0.$$

Consideriamo la funzione

$$w(x) = \varepsilon^2 \frac{1}{2d}\Big((2r)^2 - |x|^2\Big) \qquad \big(\text{si ha quindi che } w \ge 0 \text{ in } B_{2r}\big).$$

Allora $-\Delta w = \varepsilon^2 > 0$ in B_r. Inoltre, scegliendo ε abbastanza piccolo

$$u_0(x_0) - w(x_0) - u(x_0) \ge \frac{\delta}{4} \qquad \text{e} \qquad \big(u_0 - w\big) - u \le \frac{\delta}{16} \quad \text{su} \quad \partial B_r.$$

Il massimo della funzione continua

$$\overline{B}_r \ni x \mapsto \Big(u_0(x) - w(x)\Big) - u(x)$$

e quindi raggiunto in un punto interno $y_0 \in B_r$. In particolare, la funzione

$$x \mapsto \Big(u_0(x) - w(x)\Big) + u(y_0) - \Big(u_0(y_0) - w(y_0)\Big)$$

tocca u da sotto in y_0. Ma questo è un assurdo perché $\Delta\Big(u_0(y_0) - w(y_0)\Big) > 0$. □