

UNIVERSITÀ DI PISA



CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Il problema del matching aleatorio per potenze negative della distanza euclidea

TESI DI LAUREA TRIENNALE
IN MATEMATICA

CANDIDATO:
Davide Orecchioni

RELATORE:
Dario Trevisan

ANNO ACCADEMICO 2021 - 2022

Indice

Introduzione	2
1 Il problema del matching	4
1.1 Definizioni e variabili	4
1.2 Proprietà di $B_{p,n}$	5
2 Upper e Lower Bound	9
2.1 Lower Bound	9
2.2 Upper Bound	11
2.3 Il caso $p \geq d$	15
2.4 Alcuni Esempi	18
2.4.1 Confronto tra $B_{n,p}$ e $Z_{n,p}$	18
2.4.2 Andamento di $Z_{p,n}$	20
3 Esistenza del limite	21
3.1 Matching locali	21
3.1.1 Definizione e proprietà	21
3.1.2 Procedimento di Poissonizzazione	24
3.2 Esistenza del Limite Poissonizzato	27
4 Conclusioni e possibili sviluppi	32
Appendice	34
Bibliografia	36

Introduzione

Il problema del matching è uno dei più importanti problemi nel campo della teoria dei grafi. Dato un grafo, esso consiste nel trovare un suo sottografo privo di loop e composto interamente da archi a due a due non adiacenti. Se applicato a un grafo bipartito $(G, E) = (X \cup Y, E)$, può essere interpretato come problema di flusso su rete, in cui l'obiettivo diventa collegare, finché possibile, ogni punto di X a uno e un solo punto di Y . Inoltre, se il grafo è pesato, è possibile associare a ogni matching un costo totale (somma dei pesi dei singoli archi) e definire una nozione di matching ottimo, che minimizzi o massimizzi tale somma a seconda dei nostri scopi. Per un grafo bipartito pesato, un'interpretazione intuitiva è che i punti X siano punti di partenza, da collegare alle destinazioni Y in base ai costi di percorrenza.

A questo punto, diventa una questione interessante studiare l'andamento del valore del matching ottimo, in base alla scelta dei pesi del grafo e a parametri quali il numero di punti di X e Y . Questo tipo di costruzione risulta molto versatile e adatta a rappresentare una grande varietà di problemi, sia teorici che pratici. Un esempio può essere la gestione degli utenti di un internet provider, che deve decidere a quale server assegnare ogni utente in base a costi e velocità di connessione; oppure l'assegnamento di determinate task ai vari processori di un computer, in base al tempo impiegato da ciascuno per risolverle.

Ci concentreremo su un particolare tipo di matching bipartito e pesato, che chiameremo *matching aleatorio euclideo*. Il termine *aleatorio* indica che i punti in X e Y corrispondono a variabili aleatorie a valori nel cubo unitario $[0, 1]^d$, invece di essere assegnati deterministicamente (caso comunque molto studiato in letteratura). Il termine *euclideo* deriva invece dalla scelta dei costi, che corrisponderanno alla distanza euclidea tra i vari punti elevata a un certo esponente p .

In questo setting, il matching ottimo è una variabile aleatoria a valori in \mathbb{R} che vuole minimizzare la distanza tra i punti scelti, e che possiamo scrivere esplicitamente come funzione di X , Y , p e d . Vogliamo studiare il valore atteso di tale variabile, e determinare il suo andamento asintotico in base ai parametri. Un esempio notevole è quello in cui X e Y hanno entrambe n punti, che corrispondono a variabili i.i.d. con distribuzione uniforme su

$[0, 1]^d$. Nel caso in cui p sia positivo e tale che $2p < d$, è possibile dimostrare che il valore atteso del costo del matching ottimo ha andamento asintotico dell'ordine di $n^{1-\frac{p}{d}}$, come visto in [1].

In questo lavoro di tesi ci occuperemo di verificare ed estendere questi risultati al caso in cui l'esponente p sia negativo, dando una caratterizzazione completa del comportamento del valore atteso del matching ottimo.

Nel primo capitolo fisseremo la notazione e definiremo formalmente i due problemi di matching ottimo, nei due casi p positivo e p negativo. In particolare, mentre il primo è un problema di minimo, nel secondo caso si considera il massimo della somma delle distanze, in modo da raggiungere lo stesso obiettivo di accoppiare punti tra loro vicini. Riporteremo inoltre alcuni risultati noti sul caso positivo, che verranno sfruttati nel resto del lavoro.

Nel secondo capitolo ci occuperemo poi di determinare lower bound e upper bound all'andamento del valore atteso. L'upper bound risulta di particolare importanza rispetto al caso con p positivo, che per variabili a valori nel cubo unitario ammette banali limitazioni dall'alto date dal diametro \sqrt{d} del cubo $[0, 1]^d$. Nel caso con p negativo i costi sono inversamente proporzionali alle distanze tra i punti, per cui è teoricamente possibile ottenere costi arbitrariamente alti in corrispondenza a punti molto vicini tra loro. Per garantire l'esistenza di un upper bound sarà dunque necessario fare l'ipotesi $p < d$, ipotesi che abbiamo verificato anche tramite sperimentazioni numeriche. Concluderemo il capitolo mostrando che, nel caso in cui $p \geq d$, effettivamente il valore atteso del matching ottimo non è neanche finito.

Infine, nel terzo capitolo, a partire dai risultati del secondo discuteremo dell'esistenza del limite per una particolare variante del problema, a partire dai bound individuati nel Capitolo 2. Il procedimento seguito riadatta per il caso negativo la dimostrazione dell'esistenza del limite nel caso positivo, e si basa su un procedimento di *poissonizzazione* della selezione dei punti X e Y , applicato a una scomposizione frazionaria del cubo unitario.

Capitolo 1

Il problema del matching

In questo capitolo diamo una definizione formale della variabile $B_{p,n}$, che rappresenta il costo del matching ottimo nel caso positivo, e della variabile $Z_{p,n}$ per il caso negativo. Riporteremo poi una serie di risultati su $B_{p,n}$ che caratterizzano l'andamento del suo valore atteso al variare di n , e il modo in cui le variabili si concentrano attorno a tale media.

1.1 Definizioni e variabili

Sia $d \geq 1$ la dimensione del nostro spazio, e siano $X = (X_i)_{i=1}^n$, $Y = (Y_i)_{i=1}^n$ variabili indipendenti con distribuzione uniforme sul cubo unitario $[0, 1]^d$. Fissato un esponente $p > 0$, la variabile aleatoria che realizza il matching ottimo tra i punti di X e Y è

$$B_{p,n} = \min_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^n |X_i - Y_{\sigma(i)}|^p. \quad (1.1)$$

\mathcal{S}_n è l'insieme delle possibili permutazioni di n elementi, che rappresenta ogni possibile scelta di assegnamento dei punti in X ai punti in Y , mentre $|\cdot|$ è la distanza euclidea

$$|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^d x_j^2} \quad \text{per } x = (x_j)_{j=1}^d \in \mathbb{R}^d.$$

Il costo del matching ottimo corrisponde dunque a una certa permutazione la quale, intuitivamente, collega tra loro punti vicini. Nel caso negativo, nella sommatoria dei costi la distanza euclidea sarà elevata un esponente $-p$, e di conseguenza a punti molto vicini corrisponderà un costo molto alto. Per ottenere comunque punti relativamente vicini dovremo perciò considerare, invece del minimo, il massimo sulle permutazioni di \mathcal{S}_n . Di conseguenza, la

variabile aleatoria per il matching ottimo nel caso negativo è data da

$$Z_{p,n} = \max_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^n |X_i - Y_{\sigma(i)}|^{-p}. \quad (1.2)$$

Tale variabile è ben definita a meno di supporre che $|X_i - Y_j| > 0$ per ogni scelta di i e j . Questo non è un problema, in quanto ogni evento della forma $\{|X_i - Y_j| = 0\}$ al variare di $i, j = 1 \dots n$ è trascurabile. Lo è dunque la loro unione poiché unione finita di trascurabili.

Una caratteristica di $B_{p,n}$ è che può essere facilmente limitata dall'alto. Ogni membro della sommatoria che definisce $B_{p,n}$ è limitato superiormente da $d^{p/2}$, dove $d^{1/2}$ è il diametro del cubo unitario; vale dunque $B_{p,n} \leq nd^{p/2}$ per ogni $n \geq 1$. Viceversa, $Z_{p,n}$ può essere facilmente limitata dal basso; con lo stesso ragionamento otteniamo infatti il lower bound $Z_{p,n} \geq nd^{-p/2}$.

1.2 Proprietà di $B_{p,n}$

Poiché partiamo da punti distribuiti uniformemente su $[0, 1]^d$, è ragionevole aspettarsi che ogni punto X_i riesca a trovare un punto Y_j entro una distanza di circa $1/n^{1/d}$. Questo corrisponde al caso in cui gli n punti siano distribuiti in modo equispaziato secondo una griglia d -dimensionale (ad esempio, per $d = 1$ sarebbero disposti a distanza circa $1/n$ sulla retta reale). Ogni membro della sommatoria che definisce $B_{p,n}$ apporterebbe dunque un contributo di circa $1/n^{p/d}$. Sommando gli n contributi, una prima congettura che nasce da questa osservazione è che valga

$$B_{p,n} \sim n \cdot \frac{1}{n^{p/d}} = n^{1-p/d}. \quad (1.3)$$

Tramite sperimentazioni numeriche è facile notare che tale congettura non regge per tutti i possibili valori di p e d ; ad esempio, nel caso $d = 2$, si nota che la stima ha un fattore di errore dell'ordine di $\log(n)$ per $p = 2$, e dell'ordine di $\sqrt{\log(n)}$ per $p = 1$. Intuitivamente, per poter applicare l'ipotesi di equidistribuzione vista sopra, è necessaria una certa "libertà" in termini di dimensione, ovvero: p deve rimanere relativamente piccolo rispetto a d . Si arriva infatti a dimostrare il seguente :

Teorema 1.1. *Dati p e d tali che $0 < p < \frac{d}{2}$, esiste finito il limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[B_{p,n}]}{n^{1-p/d}} \in (0, \infty). \quad (1.4)$$

Per arrivare a tale risultato si applica al problema un procedimento di *poissonizzazione*, che descriveremo nel dettaglio nel terzo capitolo. In breve, si studia l'andamento del problema di matching nel caso in cui le variabili X e Y siano in realtà processi di Poisson su $[0, 1]^d$. Sfruttando le proprietà di tale distribuzione è possibile mostrare l'esistenza di un limite finito, che coincide con il limite nel caso uniforme per quanto dimostrato ad esempio nella proposizione 6.1 di [2].

Lo studio dell'andamento del valore atteso risulta sufficiente a caratterizzare il comportamento del matching ottimo, grazie al seguente risultato di concentrazione attorno alla media:

Teorema 1.2. *Se $2p < d$, esiste una costante $C = C(p, d) > 0$ che dipende solo da p e d e tale che, per ogni $n \geq 1$,*

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{B_{p,n} - \mathbb{E}[B_{p,n}]}{n^{1-\frac{p}{d}}} \right| > t \right) \leq 2e^{-Ct^2 n^{1-\frac{2p}{d}}}. \quad (1.5)$$

Per arrivare al Teorema 1.2 usiamo, senza riportarne una dimostrazione, la seguente disuguaglianza:

Lemma 1.3 (Disuguaglianza di McDiarmid). *Sia $f : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots \times \mathcal{X}_n \rightarrow \mathbb{R}$ funzione e $c_1 \dots c_n \in \mathbb{R}$ costanti tali che, per ogni $i = 1 \dots n$ e per ogni $x_i \in \mathcal{X}_i$,*

$$\sup_{z \in \mathcal{X}_i} |f(x_1 \dots x_i \dots x_n) - f(x_1 \dots z \dots x_n)| \leq c_i. \quad (1.6)$$

Allora, date $X_1 \dots X_n$ variabili aleatorie indipendenti a valori rispettivamente in \mathcal{X}_i , per ogni $\varepsilon > 0$ vale

$$\mathbb{P} (|f(X_1 \dots X_n) - \mathbb{E}[f(X_1 \dots X_n)]| \geq \varepsilon) \leq 2 \exp \left(-\frac{2\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \right) \quad (1.7)$$

Dimostrazione Teorema: Nel nostro caso, sia $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \dots = \mathcal{X}_n = [0, 1]^d$. La funzione considerata è

$$f(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) = \min_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^n |x_i - y_{\sigma(i)}|^p. \quad (1.8)$$

Consideriamo per semplicità la prima coordinata. Fissato $z \in [0, 1]^d$, a esso sarà associata la permutazione $\sigma_z \in \mathcal{S}_n$ che realizza $f(z, x_2 \dots x_n, y_1 \dots y_n)$, ovvero tale che

$$\min_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \left(|z - y_{\sigma(1)}|^p + \sum_{i=2}^n |x_i - y_{\sigma(i)}|^p \right) = |z - y_{\sigma_z(1)}|^p + \sum_{i=2}^n |x_i - y_{\sigma_z(i)}|^p. \quad (1.9)$$

Poiché $f(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n)$ è definita come minimo tra tutte le permutazioni, vale

$$f(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_{\sigma_z(i)}|^p.$$

Di conseguenza, sostituendo tale maggiorazione nella differenza

$$|f(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) - f(z, x_2 \dots x_n, y_1 \dots y_n)|$$

si elidono tutti i termini tranne il primo, e troviamo

$$\begin{aligned} & |f(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) - f(z, x_2 \dots x_n, y_1 \dots y_n)| \\ & \leq \left| |x_1 - y_{\sigma_z(1)}|^p - |z - y_{\sigma_z(1)}|^p \right|. \end{aligned}$$

Vale $\left| |x_1 - y_{\sigma_z(1)}|^p - |z - y_{\sigma_z(1)}|^p \right| \leq |x_1 - y_{\sigma_z(1)}|^p + |z - y_{\sigma_z(1)}|^p$. Inoltre, poiché z, x_1 e $y_{\sigma_z(1)}$ sono punti di $[0, 1]^d$, possiamo stimare entrambe le differenze col diametro \sqrt{d} e ottenere

$$\left| |x_1 - y_{\sigma_z(1)}|^p - |z - y_{\sigma_z(1)}|^p \right| \leq 2 \left(\sqrt{d} \right)^p = 2d^{\frac{p}{2}}.$$

Questo è sufficiente per mostrare che

$$\sup_{z \in [0, 1]^d} |f(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) - f(z, x_2 \dots x_n, y_1 \dots y_n)| \leq 2d^{\frac{p}{2}}.$$

A meno di ripetere lo stesso ragionamento per tutte le $2n$ coordinate, possiamo concludere che valgono le ipotesi del Lemma 1.3 ponendo $c_i = 2d^{\frac{p}{2}}$ per $i = 1 \dots 2n$. Di conseguenza, tornando all'enunciato del Teorema 1.2, possiamo applicare il lemma e ottenere

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\left| \frac{B_{p,n} - \mathbb{E}[B_{p,n}]}{n^{1-\frac{p}{d}}} \right| > t \right) \\ & = \mathbb{P} \left(|B_{p,n} - \mathbb{E}[B_{p,n}]| > tn^{1-\frac{p}{d}} \right) \\ & \leq 2 \exp \left(\frac{-2t^2 n^{2-\frac{2p}{d}}}{\sum_{i=1}^{2n} (2d^{\frac{p}{2}})^2} \right) \\ & = 2 \exp \left(\frac{-2t^2 n^{2-\frac{2p}{d}}}{8nd^p} \right) \\ & = 2e^{-Ct^2 n^{1-\frac{2p}{d}}} \end{aligned}$$

dove abbiamo individuato la costante positiva $C = C(d, p) = \frac{1}{4d^p} > 0$. \square

Nel caso $0 < p < d/2$, che corrisponde a $1 - 2p/d > 0$, le probabilità ricavate dal Teorema 1.2 risultano sommabili. Nelle stesse ipotesi esiste, per il Teorema 1.1, il limite del valore atteso; è dunque sufficiente applicare il Lemma di Borel-Cantelli per ottenere il seguente risultato.

Teorema 1.4. *Se $p < d/2$, sia $\beta_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[B_{p,n}]}{n^{1-\frac{p}{d}}}$, che sappiamo esistere finito. Allora $\frac{B_{p,n}}{n^{1-\frac{p}{d}}} \rightarrow \beta_p$ quasi certamente.*

Proviamo ora ad applicare lo stesso ragionamento visto in (1.3) al caso negativo. Supponendo come prima che i punti siano mediamente equidistribuiti in $[0, 1]^d$, ci aspettiamo che ogni punto X_i trovi un punto Y_j a distanza $1/n^{1/d}$, che apporterà un contributo di circa $1/n^{-p/d}$; questo porterebbe alla congettura

$$Z_{p,n} \sim n \cdot \frac{1}{n^{-\frac{p}{d}}} = n^{1+\frac{p}{d}}. \quad (1.10)$$

Nel secondo capitolo arriveremo a dimostrare che, imponendo le giuste ipotesi su p e d , esistono

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[Z_{p,n}]}{n^{1+\frac{p}{d}}} \quad \text{e} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[Z_{p,n}]}{n^{1+\frac{p}{d}}} < \infty. \quad (1.11)$$

Più delicata è la questione dell'esistenza del limite. Innanzitutto, se anche esiste il limite del valore atteso, non è detto che coincida col limite delle variabili. $Z_{p,n}$ non ammette infatti maggiorazioni immediate come quelle per $B_{p,n}$, per cui non possiamo applicare in maniera diretta il Teorema 1.2. Nel terzo capitolo discuteremo come mostrare l'esistenza del limite, solo nel caso del valore atteso, per la versione poissonizzata del problema. Congetturiamo che argomenti simili alla proposizione 6.1 di [2] permettano di ottenere l'esistenza del limite anche nel caso i.i.d. uniforme.

Capitolo 2

Upper e Lower Bound

In questo capitolo ci poniamo l'obiettivo di trovare limitazioni dall'alto e dal basso per l'andamento dei valori attesi $\mathbb{E}[Z_{p,n}]$, e di capire se e come tale andamento dipende dai dati iniziali p e d . Confronteremo poi i risultati dimostrati con quanto possiamo dedurre dalla sperimentazione numerica.

2.1 Lower Bound

Siano $X = (X_i)_{i=1}^n$ e $Y = (Y_i)_{i=1}^n$ variabili i.i.d. uniformi su $[0, 1]^d$, dove supponiamo che $|X_i - Y_j| > 0$ per ogni scelta di i e j . Ogni possibile assegnamento dei punti di X ai punti di Y è rappresentato da una permutazione $\bar{\sigma} \in \mathcal{S}_n$. Iniziamo notando che, fissato un qualsiasi $\varepsilon > 0$, vale

$$n = \sum_{i=1}^n 1 = \sum_{i=1}^n |X_i - Y_{\bar{\sigma}(i)}|^{-\varepsilon} |X_i - Y_{\bar{\sigma}(i)}|^{\varepsilon}. \quad (2.1)$$

Lemma 2.1 (Disuguaglianza di Hölder). *Siano $a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_n$ numeri reali positivi e $p, q > 1$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2.2)$$

Sia $m > 1$. Applicando la disuguaglianza di Hölder alla sommatoria (2.1) otteniamo

$$n \leq \left(\sum_{i=1}^n |X_i - Y_{\bar{\sigma}(i)}|^{-\varepsilon m} \right)^{\frac{1}{m}} \left(\sum_{i=1}^n |X_i - Y_{\bar{\sigma}(i)}|^{\frac{\varepsilon m}{m-1}} \right)^{1 - \frac{1}{m}}.$$

Notiamo che, imponendo $\varepsilon m = p$, il fattore sinistro corrisponde a uno dei membri del massimo che definisce $Z_{p,n}$. Elevando a destra e sinistra per m

e isolando tale termine troviamo

$$Z_{\bar{\sigma}} = \sum_{i=1}^n |X_i - Y_{\bar{\sigma}(i)}|^{-\varepsilon m} \geq \frac{n^m}{\left(\sum_{i=1}^n |X_i - Y_{\bar{\sigma}(i)}|^{\frac{\varepsilon m}{m-1}}\right)^{(m-1)}} \quad (2.3)$$

dove $Z_{p,n} = \max_{\bar{\sigma} \in S_n} Z_{\bar{\sigma}}$.

A questo punto, il membro al denominatore è uno dei termini del minimo che definisce $B_{q,n}$, dove $q = \frac{\varepsilon m}{m-1} = \frac{p}{m-1}$. Poiché $Z_{p,n} \geq Z_{\bar{\sigma}}$ per ogni $\bar{\sigma}$, tale disuguaglianza vale anche per la permutazione che realizza il minimo. Concludiamo che

$$Z_{p,n} \geq \frac{n^m}{(B_{q,p})^{m-1}} \quad \text{e, in particolare,} \quad \mathbb{E}[Z_{p,n}] \geq \mathbb{E}\left[\frac{1}{(B_{q,p})^{m-1}}\right] n^m.$$

Ci siamo ricondotti al caso con esponente positivo; possiamo dunque sfruttare le proprietà note riportate nel Capitolo 1.

Lemma 2.2. *Sia A variabile aleatoria reale e $l > 0$ tale che per un certo $\sigma > 0$ vale $\mathbb{P}(|A - l| > t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$. Allora per ogni $k > 0$ vale*

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{|A|^k}\right] > \frac{1}{4(l + \sqrt{2}\sigma)^k}. \quad (2.4)$$

Dimostrazione: Poiché $|A| \geq 0$, vale banalmente

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{|A|^k}\right] \geq \mathbb{E}\left[\frac{1}{|A|^k} \mathbb{1}_{\{|A-l| \leq \sqrt{2}\sigma\}}\right].$$

Per ipotesi sappiamo che $\{|A - l| \leq \sqrt{2}\sigma\}$ ha probabilità $\mathbb{P}(|A - l| \leq \sqrt{2}\sigma) = 1 - \mathbb{P}(|A - l| > \sqrt{2}\sigma) \geq 1 - 2e^{-1} > \frac{1}{4}$. Inoltre, in tale evento vale $|A| \leq l + \sqrt{2}\sigma$. Di conseguenza

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\frac{1}{|A|^k} \mathbb{1}_{\{|A-l| \leq \sqrt{2}\sigma\}}\right] &\geq \mathbb{E}\left[\frac{1}{(l + \sqrt{2}\sigma)^k} \mathbb{1}_{\{|A-l| \leq \sqrt{2}\sigma\}}\right] \\ &= \frac{1}{(l + \sqrt{2}\sigma)^k} \mathbb{P}(|A - l| \leq \sqrt{2}\sigma) > \frac{1}{4(l + \sqrt{2}\sigma)^k}. \end{aligned}$$

□

Poiché $Z_{p,n}$ e $B_{p,n}$ sono variabili positive, è ininfluente considerarne il valore assoluto, e per quanto visto sopra vale

$$\mathbb{E}[Z_{p,n}] \geq \mathbb{E}\left[\frac{1}{|B_{q,p}|^{m-1}}\right] n^m = \mathbb{E}\left[\left|\frac{n^{1-\frac{q}{d}}}{B_{q,p}}\right|^{m-1}\right] n^{1+\frac{p}{d}} \quad (2.5)$$

dove l'esponente esterno è proprio $1 + \frac{p}{d}$ dato che $(1 - \frac{q}{d})(m - 1) + 1 + \frac{p}{d} = m$.

Supponiamo ora che valga $2q < d$. Allora, grazie al Teorema 1.2, sono verificate le ipotesi del Lemma 2.2 per i dati

$$A_n = \frac{B_{q,n}}{n^{1-\frac{q}{d}}} \quad l_n = \frac{\mathbb{E}[B_{q,n}]}{n^{1-\frac{q}{d}}} \quad 2\sigma_n^2 = \frac{n^{\frac{2q}{d}-1}}{C}.$$

Dividendo i membri di (2.5) per $n^{1+\frac{p}{d}}$ otteniamo

$$\mathbb{E} \left[\frac{Z_{p,n}}{n^{1+\frac{p}{d}}} \right] \geq \mathbb{E} \left[\left| \frac{n^{1-\frac{q}{d}}}{B_{q,p}} \right|^{m-1} \right] \geq \frac{1}{4(l_n + \sqrt{2}\sigma_n)^{m-1}}. \quad (2.6)$$

Poiché abbiamo supposto $2q < d$, per il Teorema 1.1 sappiamo che l_n ammette limite finito; in particolare, esisterà una costante $C = C(p, d) > 0$, che può dipendere da d e p ma non da n , tale che $l_n \leq C$ definitivamente. Segue inoltre da $\frac{2q}{d} - 1 < 0$ che la successione delle varianze σ_n è infinitesima; in particolare deve valere $\sqrt{2}\sigma_n \leq C$ definitivamente. Questo è sufficiente per concludere che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{Z_{p,n}}{n^{1+\frac{p}{d}}} \right] \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4(l_n + \sqrt{2}\sigma_n)^{m-1}} \geq \frac{1}{4(2C)^{m-1}} > 0. \quad (2.7)$$

L'ipotesi $2q < d$ corrisponde a $\frac{2p}{m-1} < d$, ovvero $m > \frac{2p}{d} + 1$, che è coerente alla precedente ipotesi $m > 1$. Abbiamo così raggiunto la prima metà dei nostri obiettivi in (1.11).

2.2 Upper Bound

Un modo semplice per maggiorare $Z_{p,n}$ è assegnare a ognuno degli X_i il più vicino tra tutti gli Y_i , in modo da massimizzare la norma $-p$ per ogni X_i . Può capitare che questa sia una delle possibili permutazioni; in generale questa soluzione non è ammissibile, nel momento in cui due punti diversi X_{i_1}, X_{i_2} vengono assegnati allo stesso punto Y_j . Con questa scelta dei punti vale

$$Z_{p,n} = \max_{\sigma \in S_n} \sum |X_i - Y_{\sigma(i)}|^{-p} \leq \sum_{i=1}^n \left(\min_{j=1 \dots n} |X_i - Y_j| \right)^{-p}. \quad (2.8)$$

Consideriamo ora i valori attesi. Poiché le $(X_i)_{i=1}^n$ sono equidistribuite, vale

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \left(\min_{j=1 \dots n} |X_i - Y_j| \right)^{-p} \right] = n \mathbb{E} \left[\left(\min_{j=1 \dots n} |X_1 - Y_j| \right)^{-p} \right]. \quad (2.9)$$

Per studiare (2.9) possiamo sfruttare la seguente proprietà della speranza condizionale.

Lemma 2.3. *Siano $X, Y_1 \dots Y_n$ variabili aleatorie, $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e \mathcal{E} σ -algebra con $X\mathcal{E}$ -misurabile e $Y_1 \dots Y_n$ indipendenti da \mathcal{E} . Allora $\mathbb{E}[\varphi(X, Y_1 \dots Y_n) | \mathcal{E}] = \mathbb{E}[\varphi(x, Y_1 \dots Y_n)]_{x=X}$.*

Nel nostro caso scegliamo $\mathcal{E} = \sigma(X_1)$, in modo che $\mathbb{E}[\varphi(X_1, Y_1 \dots Y_n) | \mathcal{E}] = \mathbb{E}[\varphi(X_1, Y_1 \dots Y_n) | X_1] = \mathbb{E}[\varphi(X_1, Y_1 \dots Y_n)]$. Allora X_1 è banalmente \mathcal{E} -misurabile, mentre le Y_j sono indipendenti da X_1 e dunque da \mathcal{E} . Consideriamo ora la funzione

$$\varphi(x, Y_1 \dots Y_n) = \mathbb{E} \left[\left(\min_{j=1 \dots n} |x - Y_j| \right)^{-p} \right].$$

Per il Lemma 2.3 vale

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\varphi(X_1, Y_1 \dots Y_n)] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(X_1, Y_1 \dots Y_n) | \mathcal{E}]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(x, Y_1 \dots Y_n) |_{x=X_1}]]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Poiché X_1 ha distribuzione uniforme su $[0, 1]^d$, otteniamo

$$\mathbb{E} \left[\left(\min_{j=1 \dots n} |X_1 - Y_j| \right)^{-p} \right] = \int_{[0,1]^d} \mathbb{E} \left[\left(\min_{j=1 \dots n} |x - Y_j| \right)^{-p} \right] dx. \quad (2.11)$$

Per sviluppare la funzione integranda usiamo la formula di Cavalieri per variabili non negative:

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y > t) dt.$$

Poiché ogni probabilità è banalmente ≤ 1 , per ogni λ non negativo vale

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(\min_{j=1 \dots n} |x - Y_j| \right)^{-p} \right] \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P} \left(\left(\min_{j=1 \dots n} |x - Y_j| \right)^{-p} > t \right) dt \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P} \left(\left(\min_{j=1 \dots n} |x - Y_j| \right) < t^{-\frac{1}{p}} \right) dt \\ &\leq \lambda + \int_\lambda^\infty \mathbb{P} \left(\left(\min_{j=1 \dots n} |x - Y_j| \right) < t^{-\frac{1}{p}} \right) dt. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Inoltre, poiché le variabili Y_j sono indipendenti e identicamente distribuite, vale

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\left(\min_{j=1 \dots n} |x - Y_j| \right) \geq t^{-\frac{1}{p}} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(|x - Y_1| \geq t^{-\frac{1}{p}} \right)^n \\ &= \left(1 - \mathbb{P} \left(|x - Y_1| < t^{-\frac{1}{p}} \right) \right)^n. \end{aligned}$$

Essendo Y_1 uniforme su $[0, 1]^d$, la probabilità $\mathbb{P}\left(|x - Y_1| < t^{-\frac{1}{p}}\right)$ rappresenta il volume dell'intersezione tra il cubo unitario e la sfera di raggio $t^{-\frac{1}{p}}$ e di centro $x \in [0, 1]^d$. Può dunque essere sovrastimata con il volume del cubo d -dimensionale centrato in x e di lato $t^{-\frac{1}{p}}$, che vale $2^d t^{-\frac{d}{p}}$. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} & \int_{\lambda}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left(\min_{j=1\dots n} |x - Y_j|\right) < t^{-\frac{1}{p}}\right) dt \\ &= \int_{\lambda}^{\infty} 1 - \mathbb{P}\left(\left(\min_{j=1\dots n} |x - Y_j|\right) \geq t^{-\frac{1}{p}}\right) dt \\ &= \int_{\lambda}^{\infty} 1 - \left(1 - \mathbb{P}\left(|x - Y_1| < t^{-\frac{1}{p}}\right)\right)^n dt \\ &\leq \int_{\lambda}^{\infty} 1 - \left(1 - 2^d t^{-\frac{d}{p}}\right)^n dt. \end{aligned}$$

Consideriamo ora il cambio di variabile $s = 2^{-p} n^{-\frac{p}{d}} t$, che corrisponde a sostituire $2^d t^{-\frac{d}{p}} = \frac{s^{-\frac{d}{p}}}{n}$, e fissiamo $\lambda = 2^p n^{\frac{p}{d}}$. Ciò equivale a imporre $t \geq 2^p n^{\frac{p}{d}}$, ovvero $s \geq 1$ nel nuovo integrale; vale dunque

$$\begin{aligned} & 2^p n^{\frac{p}{d}} + \int_{2^p n^{\frac{p}{d}}}^{\infty} 1 - \left(1 - 2^d t^{-\frac{d}{p}}\right)^n dt \\ &= 2^p n^{\frac{p}{d}} + \int_1^{\infty} 1 - \left(1 - \frac{s^{-\frac{d}{p}}}{n}\right)^n 2^p n^{\frac{p}{d}} ds \\ &= 2^p n^{\frac{p}{d}} \left(1 + \int_1^{\infty} 1 - \left(1 - \frac{s^{-\frac{d}{p}}}{n}\right)^n ds\right). \end{aligned}$$

Affinché il lim sup ottenuto sia non banale, vogliamo che il membro a destra converga. Sappiamo che $\left(1 - \frac{s^{-\frac{d}{p}}}{n}\right)^n \rightarrow e^{-s^{-\frac{d}{p}}}$; nel caso in cui $p < d$, questa convergenza vale anche sotto il segno di integrale, per convergenza dominata. Infatti per ogni $s \geq 1$, $n \geq 2$ vale $1 - \left(1 - \frac{s^{-\frac{d}{p}}}{n}\right)^n \leq 1 - e^{-2s^{-\frac{d}{p}}}$, e la funzione a destra è integrabile per $p < d$. Vale dunque

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{(\min_{j=1\dots n} |x - Y_j|)^{-p}}{n^{\frac{p}{d}}} \right] \leq 2^p \left(1 + \int_1^{\infty} 1 - e^{-s^{-\frac{d}{p}}}\right) < \infty. \quad (2.13)$$

Ripercorrendo i ragionamenti fatti finora a partire da (2.8), abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{Z_{p,n}}{n^{1+\frac{p}{d}}} \right] &\leq \frac{n}{n^{1+\frac{p}{d}}} \int_{[0,1]^d} \mathbb{E} \left[\left(\min_{j=1\dots n} |x - Y_j|\right)^{-p} \right] dx \\ &= \int_{[0,1]^d} \mathbb{E} \left[\frac{(\min_{j=1\dots n} |x - Y_j|)^{-p}}{n^{\frac{p}{d}}} \right] dx. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Abbiamo appena mostrato in (2.13) che la funzione integranda ammette \limsup finito, ovvero esiste una costante positiva $K = K(p, d) < \infty$ tale che

$$h_n(x) := \mathbb{E} \left[\frac{(\min_{j=1 \dots n} |x - Y_j|)^{-p}}{n^{\frac{p}{d}}} \right] \leq K(p, d) \quad \forall n. \quad (2.15)$$

Per concludere il nostro argomento faremo uso di un ultimo risultato analitico:

Lemma 2.4 (Fatou inverso). *Sia (A, μ) spazio di misura finita $0 < \mu(A) < \infty$ e $(f_n)_{n=1}^\infty$ funzioni misurabili non negative ed equilimitate. Allora*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu \leq \int_A \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu. \quad (2.16)$$

Dimostrazione: Omettiamo per brevità $d\mu$ nei seguenti integrali. Consideriamo $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} \int_A f_k$. Sia $t_0 = \sup_{k \geq 1} f_k$ e $g_n = t_0 - \sup_{k \geq n} f_k$. Poiché le f_k sono equilimitate, ovvero esiste una costante $K > 0$ tale che $f(k) \leq K \quad \forall k \in \mathbb{N}$, vale $t_0 \leq K$ e $g_n \leq K$ per ogni n . Per definizione di \sup , la successione delle g_n è non negativa e non decrescente, e dunque per il teorema di convergenza monotona vale $\sup_n \int_A g_n = \int_A \sup_n g_n$. Di conseguenza,

$$\sup_n \int_A \left(t_0 - \sup_{k \geq n} f_k \right) = \int_A \sup_n \left(t_0 - \sup_{k \geq n} f_k \right).$$

Il primo membro è $\sup_n (\int_A t_0 - \int_A \sup_{k \geq n} f_k)$. Poiché A ha misura finita e $t_0, g_n \leq K$, sono finiti gli integrali $\int_A t_0$ e $\int_A \sup_{k \geq n} f_k$, in quanto limitati dall'alto da $\mu(A)K$. Posso dunque applicare il criterio di convergenza dominata e far passare il \sup dentro l'integrale. Ottengo così $\sup_n (\int_A t_0 - \int_A \sup_{k \geq n} f_k) = \int_A t_0 + \sup_n (-\int_A \sup_{k \geq n} f_k) = \int_A t_0 - \inf_n \int_A \sup_{k \geq n} f_k$.

Il secondo membro è $\int_A \sup_n (t_0 - \sup_{k \geq n} f_k) = \int_A t_0 + \int_A \sup_n (-\sup_{k \geq n} f_k) = \int_A t_0 - \int_A \inf_n \sup_{k \geq n} f_k$. Mettendo i due membri a confronto otteniamo l'uguaglianza

$$\inf_n \int_A \sup_{k \geq n} f_k = \int_A \inf_n \sup_{k \geq n} f_k.$$

Vale poi in generale la disuguaglianza $\sup_{k \geq n} \int_A f_k \leq \int_A \sup_{k \geq n} f_k$. La tesi segue dalla seguente catena di disuguaglianze:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} \int_A f_k \leq \inf_n \int_A \sup_{k \geq n} f_k = \int_A \inf_n \sup_{k \geq n} f_k = \int_A \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

□

Sia $K = K(p, d) < \infty$ la costante individuata in (2.15), che fa da equimitazione alle funzioni h_n considerate. Poiché $[0, 1]^d$ ha misura 1, possiamo applicare il Lemma 2.4 alla disuguaglianza (2.14) e concludere che

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{Z_{p,n}}{n^{1+\frac{p}{d}}} \right] &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^d} \mathbb{E} \left[\frac{(\min_{j=1 \dots n} |x - Y_j|)^{-p}}{n^{\frac{p}{d}}} \right] dx \\ &\leq \int_{[0,1]^d} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{(\min_{j=1 \dots n} |x - Y_j|)^{-p}}{n^{\frac{p}{d}}} \right] dx \leq \int_{[0,1]^d} K dx = K < \infty. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Questo completa il secondo obiettivo che ci eravamo posti in (1.11), a meno di supporre che valga la condizione iniziale $p < d$. Scopriremo a breve che tale condizione non è solo sufficiente, ma anche necessaria, affinché il lim sup sia finito.

2.3 Il caso $p \geq d$

Ripercorrendo parte del ragionamento per il calcolo dell'Upper Bound, vogliamo stabilire con quali ipotesi la variabile $Z_{p,n}$ non ammette momento primo finito.

Sia σ_1 una qualsiasi permutazione che mette in corrispondenza i punti X_1 e Y_1 . Essendo $Z_{p,n}$ il massimo tra tutte le permutazioni di \mathcal{S}_n , vale

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [Z_{p,n}] &\geq \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n |X_i - Y_{\sigma_1(i)}|^{-p} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[|X_1 - Y_1|^{-p} + \sum_{i=2}^n |X_i - Y_{\sigma_1(i)}|^{-p} \right]. \end{aligned}$$

Per linearità del valore atteso e positività degli addendi segue

$$\mathbb{E} [Z_{p,n}] \geq \mathbb{E} [|X_1 - Y_1|^{-p}].$$

Possiamo applicare (come per il calcolo dell'upper bound) il Lemma 2.3, in modo da avere

$$\mathbb{E} [|X_1 - Y_1|^{-p}] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} [|x - Y_1|^{-p}] \Big|_{x=X_1} \right] = \int_{[0,1]^d} \mathbb{E} [|x - Y_1|^{-p}] dx.$$

Usando nuovamente la formula di Cavalieri per sviluppare la funzione integranda otteniamo

$$\mathbb{E} [|x - Y_1|^{-p}] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P} (|x - Y_1|^{-p} > t) dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{P} (|x - Y_1| < t^{-\frac{1}{p}}) dt.$$

Inoltre, poiché ogni probabilità è banalmente positiva, per ogni $\lambda \geq 0$ vale

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(|x - Y_1| < t^{-\frac{1}{p}}\right) dt \geq \int_\lambda^{+\infty} \mathbb{P}\left(|x - Y_1| < t^{-\frac{1}{p}}\right) dt. \quad (2.18)$$

Poiché Y_1 è uniforme su $[0, 1]^d$, la probabilità $\mathbb{P}\left(|x - Y_1| < t^{-\frac{1}{p}}\right)$ corrisponde al volume d -dimensionale dell'intersezione tra $[0, 1]^d$ e la sfera d -dimensionale di centro x e raggio $t^{-\frac{1}{p}}$. Per stimare questo volume, ragioniamo da un punto di vista geometrico. Dato un centro $x_1 \dots x_d \in [0, 1]^d$ e un raggio r , il luogo geometrico considerato è quello dei punti $y_1 \dots y_d \in \mathbb{R}^d$ individuati dal sistema

$$\begin{cases} (y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_d - x_d)^2 < r^2 \\ 0 \leq y_1 \leq 1 \\ \dots \\ 0 \leq y_d \leq 1. \end{cases}$$

Nel nostro caso avremo $r = t^{-\frac{1}{p}}$. Fissato il raggio r , vogliamo studiare l'andamento della funzione $x \rightarrow V(x) = |(B(x, r) \cap [0, 1]^d)|$ al variare di x . A meno di scegliere r abbastanza piccolo, se x è "al centro del cubo", ovvero abbastanza lontano dai suoi bordi, il valore di $V(x)$ corrisponde a quello della sfera d -dimensionale di raggio r . Supponiamo di traslare x rispetto a una direzione e_i , in modo da ottenere un nuovo centro x_λ che avrà coordinate $x_1 \dots x_i + \lambda e_i \dots x_d$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. I punti della sfera attorno al nuovo centro avranno coordinate uguali a quelle dei punti della sfera originale, ma traslate a loro volta di λe_i . finché vale $0 \leq y_i + \lambda e_i \leq 1$ continuo ad avere sfere traslate ma di volume uguale, per cui $V(x_\lambda) = V(x)$. Se però (ad esempio) $\lambda > 1 - y_i$, alcuni dei punti della sfera traslata violano la i -esima delle disuguaglianze del sistema, per cui non si trovano più in $[0, 1]^d$, e il volume diminuisce. All'aumentare di λ oltre tale soglia il volume continua a diminuire gradualmente, fino ad annullarsi quando la sfera è del tutto fuori dal cubo unitario (questo succede sicuramente, ad esempio, per $\lambda > 1$). Più formalmente, si può mostrare che ogni funzione $V_i : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, $\lambda \rightarrow V(x + \lambda e_i)$ è continua e decrescente in λ , ed è definitivamente nulla. Questo equivale a dire che il volume diminuisce man mano che la coordinata x_i del centro è vicina a 1, o a 0 applicando lo stesso ragionamento nel caso $\lambda < 0$. Concludiamo che $V(x)$ è minimizzata nel caso in cui tutti gli x_i siano 1 o 0, ovvero in corrispondenza dei vertici del cubo unitario.

Sia $V^* = V(\bar{x}) = |B(\bar{x}, r) \cap [0, 1]^d|$ il volume nel caso in cui \bar{x} sia vertice. Tale volume non dipende dal vertice scelto, in quanto i luoghi geometrici generati da vertici diversi si possono mappare gli uni negli altri tramite traslazioni e rotazioni. Per quanto osservato su $V(x)$, vale

$$\mathbb{P}\left(|x - Y_1| < t^{-\frac{1}{p}}\right) = V(t^{-\frac{1}{p}}) \geq V^*(t^{-\frac{1}{p}}).$$

Vogliamo usare V^* per stimare le probabilità considerate in (2.18). Per calcolare V^* , consideriamo per semplicità il vertice nell'origine. I punti di $B(O, r)$ sono individuati dall'equazione $y_1^2 + \dots + y_d^2 < r^2$. In particolare la sfera è simmetrica rispetto a tutti i d assi, ovvero:

$$(y_1 \dots y_i \dots y_d)^\top \in B(O, r) \iff (y_1 \dots -y_i \dots y_d)^\top \in B(O, r) \quad \forall i = 1 \dots d.$$

Consideriamo il caso $r \leq 1$, in modo che tutti i punti della sfera verifichino la condizione $y_i \leq 1 \quad \forall i \in 1 \dots d$. Quando intersechiamo col semipiano $\{x_i \geq 0\}$, ovvero applichiamo la condizioni di appartenenza a $[0, 1]^d$ per la i -esima dimensione, per simmetria rispetto all' i -esimo asse sto togliendo alla sfera metà dei suoi punti, e dunque dimezzandone il volume. Per calcolare V^* applichiamo d volte questo procedimento, dimezzando ogni volta il volume della sfera originale; concludiamo che, se $w_d(r)$ è il volume della sfera d -dimensionale di raggio $r \leq 1$, vale $V^*(r) = w_d(r)/2^d$. Tale relazione è verificata in generale per il volume dell'intersezione tra un cubo d -dimensionale di lato L e una sfera con centro in un suo vertice di raggio $r < L$. Lo si può notare anche graficamente nelle seguenti immagini, che fanno riferimento ai casi $d = 1, 2, 3$.

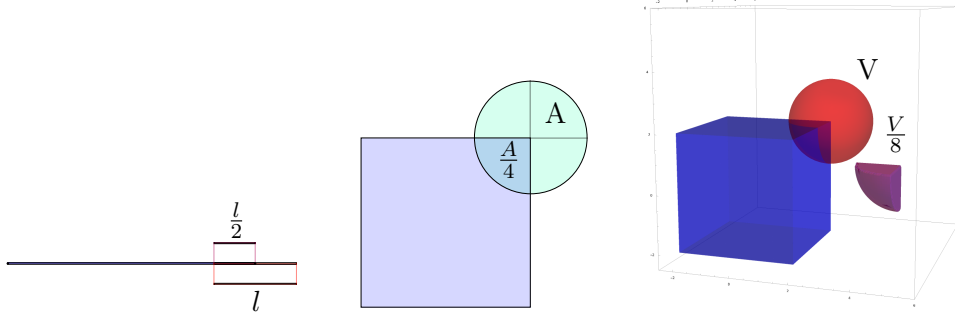

 Figura 1: $d = 1$

 Figura 2: $d = 2$

 Figura 3: $d = 3$

Ricapitolando, abbiamo ottenuto che vale per $r \leq 1$ la stima

$$\mathbb{P}(|x - Y_1| < r) \geq V^*(r) = \frac{w_d(r)}{2^d}, \quad \text{dove } w_d(r) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{2^d \Gamma(\frac{d}{2} + 1)} r^d.$$

Nel nostro caso abbiamo $r = t^{-\frac{1}{p}}$; poniamo in (2.18) $\lambda = 1$, in modo che $r = t^{-\frac{1}{p}} \leq 1$. Possiamo allora applicare la stima data da V^* per la probabilità considerata e ottenere

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{Z_{p,n}}{n^{1+\frac{p}{d}}} \right] &\geq \frac{1}{n^{1+\frac{p}{d}}} \mathbb{E} [|X_1 - Y_1|^{-p}] \\ &\geq \frac{1}{n^{1+\frac{p}{d}}} \int_1^{+\infty} \mathbb{P} \left(|x - Y_1| < t^{-\frac{1}{p}} \right) dt \\ &\geq \int_1^{+\infty} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{n^{1+\frac{p}{d}} 2^d \Gamma(\frac{d}{2} + 1)} t^{-\frac{d}{p}} dt. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Tale integrale diverge se e solo se $p \geq d$, indipendentemente da n ; possiamo dunque concludere che, nel caso in cui $p \geq d$, la variabile $Z_{p,n}/n^{1+\frac{p}{d}}$ non ammette momento primo finito. In particolare,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[Z_{p,n}]}{n^{1+\frac{p}{d}}} = \infty.$$

Abbiamo così mostrato il seguente risultato:

Teorema 2.5. *Sono condizioni equivalenti:*

1. $p < d$
2. *Esistono finiti*

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[Z_{p,n}]}{n^{1+\frac{p}{d}}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[Z_{p,n}]}{n^{1+\frac{p}{d}}} < \infty. \quad (2.20)$$

3. *Esistono delle costanti $k = k(d, p) \in (0, \infty)$, $K = K(d, p) \in (0, \infty)$ tali che, per ogni $n \geq 1$,*

$$kn^{1+\frac{p}{d}} \leq \mathbb{E}[Z_{p,n}] \leq Kn^{1+\frac{p}{d}}. \quad (2.21)$$

2.4 Alcuni Esempi

In questa breve sezione riportiamo alcuni grafici per dare un'idea concreta di come si comportano le variabili $B_{p,n}$ e $Z_{p,n}$ al variare di d , p e n . Il codice MATLAB usato per creare i seguenti grafici è reperibile nell'Appendice.

2.4.1 Confronto tra $B_{n,p}$ e $Z_{n,p}$

Nel definire $Z_{p,n}$ abbiamo preso il massimo, al posto del minimo in $B_{p,n}$, con lo scopo di ottenere assegnamenti di punti tra loro relativamente vicini. Notiamo con la sperimentazione che, effettivamente, entrambe le variabili cercano di assegnare punti tra loro vicini, seppur in maniera diversa. Nei seguenti grafici abbiamo considerato le stesse $n = 100$ coppie di punti in $[0, 1]^2$ per studiare il comportamento di $B_{p,n}$ e $Z_{p,n}$ al variare dell'esponente $p = 0.5, 1, 3, 10$. Nei grafici relativi a $B_{p,n}$ i punti di X sono rossi, e i punti di Y sono blu. Nei grafici relativi a $Z_{p,n}$ i punti di X sono magenta, e i punti di Y sono ciano.

Notiamo che, all'aumentare di p , per $B_{p,n}$ diminuisce man mano la massima distanza tra i punti considerati, e non troviamo nei grafici lunghi archi che connettono punti lontani. Per $Z_{p,n}$ capita invece di trovare accoppiati punti relativamente lontani tra loro. Questo perchè, all'aumentare di p , diventa di importanza sempre maggiore abbinare tra loro punti molto vicini, e l'esistenza di pochi punti relativamente lontani diventa trascurabile.

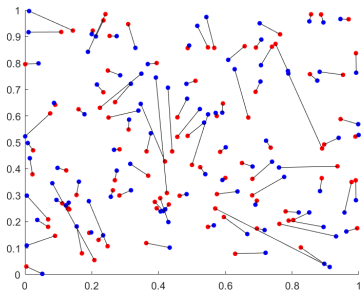


Figura 4: $B_{p,n}$, $p = 0.5$

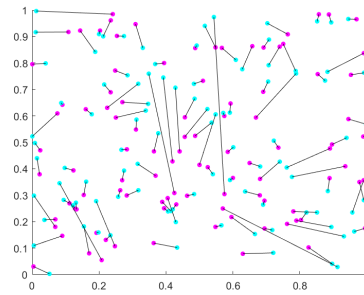


Figura 5: $Z_{p,n}$, $p = 0.5$

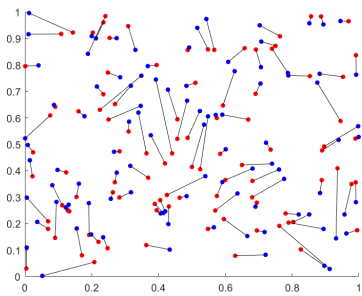


Figura 6: $B_{p,n}$, $p = 1$

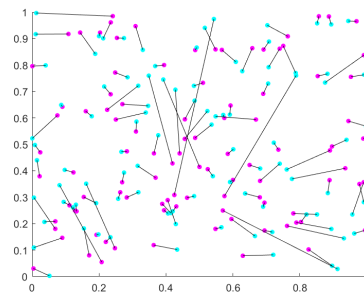


Figura 7: $Z_{p,n}$, $p = 1$

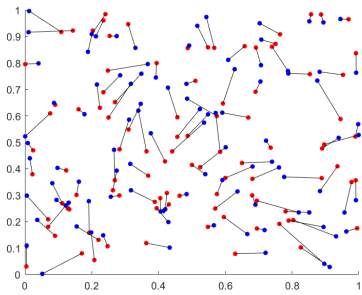


Figura 8: $B_{p,n}$, $p = 3$

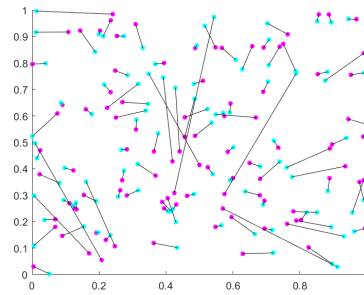


Figura 9: $Z_{p,n}$, $p = 3$

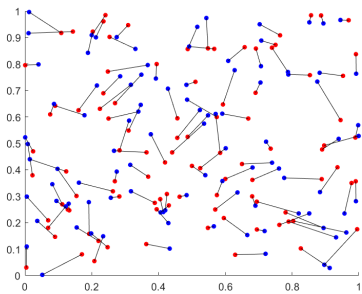


Figura 10: $B_{p,n}$, $p = 10$

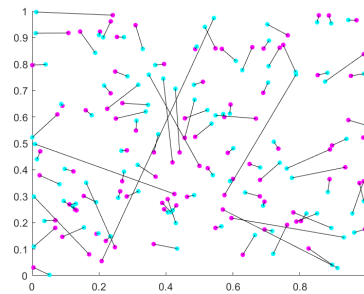


Figura 11: $Z_{p,n}$, $p = 10$

2.4.2 Andamento di $Z_{p,n}$

Abbiamo mostrato che, nel caso $p < d$, la funzione $n \rightarrow \mathbb{E}[Z_{p,n}]$ ha andamento in n comparabile a $n^{1+\frac{p}{d}}$. Lo possiamo notare nei seguenti grafici, in cui abbiamo riportato i valori di $Z_{p,n}/n^{1+\frac{p}{d}}$ sfruttando la funzione z_{pd} riportata in Appendice. Il primo grafo ha input $d = 3$, $p = 0.5, 1, 2$ sul range $50:50:2500$. Il secondo ha input $d = 5$, $p = 0.5, 2, 4$ sul range $100:150:4000$. Notiamo come, in entrambi i casi, più p si avvicina a d più troviamo oscillazioni nel valore del rapporto.

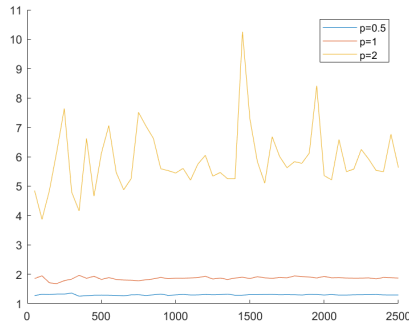


Figura 12: $d = 3$

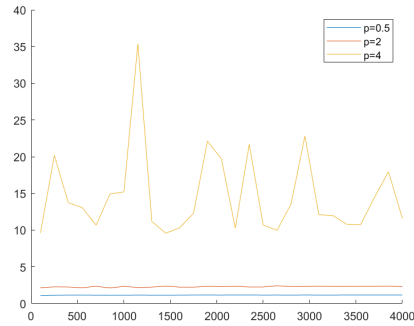


Figura 13: $d = 5$

Nel caso $p \geq d$ abbiamo invece mostrato che non esistono limitazioni dall'alto per $\mathbb{E}[Z_{p,n}]/n^{1+\frac{p}{d}}$. Nei grafici considerati, che fanno riferimento al caso $d = 3$ sul range $50:50:2500$, questo si manifesta in evidenti picchi della funzione $Z_{p,n}/n^{1+\frac{p}{d}}$:

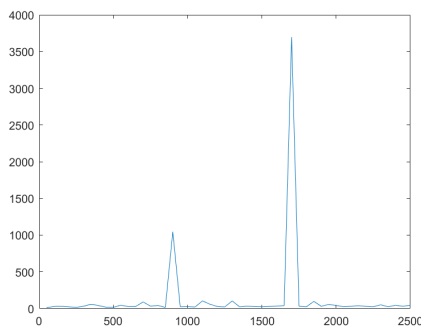


Figura 14: $p = 3$

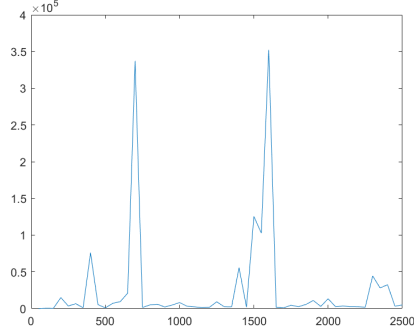


Figura 15: $p = 5$

All'aumentare di p e n , il calcolo di $Z_{p,n}$ diventa di notevole costo computazionale, sia per la taglia dei numeri in gioco sia per il costo necessario a individuare la permutazione ottima. Questo pone dei limiti all'efficacia della sperimentazione numerica per studiare l'andamento di $Z_{p,n}$. Lo studio dei grafici risulta comunque utile per trovare conferme pratiche delle proprietà dimostrate nel Capitolo 2.

Capitolo 3

Esistenza del limite

Ora che abbiamo mostrato l'esistenza di limiti dall'alto e dal basso per l'andamento del valore atteso di $Z_{p,n}$, è spontaneo porsi la questione dell'esistenza di un suo limite. Purtroppo, rispetto al caso positivo, tale questione risulta particolarmente complicata. Nel caso di $B_{p,n}$, per arrivare al Teorema 1.1 di esistenza del limite si procede in tre parti. Per prima cosa si sottopone il problema a un procedimento di *poissonizzazione*. Sfruttando un'opportuna definizione di *matching locale*, si dimostra l'esistenza del limite per questa versione del problema. Si può poi mostrare, ad esempio con la proposizione 6.1 di [2], che tale limite coincide con quello del caso uniforme da noi considerato. Infine, tramite il Teorema 1.2, possiamo concludere che tale comportamento è assunto dalla variabile oltre che dal suo valore atteso. In questo capitolo conclusivo descriveremo nel dettaglio in cosa consiste il procedimento di poissonizzazione, e arriveremo a mostrare l'esistenza del limite nel caso poissonizzato.

3.1 Matching locali

Finora abbiamo considerato il caso in cui, fissati p e d , abbiamo n punti in partenza $x = (x_i)_{i=1}^n$ e n punti di arrivo $y = (y_i)_{i=1}^n$, selezionati in $[0, 1]^d$. Un matching è un assegnamento biunivoco tra questi punti e può essere rappresentato da una permutazione $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Vogliamo ora generalizzare il concetto di matching a partire da questa cornice.

3.1.1 Definizione e proprietà

Consideriamo una generica regione $U \subseteq [0, 1]^d$. Troveremo in U un certo numero $n(x, U)$ di punti di partenza, con $0 \leq n(x, U) \leq n$; analogamente troveremo un certo numero $n(y, U)$ di punti di arrivo. Un matching parziale tra questi punti è rappresentato da una funzione iniettiva che riesce ad abbinare $\min\{n(x, U), n(y, U)\}$ punti e lascia spaiati $|n(x, U) - n(y, U)|$ punti.

Per rappresentare tali funzioni consideriamo gli insiemi di indici

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(x, U) &= \{i \in 1 \dots n \mid x_i \in U\}, \\ \mathcal{I}(y, U) &= \{i \in 1 \dots n \mid y_i \in U\}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Notiamo che $n(x, U) = |\mathcal{I}(x, U)|$ e $n(y, U) = |\mathcal{I}(y, U)|$. Indichiamo con $\mathcal{S}(x, y, U)$ l'insieme delle funzioni iniettive da $\mathcal{I}(x, U)$ a $\mathcal{I}(y, U)$ se $n(x, U) \leq n(y, U)$ e viceversa se $n(x, U) > n(y, U)$; rappresenteremo tali funzioni come insiemi di coppie ordinate (i, j) . Possiamo ora definire la funzione *matching locale*

$$z_p(x, y, U) := \max_{\sigma \in \mathcal{S}(x, y, U)} \sum_{(i, j) \in \sigma} |x_i - y_j|^{-p}\tag{3.2}$$

che generalizza $Z_{p, n}$ a sottoinsiemi del cubo unitario. Notiamo che, se non troviamo in U nessun punto di almeno uno tra x e y , il costo del matching locale è nullo.

Faremo uso delle seguenti proprietà di z_p :

Lemma 3.1. *Siano $n, m \in \mathbb{N}$, $x = (x_i)_{i=1}^n$, $y = (y_j)_{j=1}^m$ con $x_i, y_j \in \mathbb{R}^d \forall i = 1 \dots n, j = 1 \dots m$ e $U \subseteq \mathbb{R}^d$ boreliano. Allora*

3.1.1 z_p è locale: $z_p(x, y, U) = z_p((x_i)_{i \in \mathcal{I}(x, U)}, (y_j)_{j \in \mathcal{I}(y, U)}, U)$.

3.1.2 z_p è invariante per traslazione: per ogni $v \in \mathbb{R}^d$ vale

$$z_p(x + v, y + v, U + v) = z_p(x, y, U)$$

dove $x + v = (x_i + v)_{i=1}^n$, $y + v = (y_j + v)_{j=1}^m$ e $U + v = \{u + v \mid u \in U\}$.

3.1.3 z_p è $-p$ omogeneo: per ogni $\lambda \in (0, \infty)$ vale

$$z_p(\lambda x, \lambda y, \lambda U) = \lambda^{-p} z_p(x, y, U)$$

dove $\lambda x = (\lambda x_i)_{i=1}^n$, $\lambda y = (\lambda y_j)_{j=1}^m$ e $\lambda U = \{\lambda u \mid u \in U\}$.

3.1.4 z_p è super-additivo: per ogni partizione in boreliani $U = \bigcup_{i=1}^K U_k$ vale

$$z_p(x, y, U) \geq \sum_{i=1}^K z_p(x, y, U_k).$$

Dimostrazione: Le proprietà 1 – 3 discendono immediatamente dalla definizione di z_p . Per la proprietà 4 iniziamo osservando che ognuno dei matching locali $z_p(x, y, U_k)$ individua una funzione iniettiva $\sigma_k \in \mathcal{S}(x, y, U_k)$, rappresentata da coppie ordinate (i, j) . Poiché gli U_k sono tra loro disgiunti, ogni

punto (e dunque ogni indice i) appare in uno e uno solo degli U_k , ovvero ogni coppia della forma (i, j) può far parte al più di una funzione σ_k . Di conseguenza, $\bigcup_{k=1}^K \sigma_k$ è una funzione iniettiva tra due sottoinsiemi $x_0 \subseteq x$, $y_0 \subseteq y$. Supponiamo senza perdita di generalità che $n \leq m$. Nel caso in cui x_0 non ricopra tutto x , si può assegnare a ognuno dei punti di $x \setminus x_0$ un punto a caso tra quelli di $y \setminus y_0$, ovvero tra quelli ancora non accoppiati. Poiché $n \leq m$, è possibile fare questi assegnamenti in maniera iniettiva. Alla fine di questo procedimento otteniamo dunque una funzione iniettiva $\sigma^* \supseteq \bigcup_{k=1}^K \sigma_k$ da x a y . Dalla definizione (3.2) osserviamo che nella sommatoria relativa a σ^* compaiono tutti i termini relativi alle funzioni σ_k , ed eventualmente dei termini residui relativi al completamento iniettivo effettuato. A questo punto, poiché z_p è definita come massimo su tutte le possibili funzioni iniettive da x in y , e poiché ognuno dei termini delle sommatorie considerate è positivo, possiamo concludere che

$$z_p(x, y, U) \geq \sum_{(i,j) \in \sigma^*} |x_i - y_j|^{-p} \geq \sum_{k=1}^K \sum_{(i,j) \in \sigma_k} |x_i - y_j|^{-p} = \sum_{i=1}^K z_p(x, y, U_k).$$

□

Ci siamo per ora limitati a considerare il caso in cui i punti x e y siano predeterminati. Se al posto di x e y applichiamo la funzione di matching locali a vettori di variabili aleatorie $X = (X_i)_{i=1}^n$, $Y = (Y_j)_{j=1}^m$ i.i.d. uniformi su $[0, 1]^d$, possiamo considerare le variabili

$$z_p(X, Y, [0, 1]^d) = \max_{\sigma \in \mathcal{S}(X, Y)} \sum_{(i,j) \in \sigma} |X_i - Y_j|^{-p}$$

dove $\mathcal{S}(X, Y)$ sono le funzioni iniettive da $\{1 \dots \min\{n, m\}\}$ a $\{1 \dots \max\{n, m\}\}$. Notiamo che, nel caso $n = m$, vale $z_p(X, Y, [0, 1]^d) = Z_{p,n}$. Infatti, ogni funzione iniettiva da $\{1 \dots n\}$ in sè stesso è in realtà bigettiva, per cui $z_p(X, Y, [0, 1]^d)$ e $Z_{p,n}$ hanno la stessa definizione. Un'interessante caratteristica delle variabili $z_p(X, Y, [0, 1]^d)$ è la seguente proprietà di monotonicità:

Lemma 3.2. *Per ogni $N \geq n$, $M \geq m$,*

$$z_p((X_i)_{i=1}^n, (Y_j)_{j=1}^m, [0, 1]^d) \leq z_p((X_i)_{i=1}^N, (Y_j)_{j=1}^M, [0, 1]^d).$$

Dimostrazione: Consideriamo il caso base in cui $N = n$, $M = m+1$, che corrisponde all'aggiunta di un singolo punto in arrivo. Se $n \leq m$, il membro a sinistra è definito come massimo su $I_m = \{f : \{1 \dots n\} \rightarrow \{1 \dots m\} \text{ iniettive}\}$, mentre quello a destra è definito come massimo su $I_{m+1} = \{f : \{1 \dots n\} \rightarrow \{1 \dots m+1\} \text{ iniettive}\}$. La tesi segue da $I_m \subseteq I_{m+1}$. Viceversa, se $n > m$, abbiamo a sinistra il massimo su $J_n = \{f : \{1 \dots m\} \rightarrow \{1 \dots n\} \text{ iniettive}\}$,

e a destra il massimo su $J_{m+1} = \{f : \{1 \dots m+1\} \rightarrow \{1 \dots n\} \text{ iniettive}\}$. Ogni funzione $g \in J_n$ può essere estesa a funzione $\bar{g} \in J_{n+1}$ assegnando in maniera iniettiva il valore di $\bar{g}(m+1)$. Questo è sempre possibile in quanto, se $n > m$, $g(\{1 \dots m\}) \subsetneq \{1 \dots n\}$. Di conseguenza

$$\sum_{(i,j) \in \bar{g}} |X_i - Y_j|^{-p} = \sum_{(i,j) \in g} |X_i - Y_j|^{-p} + |X_{m+1} - Y_{\bar{g}(m+1)}|^{-p}$$

da cui

$$\sum_{(i,j) \in g} |X_i - Y_j|^{-p} \leq \sum_{(i,j) \in \bar{g}} |X_i - Y_j|^{-p}.$$

Concludiamo che ogni membro del massimo a sinistra ammette un maggiorante tra quelli del massimo a destra, da cui la tesi. Si tratta simmetricamente il caso $N = n+1$, $M = m$; segue la tesi per ogni $N \geq n$ e $M \geq m$, applicando un numero finito di volte i casi base. \square

Ci siamo per ora limitati a studiare le variabili di matching parziale rispetto a tutto il cubo unitario. Nel momento in cui passiamo invece a un generico $U \subseteq [0, 1]^d$, non è detto che nei matching parziali rispetto a U siano mantenute le stesse proprietà (derivate dalla distribuzione uniforme) che abbiamo già studiato. In particolare, dato $U \subseteq [0, 1]^d$ con $|U| > 0$, si può mostrare che il numero $n(X, U)$ di punti di partenza in U ha legge binomiale di parametri n e $|U|$. Un modo per risolvere questo problema è imporre che la legge di n (il numero iniziale di punti) sia non fisso ma aleatorio. Nel seguito ci concentreremo sul caso in cui $n(X, U)$ abbia legge di Poisson per un parametro $\lambda > 0$, ovvero

$$\mathbb{P}\left(n(X, [0, 1]^d) = k\right) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Descriviamo ora in maniera rigorosa il modo in cui il problema del matching locale può essere *poissonizzato*.

3.1.2 Procedimento di Poissonizzazione

Siano N_X, N_Y variabili aleatorie indipendenti con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$. Siano poi $(X_i)_{i=1}^{\infty}, (Y_j)_{j=1}^{\infty}$ variabili i.i.d. uniformi su $[0, 1]^d$ e indipendenti tra loro e con N_X e N_Y . Possiamo così definire i due *Processi di Poisson su $[0, 1]^d$ di intensità λ*

$$X = (X_i)_{i=1}^{N_X}, \quad Y = (Y_j)_{j=1}^{N_Y}, \quad (3.3)$$

in modo che nell'evento $\{N_X = n, N_Y = m\}$ valga $X = (X_i)_{i=1}^n, Y = (Y_j)_{j=1}^m$.

La scelta della distribuzione di Poisson ci permette di sfruttare la seguente, importante proprietà:

Lemma 3.3. Sia $\lambda > 0$ e $X = (X_i)_{i=1}^{N_X}$ processo di Poisson di intensità λ su $[0, 1]^d$. Allora

1. Per ogni $U \subseteq [0, 1]^d$ di Borel con $|U| > 0$, la variabile $n(X, U) = |\mathcal{I}(X, U)|$ ha legge di Poisson di parametro $\lambda|U|$;
2. Condizionando rispetto all'evento $\{n(X, U) = k\}$, le variabili $(X_i)_{i \in \mathcal{I}(X, U)}$ sono i.i.d. con distribuzione uniforme su U .

Dimostrazione: Dato $k \geq 1$ e $(A_i)_{i=1}^k$ sottoinsiemi boreliani di $[0, 1]^d$, consideriamo gli eventi

$$I = \{\mathcal{I}(X, U) = k\} \quad (3.4)$$

$$A = \left\{ \mathcal{I}(X, U) = k, (X_i)_{i \in \mathcal{I}(X, U)} \in \prod_{i=1}^k A_i \right\} \quad (3.5)$$

dove in (3.5), se $\mathcal{I}(X, U) = \{i_1 < i_2 < \dots < i_k\}$, l'appartenenza al prodotto sta a indicare $X_{i_j} \in A_j \forall j \in 1 \dots k$. A questo punto le proprietà 1 e 2 equivalgono, rispettivamente, a dire che

$$\mathbb{P}(I) = \frac{(\lambda|U|)^k}{k!} e^{-\lambda|U|}, \quad (3.6)$$

$$\mathbb{P}(A|I) = \prod_{i=1}^k \frac{|A_i|}{|U|}. \quad (3.7)$$

Per calcolare $\mathbb{P}(I)$, applichiamo la formula di disintegrazione rispetto agli eventi $\mathbb{P}(N_X = n)$ (per $n \geq k$), e otteniamo

$$\mathbb{P}(I) = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(I|N_X = n) \mathbb{P}(N_X = n).$$

Per ipotesi, $\mathbb{P}(N_X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$. Per il calcolo di $\mathbb{P}(I|N_X = n)$ notiamo che, essendo $X = (X_i)_{i=1}^n$ somma di variabili i.i.d. uniformi, la variabile $n(X, U) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_U(X_i)$ è somma di n variabili indipendenti di Bernoulli con parametro $|U|$. Di conseguenza ha legge Binomiale di parametri n e $|U|$, ovvero

$$\mathbb{P}(I|N_X = n) = \binom{n}{k} |U|^k (1 - |U|)^{n-k}.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(I) &= \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n}{k} |U|^k (1 - |U|)^{n-k} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{(\lambda|U|)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^{n-k} (1 - |U|)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{(\lambda|U|)^k}{k!} e^{-\lambda} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m (1 - |U|)^m}{m!} \right) = \frac{(\lambda|U|)^k}{k!} e^{-\lambda|U|}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Poiché $\mathbb{P}(A \cap I) = \mathbb{P}(A)$, per il calcolo di $\mathbb{P}(A|I)$ è sufficiente determinare $\mathbb{P}(A)$ e dividere per $\mathbb{P}(I)$. Come prima, vale la scomposizione

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(A|N_X = n) \mathbb{P}(N_X = n).$$

Possiamo esprimere l'evento $A \cap \{N_X = n\}$ come unione disgiunta degli eventi

$$\bigcap_{j=1}^n \{X_j \in B_j\}, \text{ dove esistono } j_1 < j_2 < \dots < j_k \text{ tali che } \begin{cases} B_{j_i} = A_i \forall i = 1 \dots k \\ B_j = [0, 1]^d \setminus U \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Poiché le variabili X_j sono indipendenti e con distribuzione uniforme, ognuno di questi eventi ha probabilità

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^n \{X_j \in B_j\} \mid N_X = n\right) = \prod_{j=1}^n |B_j| = (1 - |U|)^{n-k} \prod_{i=1}^k |A_i|.$$

Inoltre ogni evento è univocamente determinato dalla successione dei $(j_i)_{i=1}^k$, per cui il numero dei possibili eventi è $\binom{n}{k}$. Possiamo dunque concludere che

$$\mathbb{P}(A|N_X = n) = \binom{n}{k} (1 - |U|)^{n-k} \prod_{i=1}^k |A_i|.$$

Ragionando come in (3.8) sostituendo $|U|^k$ con $\prod_{i=1}^k |A_i|$ otteniamo

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda^k \prod_{i=1}^k |A_i|}{k!} e^{-\lambda|U|}$$

da cui

$$\mathbb{P}(A|I) = \frac{\mathbb{P}(A \cap I)}{\mathbb{P}(I)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(I)} = \prod_{i=1}^k \frac{|A_i|}{|U|}.$$

□

Dal Lemma 3.3 discende dunque il seguente risultato di auto-similarità:

Corollario 3.4. *Sia $Q = [0, r]^d \subseteq [0, 1]^d$. Allora, se X è un processo di Poisson su $[0, 1]^d$ di intensità λ , la sua restrizione a $[0, r]^d$*

$$\left(\frac{X_i}{r}\right)_{i \in \mathcal{I}(X, U)} \tag{3.9}$$

è un processo di Poisson su $[0, 1]^d$ di intensità λr^d .

Dimostrazione: Sia $U = Q$ nel Lemma 3.3; abbiamo che $n(X, U)$ ha legge di Poisson di parametro $\lambda|U| = \lambda r^d$. Inoltre le variabili $(X_i)_{i \in \mathcal{I}(X, U)}$ sono i.i.d. con distribuzione uniforme su $[0, r]^d$, per cui le variabili $(X_i/r)_{i \in \mathcal{I}(X, U)}$ sono uniformi su $[0, 1]^d$. \square

Nella prossima sezione sfrutteremo le proprietà del matching locale finora discusse per mostrare l'esistenza del limite nel caso poissonizzato.

3.2 Esistenza del Limite Poissonizzato

Abbiamo introdotto il concetto di matching locale e ne abbiamo elencato alcune importanti proprietà. L'ultimo strumento necessario al nostro obiettivo è il seguente risultato analitico:

Lemma 3.5. *Sia $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ funzione continua e limitata tale che, per ogni $m \geq 1$ intero e per ogni $\lambda \geq 1$ reale, vale*

$$f(m\lambda) \geq f(\lambda). \quad (3.10)$$

Allora esiste finito $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda)$.

Dimostrazione: Per ipotesi f è limitata, per cui sappiamo esistere finite le quantità

$$l = \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) \geq 0, \quad L = \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) < \infty.$$

Per arrivare all'esistenza del limite è sufficiente mostrare che $l \geq L$. Per definizione di L sappiamo che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\lambda_0 \in [1, \infty)$ tale che $f(\lambda_0) > L - \varepsilon$. Per continuità di f , questa condizione vale in un intorno di λ_0 , ovvero esistono $a < b \in [1, \infty)$ tali che $\lambda_0 \in (a, b)$ e

$$f(\bar{\lambda}) > \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) - \varepsilon \quad \forall \bar{\lambda} \in (a, b).$$

Applicando la proprietà (3.10) di f otteniamo che

$$f(m\lambda) \geq f(\lambda) > L - \varepsilon \quad \forall m \geq 1, \forall \lambda \in (a, b). \quad (3.11)$$

Osserviamo però che, poiché $a, b \geq 1$, vale $\bigcup_{m=1}^{\infty} (ma, mb) \supseteq (a', \infty)$ per qualche $a' \geq a$. Di conseguenza la proprietà (3.11) vale definitivamente in $[1, \infty)$ e possiamo affermare che, per ogni $\varepsilon > 0$, vale

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) \geq \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) - \varepsilon$$

da cui segue la tesi per arbitrarietà di ε . \square

Siamo finalmente pronti a enunciare il teorema di esistenza del limite.

Teorema 3.6. *Siano p, d fissati e, per ogni $\lambda > 0$, siano X e Y processi di Poisson su $[0, 1]^d$ di parametro λ . Allora, se $p < d$, esiste finito il limite*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{z_p(X, Y, [0, 1]^d)}{\lambda^{1+\frac{p}{d}}} \right] \in (0, \infty). \quad (3.12)$$

Dimostrazione: Il nostro obiettivo è applicare il Lemma 3.5 alla funzione

$$f(\lambda) = \mathbb{E} \left[\frac{z_p(X, Y, [0, 1]^d)}{\lambda^{1+\frac{p}{d}}} \right]. \quad (3.13)$$

Vogliamo dunque mostrare che f è continua e limitata, e che rispetta la proprietà (3.10).

Dati i processi $X = (X_i)_{i=1}^{N_X}$ e $Y = (Y_j)_{j=1}^{N_Y}$, un modo per studiare la continuità di f è condizionare rispetto agli eventi $\{N_X = n, N_Y = m\}$. Ricordandoci che N_X e N_Y sono variabili di Poisson di parametro λ otteniamo la scomposizione

$$f(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{1+\frac{p}{d}}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[z_p((X_i)_{i=1}^n, (Y_j)_{j=1}^m, [0, 1]^d) \right] \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \quad (3.14)$$

Possiamo far iniziare le somme da $n = 1, m = 1$ in quanto, se $n = 0$ o $m = 0$, il costo del relativo matching è nullo, e dunque trascurabile.

Per quanto osservato nel Lemma 3.2, per ognuno dei valori attesi in (3.14) vale

$$\mathbb{E} \left[z_p((X_i)_{i=1}^n, (Y_j)_{j=1}^m, [0, 1]^d) \right] \leq \mathbb{E} \left[z_p((X_i)_{i=1}^{n+m}, (Y_j)_{j=1}^{n+m}, [0, 1]^d) \right]. \quad (3.15)$$

Inoltre, poiché coincide il numero dei punti in partenza e in arrivo, abbiamo che

$$\mathbb{E} \left[z_p((X_i)_{i=1}^{n+m}, (Y_j)_{j=1}^{n+m}, [0, 1]^d) \right] = \mathbb{E} [Z_{p, n+m}]. \quad (3.16)$$

Sappiamo per ipotesi che $p < d$. Allora, per il Teorema 2.5 dimostrato nel Capitolo 2, sappiamo che esiste una costante $K = K(p, d) < \infty$ tale che

$$\mathbb{E} [Z_{p, n+m}] \leq K(n+m)^{1+\frac{p}{d}}.$$

Sostituendo in (3.14) queste maggiorazioni otteniamo la stima

$$f(\lambda) \leq g(\lambda) := \frac{1}{\lambda^{1+\frac{p}{d}}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K(n+m)^{1+\frac{p}{d}} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad (3.17)$$

Poiché $g(\lambda)$ converge assolutamente per ogni λ , possiamo applicare a f il criterio di convergenza dominata e concludere che f è continua. Notiamo

inoltre che g è decrescente in λ , per cui si può stimare f col suo valore massimo, assunto per $\lambda = 1$:

$$f(\lambda) \leq g(1) := K \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (n+m)^{1+\frac{p}{d}} \frac{1}{n!} e^{-1} \frac{1}{m!} e^{-1}. \quad (3.18)$$

Per ottenere una stima esplicita ricordiamo che $p < d$, per cui $1 + \frac{p}{d} < 2$, e dunque

$$f(\lambda) \leq \frac{K}{e^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(n+m)^2}{n! m!} = K \frac{2(3e-2)}{e} < \infty. \quad (3.19)$$

Abbiamo così ottenuto una limitazione dall'alto per f ; poiché dal basso vale banalmente $f \geq 0$, possiamo concludere che f è limitata.

Vogliamo ora verificare la proprietà (3.10). Consideriamo per comodità il cambio di variabile $\lambda \rightarrow \lambda^d$, in modo che

$$f(\lambda) = \lambda^{-p-d} \mathbb{E} \left[z_p(\tilde{X}, \tilde{Y}, [0, 1]^d) \right] \quad (3.20)$$

dove \tilde{X} e \tilde{Y} sono processi di Poisson su $[0, 1]^d$ di intensità λ^d .

Dato $Q = [0, r]^d \subseteq [0, 1]^d$, abbiamo che

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[z_p(\tilde{X}, \tilde{Y}, Q) \right] = \\ & \mathbb{E} \left[z_p \left(\left(\tilde{X}_i \right)_{i \in \mathcal{I}(\tilde{X}, U)}, \left(\tilde{Y}_j \right)_{j \in \mathcal{I}(\tilde{Y}, U)}, [0, r]^d \right) \right] = \\ & r^{-p} \mathbb{E} \left[z_p \left(\left(\frac{\tilde{X}_i}{r} \right)_{i \in \mathcal{I}(\tilde{X}, U)}, \left(\frac{\tilde{Y}_j}{r} \right)_{j \in \mathcal{I}(\tilde{Y}, U)}, [0, 1]^d \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Abbiamo applicato il Lemma 3.1.1 per restringerci ai punti in Q , e il Lemma 3.1.3 per riscalare di un fattore r e ricondurci al caso $[0, 1]^d$, portando fuori un fattore r^{-p} . Per il Corollario 3.1.2 abbiamo che

$$\hat{X} := \left(\frac{\tilde{X}_i}{r} \right)_{i \in \mathcal{I}(\tilde{X}, U)}, \quad \hat{Y} := \left(\frac{\tilde{Y}_j}{r} \right)_{j \in \mathcal{I}(\tilde{Y}, U)}$$

sono processi di Poisson a valori in $[0, 1]^d$ di intensità $\lambda^d r^d$. Di conseguenza, moltiplicando per λ^{-p-d} da entrambi i lati e applicando la definizione (3.20) otteniamo l'uguaglianza

$$\begin{aligned} & \lambda^{-p-d} \mathbb{E} \left[z_p(\tilde{X}, \tilde{Y}, [0, r]^d) \right] \\ & = r^{-p} \lambda^{-p-d} \mathbb{E} \left[z_p(\hat{X}, \hat{Y}, [0, 1]^d) \right] \\ & = r^d (\lambda r)^{-p-d} \mathbb{E} \left[z_p(\hat{X}, \hat{Y}, [0, 1]^d) \right] \\ & = r^d f(\lambda r). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Fissato $m \geq 1$ intero, sia $[0, 1]^d = \bigcup_{k=1}^{m^d} Q_k$ un ricoprimento di $[0, 1]^d$ fatta di m^d cubi d -dimensionali di lato $1/m$. Ogni Q_k è della forma

$$\left[\frac{a_1}{m}, \frac{a_1 + 1}{m} \right] \times \left[\frac{a_2}{m}, \frac{a_2 + 1}{m} \right] \times \dots \times \left[\frac{a_d}{m}, \frac{a_d + 1}{m} \right] \quad \text{dove } 0 \leq a_i \leq m-1 \forall i \in 1 \dots d.$$

Di conseguenza, ogni Q_k può essere riportato in $[0, \frac{1}{m}]$ traslando per il vettore $(a_1 \dots a_d)^\top$; segue dal Lemma 3.1.2 che, per ogni k ,

$$z_p(\tilde{X}, \tilde{Y}, Q_k) = z_p\left(\tilde{X}, \tilde{Y}, \left[0, \frac{1}{m}\right]^d\right).$$

Le intersezioni reciproche dei Q_k hanno tutte misura nulla, per cui \mathbb{P} -quasi certamente non contengono nessuno degli X_i o degli Y_i . Di conseguenza vale anche per $\bigcup_{k=1}^{m^d} Q_k$ il Lemma 3.1.4, pur non essendo partizione, in quanto ogni X_i, Y_i apparterrà a uno e uno solo dei Q_k . Applicando dunque il Lemma 3.1.4 e prendendo il valore atteso otteniamo

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^{-p-d} \mathbb{E} \left[z_p(\tilde{X}, \tilde{Y}, [0, 1]^d) \right] \\ &\geq \lambda^{-p-d} \sum_{k=1}^{m^d} \mathbb{E} \left[z_p(\tilde{X}, \tilde{Y}, Q_k) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{m^d} \lambda^{-p-d} \mathbb{E} \left[z_p(\tilde{X}, \tilde{Y}, \left[0, \frac{1}{m}\right]^d) \right]. \end{aligned}$$

Applicando l'uguaglianza (3.22) con $r = \frac{1}{m}$ otteniamo

$$f(\lambda) \geq \sum_{k=1}^{m^d} \frac{1}{m^d} f\left(\frac{\lambda}{m}\right) = f\left(\frac{\lambda}{m}\right)$$

ovvero $f(m\lambda) \geq f(\lambda)$, che è proprio la proprietà (3.10). Possiamo dunque applicare il Lemma 3.5 per concludere che f ammette limite finito.

Come ultima cosa vogliamo dimostrare che tale limite, oltre che finito, è strettamente positivo. Abbiamo appena dimostrato che f verifica la proprietà (3.10); in particolare, ponendo $\lambda = 1$ vale

$$f(n) \geq f(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il valore di $f(1)$ può essere espresso esplicitamente tramite la scomposizione (3.14):

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[z_p((X_i)_{i=1}^n, (Y_j)_{j=1}^m, [0, 1]^d) \right] \frac{1}{n!} e^{-1} \frac{1}{m!} e^{-1}. \quad (3.23)$$

Consideriamo ora il termine $\mathbb{E} \left[z_p((X_i)_{i=1}^n, (Y_j)_{j=1}^m, [0, 1]^d) \right]$. Poiché le sommatorie partono da $n, m \geq 1$, ognuno dei matching locali z_p ha almeno una coppia di punti (i, j) . Tale coppia apporterà un certo contributo $|X_i - Y_j|$; poiché stiamo considerando la potenza negativa $-p$, il contributo minimo è quello relativo al diametro di $[0, 1]^d$, ovvero \sqrt{d} . Di conseguenza vale

$$\mathbb{E} \left[z_p((X_i)_{i=1}^n, (Y_j)_{j=1}^m, [0, 1]^d) \right] \geq d^{-\frac{p}{2}} \forall n, m \geq 1. \quad (3.24)$$

Applicando la maggiorazione (3.24) all'espressione (3.23) ottengo

$$f(1) \geq \frac{d^{-\frac{p}{2}}}{e^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n! m!} = d^{-\frac{p}{2}} \frac{(e-1)^2}{e^2}. \quad (3.25)$$

Abbiamo così individuato una costante $c = c(d, p) > 0$ che dipende solo da p e d tale che $f(n) \geq c(d, p) > 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Di conseguenza anche il suo limite $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda)$, che abbiamo appena dimostrato esistere finito, deve essere maggiore o uguale di $c(d, p)$, e dunque strettamente maggiore di 0. Possiamo finalmente concludere che esiste finito

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{z_p(X, Y, [0, 1]^d)}{\lambda^{1+\frac{p}{d}}} \right] \in (0, \infty).$$

□

Capitolo 4

Conclusioni e possibili sviluppi

In questo lavoro di tesi abbiamo analizzato l'argomento del matching euclideo aleatorio sul cubo unitario $[0, 1]^d$, nel caso particolare in cui trattiamo un esponente negativo $-p$.

Nel primo capitolo abbiamo introdotto le variabili $B_{p,n}$ per il caso positivo, e ne abbiamo discusso alcune importanti proprietà e caratteristiche. Abbiamo poi introdotto la variabile $Z_{p,n}$ per il caso negativo, e fatto delle congetture sul suo possibile andamento.

Nel secondo capitolo abbiamo confermato la validità di tali congetture, dimostrando l'esistenza di upper e lower bound per il valore di $\mathbb{E}[Z_{p,n}]$, nel caso in cui n sia scelto deterministicamente. Questo è possibile nel caso $p < d$, e in particolare abbiamo mostrato che per $p \geq d$ non esiste nessun upper bound. Abbiamo poi confermato sperimentalmente le nostre ipotesi confrontando alcuni grafici.

Nel terzo capitolo abbiamo infine sfruttato i risultati del Capitolo 2 per dimostrare l'esistenza del limite per una particolare variante del problema, dove n ha distribuzione di Poisson. Questa distribuzione ci permette di ritrovare distribuzioni di Poisson quando ci restringiamo a sottoinsiemi $U \subseteq [0, 1]^d$ del cubo unitario. Tale restrizione è possibile definendo una nozione di matching locale su U , a partire dal modello di $Z_{p,n}$ su $[0, 1]^d$, che assegna tra loro i soli punti che si trovano in U . Il concetto di matching locale e la proprietà di autosimilarità della distribuzione di Poisson ci permettono di mostrare l'esistenza di un limite finito per l'andamento di $\mathbb{E}[Z_{p,n}]/n^{1+\frac{p}{d}}$.

Un possibile sviluppo futuro dei risultati raggiunti in questo elaborato è dimostrare l'esistenza del limite del valore atteso nel caso con n deterministico. Questo non è deducibile semplicemente applicando i metodi usati finora; in tali condizioni, restringersi a sottoinsiemi $U \subseteq [0, 1]^d$ fa sì che il numero di punti in U abbia distribuzione binomiale. Manca dunque la proprietà di autosimilarità che è stata cruciale nel dimostrare l'esistenza del limite.

Per quanto riguarda poi l'andamento di $Z_{p,n}$, come accennato nel capitolo 1, l'assenza di limitazioni superiori banali (o comunque indipendenti da n) non ci permette di usare risultati come la disuguaglianza di McDiarmid per capire se e come $Z_{p,n}$ si concentra attorno alla sua media. Bisognerebbe dunque cercare proprietà di concentrazione alternative; una possibile strada è sfruttare la monotonicità dei matching locali mostrata nel Lemma 3.2, che vale non solo per $[0, 1]^d$ ma anche per suoi sottoinsiemi.

Un'altra possibilità è che valga l'esistenza del limite, ma solo imponendo condizioni più restrittive di $p < d$. Notiamo infatti nei grafici del Capitolo 2 che l'andamento di $Z_{p,n}/n^{1+\frac{p}{d}}$ diventa erratico man mano che p si avvicina a d , mentre l'esistenza del limite sembra più plausibile per p più bassi. Un'ipotesi verosimile è che, anche nel caso con esponente negativo, si riesca a dimostrare l'esistenza del limite nel caso $p < \frac{d}{2}$.

Appendice

Riportiamo in seguito il codice MATLAB usato per creare i dati rappresentati nei grafici del Capitolo 2.4. Per studiare l'andamento di $Z_{p,n}/n^{1+\frac{p}{d}}$ abbiamo usato la seguente funzione:

```
function img=Zpd(p, d, range)
h=size(range, 2);
img=ones(h, 1);
for i=1:h
    k=range(i);
    X=rand(k, d);
    Y=rand(k, d);
    C=zeros(k, k);
    for j=1:k
        for l=1:k
            C(j, l)=norm(X(l, :)-Y(j, :), 2)^(-p);
        end
    end
    M=matchpairs(C, 0, 'max');
    val=0;
    for s=1:k
        val=val+C(M(s,1), M(s,2));
    end
    img(i)=val;
end
```

La funzione prende come input l'esponente p della potenza, la dimensione d dello spazio, e un vettore `range` di h valori n rispetto a cui calcolare $Z_{p,n}$. Vengono generati, tramite la funzione `rand`, i valori di X e Y con distribuzione uniforme su $[0, 1]^d$. Si crea poi la matrice dei costi C , dove i costi sono i termini $|X_i - Y_j|^{-p}$. Il calcolo di $Z_{p,n}$ è svolto applicando a C la funzione `matchpairs` già integrata in MATLAB, che coi parametri scelti restituisce in output la permutazione M che realizza il massimo nella definizione di $Z_{p,n}$. Il valore numerico di tale massimo è `val`, che viene calcolato iterativamente e registrato nel vettore di output `img`.

Per i grafici in cui abbiamo confrontato $B_{p,n}$ e $Z_{p,n}$ abbiamo usato la seguente funzione, che prende in input l'esponente p e i vettori X e Y dei punti di cui calcolare i matching, sia nel caso positivo che in quello negativo.

```

function [B, Z]=compare(p, X, Y)
n=size(X, 1);
B=zeros(n, n);
Z=zeros(n, n);
for j=1:n
    for l=1:n
        B(j, l)=norm(X(l, :)-Y(j, :), 2)^(p);
        Z(j, l)=norm(X(l, :)-Y(j, :), 2)^(-p);
    end
end
MB=matchpairs(B, 2^p);
MZ=matchpairs(Z, 0, 'max');
x1=[X(:, 1)];
x2=[X(:, 2)];
y1=[Y(:, 1)];
y2=[Y(:, 2)];
figure;
hold on;
scatter(x1, x2, 20, "red", "filled");
scatter(y1, y2, 20, "blue", "filled");
for i=1:n
    plot([X(i, 1), Y(MB(i), 1)], [X(i, 2), Y(MB(i),
        2)], "black");
end
figure;
hold on;
scatter(x1, x2, 20, "magenta", "filled");
scatter(y1, y2, 20, "cyan", "filled");
for i=1:n
    plot([X(i, 1), Y(MZ(i), 1)], [X(i, 2), Y(MZ(i),
        2)], "black");
end
[B, Z]=[0, 0];
for s=1:n
    B=B+(MB(s,1), MB(s,2));
    Z=Z+(MZ(s,1), MZ(s,2));
end
hold off;

```

Bibliografia

- [1] Franck Barthe and Charles Bordenave. Combinatorial optimization over two random point sets. In *Séminaire de Probabilités XLV*, pages 483–535. Springer, 2013.
- [2] Michael Goldman and Dario Trevisan. Convergence of asymptotic costs for random euclidean matching problems. *Probability and Mathematical Physics*, 2(2):341–362, 2021.