Cambi di coordinate conformi

Funzioni olomorfe

Una funzione

$$h=\varphi+i\psi.:\Omega\to\mathbb{R},$$

con parte reale φ e parte immaginaria ψ, è olomorfa se e solo se

$$\partial_{\bar z}h=0$$

ovvero se

$$0=\big(\partial_x+i\partial_y\big)\big(\varphi+i\psi\big)=\Big(\partial_x\varphi-\partial_y\psi\Big)+i\Big(\partial_y\varphi+\partial_x\psi\Big),$$

che è equivalente a

$$\begin{cases}\partial_x\varphi=\partial_y\psi\\ \partial_y\varphi=-\partial_x\psi.\end{cases}.$$

Di conseguenza, lo jacobiano di h è dato da

$$Jh(x,y)=\begin{pmatrix}\partial_x\varphi & \partial_x\psi\\ \partial_y\varphi & \partial_y\psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial_x\varphi & -\partial_y\varphi\\ \partial_y\varphi & \partial_x\varphi\end{pmatrix},$$

mentre

$$\partial_z h=\frac12\big(\partial_x-i\partial_y\big)\big(\varphi+i\psi\big)=\frac12\Big(\partial_x\varphi+\partial_y\psi\Big)+\frac{i}{2}\Big(-\partial_y\varphi+\partial_x\psi\Big)=\partial_x\varphi-i\partial_y\varphi.$$

In particolare, si ha che

$$|\partial_z h|=\sqrt{(\partial_x\varphi)^2+(\partial_y\varphi)^2}=|\nabla\varphi|$$

e

$$\det\begin{pmatrix}\partial_x\varphi & \partial_x\psi\\ \partial_y\varphi & \partial_y\psi\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\partial_x\varphi & -\partial_y\varphi\\ \partial_y\varphi & \partial_x\varphi\end{pmatrix}=|\nabla\varphi|^2=|\partial_z h|^2.$$

Mappe conformi

Siano Ω e Ω' due aperti in $\mathbb{R}^2$. Diciamo che una mappa

$$h=\varphi+i\psi:\Omega\to\Omega'$$

è conforme se h è olomorfa, continua, con inversa olomorfa. Siccome h è invertibile si ha che in ogni punto $z_0\in\Omega$

$$h(z_0+z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n,$$

con $a_1\neq 0$. Siccome vale l'uguaglianza $a_1=\partial_z h(z_0)$ si ottiene che:

se $h:\Omega\to\Omega'$ è invertibile, allora $|\partial_z h|\neq 0$ su Ω.

In particolare, siccome

$$\det Jh=|\nabla\varphi|^2=|\partial_z h|^2,$$

otteniamo che la matrice

$$Jh=\begin{pmatrix}\partial_x\varphi & \partial_x\psi\\ \partial_y\varphi & \partial_y\psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial_x\varphi & -\partial_y\varphi\\ \partial_y\varphi & \partial_x\varphi\end{pmatrix},$$

è invertibile. È immediato dedurre che

$$(Jh)^{-1}=\frac{1}{|\nabla\varphi|^2}\begin{pmatrix}\partial_x\varphi & \partial_y\varphi\\ -\partial_y\varphi & \partial_x\varphi\end{pmatrix}=\frac{1}{\det Jh}(Jh)^t.$$

Cambi di coordinate conformi

Proposizione 1. *Siano Ω e Ω' due aperti in $\mathbb{R}^2$ e sia $h = \varphi + i\psi : \Omega \to \Omega'$ una mappa conforme. Siano $f \in L^2(\Omega')$ e $u \in H^1(\Omega')$ una soluzione debole di*

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega'.$$

Allora, la funzione

$$v : \Omega \to \mathbb{R}\ , \qquad v(x,y) = u(\varphi(x,y), \psi(x,y)),$$

è soluzione debole di

$$-\Delta v = f(\varphi,\psi)|\nabla\varphi|^2 \quad in \quad \Omega.$$

Proof. Osserviamo che il gradiente di v è dato da

$$\nabla v(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x\varphi\partial_1 u(\varphi,\psi) + \partial_x\psi\partial_2 u(\varphi,\psi) \\ \partial_y\varphi\partial_1 u(\varphi,\psi) + \partial_y\psi\partial_2 u(\varphi,\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x\varphi & \partial_x\psi \\ \partial_y\varphi & \partial_y\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 u(\varphi,\psi) \\ \partial_2 u(\varphi,\psi) \end{pmatrix} = Jh\nabla u(\varphi,\psi).$$

Analogamente, per ogni funzione test

$$T \in C_c^\infty(\Omega')$$

definiamo

$$S : \Omega \to \mathbb{R}\ , \qquad S(x,y) = T(\varphi(x,y), \psi(x,y)),$$

e calcoliamo

$$\nabla S(x,y) = Jh\nabla T(\varphi,\psi).$$

Siccome u è soluzione debole in Ω' abbiamo che

$$\int_{\Omega'} \nabla u \cdot \nabla T = \int_{\Omega'} Tf.$$

Cambiando le coordinate otteniamo

$$\int_\Omega \nabla u(\varphi,\psi) \cdot \nabla T(\varphi,\psi) \left| \det \begin{pmatrix} \partial_x\varphi & \partial_x\psi \\ \partial_y\varphi & \partial_y\psi \end{pmatrix} \right| = \int_\Omega T(\varphi,\psi) f(\varphi,\psi) \left| \det \begin{pmatrix} \partial_x\varphi & \partial_x\psi \\ \partial_y\varphi & \partial_y\psi \end{pmatrix} \right|$$

che possiamo scrivere come

$$\int_\Omega (Jh)^{-1}[\nabla v] \cdot (Jh)^{-1}[\nabla S] |\det(Jh)| = \int_\Omega S\, f(\varphi,\psi)|\nabla\varphi|^2.$$

Ora, siccome

$$\begin{aligned} \int_\Omega (Jh)^{-1}[\nabla v] \cdot (Jh)^{-1}[\nabla S] |\det(Jh)| &= \int_\Omega \frac{1}{|\det(Jh)|}(Jh)^t[\nabla v] \cdot (Jh)^{-1}[\nabla S] |\det(Jh)| \\ &= \int_\Omega (Jh)^t[\nabla v] \cdot (Jh)^{-1}[\nabla S] \\ &= \int_\Omega (Jh)^{-t}(Jh)^t[\nabla v] \cdot \nabla S \\ &= \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla S, \end{aligned}$$

otteniamo

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla S = \int_\Omega S\, f(\varphi,\psi)|\nabla\varphi|^2,$$

il che conclude la dimostrazione. □

Esistenza di mappe conformi in domini $C^{1,\alpha}$

Proposizione 2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme aperto*

$$\Omega = \{(x,y) \ : \ x \in (-1,1),\ \eta(x) < y < \eta(x) + 1\},$$

dove $\eta : (-1,1)$ è una funzione di classe $C^{1,\alpha}$. Allora, esiste una mappa

$$h : \Omega \cup \Gamma \to \mathbb{R}^2$$

di classe $C^{1,\alpha}$ su $\Omega \cup \Gamma$, olomorfa in Ω ed invertibile in un intorno di $(0, \eta(0))$.