Se $y_0 > 1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y_0}{y_0 - (y_0 - 1)\, e^{-x}} = 1$

$\lim\limits_{x \to -\log\left(\frac{y_0}{y_0 - 1}\right)^+} \dfrac{y_0}{y_0 - (y_0 - 1) e^{-x}} = +\infty$

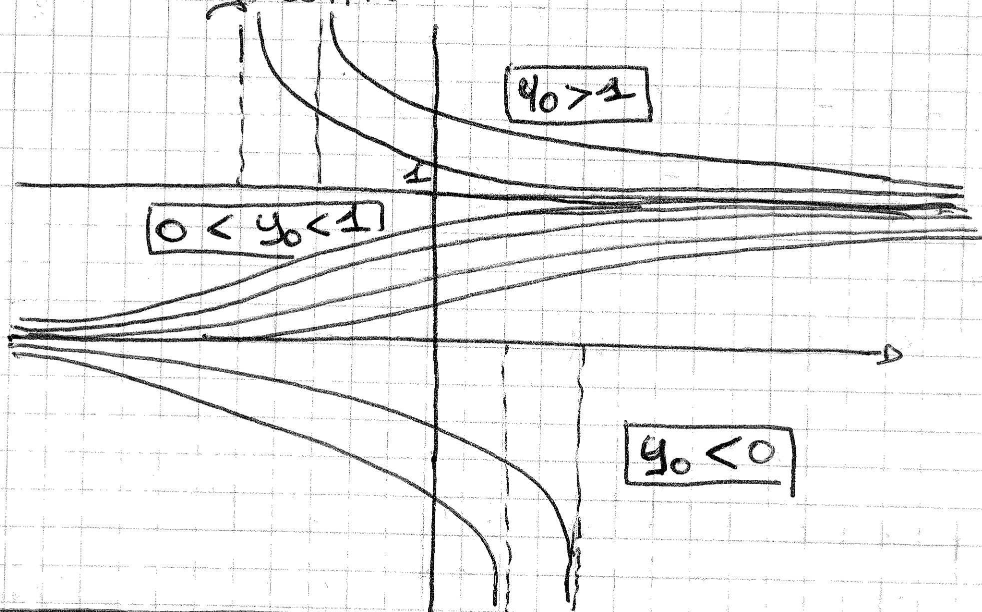
Se $y_0 \in (0, 1)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)\, e^{-x}} = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)\, e^{-x}} = 0^+$

Se $y_0 < 0$ $\lim\limits_{x \to \log\left(1 - \frac{1}{y_0}\right)^-} \dfrac{y_0}{y_0 - (y_0 - 1)\, e^{-x}} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{y_0}{y_0 - (y_0 - 1) e^{-x}} = 0^-$

I grafici delle soluzioni al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$ risultano i seguenti



Determinare l'integrale generale delle seguenti eq. diff. lineare non omogenee del 2° ordine

a) $y'' - 2y' - 3y = e^{x}(2x + 1)$

b) $y'' - 2y' - 3y = e^{-x}(2x + 1)$

Consideriamo l'eq. diff. lineare omogenea associata

$y'' - 2y' - 3y = 0$ il suo polinomio caratteristico è

$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$; $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ $\lambda_1 = -1 \vee \lambda_2 = 3$

l'integrale generale dell'eq. diff. omogenea associata è

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

l'integrale generale dell'eq. diff. a) è

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + V(x)$$

con $V(x)$ soluzione particolare dell'eq. diff. (a) del tipo

$V(x) = e^x(ax+b)$, poiché il parametro $\alpha = 1$ non è radice del polinomio caratteristico $p(\lambda)$.

I parametri a e $b \in \mathbb{R}$, si determinano imponendo che $V(x)$ sia soluzione dell'eq. diff. (a).

$V(x) = e^x(ax+b)$

$V'(x) = e^x(ax+b) + e^x(a) = e^x(ax+b+a)$

$V''(x) = e^x(ax+b+a) + e^x a = e^x(ax+b+2a)$

Si deve avere che $V'' - 2V' - 3V = e^x(2x+1)$

$e^x(ax+b+2a) - 2e^x(ax+b+a) - 3e^x(ax+b) = e^x(2x+1)$

$\cancel{e^x}(ax + b + \cancel{2a} - 2ax - 2b - \cancel{2a} - 3ax - 3b) = \cancel{e^x}(2x+1)$

$(-4ax - 4b) = 2x + 1$

$\begin{cases} -4a = 2 \\ -4b = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}$ $V(x) = e^x\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$

l'integrale generale dell'eq. diff. a) è

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{4}e^x(2x+1) \quad \boxed{c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}}$$

---

l'integrale generale dell'eq. diff. b) è

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + W(x)$$

con $W(x)$ soluzione particolare dell'eq. diff. b) del tipo

$W(x) = e^{-x}(ax+b)x$, poiché il parametro $\alpha = -1$ è radice del polinomio caratteristico $p(\lambda)$ con molteplicità $m = 1$

I parametri $a, b \in \mathbb{R}$ si determinano imponendo che $w(x)$ sia soluzione dell'eq. diff. b)

$$w(x) = e^{-x}(ax+b)x = e^{-x}(ax^2+bx)$$

$$w'(x) = -e^{-x}(ax^2+bx) + e^{-x}(2ax+b) = e^{-x}(-ax^2+(2a-b)x+b)$$

$$w''(x) = -e^{-x}(-ax^2+(2a-b)x+b) + e^{-x}(-2ax+2a-b) =$$
$$= e^{-x}(ax^2+(-4a+b)x+2a-2b)$$

Si deve avere che $w''-2w'-3w = e^{-x}(2x+1)$

$$e^{-x}(ax^2+(-4a+b)x+2a-2b) +$$
$$-2e^{-x}(-ax^2+(2a-b)x+b) - 3e^{-x}(ax^2+bx) = e^{-x}(2x+1)$$

$$\cancel{e^{-x}}(\cancel{ax^2} - 4ax + \cancel{bx} + 2a - 2b +$$
$$+ \cancel{2ax^2} - 4ax + \cancel{2bx} - 2b - \cancel{3ax^2} - \cancel{3bx}) = \cancel{e^{-x}}(2x+1)$$

$$-8ax + 2a - 4b = 2x + 1$$

$$\begin{cases} -8a = 2 \\ 2a - 4b = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{8} \end{cases}$$

$$w(x) = e^{-x}\left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x\right)$$

L'integrale generale dell'eq. diff. b) è

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + e^{-x}\left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x\right)$$

$$y(x) = e^{-x}\left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x + c_1\right) + c_2 e^{3x} \qquad \boxed{\begin{array}{l} c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R} \end{array}}$$

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''-2y'-3y = e^{x}(2x+1) \\ y(0)=1 \\ y'(0)=-1 \end{cases}$$

~~Per risolvere~~ Dalla teoria delle eq. diff. lineari sappiamo che il problema di Cauchy assegnato ammette un'unica soluzione definita in $\mathbb{R}$.
Per determinare tale soluzione dobbiamo scegliere le costanti c_1, c_2 nell'integrale generale dell'eq. diff. a) in modo tale che la soluzione soddisfi le condizioni

iniziali assegnate.

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{4} e^{x}(2x+1)$$

$y(0) = 1 \Rightarrow \quad 1 = y(0) = c_1 + c_2 - \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = \frac{5}{4}$

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + 3c_2 e^{3x} - \frac{1}{4} e^{x}(2x+3)$$

$y'(0) = -1 \Rightarrow \quad -1 = y'(0) = -c_1 + 3c_2 - \frac{3}{4} \Rightarrow -c_1 + 3c_2 = -\frac{1}{4}$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{5}{4} \\ -c_1 + 3c_2 = -\frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = \frac{5}{4} - c_2 = 1 \\ c_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$// \quad 4c_2 = 1$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(x) = e^{-x} + \frac{1}{4} e^{3x} - \frac{1}{4} e^{x}(2x+1), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 5x^2 \\ y(0) = \\ y'(0) = \end{cases}$$

Determiniamo l'integrale generale dell'eq. diff omogenea associata $\quad y'' - 2y' + 5y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5 \quad ; \quad \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \quad ; \quad \lambda = 1 \pm 2i$

$$y(x) = e^{x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

L'integrale generale dell'eq. diff $\; y'' - 2y' + 5y = 5x^2 \;$ è

$$y(x) = e^{x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) + V(x)$$

con $V(x)$ soluzione particolare del tipo $V(x) = ax^2 + bx + c$ poiché il parametro $\alpha = 0$ non è radice del polinomio caratteristico $p(\lambda)$. I parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$ si determinano imponendo che $V(x)$ sia soluzione dell'eq. diff assegnata.

$v(x) = ax^2 + bx + c \qquad v'(x) = 2ax + b \qquad v''(x) = 2a$

Si deve avere $v'' - 2v' + 5v = 5x^2$

$2a - 2(2ax + b) + 5(ax^2 + bx + c) = 5x^2$

$5ax^2 + (5b - 4a)x + 2a - 2b + 5c = 5x^2$

$$\begin{cases} \cancel{5}a = \cancel{5}1 \\ 5b - 4a = 0 \\ 2a - 2b + 5c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{4}{5} \\ c = \frac{2}{5}(b - a) = -\frac{2}{25} \end{cases}$$

$v(x) = x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{2}{25}$

L'integrale generale dell'eq. diff. assegnata è

$y(x) = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) + x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{2}{25}$

Per determinare la soluzione del problema di Cauchy assegnato dobbiamo scegliere le costanti c_1, c_2 nell'integrale generale in modo tale che la soluzione soddisfi le condizioni iniziali.

$y'(x) = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + 2c_2 \cos 2x - 2c_1 \operatorname{sen} 2x) +$
$+ 2x + \frac{4}{5}$.

$$\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 - \frac{2}{25} \\ 1 = y'(0) = c_1 + 2c_2 + \frac{4}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = 1 + \frac{2}{25} = \frac{27}{25} \\ c_2 = \left(\frac{1}{5} - c_1\right)\frac{1}{2} = -\frac{11}{25} \end{cases}$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy assegnato è:

$$y(x) = e^x\left(\frac{27}{25}\cos 2x - \frac{11}{25}\operatorname{sen} 2x\right) + x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{2}{25}$$