CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2022/23 - Prova in itinere 2022-11-25

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Si hanno a disposizione due urne, dall'esterno identiche, contenenti ciascuna 3 palline colorate di rosso o blu. Una (chiamiamola A) contiene 2 palline rosse e una pallina blu, mentre l'altra (B) contiene una pallina rossa e 2 blu (si ignora però quale delle due sia A e quale B).

Si effettua il seguente gioco: si sceglie un'urna a caso, si effettua una prima estrazione e si osserva il colore della pallina estratta. Successivamente, si può decidere se rimettere oppure no la pallina estratta nell'urna scelta. Poi si procede ad una seconda estrazione dalla stessa urna, e si osserva il colore della pallina estratta. Infine, si deve dichiarare se si ritiene che l'urna scelta sia A o B: si vince il gioco se si indovina.

Si considerino le tre seguenti strategie:

1. si decide di rimettere la prima pallina estratta nell'urna, e si dichiara A se la seconda pallina estratta è rossa, B se la seconda è blu.
2. si decide di rimettere la prima pallina estratta nell'urna, e si dichiara A se si osservano 2 palline rosse, B se si osservano 2 blu, mentre nel caso si osservi una rossa e una blu si lancia una moneta e si dichiara A se esce testa, B se esce croce.
3. come la strategia 2, ma si decide di *non* rimettere la prima pallina estratta nell'urna.

Separatamente per ciascuna delle tre strategie, calcolare la probabilità di vincere il gioco. Quale strategia giochereste (anche non necessariamente tra le tre elencate sopra)?

Una soluzione:

Indichiamo con $S \in \{A, B\}$ la variabile che indica l'urna scelta, e $D \in \{A, B\}$ quella che indica l'urna dichiarata. Dobbiamo calcolare

$$P(S = D)$$

a seconda delle tre strategie. Poniamo inoltre $X_1 \in \{R, B\}$, $X_2 \in \{R, B\}$ i colori delle due palline estratte. Osserviamo che

$$P(S = A) = P(S = B) = 1/2,$$

e usando la formula di decomposizione si trova

$$\begin{aligned} P(S = D) &= P(S = D|S = A)P(S = A) + P(S = D|S = B)P(S = B) \\ &= P(D = A|S = A)\frac{1}{2} + P(D = B)\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi calcolare $P(D = A|S = A)$, $P(D = B|S = B)$ a seconda delle varie strategie.

1. In questa strategia stiamo effettuando estrazioni con rimpiazzo e la dichiarazione coincide con il colore della seconda estratta. Abbiamo quindi $D = X_2$ e allora

$$P(D = A|S = A) = P(X_2 = A|S = A) = \frac{2}{3}, \quad P(D = B|S = B) = P(X_2 = B|S = B) = \frac{2}{3}.$$

Di conseguenza

$$P(S = D) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

2. In questa strategia stiamo effettuando due estrazioni con rimpiazzo, ma abbiamo l'ulteriore lancio di moneta in caso di parità, che avviene se estraiamo una rossa e una blu (nei due ordini possibili), quindi con probabilità

$$P(X_1 = R, X_2 = B|S = A) + P(X_1 = B, X_2 = R|S = A) = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9},$$

e similmente nel caso $S = B$. Lanciando una moneta, uscirà quindi la risposta corretta con probabilità $1/2$, e allora

$$P(D = A|S = A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Di conseguenza

$$P(S = D) = \frac{2}{3}.$$

3. In questa strategia stiamo effettuando due estrazioni senza rimpiazzo, e abbiamo l'ulteriore lancio di moneta in caso di parità, che avviene stavolta con probabilità

$$P(X_1 = R, X_2 = B|S = A) + P(X_1 = B, X_2 = R|S = A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Quindi

$$P(D = A|S = A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$P(D = B|S = B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}.$$

Anche in questo caso otteniamo che la probabilità $P(S = D) = \frac{2}{3}$.

Problema 2

Sia X una variabile aleatoria continua a valori reali, avente densità $f(x) = cx^2(1-x^2)$ per $x \in [-1, 1]$, $f(x) = 0$ altrimenti, dove $c > 0$ è una opportuna costante.

1. Determinare c e calcolare $\mathbb{E}[X]$.
2. Calcolare la densità di $Y = X^2$.

Una soluzione:

1. c è l'inverso dell'integrale

$$\int_{-1}^{1} x^2(1 - x^2)dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx - \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

Quindi abbiamo $c = 15/4$. Inoltre

$$\mathbb{E}[X] = c \int_{-1}^{1} x \cdot x^2(1 - x^2)dx = 0$$

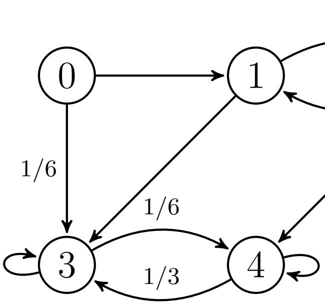
essendo l'integranda dispari.

2. Per determinare la densità di $Y = g(X) = X^2$, osserviamo che essendo X a valori in $[-1, 1]$ con probabilità 1, possiamo limitarci a calcolarla in $y \in [0, 1]$ (per gli altri y troveremo che la densità è nulla). Notiamo che $g(x) = x^2$ è separatemente invertibile su $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$, con inverse $\pm\sqrt{y}$ e nei due intervalli rispetta le condizione del teorema di cambio di variabile, in particolare $|g'(\pm\sqrt{y})| = 2\sqrt{y}$. Troviamo quindi

$$p(Y = y) = p(X = -\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + p(X = \sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{15}{4}y(1-y)\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{15}{4}y(1-y)\frac{1}{2\sqrt{y}}$$
$$= \frac{15}{4}\sqrt{y}(1-y).$$

Problema 3

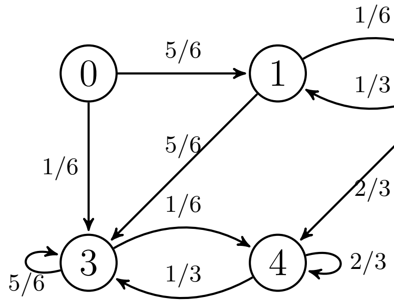
Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ con matrice di transizione rappresentata mediante il seguente grafo.



1. Completare con le probabilità mancanti, classificare gli stati (transitori/ricorrenti), determinare tutte le classi chiuse (indicare quali sono irriducibili) e le distribuzioni invarianti.
2. Si supponga inizialmente che la catena sia distribuita al tempo 0 con una densità discreta $P(X_0 = i) = c(i+1)$, per $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, e un'opportuna costante c. Si osserva poi l'evento $A =$ "$X_2 = 2$, $X_6 = 4$ e $X_{10} = 3$". Calcolare $P(X_0 = i|A)$ per $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Una soluzione:

1. Completiamo in modo che i pesi degli archi uscenti da ogni nodo sia 1.



Gli stati $\{0, 1, 2\}$ sono transitori (da tutti si raggiunge 3 in uno o due passi, ma non si può poi tornare allo stato di partenza). Gli stati $\{3, 4\}$ sono ricorrenti costituiscono l'unica classe chiusa irriducibile. Dovendo descrivere tutte le classi chiuse, notiamo che, a parte quelle banali (tutta la catena e la classe vuota), oltre a $\{3, 4\}$, si ha la classe $\{1, 2, 3, 4\}$.

Per trovare l'unica distribuzione invariante, basta restringersi alla classe $\{3, 4\}$ e impostare il bilancio di flusso ad esempio in 3: $\mu_3/6 = \mu_4/3$, da cui $\mu_3 = 2\mu_4$ e quindi $\mu_3 = 2/3$, $\mu_4 = 1/3$ e la distribuzione completa è

$$(0, 0, 0, 2/3, 1/3).$$

2. Indichiamo la distribuzione come al solito come un vettore riga, $P(X_0 = i|A) = \mu_i$,

$$(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4).$$

Applichiamo la formula di Bayes:

$$P(X_0 = i|A) = P(A|X_0 = i)P(X_0 = i)/P(A) \propto P(A|X_0 = i)P(X_0 = i).$$

Notiamo che stiamo calcolando una densità discreta di probabilità, quindi le costanti moltiplicative che non dipendono da i, in particolare il denominatore $P(A)$, possiamo lasciarle sottointese semplificando alcuni calcoli (usiamo la notazione $\propto$). Abbiamo $P(X_0 = i) \propto i + 1$. Per la regola del prodotto, abbiamo che

$$P(A|X_0 = i) = P(X_2 = 2|X_0 = i)P(X_6 = 4, X_{10} = 3|X_2 = 2, X_0 = i).$$

Applichiamo la proprietà di Markov al secondo termine, trovando

$$P(X_6 = 4, X_{10} = 3|X_2 = 2, X_0 = i) = P(X_6 = 4, X_{10} = 3|X_2 = 2)$$

che in particolare non dipende da i, quindi abbiamo che, per una qualche costante c' da determinare

$$\mu_i = c'P(X_2 = 2|X_0 = i)(i + 1).$$

Osservando i possibili cammini, vediamo inoltre che $P(X_2 = 2|X_0 = i)$ è nulla se $i = 1$, $i = 3$ o $i = 4$, mentre abbiamo

$$P(X_2 = 2|X_0 = 0) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}, \quad P(X_2 = 2|X_0 = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}.$$

Di conseguenza, il vettore è del tipo

$$\left(c \cdot \frac{5}{36} \cdot (0 + 1), 0, c \cdot \frac{1}{18} \cdot (2 + 1), 0, 0\right).$$

Otteniamo il valore della costante c imponendo

$$1 = c \cdot \frac{5}{36} + c \cdot \frac{3}{18} = c \cdot \frac{11}{36}.$$

Troviamo quindi $c = 36/11$ e la distribuzione è

$$\left(\frac{5}{11}, 0, \frac{6}{11}, 0, 0\right).$$

Una soluzione leggermente alternativa consiste nell'usare prima la proprietà di Markov nella forma "futuro e passato sono indipendenti, noto esattamente il presente", usando come presente $X_2 = 2$, passato $X_0 = i$, e futuro $X_6 = 4, X_10 = 3$, così da trovare

$$P(X_0 = i|A) = P(X_0 = i|X_2 = 2).$$

Applichiamo poi la formula di Bayes,

$$P(X_0 = i|X_2 = 2) = P(X_2 = 2|X_0 = i)P(X_0 = i)/P(X_2 = 2) \propto P(X_2 = 2|X_0 = i)(i + 1).$$

e si conclude come nella precedente soluzione.