Matematica, Anno Accademico 2006-2007, Scienze Geologiche

M.Novaga, V.M. Tortorelli

SOLUZIONE VI prova in itinere A, 9 gennaio 2007

ESERCIZIO Giustificando la risposta si determinino i punti (x, y) tra quelli che soddisfano la condizione $(x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) \leq 0$ che sono di massima o minima distanza $(0,1)$.

1- Il problema equivale, elevando al quadrato la funzione distanza da $(0,1)$, a trovare i punti di massimo e minimo di $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ per $g(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) \leq 0$

2- Poichè $g(x,y)$ è continua l'insieme $g(x,y) \leq 0$ è chiuso essendo preimmagine $]-\infty, 0]$.

Poichè $g(x,y) \leq 0$ equivale a $(x^2+y^2)^2 \leq 2(x^2-y^2)$ si ha $(x^2+y^2)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ quindi l'insieme $g(x,y) \leq 0$ è limitato essendo contenuto nella palla di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$.

Essendo $f(x,y)$ continua per il teorema di Bolzano-Weierstrass ha punti sull'insieme in questione dove assume il valore massimo e punti ove assume il valore minimo.

3- Essendo f e g differenziabili con continuità i punti si possono ricercare confrontando i valori di f sulle soluzioni dei seguenti sistemi

$$a-\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(y-1) = 0 \\ g(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) < 0 \end{cases}, \quad b-\begin{cases} g(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4x(x^2+y^2) - 4x = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4y(x^2+y^2) + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ g(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0 \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) \neq (0,0) \end{cases} \text{ cioè } c-\begin{cases} 2x = 4\lambda x(x^2+y^2) - 4\lambda x \\ 2(y-1) = 4\lambda y(x^2+y^2) + 4\lambda y \\ (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0 \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) \neq (0,0) \end{cases}$$

3-a non ha soluzioni: $g(0,1) \neq 0$.

3-b dall'ultima equazione si deve avere $y = 0$. Quindi la prima equazione diventa $x^4 - 2x^2 = 0$ e la seconda $x^3 - x = 0$. Se $x \neq 0$ si avrebbe $x^2 = 2$ dalla prima e $x^2 = 1$ dalla seconda. Quindi l'unica soluzione è $(x,y) = (0,0)$.

3-c il sistema dei moltiplicatori di Lagrange equivale a $\begin{cases} 2x = 4\lambda x(x^2+y^2) - 4\lambda x \\ 2(y-1) = 4\lambda y(x^2+y^2) + 4\lambda y \\ (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0 \\ x^2+y^2 \neq 0 \end{cases}$

Se $x = 0$ dalla terza si ricava che $y = 0$ non permesso dalla quarta. Se $y = 0$ dalla seconda si ricava $-2 = 0$. Quindi deve essere sia $x \neq 0$ sia $y \neq 0$ per cui: dividendo per $2x$ la prima si ottiene $1 = 2\lambda(x^2+y^2) - 2\lambda$, quindi anche $\lambda \neq 0$: si ricava $(*) x^2+y^2 = \frac{2\lambda+1}{2\lambda} = 1 + \frac{1}{2\lambda}$ che sostituito nella seconda da $2(y-1) = 4\lambda y \frac{2\lambda+1}{2\lambda} + 4\lambda y$, dividendo per 2 e semplificando il denominatore si ottiene $y - 1 = y(2\lambda+1) + 2\lambda y$ cioè $4\lambda y = -1$ ovvero $(\dagger)\ y = -\frac{1}{4\lambda}$

Sostituendo in $(*)$ si ha $(\ddagger)\ x^2 = 1 + \frac{1}{2\lambda} - y^2 = 1 + \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{16\lambda^2}$ e $(**) x^2 - y^2 = 1 + \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{8\lambda^2}$

Sostituendo $(*)$ e $(**)$ nella terza si ha un'equazione in $\frac{1}{\lambda}$

$$\left(1 + \frac{1}{2\lambda}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{8\lambda^2}\right) = \frac{1}{2\lambda^2} - 1 = 0 \text{ cioè } \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ e } \lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

4- Si conclude con il confronto:

- $(0,0)$ non può essere di massimo poichè $f(1,0) = 2 > 1 = f(0,0)$ e $g(1,0) = -1 < 0$
- quindi i punti di massimo sono relativi al moltiplicatore $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ positivo per cui sia f che g crescono nella stessa direzione. Quindi usando $\dagger$ e $\ddagger$ i punti $\left(\sqrt{\frac{7}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}}}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ $\left(-\sqrt{\frac{7}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}}}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ sono i punti di massimo cercati poiche' f ha lo stesso valore su di essi.
- per $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ negativo si hanno i punti $A = \left(\sqrt{\frac{7}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ $B = \left(-\sqrt{\frac{7}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$. Ma $f(A) = f(B) = 2 - \sqrt{2} < 1 = f(0,0)$. Quindi questi A e B sono i punti di minimo.