Analisi Matematica I, Esercitazioni, Anno Accademico 2013 -2014, Ingegneria Gestionale
Tortorelli

LEGENDA

I principali testi e raccolte di esercizi a cui si fa riferimento in queste note sono:

[GGS] M.Ghisi, M. Gobbino, "Schede di Analisi Matetmatica"

[GGE] M.Ghisi, M. Gobbino, "Schede di Analisi Matetmatica"

[FM] A.Faedo, L.Modica, "Analisi I, lezioni"

[ABC] E.Acerbi, G. Buttazzo, "Analisi Matetmatica ABC 1: funzioni di una variabile"

Ogni gruppo di esercitzione è introdotto dagli esercizi pertinenti dei testi di esame degli anni passati, con i seguenti riferimenti:

AACnPNGMEm ovvero AAExnPNGMEm:

AA sono le ultime cifre dell'anno accademico,
C se si tratta di prove in itinere (compitini),
Ex se si tratta di testi di appelli,
P sta per 'parte dell'esame scritto',
E sta per esercizio,
n il numero del compitino o dell'appello,
N è il numero della parte dell'esame in questione(prima o seconda),
M è il numero del gruppo di versione del testo dello stesso esame
m il numero dell'esercizio.

Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

Il corpo dei gruppi di esercitazione è composto da testi quasi tutti manoscritti con numerazione delle pagine indipendente, oltre ai dattiloscritti dei testi d'esame di cui sopra.

Inoltre con:
$*$ si indicano gli esercizi più impegnativi,
$\circ$ quelli di approfondimento o estensione e quelli più teorici.

VI GRUPPO DI ESERCITAZIONE, VIT: complementi su funzioni iperboliche, calcolo di lunghezze, aree e volumi.

Manoscritto: da A] a B] paralello tra funzioni trigonometriche e funzioni iperboliche, C] esempio svolto, esercizi.
Calcolo del volume del *" toro "* nelle note di A. Massaccesi.

Teoria relativa nei testi indicati e svolta a lezione

Testi di esame del sesto gruppo di esercitazioni: prime parti
Risolvere i seguenti esercizi senza dare dimostrazioni

Testi di esame del sesto gruppo di esercitazioni: seconde parti
Risolvere i seguenti esercizi motivando accuratamente le risposte.

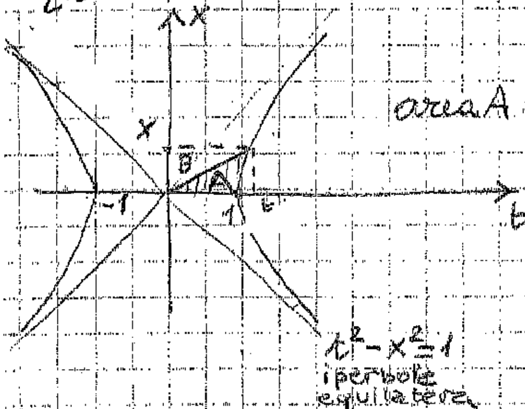
Analisi Matematica I per Ing. Gestionali 2013-2014

Sesto gruppo di esercitazioni V. M. Tortorelli VI T.

A] Parallelo tra le funzioni $\cos y$, $\sin y$ e le funzioni

$\cosh y =: \dfrac{e^y+e^{-y}}{2}$, $\sinh y =: \dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$ (coseno iperbolico, seno iperbolico).

Grandezza di interesse cinematico in relatività ristretta $\dfrac{x^2}{t^2}$,



Domanda: chi sono le coordinate $t(y)$, $x(y)$ del punto sull'iperbole per cui il settore A ha area $\dfrac{y}{2}$?

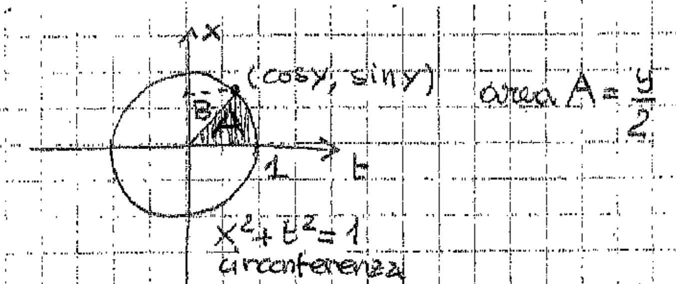
Conviene trovare $y = y(x)$ in funzione di x

$$\frac{y}{2} = \text{area } A = \int_0^x \sqrt{1+x^2}\,dx - B =$$

$$= \int_0^x \sqrt{1+x^2}\,dx - \frac{x\cdot t}{2} = \left[\, t^2 - x^2 = 1 \right.$$

$$= \int_0^x \sqrt{1+x^2}\,dx - \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2}$$

Grandezza di interesse geometrico x^2+t^2 distanza al quadrato di (t,x) da $(0,0)$



In effetti:

$$\text{area } A = \int_0^{\sin y} \sqrt{1-x^2}\,dx - \text{area } B =$$

$$= \int_0^{\sin y} \sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{\sin y \cos y}{2} = \left[\begin{array}{l} x = \sin y,\ 0 < y < \frac{\pi}{2} \\ dx = \cos y\, dy \end{array}\right.$$

$$= \int_0^y \cos^2 y\, dy - \frac{\sin 2y}{4} =$$

$$= \int_0^y \frac{1+\cos 2y}{2}\,dy - \frac{\sin 2y}{4} = \frac{y}{2} + \cancel{\frac{\sin 2y}{4}} - \cancel{\frac{\sin 2y}{4}}$$

Derivando rispetto a x si ottiene $\dfrac{1}{2}\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1+x^2} - \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{2} - \dfrac{x}{2}\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$

per cui $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1+x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

dovendo essere $y(0)=0$, essendo la primitiva di $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$: $\log(x+\sqrt{1+x^2}) + c$

si ottiene $y = \log(x+\sqrt{1+x^2})$ quindi $e^y = x + \sqrt{1+x^2}$ quindi $(e^y - x)^2 = 1 + x^2$

da cui $e^{2y} + \cancel{x^2} - 2e^y x = 1 + \cancel{x^2}$ perciò

$$x(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2} =: \sinh y \qquad t(y) = \sqrt{1+x^2} = \frac{e^y+e^{-y}}{2} =: \cosh y$$

B] Proprietà delle funzioni coseno e seno iperbolico

$(\cosh y)^2 - (\sinh y)^2 = 1$ $\cosh(-y) = \cosh y$, $\sinh(-y) = -\sinh y$

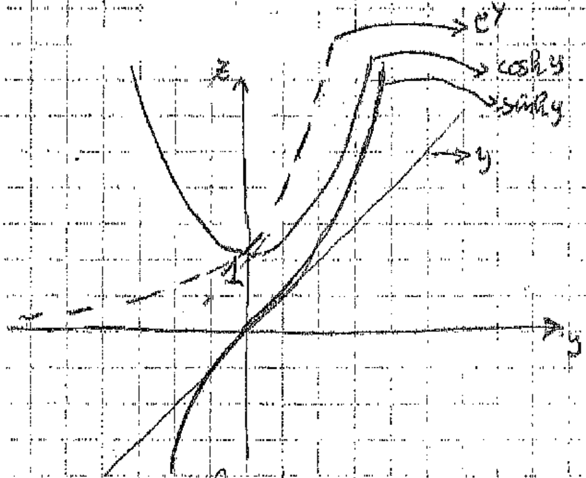
$2\cosh y \sinh y = \sinh 2y$

$(\cosh y)^2 + (\sinh y)^2 = \cosh 2y$

$(\cosh y)' = \sinh y$

$(\sinh y)' = \cosh y$

inversa $\sinh = \log(z + \sqrt{1+z^2}) =: \operatorname{arsinh} z$



C] Non sorprende quindi che per calcolare

$$I = \int_0^A \sqrt{1+x^2}\,dx \quad \left(\text{parafrasando la sostituzione } x = \sin y \text{ per } \int_0^A \sqrt{1-x^2}\,dx\right)$$

si faccia la sostituzione $x = \sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$, $dx = \cosh y\,dy$

$\sqrt{1+x^2} = \cosh y$, $0 \le y \le \log(A + \sqrt{1+A^2})$

$$I = \int_0^{\operatorname{arsinh} A} (\cosh y)^2\,dy = \int_0^{\operatorname{arsinh} A} \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2 dy = \int_0^{\operatorname{arsinh} A} \frac{e^{2y} + e^{-2y} + 2}{4}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arsinh} A} \cosh 2y\,dy + \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arsinh} A} dy =$$

$$= \left.\frac{\sinh 2y}{4}\right]_0^{\operatorname{arsinh} A} + \frac{1}{2}\operatorname{arsinh} A =$$

$$= \left.\frac{\cosh y \sinh y}{2}\right]_0^{\operatorname{arsinh} A} + \frac{1}{2}\log(A + \sqrt{1+A^2}) =$$

$$= \left.\frac{\sqrt{1+(\sinh y)^2}\,\sinh y}{2}\right]_0^{\operatorname{arsinh} A} + \frac{1}{2}\log(A + \sqrt{1+A^2}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+A^2}\cdot A + \log(A + \sqrt{1+A^2})\right\}$$

1. Si calcoli il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando di 2π il sottografico $\{(x,y):\ 0\le y\le \sin x,\ 0\le x\le \pi\}$ attorno all'asse delle ascisse.

2. Si calcoli il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando di 2π il sottografico $\{(x,y):\ 0\le y\le \frac{1}{x},\ 0<\varepsilon\le x\le 1\}$ $0\le x\le A<\frac{\pi}{2}$ attorno all'asse delle ordinate.

3. Si calcoli la lunghezza dell'arco di parabola (x, x^2), $0\le x\le 1$.

4. Si calcoli la lunghezza dell'arco logaritmico $(x, \log x)$, $1\le x\le 2$.

5. a. Si disegni approssimativamente la regione dello spazio cartesiano con coordinate (x, y, z) per cui $z = x^2 - y^2$, considerando le sezioni verticali $z = x^2 - \overline{y}^2$ con $\overline{y}$ fissato, $z = -y^2 + \overline{x}^2$ con $\overline{x}$ fissato, $\overline{z} = x^2 - y^2$ con $\overline{z}$ fissato.

b. Si calcoli quindi il volume della regione definita dalle condizioni $0\le z\le x^2 - y^2$, $|x|\le 1$

Volume del toro

Annalisa Massaccesi

20 novembre 2012

Consideriamo un toro (cioè una ciambella!) di raggi $0 < r < R$: il toro ï¿½ un solido di rotazione ottenuto ruotando intorno ad un asse (di variabile x, nel nostro caso) un cerchio di raggio r il cui centro dista R dall'asse stesso. Fare un disegno semplifica molto la spiegazione...
Vorremmo calcolare il volume del toro, V, integrando rispetto alla variabile $x \in [-r, r]$.

1. Fissiamo un'altezza x e cerchiamo di calcolare - con metodi geometrici - l'area della sezione del toro ad x fissato, che chiameremo $A(x)$. Innanzitutto notiamo che la sezione del toro ad altezza x ï¿½ una corona circolare, quindi, per calcolare $A(x)$, basterà trovare i raggi della circonferenza esterna e di quella interna, rispettivamente.

   Siccome r ï¿½ la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo di altezza $|x|$, è sufficiente il teorema di Pitagora per ricavare che

   $$\begin{array}{ll} \text{raggio della circ. interna:} & R - \sqrt{r^2 - x^2} \\ \text{raggio della circ. esterna:} & R + \sqrt{r^2 - x^2}\,. \end{array}$$

   Dunque abbiamo che

   $$A(x) = \pi\left(\left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2\right) = 4\pi R\sqrt{r^2 - x^2}\,.$$

2. Calcoliamo il volume del toro:

   $$V = \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 4\pi r R \int_{-r}^{r} \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}\,dx\,,$$

   con il cambio di variabile $x = r\sin t$ (da cui $dx = r\cos t\,dt$) otteniamo

   $$V = 4\pi r R \int_{-r}^{r} \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}\,dx = 4\pi r^2 R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt\,. \tag{1}$$

3. Ricordiamo che una primitiva di $\cos^2 t$ si trova per parti, con il seguente "trucco": se chiamiamo

   $$I := \int \cos^2 t\,dt\,,$$

   allora, integrando per parti il prodotto $\cos t \cdot \cos t$ e ricordando la relazione fondamentale della trigonometria $1 = \cos^2 t + \sin^2 t$, otteniamo

   $$\begin{aligned} I &:= \int \cos^2 t\,dt = \sin t\cos t + \int \sin^2 t\,dt \\ &= \sin t\cos t + \int (1 - \cos^2 t)\,dt = \sin t\cos t + t - I\,, \end{aligned}$$

cioè

$$I = \frac{\sin t \cos t + t}{2}\,.$$

4. Completiamo (??), sicché

$$V = 4\pi r^2 R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 4\pi r^2 R\, \frac{\sin t \cos t + t}{2}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi^2 r^2 R\,.$$

cioè

$$I = \frac{\sin t \cos t + t}{2}\,.$$

4. Completiamo (??), sicché

$$V = 4\pi r^2 R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 4\pi r^2 R\, \frac{\sin t \cos t + t}{2}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi^2 r^2 R\,.$$