Esercitazione del 7-12-2007

Applicazioni del teorema di Dini.
Stabilire se curve di livello passanti per $P(x_0,y_0)$ sono localmente un grafico.
Luoghi di zeri di una funzione (trovare gli zeri, calcolare Hessiana, discutere Hessiana per massimi e minimi).

Funzioni studiate :

1) $g(x,y)= xe^y + ye^x$

Verifica del teorema di Dini nel punto P(0,0).

2) $u(x,y)=xe^{-2x^2-y^2}$

Verifica del teorema di Dini nel punto (1,1).Grafico $y=\varphi(x)$.
Disegnata la funzione nei d'intorni di P_0.

<u>Nota</u>:
osservo che la y la posso esplicitare cosi nel punto (1,1) :

$u(x,\varphi(x))=u(1,1)$ e dunque

$$xe^{-2x^2-y^2} = e^{-3} \Leftrightarrow \ln(xe^{-2x^2-y^2}) = \ln(e^{-3}) \Leftrightarrow \ln x - 2x^2 - y^2 = -3$$

e ricavo dunque

$$y(x) = \sqrt{\ln x - 2x^2 + 3}$$

Calcolo dei punti critici:

$$\nabla u(x,y) = 0$$

ovvero

$$\begin{cases} u_x(x,y) = (1-4x^2)e^{-2x^2-y^2} \\ u_y(x,y) = -2xye^{-2x^2-y^2} \end{cases} = 0$$

trovo due punti critici:

$P_1 = (1/2, 0);$

$P_2 = (-1/2, 0);$

Calcolo dell Hessiano nei punti critici.

$$u_{xx}(x,y) = (16x^3 - 12x)e^{-2x^2-y^2}$$
$$u_{xy}(x,y) = (8x^2y - 2y)e^{-2x^2-y^2}$$
$$u_{yy}(x,y) = (4xy^2 - 2x)e^{-2x^2-y^2}$$

Discussione dell' hessiano nei punto critici.

Su specifica richiesta :

Parte II.

Esercizi su diagonalizzazione di matrici simmetriche e quadrate, significato geometrico degli autovalori ed autovettori, polinomio caratteristico e invarianti (traccia e determinante) di una matrice. Definizione degli autospazi. Applicazione alla discussione della matrice hessiana. Applicati a svariate matrici 2*2.

Introduco intuitivamente il concetto di direzione invariante nello spazio durante una trasformazione.
Discusso il caso generale

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

caso in cui autovalori reali e distinti
caso in cui autovalori sono reali e coincidenti
caso in cui uno dei due e' nullo.

<u>Nota:</u>

la discussione del significato dell Hessiano nei punti critici, deriva dalla discussione del polinomio caratteristico della matrice associato all' Hessiano.

$\lambda^2 - Tr(H)\lambda + \det(H) = 0$

se Det >0 e Tr(H)>0 autovalori entrambi positivi : minimo

se Det>0 e Tr(H)<0 autovalori entrambi negativi: max locale

se Det<0 i due autovalori hanno autovalori di segno diverso,punto di sella.

se Det=0....siamo di punto e a capo...