Teorema della regolarità ellittica.
Parte I. Regolarità interna

Lo spazio $H^2(\Omega)$

Definizione 1. *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$. Diremo che $u \in H^2(\Omega)$, se $u \in H^1(\Omega)$ e $\partial_j u \in H^1(\Omega)$ per ogni $j = 1, \dots, d$. In particolare, se $u \in H^2(\Omega)$, allora il laplaciano*

$$\Delta u := \sum_{j=1}^{f} \partial_{jj} u$$

è una funzione in $L^2(\Omega)$.

Proposizione 2. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H^2(\Omega)$. Allora*

$$\partial_{ij} u = \partial_{ji} u \quad \text{per ogni} \quad 1 \le i \le j \le d.$$

Proof. Sia $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ una funzione data. Siccome $u_i \in H^1(\Omega)$ e $u \in H^1(\Omega)$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \partial_{ij} u(x)\varphi(x)\,dx &= -\int_{\mathbb{R}^d} \partial_j u(x)\partial_i\varphi(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \partial u(x)\partial_{ji}\varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

D'altra parte, siccome $u_i \in H^1(\Omega)$ e $u \in H^1(\Omega)$, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \partial_{ji} u(x)\varphi(x)\,dx &= -\int_{\mathbb{R}^d} \partial_i u(x)\partial_j\varphi(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \partial u(x)\partial_{ij}\varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Siccome φ è regolare, abbiamo che $\partial_{ij}\varphi = \partial_{ji}\varphi$. Di conseguenza

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_{ij} u(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{ji} u(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{per ogni} \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Siccome $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $L^2(\Omega)$ abbiamo la tesi. ☐

Soluzioni forti

Proposizione 3. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ ed $f \in L^2(\Omega)$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione debole di*

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Se $u \in H^2(\Omega)$, allora $\Delta u \in L^2(\Omega)$ e

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{per Lebesgue quasi-ogni} \quad x \in \Omega.$$

Proof. Sia $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Siccome $u \in H^2$ abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_{jj} u(x)\varphi(x) = -\int_{\mathbb{R}^d} \partial_j u(x)\partial_j\varphi(x)\,dx.$$

Sommando su $j = 1, \dots, d$ otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Delta u(x)\varphi(x) = -\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx.$$

Ora, siccome u è oluzione debole abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Di conseguenza

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\Delta u(x) + f(x)\Big)\varphi(x)\,dx = 0.$$

Siccome $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ è arbitraria e siccome $C_c^1(\Omega)$ è denso in $L^2(\Omega)$, otteniamo che

$$\Delta u(x) + f(x) = 0 \quad \text{per Lebesgue quasi-ogni} \quad x \in \Omega.$$

□

L'equazione per le derivate deboli

Proposizione 4. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ ed $f \in L^2(\Omega)$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione debole di*

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega.$$

Se $u \in H^2(\Omega)$ ed $f \in H^1(\Omega)$, allora per ogni $j = 1, \dots, d$ la funzione $\partial_j u \in H^1(\Omega)$ è soluzione debole di

$$-\Delta(\partial_j u) = \partial_j f \quad in \quad \Omega.$$

Proof. Sia $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Siccome $\partial_j u \in H^1(\Omega)$ abbiamo che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \nabla(\partial_j u) \cdot \nabla \varphi \, dx &= \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{ij} u(x) \partial_i \varphi(x) \, dx \\
&= \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{ji} u(x) \partial_i \varphi(x) \, dx && \text{(qui abbiamo usato che } \partial_{ij} u = \partial_{ij} u) \\
&= -\sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \partial_i u(x) \partial_{ji} \varphi(x) \, dx && \text{(qui abbiamo usato che } \partial_i u \in H^1(\Omega)) \\
&= \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{ii} u(x) \partial_j \varphi(x) \, dx && \text{(qui abbiamo usato che } \partial_i u \in H^1(\Omega)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \Delta u(x) \partial_j \varphi(x) \, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \partial_j \varphi(x) \, dx && \text{(abbiamo usato che } -\Delta u = f) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j f(x) \varphi(x) \, dx && \text{(abbiamo usato che } f \in H^1(\Omega)).
\end{aligned}$$

□

Teorema della regolarità ellittica

Teorema 5 (Regolarità ellittica)**.** *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione debole di*

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega.$$

Allora $u \in H^2(D)$ per ogni $D \Subset \Omega$.

Proof. Dato un insieme aperto D con $\overline{D} \subset \Omega$ esiste una funzione $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che

$$\varphi \equiv 1 \quad \text{su} \quad D \qquad \text{e} \qquad 0 \le \varphi \le 1 \quad \text{su} \quad \Omega.$$

Fissiamo $y \in \mathbb{R}^d$, con $|y|$ abbastanza piccolo, e consideriamo la funzione

$$v(x) = \frac{u(x+y) - u(x)}{|y|}.$$

Osserviamo che

$$-\Delta v = \frac{1}{|y|}\Big(f(x+y) - f(x)\Big)$$

in senso debole H^1 in un intorno del supporto di φ. Quindi possiamo usare la funzione $\varphi^2 v$ come funzione test:

$$\int \nabla v \cdot \nabla(\varphi^2 v) \, dx = \int \frac{1}{|y|}\Big(f(x+y) - f(x)\Big)\varphi^2 v \, dx.$$

Ora, calcoliamo

$$\begin{aligned}\int |\nabla(v\varphi)|^2\,dx &= \int \nabla v\cdot\nabla(v\varphi)^2\,dx + \int |\nabla\varphi|^2 v^2\,dx\\ &= \int \frac{1}{|y|}\Big(f(x+y)-f(x)\Big)\varphi^2 v\,dx + \int |\nabla\varphi|^2 v^2\,dx\\ &= \int \frac{1}{|y|}\Big(f(x+y)-f(x)\Big)\frac{1}{|y|}\Big(u(x+y)-u(x)\Big)\varphi^2(x)\,dx + \int |\nabla\varphi|^2 v^2\,dx\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}&\Big|\int \frac{1}{|y|}\Big(f(x+y)-f(x)\Big)\frac{1}{|y|}\Big(u(x+y)-u(x)\Big)\varphi^2(x)\,dx\Big|\\ &= \left|\frac{1}{|y|^2}\int f(x)\Big(u(x)\varphi^2(x-y)-u(x-y)\varphi^2(x-y)-u(x+y)\varphi^2(x)+u(x)\varphi^2(x)\Big)\,dx\right|\\ &= \left|-\frac{1}{|y|}\int f(x)\left(\frac{u(x+y)-u(x)}{|y|}\varphi^2(x)-\frac{u(x)-u(x-y)}{|y|}\varphi^2(x-y)\right)\,dx\right|\\ &\le \|f\|_{L^2}\|\nabla(v\phi^2)\|_{L^2}\end{aligned}$$

Quindi,

$$\int |\nabla(v\varphi)|^2\,dx \le \|f\|_{L^2}\|\nabla(v\phi^2)\|_{L^2} + \int |\nabla\varphi|^2 v^2\,dx.$$

Questa disuguaglianza implica che

$$\|\nabla v\|_{L^2(D)} \le \|\nabla(v\varphi)\|_{L^2(\Omega)} \le C,$$

dove C è una costante che dipende da Ω, f e φ. Usando la definizione di v otteniamo che

$$\partial_j u \in H^1(D) \quad \text{per ogni} \quad j=1,\dots,d. \qquad \square$$

Regolarità interna delle soluzioni

Proposizione 6. *Supponiamo che Ω sia un aperto in $\mathbb{R}^d$ e che $u\in H^1(\Omega)$ sia una soluzione debole di*

$$-\Delta u = \lambda u \qquad \text{in} \qquad \Omega.$$

Allora $u\in C^\infty(\Omega)$.

Proof. Data una palla $B_R(x_0)\Subset\Omega$ mostreremo che $u\in H^k(B_{R/2}(x_0))$ per ogni $k\ge 1$. Consideriamo la successione decrescente di raggi

$$r_n = (1+2^{-n})R \quad \text{per} \quad n\ge 0.$$

Osserviamo che se v è una soluzione di

$$-\Delta v = \lambda v \quad \text{in} \quad B_{r_n}(x_0),$$

allora per il teorema della regolarità ellittica, le derivate deboli

$$\partial_1 v,\dots,\partial_d v \in H^1(B_{r_{n+1}}(x_0)),$$

e sono soluzioni deboli di

$$-\Delta(\partial_j v) = \lambda\partial_j v \quad \text{in} \quad B_{r_{n+1}}(x_0).$$

Di conseguenza, otteniamo che $u\in H^{n+1}(B_{r_n}(x_0))$ e che tutte le derivate deboli di ordine n,

$$v := \partial_{j_1}\partial_{j_2}\dots\partial_{j_n} u$$

sono soluzioni di

$$-\Delta v = \lambda v \quad \text{in} \quad B_{r_n}(x_0).$$

Infine, siccome

$$B_{R/2}(x_0)\subset B_{r_n}(x_0) \quad \text{per ogni} \quad n,$$

otteniamo che $u\in H^n(B_{R/2}(x_0))$ per ogni n. Questo implica che $u\in C^\infty(B_R)$. $\square$

Proposizione 7. *Supponiamo che Ω sia un aperto in $\mathbb{R}^d$ e che $u\in H^1(\Omega)$ sia una soluzione debole di*

$$-\Delta u = f \qquad \text{in} \qquad \Omega,$$

dove $f\in C^\infty(\Omega)$. Allora $u\in H^k(\Omega)$ per ogni $k\in\mathbb{N}$. In particolare, $u\in C^\infty(\Omega)$.