Corso di Laurea in Matematica, Calcolo Differenziale ed Integrazione: compito del 6-09-2002.

NOME COGNOME

Matricola n.

COPIA IN SEGRETERIA DIDATTICA

ESERCIZIO n. 1

a - Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della serie di funzioni, definita per $(x, y) \neq (0,0)$:

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{n^2}{x^2+y^2}}$$

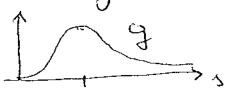
b - Si calcoli il limite di $f(x,y)$ per $(x, y) \to (0,0)$.

---

a. - $0 \leq \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} e^{-\frac{n^2}{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{1+\frac{n^2}{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{n^2}$: convergenza puntuale.

- Posto $g(s) = s^3 e^{-s^2}$ si osserva : $\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} e^{-\frac{n^2}{x^2+y^2}} = \frac{1}{n^3} g\left(\frac{n}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$:

quindi $\sup_{(x,y)\neq(0,0)} \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} e^{-\frac{n^2}{x^2+y^2}} \boxed{= \frac{1}{n^3} \sup_{s>0} g(s)}$ per cui vi è convergenza totale e quindi uniforme della serie in tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.



b. $\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} e^{-\frac{n^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{n^4} \cdot \left(\frac{n}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^4 \cdot e^{-\left(\frac{n}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} \leq$

$\leq \sqrt{x^2+y^2} \; \frac{1}{n^4} \; \sup_{s>0} s^4 e^{-s^2} =: \sqrt{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{n^4} \cdot S$

Quindi $0 \leq f(x,y) \leq \sqrt{x^2+y^2} \cdot S \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \longrightarrow 0$ per $(x,y) \to (0,0)$

Corso di Laurea in Matematica, Calcolo Differenziale ed Integrazione: compito del 6-09-2002.

NOME COGNOME

Matricola n.

COPIA IN SEGRETERIA DIDATTICA

ESERCIZIO n. 2 Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri il sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - y \\ y' &= \alpha x + \alpha y \end{aligned}$$

Per $t > 0$, si dica per quali valori di α

a - tutte le soluzioni del sistema sono limitate.

b - esistono soluzioni limitate non identicamente nulle.

Gli autovalori di $\begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$ sono le radici di $\det\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & -1 \\ \alpha & \alpha-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha + \alpha^2$

quindi $\lambda \in \{\alpha + \sqrt{-\alpha}\} = \{\lambda_1 ; \lambda_2\}$

1) Se gli autovalori sono distinti le soluzioni sono del tipo $a_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + a_2 e^{\lambda_2 t} V_2$

2) Se vi è un solo autovalore ha molteplicità due e le soluzioni sono del tipo $a_1 e^{\lambda t} V + b_1 e^{\lambda t} P(t)$, $P(t)$ vettore di polinomi di grado al più 1 (V_1, V_2, V rispettivi autovettori).

3) Per $\lambda \in \mathbb{C}$ $e^{\lambda t} q(t)$, $q(t)$ polinomio, è limitata se e solo se o $\mathrm{Re}\lambda \lneq 0$ o $\mathrm{Re}\lambda = 0$ e $\deg q \leq 0$

Se $\alpha \leq -1$ si ha: $\alpha < -1 \Rightarrow \alpha \pm \sqrt{-\alpha} < 0$

$\alpha = -1 \Rightarrow \{\lambda_1, \lambda_2\} = \{0 ; -2\}$

Per 1) e per 3) le soluzioni sono tutte limitate

Se $-1 < \alpha \leq 0$: $-1 < \alpha < 0 \Rightarrow \alpha - \sqrt{\alpha} < 0$ e $\alpha + \sqrt{-\alpha} > 0$

$\alpha = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ con autovettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

per 1) e 3) nel primo caso vi è una soluzione limitata; nel secondo caso per 2) vi è la soluzione limitata $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Se $\alpha > 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(\alpha + \sqrt{-\alpha}) = \alpha > 0$ tutte le soluzioni sono illimitate poiché $e^{i\beta t} V_1$ e $e^{-i\beta t} V_2$ sono linearmente indipendenti

Corso di Laurea in Matematica, Calcolo Differenziale ed Integrazione: compito del 6-09-2002.

NOME COGNOME

Matricola n.

COPIA IN SEGRETERIA DIDATTICA

ESERCIZIO n. 3 Sia ω la 2-forma differenziale $yz\,dy\wedge dz + xz\,dz\wedge dx + xy\,dx\wedge dy$.

a- Si calcoli il differenziale esterno di ω.

b- Sia $\Phi(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$, $1 \le u^2+v^2 \le 2$. Si calcoli $\int_\Phi \omega$.

---

a. $$d\omega \underset{def.}{=} d(yz)\wedge dy\wedge dz + d(xz)\wedge dz\wedge dx + d(xy)\wedge dx\wedge dy =$$

$$= \left(\frac{\partial yz}{\partial x}dx + \frac{\partial yz}{\partial y}dy + \frac{\partial yz}{\partial z}dz\right)\wedge dy\wedge dz + \dots + \dots =$$

$$= (0dx + z\,dy + y\,dz)\wedge dy\wedge dz + (z\,dx + 0dy + x\,dz)\wedge dz\wedge dx)$$

$$+ (y\,dx + x\,dy + 0dz)\wedge dx\wedge dy = 0 + 0 + 0 = 0.$$

b. $$\int_\phi \omega = \int_{Id|_{1\le u^2+v^2\le 2}} \phi^{\#}\omega \left(= \iint_{1\le u^2+v^2\le 2} \langle(\phi^{\#}\omega)(u,v) / \binom{1}{0}\wedge\binom{0}{1}\rangle\, du\,dv = \right.$$

$$= \iint_{1\le u^2+v^2\le 2} \langle \omega(\phi(u,v)) / d\phi(u,v)\binom{1}{0} \wedge d\phi(u,v)\binom{0}{1}\rangle\, du\,dv =$$

$$\left.= \iint_{1\le u^2+v^2\le 2} \langle \omega\circ\phi / \frac{\partial\phi}{\partial u}\wedge\frac{\partial\phi}{\partial v}\rangle\, du\,dv = \right)$$

$$= \int_{Id|_{1\le u^2+v^2\le 2}} \phi_2\phi_3\, d\phi_2\wedge d\phi_3 + \phi_1\phi_3\, d\phi_3\wedge d\phi_1 + \phi_1\phi_2\, d\phi_1\wedge d\phi_2 =$$

$$= \int_{Id|_{1\le u^2+v^2\le 2}} v(u^2+v^2)\, dv\wedge(2u\,du+2v\,dv) + u(u^2+v^2)(2u\,du+2v\,dv)\wedge du + uv\, du\wedge dv$$

$$= \int_{Id|_{1\le u^2+v^2\le 2}} uv(1 - 4(u^2+v^2))\, du\wedge dv = \iint_{1\le u^2+v^2\le 2} uv(1-4(u^2+v^2))\,du\,dv =$$

$= 0$ essendo l'integrale di una funzione antisimmetrica rispetto agli assi su un dominio simmetrico rispetto agli stessi.

NOTA Altre soluzioni: $0 = \int_{\substack{\text{TRONCO}\\\text{PARABOLOIDE}}} d\omega = -\int_\phi \omega + \int_{\substack{(u,v,2)\\u^2+v^2\le 2}} \omega - \int_{\substack{(u,v,1)\\u^2+v^2\le 1}} \omega$; ϕ omotopa alla corona circolare $\bigcirc$ + cilindro C per Stokes $\int_\phi \omega = \int_\bigcirc \omega + \int_C \omega$ essendo $d\phi = 0$;

Poiché (come da teoria) $\omega = d\left(\left(\frac{xy^2}{2} + xz^2\right)dx + (x^2y + yz^2)dy + \left(\frac{x^2}{2}z + zy^2\right)dz\right)$ per Stokes si conclu[de]