CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)

A.A. 2022/23 - Prova scritta 2023-01-11

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

La scatola di costruzioni giocattolo dei fratellini Aldo e Bruno contiene in tutto 4 ruote, all'apparenza del tutto identiche. Tuttavia, alcune ruote potrebbero essere bloccate e non girare bene. I fratellini costruiscono 2 moto giocattolo, attaccando a caso tutte le ruote disponibili. Se una moto ha due ruote bloccate, essa non potrà soddisfare i bambini (una sola ruota bloccata è invece accettabile).

Il numero $K \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ di ruote bloccate presenti nella scatola non è noto: si supponga inizialmente che sia una variabile con densità uniforme.

1. Calcolare la probabilità che entrambe le moto costruite soddisfino i fratellini.
2. Sapendo che entrambe le moto costruite hanno soddisfatto i fratellini, come cambia la densità di K? calcolarne inoltre il valor medio e deviazione standard.

Una soluzione:

Osserviamo che, se $K \geq 3$, allora sicuramente almeno una moto conterrà due ruote bloccate, e quindi posto $A =$ "le moto costruite soddisfano i fratellini", si ha $P(A|K \geq 3) = 0$. Siccome $P(A|K \leq 1) = 1$, perché in tal caso sicuramente entrambe le moto contegono al più una ruota bloccata, resta da calcolare $P(A|K = 2)$. Supponiamo che le estrazioni delle ruote avvengano in sequenza e le prime 2 vadano a costruire la prima moto, mentre le rimanenti costruiscano la seconda moto. Calcoliamo intanto la probabilità della sequenza $DDFF$ (indichiamo con D se difettosa, F se funzionante, quindi in questa sequenza le prime due estratte sono difettose):

$$P(DDFF) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{6}.$$

Sappiamo anche dalla teoria che la probabilità di estrarre una specifica sequenza (sia nelle estrazioni con rimpiazzo che in quelle senza rimpiazzo, come in questo caso) dipende solamente dal numero di "colori" (in questo caso ruote difettose o funzionanti) presenti, non dall'ordine. Pertanto si tratta solo di contare quante sono le sequenze che soddisfano i bambini, ossia quelle in cui i pezzi difettosi sono distribuiti nelle due moto: esse sono $2 \times 2 = 4$ (si tratta di decidere in quale delle prime quattro estrazioni una difettosa è estratta, e similmente in quale delle seconde estrazioni l'altra difettosa è estratta). Possiamo anche elencarle:

$$DF\,DF \qquad FD\,DF \qquad DF\,FD \qquad FD\,FD.$$

Di conseguenza,
$$P(A|K=2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$
Si può anche rispondere alla domanda usando la densità ipergeometrica: se $K = 2$, le moto soddisfano i bambini se, nelle prime due estrazioni, solamente 1 è difettosa. Pertanto
$$P(A|K=2) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{2 \cdot 2}{4 \cdot 3/2} = \frac{2}{3}.$$
Di consequenza,
$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|K \leq 1)P(K \leq 1) + P(A|K=2)P(K=2) + P(A|K \geq 3)P(K \geq 3) \\ &= 1 \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

2. Usando la formula di Bayes,
$$P(K=i|A) \propto P(K=i) \cdot P(A|K=i) \propto P(A|K=i),$$
poiché $P(K=i) = \frac{1}{5}$ è costante. Siccome
$$P(A|K=i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in \{0,1\}, \\ \frac{2}{3} & \text{se } i = 2, \\ 0 & \text{se } i \geq 3, \end{cases}$$
la densità di K si ottiene dividendo le espressioni sopra per $1 + 1 + 2/3 = 8/3$, ottenendo quindi
$$P(K=i|A) = \begin{cases} \frac{3}{8} & \text{se } i \in \{0,1\}, \\ \frac{1}{4} & \text{se } i = 2, \\ 0 & \text{se } i \geq 3. \end{cases}$$
Calcoliamo valor medio di K,
$$\mathbb{E}[K|A] = 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{8}.$$
Per la deviazione standard, calcoliamo
$$\mathbb{E}\left[K^2|A\right] = 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{8},$$
da cui
$$\operatorname{Var} K|A = \frac{11}{8} - \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{88-49}{8^2} = \frac{39}{8^2},$$
e quindi
$$\sigma_{K|A} = \sqrt{39}/8 \approx 0,78.$$

Problema 2

Siano X, Y, variabili aleatorie indipendenti con densità gaussiane reali standard. Si ponga

$$U = X^2, \qquad V = XY.$$

Mostrare che

1. U non è gaussiana (calcolandone esplicitamente la densità),
2. V non è gaussiana *(sugg: può essere utile usare che* $\mathbb{E}[Z^4] = 3$ *se* Z *è gaussiana standard)*,
3. U e V non sono correlate, ma non sono indipendenti *(sugg: calcolare* $\mathbb{E}[UV^2]$*)*.

Una soluzione:

1. Per calcolare la densità di U usiamo la formula di cambio di variabile per $g(x) = x^2$, con $g'(x) = 2x$ e $g^{-1}(u) = \{\sqrt{u}, -\sqrt{u}\}$ (per $u > 0$). Si trova, per $u > 0$,

$$p(U = u) = p(g(X) = u) = 2 \exp\left(-\frac{u}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\sqrt{u}},$$

evidentemente non Gaussiana.

2. Se V fosse gaussiana, dovrebbe essere standard, perché per indipendenza di X e Y,

$$\mathbb{E}[V] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = 0 \cdot 0 = 0, \quad \mathbb{E}\left[V^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right]\mathbb{E}\left[Y^2\right] = 1 \cdot 1 = 1.$$

Allora usando il suggerimento dovrebbe essere $\mathbb{E}[V^4] = 3$, ma calcoliamo similmente

$$\mathbb{E}\left[V^4\right] = \mathbb{E}\left[X^4 Y^4\right] = \mathbb{E}\left[X^4\right] \cdot \mathbb{E}\left[Y^4\right] = 3 \cdot 3 = 9,$$

avendo usato di nuovo il suggerimento, perché X e Y sono gaussiane standard.

3. Poiché $\mathbb{E}[V] = 0$, la covarianza tra U e V si riduce a

$$\mathbb{E}[UV] = \mathbb{E}\left[X^2 \cdot XY\right] = \mathbb{E}\left[X^3\right] \cdot \mathbb{E}[Y] = 0 \cdot 0 = 0,$$

e quindi U e V non sono correlate. Tuttavia non sono indipendenti. Se lo fossero, usando il suggerimento, si avrebbe che

$$\mathbb{E}\left[UV^2\right] = \mathbb{E}[U] \cdot \mathbb{E}\left[V^2\right],$$

ma calcolando separatamente i termini si trova

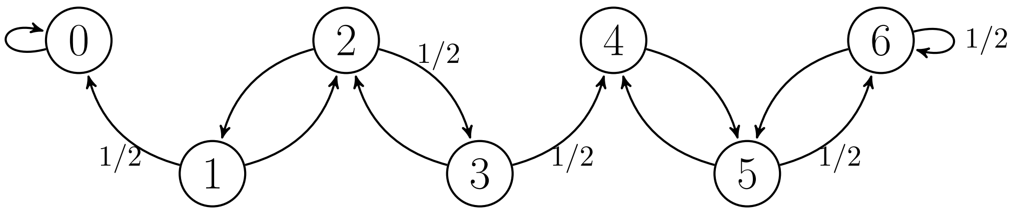
$$\mathbb{E}\left[UV^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2 \cdot X^2 \cdot Y^2\right] = \mathbb{E}\left[X^4\right] \cdot \mathbb{E}\left[Y^2\right] = 3 \cdot 1 = 3$$

(avendo usato il suggerimento del punto precedente) mentre

$$\mathbb{E}[U] \cdot \mathbb{E}\left[V^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] \cdot \mathbb{E}\left[X^2\right] \cdot \mathbb{E}\left[Y^2\right] = 1.$$

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ con matrice di transizione rappresentata mediante il seguente grafo.



1. Completare con le probabilità mancanti, classificare gli stati (transitori/ricorrenti), determinare tutte le classi chiuse irriducibili e le distribuzioni invarianti.
2. Dire se esiste $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0|X_0 = 2)$ e in caso affermativo calcolarlo.

Una soluzione:

1.Gli stati $0, 4, 5, 6$ sono ricorrenti, i rimanenti transitori. Le classi chiuse irriducibili sono $\{0\}$ e $\{4, 5, 6\}$. Per le distribuzioni invarianti, calcoliamo prima la distribuzione invariante della catena ristretta alla classe $\{4, 5, 6\}$. Per il bilancio di flusso in 4 e 6:

$$\pi_4 = \frac{1}{2}\pi_5, \quad \frac{1}{2}\pi_6 = \frac{1}{2}\pi_5$$

da cui il vettore

$$(\pi_4, \pi_5, \pi_6) = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}).$$

Tutte le distribuzioni invarianti sono combinazioni della distribuzione trovata e la distribuzione concentrata sullo stato 0, pertanto si scrivono come segue:

$$\left(\alpha, 0, 0, 0, \frac{1-\alpha}{5}, \frac{2(1-\alpha)}{5}, \frac{2(1-\alpha)}{5}\right), \quad \text{al variare di } \alpha \in [0, 1].$$

2. Il limite da calcolare esiste perché ogni classe chiusa irriducibile è regolare (per il criterio). Dalla teoria sappiamo anche che la matrice $Q^{\infty}_{ij} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j|X_0 = i)$ soddisfa i due sistemi $Q^{\infty} \cdot Q = Q \cdot Q^{\infty} = Q^{\infty}$. Il primo garantisce che ogni riga è una distribuzione invariante, quindi ricordando la parametrizzazione del punto sopra, ogni riga j è determinata da un parametro $\alpha_j \in [0, 1]$. Dobbiamo quindi calcolare α_2. Notiamo Se $j = 0$, ovviamente $\alpha_j = 1$, mentre se $j \in \{4, 5, 6\}$ si avrà $\alpha_j = 0$ (non si può uscire dalle classi chiuse irriducibili). Per calcolare i rimanenti impostiamo il secondo sistema, così

$$\alpha_2 = Q^{\infty}_{20} = Q_{21}Q^{\infty}_{10} + Q_{23}Q^{\infty}_{30} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

$$\alpha_1 = Q^{\infty}_{10} = Q_{10}Q^{\infty}_{00} + Q_{12}Q^{\infty}_{20} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \alpha_2.$$

$$\alpha_3 = Q_{30}^{\infty} = Q_{34}Q_{40}^{\infty} + Q_{32}Q_{20}^{\infty} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \alpha_2.$$

Sostituendo le ultime due relazioni nella prima equazione concludiamo che

$$2\alpha_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_2,$$

e quindi $\alpha_2 = \frac{1}{2}$.

In realtà si può ottenere il risultato anche senza fare alcun calcolo. Supponiamo di sostituire agli stati $\{4, 5, 6\}$ un singolo stato C_2 assorbente che rappresenta la classe chiusa. Allora notiamo che la catena così diventa perfettamente simmetrica rispetto allo stato 2 (ossia sostituendo $1 \leftrightarrow 3$ e $0 \leftrightarrow C_2$). Quindi partendo da 2 si entrerà con eguale probabilità nella classe $\{0\}$ e nella classe C_2, e ciò basta per concludere che deve essere $Q_{20}^{\infty} = \frac{1}{2}$.