CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2022/23 - Prova scritta 2023-02-01

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Il numero di email che arrivano in dato giorno ad una casella di posta elettronica è ben rappresentato da una variabile aleatoria discreta avente densità Poisson di parametro $\lambda > 0$, dove il parametro λ è caratteristico della casella. Si può inoltre supporre che a giorni diversi il numero di email in arrivo siano tra loro indipendenti (ma tutte aventi lo stesso parametro λ, per una data casella) e inoltre a caselle di posta differenti corrispondano variabili tra loro indipendenti, eventualmente con parametri λ differenti.

Alice dispone di due caselle di posta: una personale (con parametro $\lambda_p > 0$) e una lavorativa (di parametro $\lambda_\ell > 0$). Si vuole stimare i parametri sulla base di alcune osservazioni.

1. Calcolare il valor medio e la deviazione standard del numero totale delle email ricevute da Alice in 10 giorni consecutivi (esprimendo il risultato in termini dei parametri λ_p e λ_ℓ).
2. Mostrare che il numero totale delle email ricevute da Alice in un dato giorno è una variabile Poisson di parametro $\lambda_p + \lambda_\ell$. *(Sugg: calcolare la MGF della somma di due Poisson indipendenti).*
3. Alice osserva che in un primo giorno ha ricevuto 10 email nell'account personale e 20 in quello lavorativo, mentre il giorno successivo ha ricevuto in 42 email (sommando tra i due account). Fornire la stima di massima verosimiglianza per λ_p e λ_ℓ.

Una soluzione:

1. Dalle ipotesi segue che le email arrivate ogni giorno sono variabili indipendenti. Per una Poisson di parametro $\lambda > 0$, il valor medio è λ, la varianza è pure λ. Ne segue che il numero totale X in 10 giorni è la somma di 10 Poisson indipendenti di parametro λ_p (per l'account personale) più altre 10 Poisson indipendenti di parametro λ_ℓ (per quello lavorativo. Quindi valor medi e varianze si sommano (per indipendenza), e si trova che

$$\mathbb{E}[X] = 10(\lambda_p + \lambda_\ell), \mathrm{Var}(X) = 10(\lambda_p + \lambda_\ell),$$

da cui $\sigma_x = \sqrt{10(\lambda_p + \lambda_\ell)}$.

2. Usando il suggerimento notiamo prima che, se X è Poisson di parametro λ, allora

$$MGF_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{tk}}{k!} e^{-\lambda} = \exp\left(\lambda(e^t - 1)\right).$$

Pertanto se X_p e X_ℓ rappresentano rispettivamente le mail arrivate all'account personale e lavorativo, per indipendenza:

$$MGF_{X_p + X_\ell}(t) = MGF_{X_p}(t) MGF_{X_\ell}(t) = \exp\left(\lambda(e^t - 1)\right) \exp\left(\lambda_\ell(e^t - 1)\right) = \exp\left((\lambda_p + \lambda_\ell)(e^t - 1)\right),$$

ma riconosciamo la MGF di una Poisson di parametro $\lambda_p + \lambda_\ell$, che è pertanto la densità di $X_p + X_\ell$.

3. Dai dati osservati e l'indipendenza tra i vari giorni e il punto precedente, scriviamo la seguente verosimiglianza:

$$\begin{aligned} L(\lambda_p, \lambda_\ell; X_p^1 = 10, X_\ell^1 = 20, X^2 = 42) &= P(X_p^1 = 10|\lambda_p)P(X_\ell^1 = 20|\lambda_\ell)P(X^2 = 42|\lambda_p, \lambda_\ell) \\ &= \frac{\lambda_p^{10} e^{-\lambda_p}}{10!} \frac{\lambda_\ell^{10} e^{-\lambda_\ell}}{20!} \frac{(\lambda_p + \lambda_\ell)^{42} e^{-(\lambda_p+\lambda_\ell)}}{42!}. \end{aligned}$$

Passando al logaritmo e derivando rispetto a λ_ℓ e rispetto a λ_p, si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{10}{\lambda_p} + \frac{42}{\lambda_p+\lambda_\ell} &= 2 \\ \frac{20}{\lambda_\ell} + \frac{42}{\lambda_p+\lambda_\ell} &= 2 \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni si trova che

$$\lambda_\ell = 2\lambda_p,$$

da cui le stime di massima verosimiglianza $\lambda_p = 12$, $\lambda_\ell = 24$.

Problema 2

Siano X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22} variabili aleatorie indipendenti con densità gaussiane reali standard. Si introducano le matrici

$$M = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{e si ponga} \quad Y = AM,$$

dove il prodotto è inteso tra matrici.

1. Scrivere esplicitamente la matrice Y e mostrare che le sue componenti sono variabili aleatorie gaussiane.
2. Calcolare i parametri di media e varianza delle componenti di Y.
3. Le componenti di Y sono tra loro indipendenti?

Una soluzione:

1. Le componenti di Y sono gaussiane perché combinazioni lineari di variabili gaussiane. Si trova

$$Y = \begin{pmatrix} X_{11} + X_{21} & X_{12} + X_{22} \\ X_{11} - X_{21} & X_{12} - X_{22} \end{pmatrix}.$$

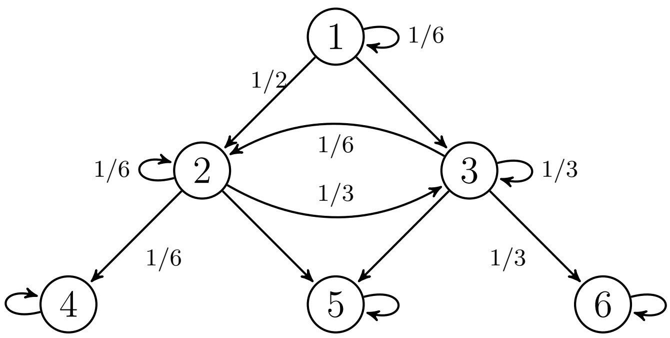
2. La media è nulla per tutte le variabili. Per la varianza, basta notare che le componenti sono date da somme (o differenze) di gaussiane standard, quindi hanno tutte varianza 2.

3. Le componenti sono indipendenti tra loro. Intanto la prima e la seconda colonna sono funzioni di variabili separatamente indipendenti, quindi sono indipendenti tra loro. Per vedere che le due variabili in ciascuna colonna sono indipendenti, basta allora vedere che non sono correlate (perché sono gaussiane). Ad esempio

$$\mathrm{Cov}(Y_{11}, Y_{21}) = \mathrm{Cov}(X_{11} + X_{21}, X_{11} - X_{21}) = \mathrm{Var}\,(X_{11}) - \mathrm{Var}\,(X_{21}) = 1 - 1 = 0.$$

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ con matrice di transizione rappresentata mediante il seguente grafo.



1. Completare con le probabilità mancanti, classificare gli stati (transitori/ricorrenti), determinare tutte le classi chiuse irriducibili e le distribuzioni invarianti.
2. Posta $g : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{A, B, C\}$ definita da

$$g(1) = A, \quad g(2) = g(3) = B, \quad g(4) = g(5) = g(6) = C,$$

si ponga $Y_n = g(X_n)$. Supponendo che $X_0 = 1$, dire se $(Y_n)_{n=0}^{\infty}$ è anch'essa una catena di Markov e in caso affermativo calcolarne la matrice di transizione.

Una soluzione:

1. Gli stati $\{1, 2, 3\}$ sono transitori, i rimanenti ricorrenti. Le classe chiuse irriducibili sono $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$. Tutte le distribuzioni invarianti sono combinazioni della forma

$$(0, 0, 0, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6),$$

dove $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \in [0, 1]$ e $\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 1$.

2. Sì, è una catena di Markov sull'insieme degli stati $\{A, B, C\}$. Calcoliamo intanto la matrice di transizione partendo dallo stato A:

$$Q_{A\to A} = P(Y_1 = A|Y_0 = A) = P(X_1 = A|X_0 = A) = 1/6,$$

$$Q_{A\to B} = P(Y_1 = B|Y_0 = A) = P(X_1 \in \{2, 3\} |X_0 = A) = 5/6,$$

$$Q_{A\to C} = 0.$$

Anche partendo dallo stato C è immediato, perché $Q_{C\to C} = 1$, $Q_{C\to A} = Q_{C\to B} = 0$ (gli stati in C sono assorbenti). Infine $Q_{B\to A} = 0$, mentre per calcolare correttamente $Q_{B\to B}$ procediamo come segue:

$$\begin{aligned}
Q_{B\to B} &= P(X_1 \in \{2, 3\} |X_0 \in \{2, 3\}) \\
&= P(X_1 \in \{2, 3\} |X_0 = 2)P(X_0 = 2|X_0 \in \{2, 3\}) + P(X_1 \in \{2, 3\} |X_0 = 3)P(X_0 = 3|X_0 \in \{2, 3\}) \\
&= \frac{1}{2}P(X_0 = 2|X_0 \in \{2, 3\}) + \frac{1}{2}P(X_0 = 2|X_0 \in \{2, 3\}) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Da cui si ricava anche che $Q_{B\to C} = 1/2$ (eventualmente usando un argomento simile).

Per verificare la proprietà di Markov, si tratta di considerare un quasiasi cammino $\gamma = y_0 \to y_1 \to \ldots \to y_n$ e mostrare che, per qualsiasi $y_{n+1} \in \{A, B, C\}$,

$$P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y = \gamma) = P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y_n = y_n).$$

Si tratta di discutere tre casi: se $y_n = A$, allora l'informazione $Y_n = y_n$ coincide con $X_n = 1$, e quindi usando la proprietà di Markov per X (notiamo che le affermazioni che riguardano la Y sono in particolare affermazioni sul processo X), si trova

$$P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y = \gamma) = P(Y_{n+1} = y_{n+1}|X_n = 1) = P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y_n = A).$$

Se $y_n = C$, allora sicuramente $Y_{n+1} = C$ (perché tutti gli stati $4, 5, 6$ sono assorbenti), quindi possiamo trascurare tutto il cammino precedente e scrivere solo

$$P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y = \gamma) = P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y_{n+1} = C).$$

Il caso meno ovvio è quando $y_n = B$, che corrisponde all'informazione $X_n \in \{2, 3\}$:

$$\begin{aligned}
&P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y = \gamma) = \\
&= P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y = \gamma, X_n = 2)P(X_n = 2|Y = \gamma) \\
&\qquad + P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y = \gamma, X_n = 3)P(X_n = 3|Y = \gamma) \\
&= P(Y_{n+1} = y_{n+1}|X_n = 2)P(X_n = 2|Y = \gamma) \\
&\qquad + P(Y_{n+1} = y_{n+1}|X_n = 3)P(X_n = 3|Y = \gamma)
\end{aligned}$$

avendo usato la proprietà di Markov di X per ottenere che

$$P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y = \gamma, X_n = 2) = P(Y_{n+1} = y_{n+1}|X_n = 2)$$

e similmente per $X_n = 3$. Per quanto visto nel calcolo della matrice di transizione, otteniamo che

$$P(Y_{n+1} = y_{n+1}|X_n = 2) = \begin{cases} 0 & \text{se } y_{n+1} = A, \\ \frac{1}{2} & \text{se } y_{n+1} = B, \\ \frac{1}{2} & \text{se } y_{n+1} = C, \end{cases}$$

e similmente nel caso $X_n = 3$. Ne segue che

$$P(Y_{n+1} = y_{n+1}|X_n = 2) = P(Y_{n+1} = y_{n+1}|X_n = 3) = P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y_n = B),$$

e quindi

$$P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y = \gamma) = P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y = \gamma) = P(Y_{n+1} = y_{n+1}|Y_n = B),$$

completando la prova della proprietà di Markov.