

Diseguaglianza tra media geometrica e media aritmetica e numero e

Materiale relativo al corso può essere reperito in rete <http://www.dm.unipi.it/didactics/home.html#alt> e quindi selezionando ALTRI CORSI DI LAUREA e Corso di laurea *****

- Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la seguente proprietà D_n :

comunque siano dati n numeri non negativi si ha $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

DIMOSTRAZIONE: Lo schema è il seguente:

1- Si ha che se vale D_n vale D_{2n} .

2- Si ha che se vale D_{n+1} vale D_n .

3- Si deduce che per ogni n vale D_n (ovvero è vero che *la media geometrica è sempre minore o eguale alla media aritmetica*).

Il terzo punto segue direttamente dal metodo di induzione. Infatti dal primo punto per induzione su m si deduce che D_{2^m} è vera per ogni m : D_{2^1} è vera, e se è vera D_{2^m} per il primo punto ne segue $D_{2^{m+1}}$

Quindi per provare che D_n vale si osserva che essendo vera D_{2^n} il secondo punto permette “tornare indietro”.

(Per quanto intuitivo questo ultimo passaggio a rigore rende necessario un argomento induttivo abbastanza ostico, per rendere conto dell'argomento del “tornare indietro un numero variabile di passi”: si considera la proprietà C_h : “se vale D_h allora vale D_m per tutti gli $m \leq h$ ” e la si dimostra per induzione su h . C_1 è vera. Se vale C_h bisogna mostrare che vale C_{h+1} : ora se si assume che vale D_{h+1} dalla prima parte si ha che vale D_h e quindi utilizzando l'ipotesi induttiva C_h si ha che vale D_m per ogni $m \leq h$, e d'altronde si è assunto che vale anche D_{h+1} . Quindi C_h vale sempre, in particolare per $h=2^n > n$).

Il primo punto si prova come segue: D_2 vale poichè posto $x = a^2$, $y = b^2$ vale $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$. Quindi si prosegue:

$$\begin{aligned} \sqrt[2n]{x_1 \dots x_{2n}} &= \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \sqrt[n]{x_{n+1} \dots x_{2n}}} \leq && \text{per } D_2 \text{ avendo come argomenti le due radici } n^{\text{e}}: \\ &\leq \frac{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \dots x_{2n}}}{2} \leq && \\ &\leq \frac{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + \dots + x_{2n}}{n}}{2} = && \text{usando } D_n \text{ due volte con } x_1 \dots x_n \text{ e per } x_{n+1} \dots x_{2n} \\ &= \frac{x_1 + \dots + x_{2n}}{2n} \end{aligned}$$

Il secondo punto si prova come segue: dati n numeri non negativi x_1, \dots, x_n si usa D_{n+1} per i numeri x_1, \dots, x_n e $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$, in modo che elevando alla $n + 1$ i membri della diseguaglianza ottenuta si ha:

$$x_1 \dots x_n \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \left(\frac{x_1 + \dots + x_n + \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}}{n+1} \right)^{n+1} = \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^{n+1}$$

quindi si divide per la media aritmetica di x_1, \dots, x_n e si fa la radice n^{a} .

Un'applicazione di questa diseguaglianza tra media aritmetica e media geometrica riguarda il fatto che la successione che da il valore finale dopo n istanti di una grandezza che varia ad ogni istante con un tasso $\frac{x}{n}$, cresce al crescere di n :

Per esempio il debito “cumulato” alla scadenza di un periodo di prestito, con un tasso di interesse composto $\frac{x}{n}$, variabile in funzione del numero n dei sottoperiodi concessi per l'“estinzione del debito”, cresce al crescere di n :

$$1 + x, 1 + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}(1 + \frac{x}{2}) = (1 + \frac{x}{2})^2, \dots, \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n : x_{h+1} - x_h = \frac{x}{n}x_h, x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Più precisamente

$$\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ (se } n > 1 - x),$$

(NOTA: tale diseguaglianza si può chiaramente provare direttamente per induzione, per il caso $x = 1$, ovvero $x \geq 0$, si veda Faedo-Modica pag. 85).

DIMOSTRAZIONE - $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \cdot \dots \cdot n \text{ volte} \dots \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right) \cdot 1 \leq$
 si usa la disuguaglianza tra le medie di $n + 1$ numeri *non negativi*
 $\leq \left(\frac{1 + \frac{x}{n} + \dots + n \text{ volte} \dots + 1 + \frac{x}{n} + 1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+x+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$

Corollario: La successione $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ converge.

DIMOSTRAZIONE - Essendo crescente basta mostrare che è limitata superiormente. Per far ciò ci si riduce al caso $x = 1$ (Faedo-Modica pagg 84-85), osservando che l'espressione in questione è crescente anche in x e quindi non è restrittivo supporre $x > 1$ per cui $x^n > x^k$ se $n > k$.

DEFINIZIONE: Il numero limite della successione crescente $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ si dice *costante di Nepero* e si indica con la lettera e .

- Un'altra disuguaglianza notevole è la seguente $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$,

DIMOSTRAZIONE- $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \geq$
 per quanto provato al punto precedente con $x = -1$
 $\geq \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+2}} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$

NOTA: poichè $0 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{3}{n}$ la successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ da invece un'approssimazione per eccesso di e .

- Infine è interessante la seguente:

$$\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n+1]{n+1} \text{ (se } n \geq 4) \text{ da cui segue che } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Per provare che $\sqrt[n]{n}$ decrescere al crescere di $n \geq 4$ si procede come segue:

$$\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n+1]{n+1} \text{ se e solo se}$$

$$n^{n+1} \geq (n+1)^n \text{ se e solo se}$$

$$n \geq \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

Si ha inoltre:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\leq \text{(si moltiplica per un numero maggiore di 1)} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \text{(essendo decrescente per quanto appena provato)} \end{aligned}$$

$$\leq (1 + 1)^2 = 4.$$

Quindi per $n \geq 4$ si ha $\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n+1]{n+1}$.