

Notazione dei numeri complessi - Con insieme dei numeri complessi s'intende l'insieme delle espressioni $a + ib$ ove $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$ e il parametro i è una costante *non reale* a cui si impone la regola di calcolo $i^2 = -1$. I numeri reali si identificano con i numeri complessi del tipo $a + i0$. Somma e prodotto di numeri complessi sono quindi quelli dei polinomi nella "variabile" i a coefficienti reali, solo che nei calcoli si usa la regola data per ridursi sempre a polinomi di primo grado. Quindi

$$(a + ib) + (x + iy) = (a + x) + i(b + y);$$

$$(a + ib)(x + iy) = ax + aiy + ibx + ibiy = ax + iay + ibx + i^2by = (ax - by) + i(ay + bx)$$

Quindi ogni numero complesso $a + ib$ non nullo ha un reciproco $\frac{a-ib}{a^2+b^2}$.

Considerando l'insieme dei numeri complessi con tali operazioni si parla di campo dei numeri complessi, che si indica con \mathbf{C} . Spesso \mathbf{C} si identifica con \mathbf{R}^2 : $a + ib \sim (a, b)$. Il coniugato di un numero complesso $z = x + iy$ si indica con \bar{z} ed è $x - iy$ (simmetrico rispetto all'asse orizzontale). Il modulo di un numero complesso $z = x + iy$ è la distanza dall'origine del corrispondente punto nel piano cartesiano $\sqrt{x^2 + y^2}$ e si indica con $|z|$. Si ha $|z|^2 = z\bar{z}$: quindi $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. La convergenza di numeri complessi è quella delle coppie di numeri reali associati: in particolare $z_n \rightarrow z$ è $|z_n - z| \rightarrow 0$.

- **Forma trigonometrica** Considerando le coordinate polari nel piano ogni numero complesso si scrive nella forma $\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. L'angolo φ non è individuato se non a meno di multipli di 2π : e.g. se $a > 0$, $b > 0$ allora $a + ib = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos \arctan \frac{b}{a} + i \sin \arctan \frac{b}{a})$. Appunto ρ si dirà modulo di un numero complesso, e $\varphi \in [0; 2\pi[$ argomento principale.

- Dalle formule di addizione se $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ si ha:

$$(*) zw = \rho r (\cos(\varphi + \theta) + i \sin(\varphi + \theta))$$

- **Radici n^e** Quindi ogni numero complesso $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ha esattamente n radici n^e complesse

$$z_1 = \sqrt[n]{\rho}(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n}) \dots z_n = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \left(\frac{2\pi(n-1)}{n} + \frac{\varphi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi(n-1)}{n} + \frac{\varphi}{n} \right) \right)$$

Le radici n^e di 1 sono quindi i vertici di un poligono regolare inscritto nella circonferenza unitaria.

Forma esponenziale Considerando il modulo di un numero complesso come esponenziale e osservando che (*) il prodotto di numeri complessi ha come argomento la somma degli argomenti riportata in $[0; 2\pi[$ si definisce $e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha(\cos \beta + i \sin \beta) = e^\alpha e^{i\beta}$ constatando che ha le stesse regole di calcolo dell'esponenziale.

Si hanno a disposizione tutti gli strumenti per dare la dimostrazione del seguente teorema (la si omette).

Teorema 1 FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA Ogni polinomio a coefficienti complessi $a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ di grado n è prodotto di termini del tipo $(z - w)^k$ per a_n . I numeri w sono tutte e sole le radici del polinomio, i numeri k sono le rispettive molteplicità e la loro somma è n .

Poichè un polinomio a coefficienti reali se ha come radice $w = a + ib$ ha anche come radice $a - ib$ si ha che un polinomio a coefficienti reali si scrive come prodotto di termini del tipo $(x - c)^k$, $((x - a)^2 + b^2)^h = (x - (a + ib))^h (x - (a - ib))^h$, ove c sono le radici reali e la somma degli k e dei $2h$ è il grado del polinomio.