

**Corso di Matematica per Scienze geologiche - anno 2003-04**  
**Primo compito - 6 novembre 2003 - Tema n.1**

**Esercizio 1** Determinare i numeri  $x \in \mathbb{R}$  tali che

$$\begin{cases} 3x - 2 > -5x + \frac{3}{2} \\ 2x - \frac{1}{3} \geq 5x - 4. \end{cases}$$

**Esercizio 2** Trovare le soluzioni  $x \in \mathbb{R}$  dell'equazione

$$|x^2 - 1| - |x^2 - 5| = 3.$$

**Esercizio 3** Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore, stabilendo se si tratti di massimo o di minimo, dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{n^2 + 3n + 3}{n^3 + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Esercizio 4** Dimostrare che se  $a \in ]0, 1[$  allora, posto

$$x_0 = a; \quad x_{n+1} = x_n - x_n^3 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

risulta  $x_n \in ]0, 1[$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

**Esercizio 5** La funzione

$$f(x) = -\frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

è iniettiva? Qual'è la sua immagine  $Y$ ? Provare che la restrizione di  $f$  alla semiretta  $[0, \infty[$  è iniettiva e scriverne l'inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow [0, \infty[$ .

**Esercizio 6** Verificare che

$$\frac{1}{4} < \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}} < \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

**Esercizio 7** Determinare l'immagine della retta  $r \subset \mathbb{R}^2$  di equazione  $3x - y + 1 = 0$  rispetto alla rotazione di  $\frac{\pi}{4}$  attorno all'origine.

**Esercizio 8** Calcolare l'area del triangolo di vertici  $(1, 1)$ ,  $(2, 5)$  e  $(-1, 4)$ .

**Esercizio 9** Determinare la retta  $r \subset \mathbb{R}^3$  passante per  $(1, 0, -1)$  e perpendicolare al piano  $\pi$  di equazione  $3x + 2y + z = 6$ .

**Esercizio 10** Data l'iperbole di equazione  $x^2 - 4y^2 = 16$ , se ne trovino i fuochi e le eventuali intersezioni con gli assi.