Una caratterizzazione dello spazio $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

Lemma 1. *Data una funzione $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $p \in (1, +\infty)$, sono equivalenti:*

(1) $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$;

(2) *esiste una costante $C > 0$ tale che:*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} u(x)\partial_j\varphi(x)\,dx\right| \le C\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \quad \textit{per ogni} \quad j = 1, \dots, d \quad \textit{e per ogni} \quad \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)\,,$$

dove $q = \frac{p}{p-1}$.

Dimostrazione. Dimostriamo che (2) implica (1). Per ogni $j \in \{1, \dots, d\}$, consideriamo il funzionale

$$T_j : C_c^1(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}\,, \qquad T(\varphi) = \int_I u(x)\partial_j\varphi(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)\,.$$

Osserviamo che $C_c^1(\mathbb{R}^d)$ è un sottoinsieme denso di $L^q(\mathbb{R}^d)$ e che (per ipotesi) il funzionale T_j è limitato su $C_c^1(\mathbb{R}^d)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$, ovvero:

$$|T_j(\varphi)| \le C\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)\,.$$

Per il teorema di Hahn-Banach, esiste un funzionale lineare

$$S_j : L^q(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$$

tale che $S_j \equiv T_j$ su $C_c^1(\mathbb{R}^d)$ e

$$|S_j(\varphi)| \le C\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in L^q(\mathbb{R}^d)\,.$$

Esiste quindi una funzione $v_j \in L^p(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$S_j(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} v_j(x)\varphi(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in L^q(\mathbb{R}^d)\,.$$

In particolare, siccome $S_j \equiv T_j$ su $C_c^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x)\partial_j\varphi(x)\,dx = T_j(\varphi) = S_j(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} v_j(x)\varphi(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)\,.$$

Quindi, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ ed il suo gradiente debole è dato da

$$\nabla u = (\partial_1 u, \partial_2 u, \dots, \partial_d u) = (-v_1, -v_2, \dots, -v_d).$$

□

Teorema 2. *Data una funzione $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $p \in (1, +\infty)$.*

(i) *Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, allora per ogni vettore unitario $e \in \partial B_1$ vale la disuguaglianza*

$$\|u(x + he) - u(x)\|_{L^p_x(\mathbb{R}^d)} \le C|h| \quad \textit{per ogni} \quad h \in \mathbb{R}\,,$$

dove

$$C = \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

(ii) *Sia e_j una delle direzioni principali in $\mathbb{R}^d$. Se esiste una costante $C_j > 0$ tale che*

$$\|u(x+he_j) - u(x)\|_{L^p_x(\mathbb{R}^d)} \le C_j|h| \quad \textit{per ogni} \quad h \in \mathbb{R}\,,$$

allora esiste una funzione $v_j \in L^p(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x)\partial_j\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^d} v_j(x)\varphi(x)\,dx \quad \textit{per ogni} \quad \varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)\,.$$

In particolare, se esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|u(x+he_j) - u(x)\|_{L^p_x(\mathbb{R}^d)} \le C|h| \quad \textit{per ogni} \quad j = 1,\dots,d \quad \textit{e per ogni} \quad h \in \mathbb{R}\,,$$

allora $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.

Dimostrazione. **Dimostriamo (i).** Per ogni funzione $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ e per ogni $h > 0$ abbiamo

$$\varphi(x+eh) - \varphi(x) = \int_x^{x+h} e\cdot\nabla\varphi(w+te)\,dt = h\int_0^1 e\cdot\nabla\varphi(x+she)\,ds.$$

Quindi,

$$|\varphi(x+eh) - \varphi(x)| \le |h|\int_0^1 |e\cdot\nabla\varphi(x+she)|\,ds \le |h|\int_0^1 |\nabla\varphi|(x+she)\,ds\,,$$

dove

$$|\nabla\varphi| = \Big((\partial_1\varphi)^2 + \dots + (\partial_d\varphi)^2\Big)^{1/2}.$$

Siccome la misura di Lebesgue su $[0,1]$ è una misura di probabilità, abbiamo

$$|\varphi(x+eh) - \varphi(x)|^p \le |h|^p\int_0^1 |\nabla\varphi|^p(x+she)\,ds\,.$$

Integrando nella variabile $x \in \mathbb{R}^d$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x+eh) - \varphi(x)|^p\,dx &\le \int_{\mathbb{R}^d} |h|^p\int_0^1 |\nabla\varphi|^p(x+she)\,ds\,dx \\
&= |h|^p\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^p(x+she)|\,dx\,ds \\
&= |h|^p\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^p(x)\,dx\,ds \\
&= |h|^p\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^p(x)\,dx\,.
\end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che per ogni funzione $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x+eh) - \varphi(x)|^p\,dx \le |h|^p\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^p(x)\,dx\,.$$

Siccome $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ è denso in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, otteniamo che per ogni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ vale la disuguaglianza

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x+eh) - u(x)|^p\,dx \le |h|^p\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p(x)\,dx\,.$$

Dimostriamo (ii). Data una funzione $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$ e dato un vettore unitario $e_j \in \mathbb{R}^d$, osserviamo che

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big(u(x+he_j) - u(x)\Big)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\Big(\varphi(x-he_j) - \varphi(x)\Big)\,dx.$$

Siccome,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} \Big(u(x+he_j) - u(x)\Big)\varphi(x)\,dx\right| \le \|u(x+he_j) - u(x)\|_{L^p_x(\mathbb{R}^d)}\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \le C_j|h|\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\,,$$

otteniamo che

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} u(x)\Big(\varphi(x-he_j)-\varphi(x)\Big)\,dx\right| \le C_j|h|\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\,.$$

Siccome, $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$, abbiamo che

$$\frac{\varphi(x-he_j)-\varphi(x)}{h} \to -\partial_j\varphi(x)$$

uniformemente in $\mathbb{R}^d$, per $h \to 0$. Quindi, passando al limite, abbiamo

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} u(x)\partial_j\varphi(x)\,dx\right| \le C_j\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

La conclusione segue dal Lemma 1. $\square$